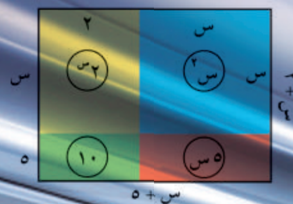
وزارة التربية

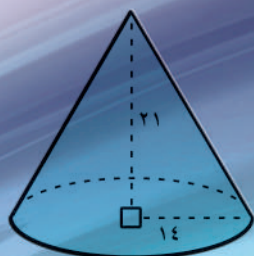
NEWKUWAIT

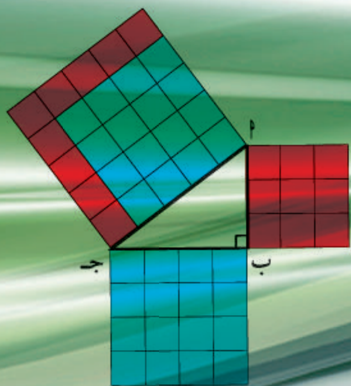
كويت جديدة

الرياضيات

الصف الثامن - الجزء الثاني







كتاب الطالب

الطبعة الرابعة

٨

المرحلة المتوسطة

وزارة التربية

كويت جديدة
NEWKUWAIT

الرياضيات

الصف الثامن - الجزء الثاني

لجنة تعديل كتاب الرياضيات للصف الثامن

أ. إيمان يوسف محمد المنصور (رئيسًا)

أ. غادة عبد الرحمن سليمان زامل

أ. سمير عبدالله أحمد مرسي

أ. عبد الكريم غدير مربد الشمري

أ. أمينة عبدالله عبد الرزاق البلوشي

أ. جمال عبد الناصر أحمد السبال

أ. مخلد سعد مطلق المطيري

أ. مريم عفّاس سعود الشحومي

أ. غنيمة يوسف عبد الكريم الكندري

الطبعة الرابعة

١٤٤٠ - ١٤٤١ هـ

٢٠١٩ - ٢٠٢٠ م

الطبعة الأولى ٢٠١١م
الطبعة الثانية ٢٠١٣م
الطبعة الثالثة ٢٠١٥م
٢٠١٧م
الطبعة الرابعة ٢٠١٨م
٢٠١٩م

إعداد الأسئلة التدريبية (TIMSS):
أ.شيخة فلاح الحجرف (رئيسًا)

أ.سارة مهدي البراك
أ.إقبال عبداللّه المطيري
أ.رجاء حسن الأستاد
أ.غدير عيسى الشطي
أ.فاطمة أسد الكندري
أ.زاهر القبلاوي

إشراف
الموجه الفني العام للرياضيات
أ.اعتدال محمد أحمد البحر

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات
أ. إبراهيم حسين القطان (رئيسًا)
أ.حسين علي عبدالله
أ.حصة يونس محمد علي
أ. فتحية محمود أبو زور

فريق عمل دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف الثامن
أ. اعتدال محمد أحمد البحر (رئيسًا)
أ.إلهام عفيفي علي
أ.عادل عبدالله أبو نعمة
أ.مي أحمد الأستاذ
أ.نداء محمد التحو

المراجعة العلمية
أ. مريم عفّاس سعود الشحومي

التصحيح اللغوي
أ. شعبان محمد مصطفى

المتابعة الفنية
قسم إعداد وتجهيز الكتب المدرسية

الكتاب كاملًا

شاركنا بتقييم مناهجنا

بسم الله الرحمن الرحيم

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

المحتويات

محتوى الجزء الثاني

الوحدة السابعة : التحويلات الهندسية

الموضوع : ابتكارات

الوحدة الثامنة : الأشكال الرباعية
الموضوع : تصاميم هندسية

الوحدة التاسعة : المقادير الجبرية
الموضوع : بيئتي

الوحدة العاشرة: تحليل المقادير الجبرية
الموضوع: العلم والحياة

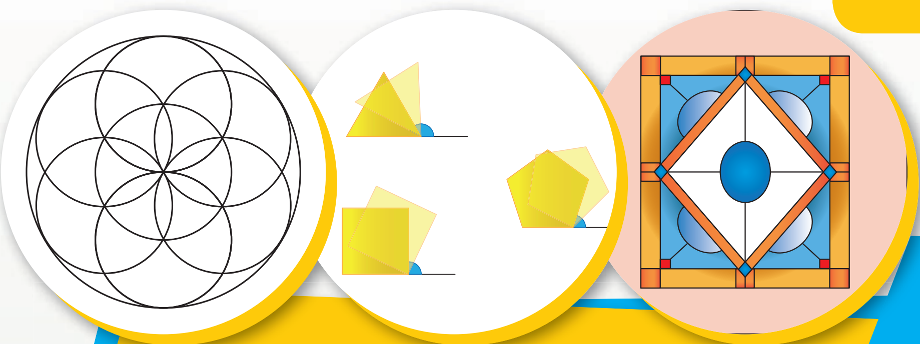
الوحدة الحادية عشرة : الهندسة والقياس
الموضوع : الزراعة

الوحدة الثانية عشرة: الاحتمال
الموضوع : عالم المرح

الوحدة السابعة

التحويلات الهندسية
Geometry Transformations

ابتكارات
Innovations



مشروع الوحدة :
(ابداعات هندسية)

يعتبر الابتكار إحدى الحالات العقلية البشرية التي تسعى إلى إيجاد أفكار ووسائل مختلفة لحلّ المشاكل ، ويشكّل الابتكار إضافة حقيقية لمجموع الإنتاج الإنسانيّ ، كما أنّه يحقق فائدة حقيقية على أرض الواقع ، لا سيما إذا ارتبط بالمواضيع التطبيقية . وفي هذا المشروع ، سنتحدث عن كيفية خلق الأفكار الابتكارية والمبدعة من دراسة التحويلات الهندسية .

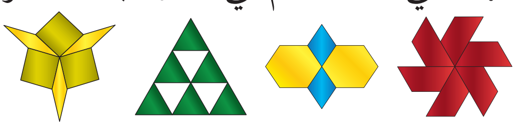
خطة العمل :

- رسم أشكال منوعة على النظام الإحداثي وعمل عدة تحويلات هندسية لها بحيث يصل إلى ابتكار شكل معين .

خطوات تنفيذ المشروع :

- اختر شكلًا هندسيًا من الأشكال التالية (مثلث ، مربع ، ...) مرسومًا على النظام الإحداثي بحيث يقع أحد رؤوس الشكل المختار على نقطة الأصل.
- حدّد التحويل الهندسي الذي ستوظفه لابتكار شكل محدّد .
- طبق التحويل الهندسي عدة مرات للشكل وصوره .
- حدّد إحداثيات نقاط الشكل الأصلي.
- حدّد إحداثيات الصور الناتجة.
- حدّد قاعدة التحويل الهندسي المستخدم في جدول بدء المشروع .

الشكل	نوع التحويل	عدد مرات التحويل



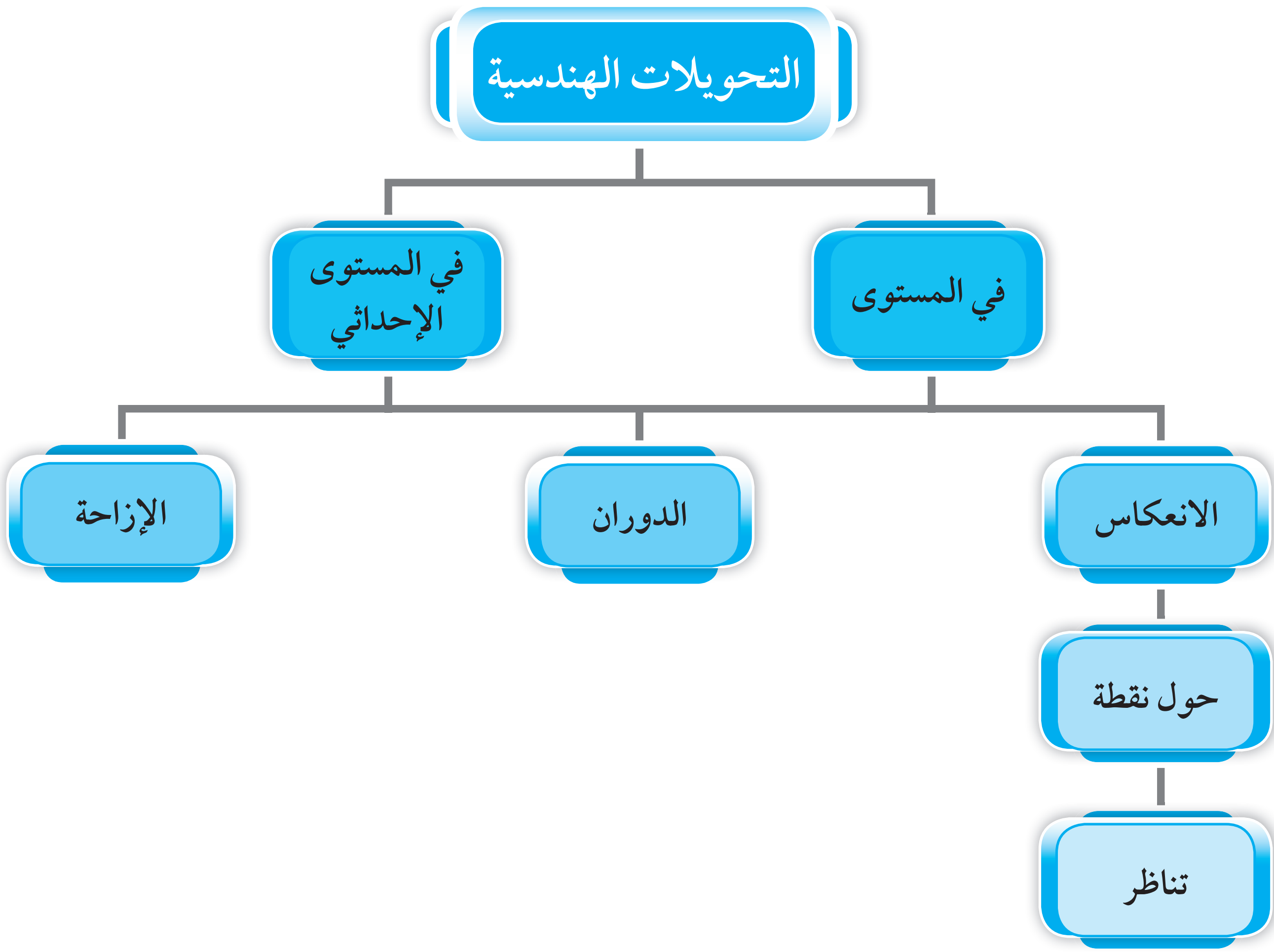
علاقات وتواصل :

- التواصل بين المجموعات لإعطاء تقييم على الابتكار الأجمل وتحديد صحة القاعدة المستخدمة .

عرض العمل :

- تعرض الابتكارات أمام المتعلمين لإعطاء تقدير لكل ابتكار .

مخطَّط تنظيمي للوحدة السابعة



١-٧ الانعكاس في نقطة – التناظر حول نقطة
Reflection of a Point – Symmetry at the Point

سوف تتعلّم : الانعكاس في نقطة في (المستوى – المستوى الإحداثي) – التناظر حول نقطة .

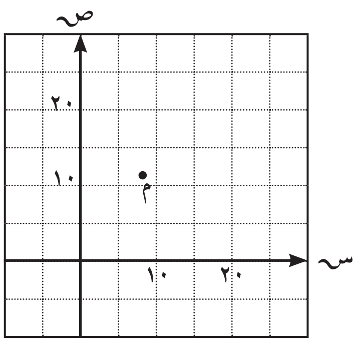
في كثير من الأحيان ، يلجأ الفنانون التشكيليون وكذلك مصممو برامج الحاسوب إلى استعمال الانعكاس بجميع أنواعه لابتكار لوحات وتصميمات جميلة.

نشاط (١) :

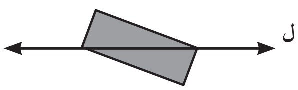
مما سبق دراسته في الصف السابع :

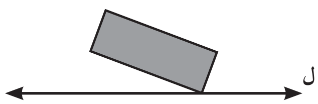
١ أنسب زوج مرتب يمكن أن يمثل إحداثيي النقطة م هو :

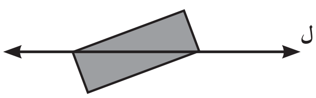
أ (٨ ، ١٥)	ب (٨ ، ٨)
جـ (٨ ، ١٢)	د (٩ ، ١٦)

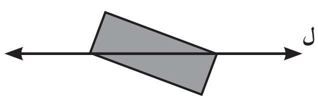


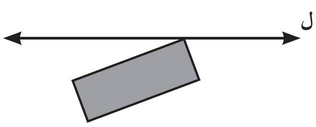
٢ بالنظر إلى الشكل التالي : بالانعكاس في المستقيم ل فإنَّ صورة الشكل المرسوم هي :



أ


ب


جـ


د


العبارات والمفردات :

المستوى الإحداثي
Coordinate Plane

محاور الإحداثيات
Coordinate Axes

المحور السيني س
X-Axis

المحور الصادي ص
Y-Axis

نقطة الأصل
Origin Point

الزوج المرتب
Ordered Pair

الإحداثي السيني
X Coordinate

الإحداثي الصادي
Y Coordinate

التحويل الهندسي
Transformation

الانعكاس في نقطة
Reflection of a Point

التناظر حول نقطة
Symmetry at the Point

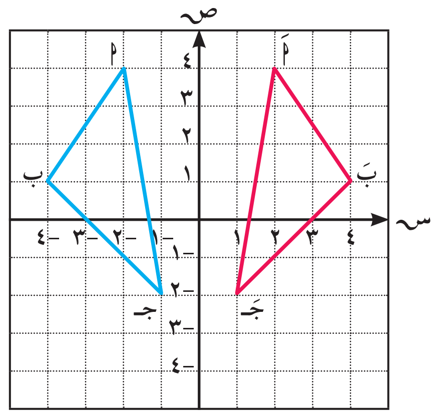
تذكر أنَّ :

(س ، ص) زوج مرتب
س : الإحداثي السيني لأي نقطة يدل على مقدار بعد النقطة يمينًا أو يسارًا عن محور الصادات.
ص : الإحداثي الصادي لأي نقطة يدل على مقدار بعد النقطة لأعلى أو لأسفل عن محور السينات.

تدرّب (١) :

حدّد نوع الانعكاس في كل من الأشكال التالية ، ثم اكتب إحداثي كل نقطة وصورتها :

أ



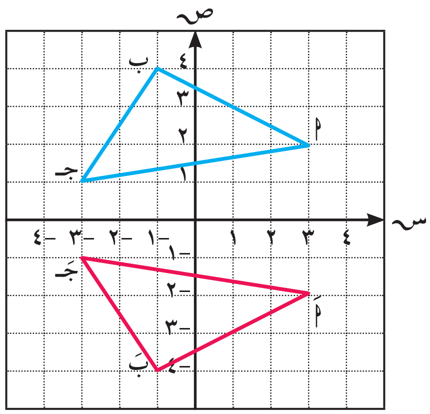
انعكاس في المحور ....

أ (...... ، ......) ⟵ أَ (...... ، ......)

ب (...... ، ......) ⟵ بَ (...... ، ......)

جـ (...... ، ......) ⟵ جَ (...... ، ......)

ب



انعكاس في المحور ....

أ (...... ، ......) ⟵ أَ (...... ، ......)

ب (...... ، ......) ⟵ بَ (...... ، ......)

جـ (...... ، ......) ⟵ جَ (...... ، ......)

تذكر أنَّ :
(١) يُغيّر الانعكاس في المحور السيني الإحداثي الصادي إلى معكوسه الجمعي .
(٢) يُغيّر الانعكاس في المحور الصادي الإحداثي السيني إلى معكوسه الجمعي .

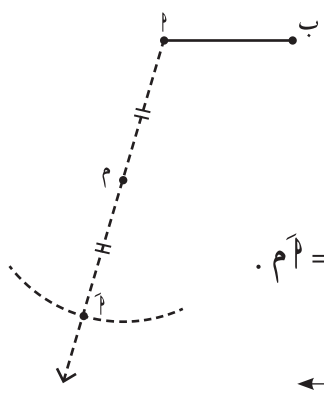
عمومًا : (١) د (س ، ص) ⟵ع ص⟵ دَ (– س ، ص)

(٢) د (س ، ص) ⟵ع س⟵ دَ (س ، – ص)

الانعكاس في نقطة في المستوى

نشاط (٢) :

اللوازم :
– فرجار
– مسطرة



في الشكل المقابل : رسمت كلًا من ‾أب والنقطة م في المستوى ،

م ∌ ‾أب ، رسمنا ⟵أم ونأخذ عليه أَ بحيث : م أ = م أَ .

نسمي أَ صورة النقطة أ بالانعكاس في النقطة م .

- باستخدام المسطرة ارسم ⟵ب م كما تم رسم ⟵أم .
- باستخدام الفرجار قس طول ‾ب م .
- بنفس فتحة الفرجار ثبت السن عند م ، ثم ارسم قوسًا يقطع ⟵ب م في نقطة ولتكن بَ .

تذكر أنَّ :
عندما تغيّر موضع أو أبعاد شكل ما في المستوى فإنَّك بذلك تجري تحويلًا هندسيًا .

• صل أَ ، بَ لتحصل على أَبَ .

نسمي أَ ، بَ صورتي النقطتين أ ، ب بالانعكاس في النقطة م .

وأيضًا أَبَ صورة أب بالانعكاس في النقطة م .

لاحظ أنَّ : (١) أَبَ // أب

(٢) أَبَ = أب

مما سبق نستنتج أنَّ :

تذكر أنَّ :
النقطة الصامدة هي نقطة تقع على محور الانعكاس .

الانعكاس في نقطة مثل م : هو تحويل هندسي يعين لكل نقطة أ في المستوى صورة أَ ∈ م أ بحيث تكون م أ = م أَ . والنقطة الوحيدة التي تقترن بنفسها هي النقطة م التي تسمى **مركز الانعكاس** ، حيث م **نقطة صامدة** .

التناظر حول نقطة في المستوى

نشاط (٣) :

من الشكل المقابل ، أكمل رسم الشكل الرباعي د هـ دَ هـَ ، بحيث دَ صورة د بالانعكاس في النقطة م ، هـَ صورة هـ بالانعكاس في النقطة م .

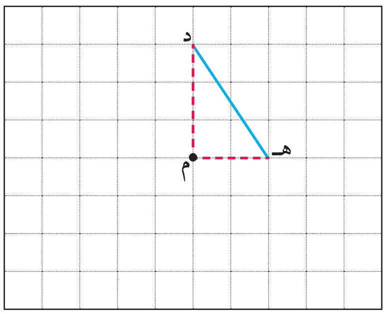
أكمل ما يلي :

د ⟵ ....

هـ ⟵ ....

دَ ⟵ ....

هـَ ⟵ ....



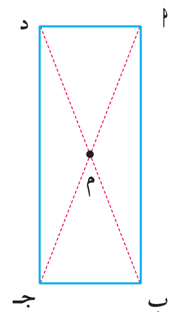
∴ الشكل الرباعي د هـ دَ هـَ ⟵ الشكل الرباعي .... بالانعكاس في النقطة م .

مما سبق نجد أنَّ الشكل الرباعي د هـ دَ هـَ متناظر حول النقطة م (نقطة تقاطع قطريه) .

يقال لشكل هندسي إنَّه **متناظر حول نقطة** إذا كانت صورته بالانعكاس في هذه النقطة هي الشكل نفسه .

تدرّب (٢) :

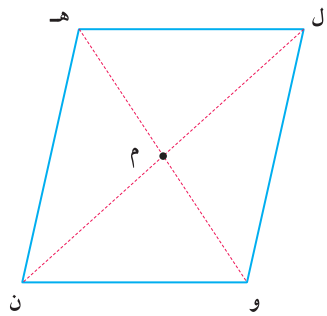
أي الأشكال التالية متناظر حول نقطة ملتقى قطريه ؟ وضِّح ذلك .



(مستطيل)

....

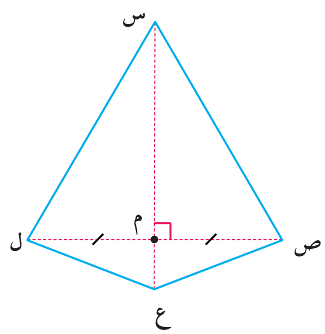
....



(متوازي أضلاع)

....

....



(طائرة ورقية)

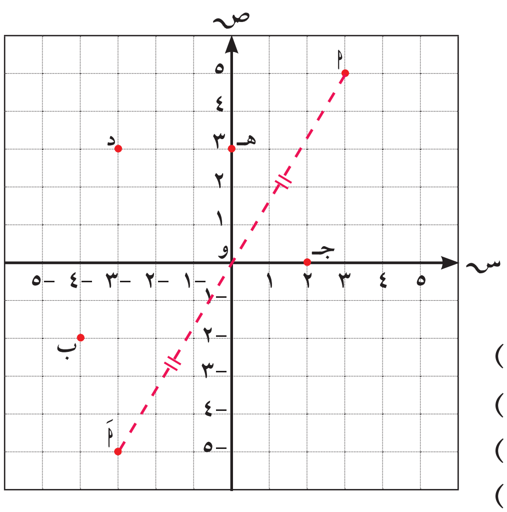
....

....

الانعكاس في نقطة الأصل في مستوى الإحداثيات

نشاط (٤) :

استعن بالمستوى الإحداثي المقابل و باستخدام المسطرة و الفرجار كما في نشاط (٢) السابق ، أوجد صور النقاط التالية بالانعكاس في النقطة و (نقطة الأصل) :



أ (٣ ، ٥) ⟵ أَ (....... ، ....)

ب (– ٤ ، – ٢) ⟵ بَ (....... ، ....)

جـ (٢ ، ٠) ⟵ جَـ (....... ، ....)

د (– ٣ ، ٣) ⟵ دَ (....... ، ....)

هـ (٠ ، ٣) ⟵ هَـ (....... ، ....)

ماذا تلاحظ ؟

....

في المستوى الإحداثي الانعكاس في نقطة الأصل هو تحويل هندسي يعيّن لكل نقطة في المستوى صورة إحداثيها السيني وإحداثيها الصادي هما المعكوس الجمعي للإحداثي السيني والصادي لهذه النقطة .

عمومًا : الانعكاس في نقطة الأصل (و) : أ (س ، ص) $\xrightarrow{ع_و}$ أَ (– س ، – ص)

تذكر أنَّ :

– من خواص المستطيل القطران ينصف كلّ منهما الآخر وهما متطابقان.

– في متوازي الأضلاع القطران ينصف كلّ منهما الآخر.

معلومات مفيدة :

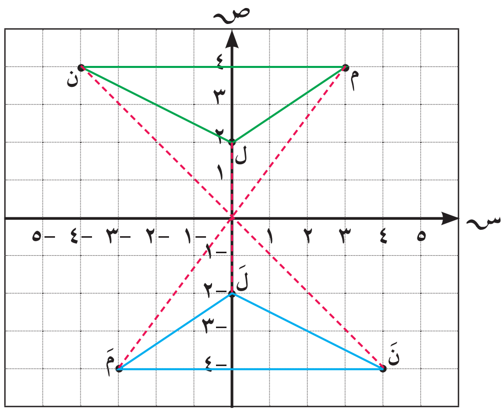
في الطائرة الورقية القطران متعامدان فقط.

اللوازم :

– مسطرة

– فرجار

مثال : إذا كان Δ لَ مَ نَ هو صورة Δ ل م ن بالانعكاس في نقطة الأصل (و) ، وكانت ل (٠ ، ٢) ، م (٣ ، ٤) ، ن (−٤ ، ٤) ، فعين إحداثيات الرؤوس لَ ، مَ ، نَ ، ثم ارسم المثلثين في مستوى الإحداثيات .



الحل :

بالانعكاس في و (ع و) :

(س ، ص) $\xrightarrow{ع_و}$ (− س ، − ص)

ل (٠ ، ٢) ⟵ لَ (٠ ، −٢)

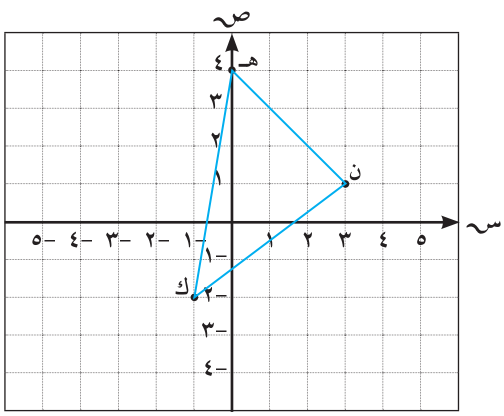
م (٣ ، ٤) ⟵ مَ (−٣ ، −٤)

ن (−٤ ، ٤) ⟵ نَ (٤ ، −٤)

لاحظ أنَّ : الشكل الهندسي وصورته بالإنعكاس في نقطة متطابقان .

تدرّب (٣) :

إذا كان Δ هـَ كَ نَ هو صورة Δ هـ ك ن بالانعكاس في نقطة الأصل (و) ، وكانت هـ (٠ ، ٤) ، ك (−١ ، −٢) ، ن (٣ ، ١) ، فعين إحداثيات الرؤوس هـَ ، كَ ، نَ ، ثم ارسم Δ هـَ كَ نَ في مستوى الإحداثيات .



هـ (.......... ، ....) $\xrightarrow{ع_و}$ هـَ (.......... ، ....)

ك (.......... ، ....) ⟵ كَ (.......... ، ....)

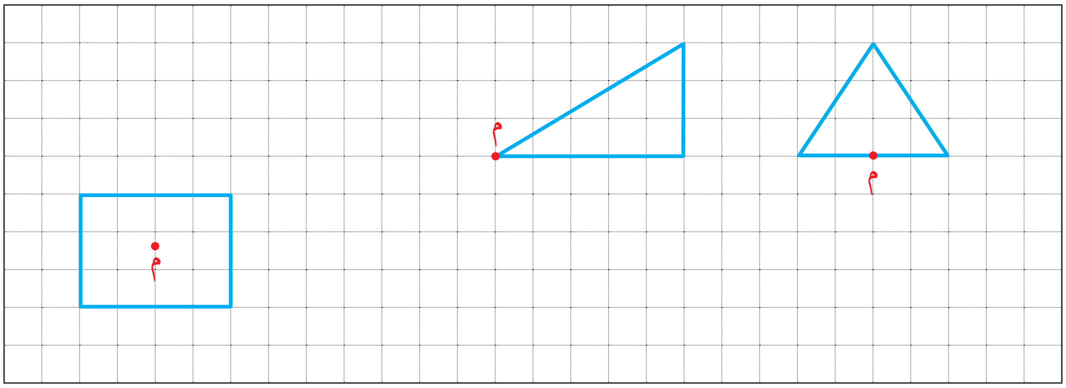
ن (.......... ، ....) ⟵ نَ (.......... ، ....)

فكِّر وناقِش

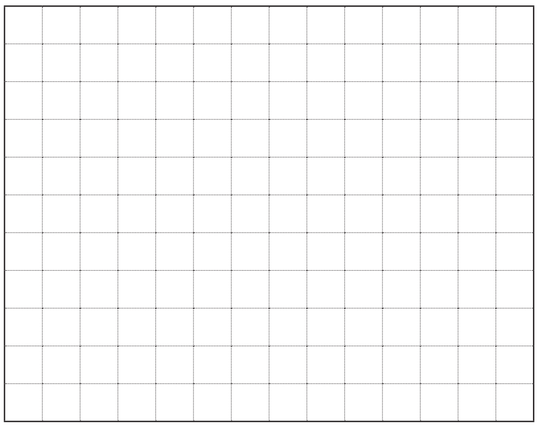
يرى خالد أنَّ الانعكاس في نقطة الأصل يكافئ انعكاسًا في المحور السيني يليه انعكاس في المحور الصادي أو العكس . فهل رأي خالد صحيح ؟ فسّر ذلك .

تمــرَّنْ :

١ ارسم صورة كل شكل من الأشكال التالية بالانعكاس في النقطة م .



٢ إذا كان Δ أَ بَ جـَ هو صورة Δ أ ب جـ بالانعكاس في نقطة الأصل (و) ، وكانت أ (٣ ، ٤) ، ب (٣ ، −٢) ، جـ (−٥ ، −١) ، فعيّن إحداثيات الرؤوس أَ ، بَ ، جـَ ، ثم ارسم المثلثين في مستوى الإحداثيات .



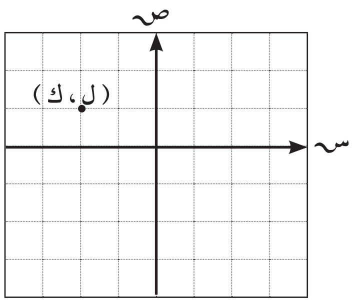
٣ إذا كان Δ و صَ عَ هو صورة Δ و ص ع بالانعكاس في نقطة الأصل (و) ، وكانت و (٠ ، ٠) ، صَ (-٢ ، -١) ، عَ(-١ ، ٤) ، فعيّن إحداثيات الرؤوس و ، ص ، ع ، ثم ارسم المثلثين في مستوى الإحداثيات .

٤ إذا كان الشكل الرباعي أَ بَ جـَ دَ هو صورة الشكل الرباعي أ ب جـ د بالانعكاس في نقطة الأصل (و) ، وكانت أ(١ ، -١) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ(-٤ ، ٣) ، د (-٥ ، -١) .

فعين إحداثيات الرؤوس أَ ، بَ ، جـَ ، دَ ثم ارسم الشكلين الرباعيين في مستوى الإحداثيات .

قد يساعدك هذا التصميم الهندسي في تصميم أشكال هندسية على برامج الحاسوب (مثلًا الفوتوشوب) الخاصة بك .

٥ في المستوى الإحداثي المرسوم عينت النقطة (ل ، ك) فيه .
أي العبارات التالية ليست صحيحة ؟



(أ) ل × ك > ٠

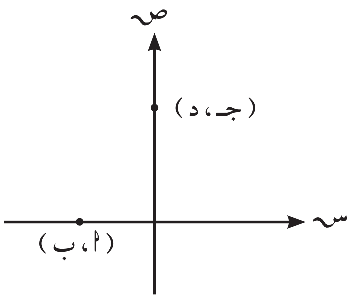
(ب) ل > ك

(جـ) ل + ك = ٠

(د) ك عدد موجب

---

٦ بالنظر إلى الشكل المرسوم ناتج كلّ مما يلي مساوٍ للصفر ما عدا ....



(أ) ﻫ × ب

(ب) ﻫ × جـ

(جـ) ﻫ × د

(د) ب × جـ

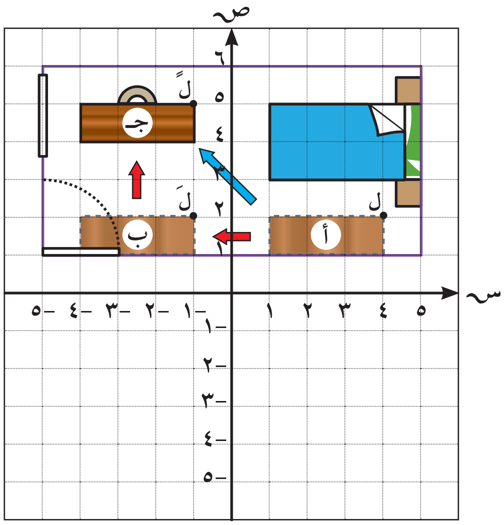
٧-٢ الإزاحة في المستوى الإحداثي
Translation in a Coordinate Plane

العبارات والمفردات :
الإزاحة
Translation

سوف تتعلّم : رسم الإزاحة في المستوى - كتابة قاعدة الإزاحة .

نشاط :

أراد راشد أن يعيد تنظيم غرفته (كما في الشكل) فحرك مكتبه من الوضع أ إلى الوضع ب وانتهى به إلى الوضع جـ . صف التغير الذي أجراه راشد على مكتبه ، وأكمل ما يلي :



إذا كانت ل (٤ ، ٢) إحدى نقاط المكتب فإنَّ :

١ ل (٤ ، ٢) ⟵ لَ (-١ ، ....)

٢ لَ (-١ ، ....) ⟵ لً (-١ ، ....)

ل (٤ ، ٢) ⟵ لً (-١ ، ....)

لاحظ التغيير في كل من الإحداثي السيني والإحداثي الصادي لكل نقطة مع صورتها .

٣ ل (٤ ، ٢) ⟵ لً (٤ + ... ، ٢ + ...)

٤ هل يمكنك أن تعين صورة أي نقطة من نقاط المكتب وفق القاعدة :
(س ، ص) ⟵ (س + ... ، ص + ...) ؟ ....

٥ هل تغيرت أبعاد المكتب خلال إزاحته من الوضع أ إلى ب ثم إلى جـ ؟
....

معلومات مفيدة :
يستخدم مخرجو أفلام الرسوم المتحرِّكة بالحاسوب الإزاحات لتحريك الأشكال على الشاشة.

الإزاحة هي : تحويل هندسي يسمح لنا بالحصول على صورة أي شكل من خلال نقل كل نقطة فيه مسافة ثابتة على خط مستقيم وفي اتجاه محدّد ، ولا تغير الإزاحة من الشكل وقياساته .

وتكون الإزاحة في اتجاه محوري الإحداثيات وفق الجدول التالي :

النقطة	صورة النقطة تحت تأثير الإزاحة	
(س ، ص)	الإزاحة جهة **اليمين** بمقدار (أ) وحدة (س + أ ، ص)	الإزاحة **إلى أعلى** بمقدار (ب) وحدة (س ، ص + ب)
	الإزاحة جهة **اليسار** بمقدار (أ) وحدة (س − أ ، ص)	الإزاحة **إلى أسفل** بمقدار (ب) وحدة (س ، ص − ب)

عمومًا :

(س ، ص) ⟵ (س ± أ ، ص ± ب)

تدرّب (١) :

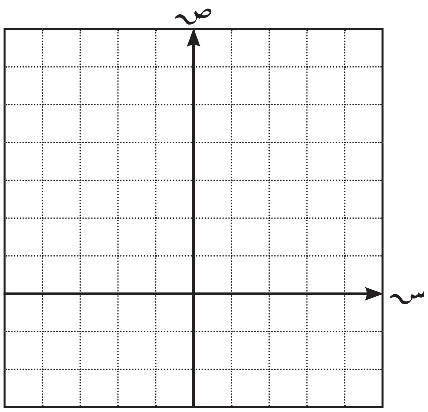
أوجد صورة النقطة أ (−٣ ، ٥) تحت تأثير إزاحة ٤ وحدات إلى اليمين ، ثم وحدتين ونصف إلى الأسفل .

القاعدة : (س ، ص) ⟵ (س .... ، ص ....)

أ (−٣ ، ٥) ⟵ أَ (−٣ .... ، ٥ ....)

أ (−٣ ، ٥) ⟵ أَ (.................. ، ....)

تدرّب (٢) :



في المستوى الإحداثي ، ارسم المثلث أ ب جـ الذي رؤوسه هي أ (٠ ، ٠) ، ب (٠ ، ٤) ،
جـ (٢ ، ٣) ثم ارسم صورة المثلث أ ب جـ تحت تأثير إزاحة قاعدتها :

(س ، ص) ⟵ (س − ٣ ، ص + ١)

أ (٠ ، ٠) ⟵ أَ (....... ، ....)

ب (٠ ، ٤) ⟵ بَ (....... ، ....)

جـ (....... ، ....) ⟵ جـَ (....... ، ....)

مثال :

إذا كانت مَ (−٣ ، ٥) هي صورة النقطة م (٢ ، ١) تحت تأثير إزاحة في المستوى الإحداثي ، أوجد قاعدة الإزاحة ثم تحقق من صحتها :

(س ، ص) ⟵ (س + ﺃ ، ص + ب)

الحل : نعلم أنَّ قاعدة الإزاحة هي : م (٢ ، ١) ⟵ مَ (٢ + ﺃ ، ١ + ب)

∵ م (٢ ، ١) ⟵ مَ (−٣ ، ٥)

(الإحداثي السيني)	(الإحداثي الصادي)
٢ + ﺃ = −٣	١ + ب = ٥
ﺃ = −٣ − ٢	ب = ٥ − ١
ﺃ = −٥	ب = +٤
(٥ وحدات لليسار)	(٤ وحدات للأعلى)

(س ، ص) ⟵ (س − ٥ ، ص + ٤)

التحقق : (٢ ، ١) ⟵ (٢ − ٥ ، ١ + ٤)

∴ (٢ ، ١) ⟵ مَ (−٣ ، ٥)

تدرّب (٣) : أكمل الجدول التالي :

القاعدة	(س ، ص) ⟵ (س + ٣ ، ص − ٢)			
النقطة	(−١ ، ٥)	(−٣ ، −٤)	(٠ ، ....)	(........ ، ....)
الصورة	(٢ ، ....)	(........ ، ....)	(........ ، −٥)	(−١ ، ١)

تمـــرَّنْ :

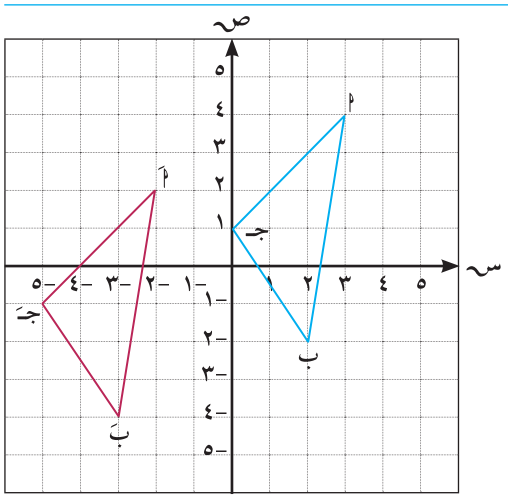
١ أوجد صورة النقطة (٤ ، −٣) تحت تأثير إزاحة ٣ وحدات إلى اليمين ووحدتين إلى الأعلى . ...

٢ أ صف الإزاحة التي تنقل المثلث ﺃ ب جـ إلى المثلث ﺃَ بَ جـَ ، ثم اكتب القاعدة بصورة رمزية .

....

....

....



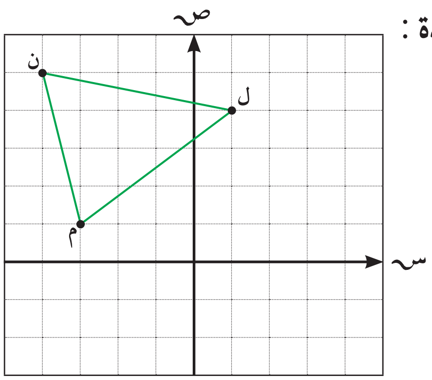
ب في التمرين السابق ، اكتب إحداثيي رؤوس Δ أ ب جـ ، ثم أوجد صورة كل منها تحت تأثير إزاحة قاعدتها : (س ، ص) ⟵ (س + ١ ، ص – ٢)

---

٣ **إذا كانت مَ (–٣ ، ٢) هي صورة م (٢ ، –١) تحت تأثير إزاحة في المستوى الإحداثي ، فاكتب القاعدة بصورة رمزية لهذه الإزاحة ثم تحقق من صحتها .**

---

٤ **ارسم صورة المثلث ل م ن بإزاحة حسب القاعدة :**
(س ، ص) ⟵ (س + ٢ ، ص – ١)

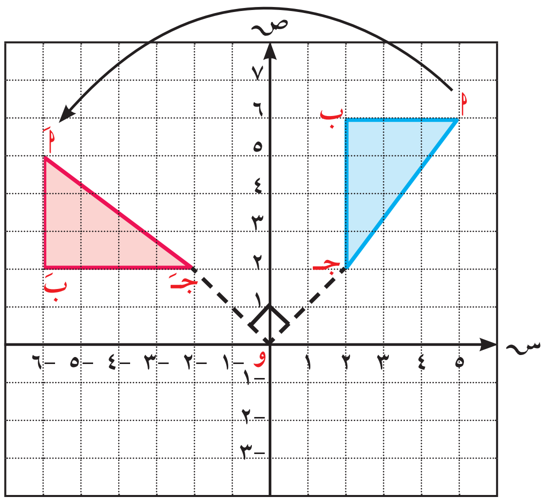


٧-٣ الدوران في المستوى الإحداثي
Rotation in a Coordinate Plane

سوف تتعلّم : الدوران في المستوى وقواعده ، كيفية إيجاد صورة شكل هندسي بالدوران .

العبارات والمفردات :
الدوران
Rotation

نشاط (١) :



تم رسم Δ أ ب جـ على شبكة المستوى الإحداثي .

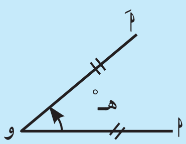
١ ثبت ورقة شفافة على المستوى وقم برسم المحاور و Δ أ ب جـ على الورقة الشفافة .

٢ ثبت سن دبوس عند النقطة (و) وقم بتدوير الورقة الشفافة في اتجاه ضد حركة عقارب الساعة حتى ينطبق محور السينات في الورقة الشفافة على محور الصادات في المستوى الأصلي لنحصل على موضع جديد للمثلث أ ب جـ وليكن Δ أَ بَ جـَ .

- بم نسمي التحويل الهندسي الذي ينقل Δ أ ب جـ إلى Δ أَ بَ جـَ ؟

نسمي التحويل الهندسي السابق بالدوران ، والذي ينتج عنه تدوير شكل ما حول نقطة نسميها مركز الدوران ، ولا يغير الدوران من الشكل أو قياساته .

الدوران : هو تحويل هندسي يعين لكل نقطة أ في المستوى نقطة أخرى أَ بحيث أ ⟵ أَ ، و أ = و أَ (و تسمى مركز الدوران)
و ⟵ و (نقطة صامدة) ، (أ وَ^ أَ) هي زاوية الدوران وقياسها هـ° .



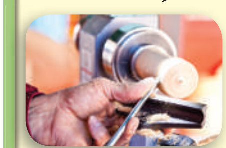
نرمز إلى الدوران الذي مركزه نقطة الأصل (و) وقياس زاويته (هـ°) بالرمز د (و ، هـ°) .

- يتعين الدوران بثلاثة عناصر :

(١) مركز الدوران (٢) قياس زاوية الدوران (٣) اتجاه الدوران

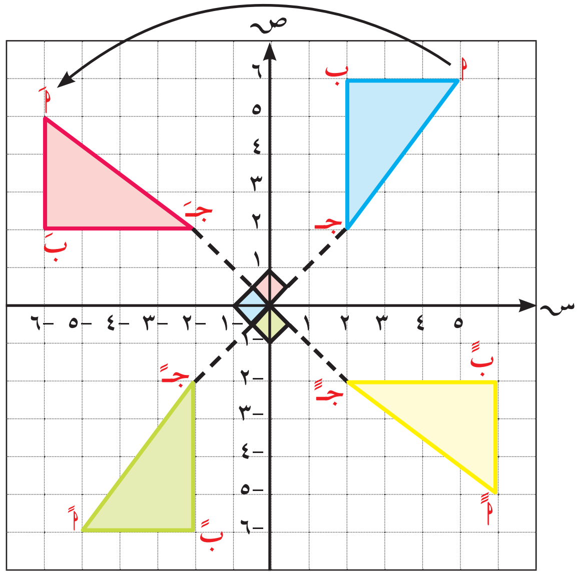
وستقتصر دراستنا على الدوران حول نقطة الأصل في الاتجاه ضد حركة عقارب الساعة .

معلومات مفيدة :
يستخدمُ النجّارون المخاريطَ الدورانيّة لخلق تصميماتٍ متناظرةٍ (متماثلة) .



نشاط (٢) :

أكمل من النشاط السابق وباستخدام الورقة الشفافة دوّر وارسم صورة Δ ٢ب جـ :



أ) حول نقطة الأصل (و) بزاوية قياسها ٩٠° ضد اتجاه حركة عقارب الساعة د (و ، ٩٠°) .

ب) حول نقطة الأصل (و) بزاوية قياسها ١٨٠° ضد اتجاه حركة عقارب الساعة د (و ، ١٨٠°) .

جـ) حول نقطة الأصل (و) بزاوية قياسها ٢٧٠° ضد اتجاه حركة عقارب الساعة د (و ، ٢٧٠°) .

د) أكمل الجدول التالي مستعينًا بالرسم :

الرؤوس / الدوران	٢ (٥ ، ٦)	ب (٢ ، ٦)	جـ (٢ ، ٢)
د (و ، ٩٠°)	٢َ (-٦ ، ٥)	بَ (........ ، ....)	جـَ (........ ، ....)
د (و ، ١٨٠°)	٢ً (........ ، ....)	بً (-٢ ، ٦)	جـً (........ ، ....)
د (و ، ٢٧٠°)	٢ٌ (........ ، ....)	بٌ (........ ، ....)	جـٌ (٢ ، -٢)

تذكر أنَّ :
الدورة الكاملة يكون قياس زاويتها ٣٦٠° .

مما سبق نستنتج أنَّ :

أ) $(س ، ص) \xrightarrow{د(و ، ٩٠°)} (-ص ، س)$ يسمى دوران ربع دورة ($\frac{١}{٤}$ دورة) .

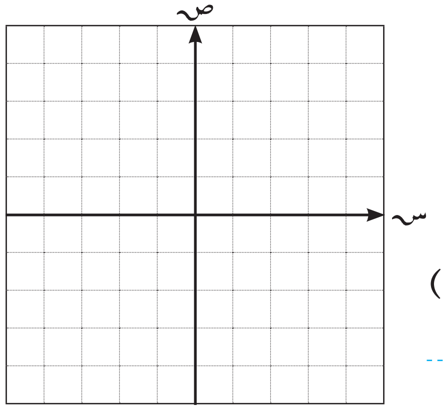
ب) $(س ، ص) \xrightarrow{د(و ، ١٨٠°)} (-س ، -ص)$ يسمى دوران نصف دورة ($\frac{١}{٢}$ دورة) .

جـ) $(س ، ص) \xrightarrow{د(و ، ٢٧٠°)} (ص ، -س)$ يسمى دوران ثلاثة أرباع دورة ($\frac{٣}{٤}$ دورة) .

ملاحظة :

الدوران نصف دورة باتجاه ضد عقارب الساعة يكافئ دوران نصف دورة باتجاه مع عقارب الساعة .

تدرّب (١) :



ارسم $\overline{\text{أب}}$ التي فيها أ(٣، ٢) ، ب(٠، ٣)
ثم عيّن وارسم صورتها تحت تأثير كلٍّ من :

أ د(و، ١٨٠°)

أ(........، ....) $\xrightarrow{\text{د(و، ١٨٠°)}}$ أَ(........، ....)

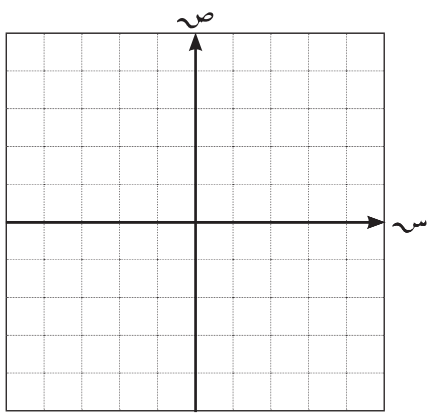
ب(........، ....) $\xrightarrow{\text{د(و، ١٨٠°)}}$ بَ(........، ....)

ب د(و، ٢٧٠°)

أ(........، ....) $\xrightarrow{\text{د(و، ٢٧٠°)}}$ أً(........، ....)

ب(........، ....) $\xrightarrow{\text{د(و، ٢٧٠°)}}$ بً(........، ....)

تدرّب (٢) :



في المستوى الإحداثي ارسم المثلث ل م ن
بحيث ل(-١، ١) ، م(٠، ٣)، ن(-٤، ٣)،
ثم ارسم صورته بدوران مركزه نقطة الأصل
وزاويته ٩٠° .

ل(........، ....) $\xrightarrow{\text{د(و، ٩٠°)}}$ لَ(........، ....)

م(........، ....) $\longrightarrow$ مَ(........، ....)

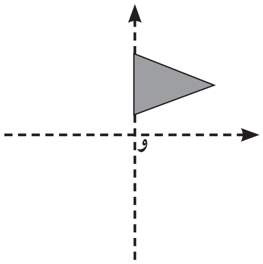
ن(........، ....) $\longrightarrow$ نَ(........، ....)

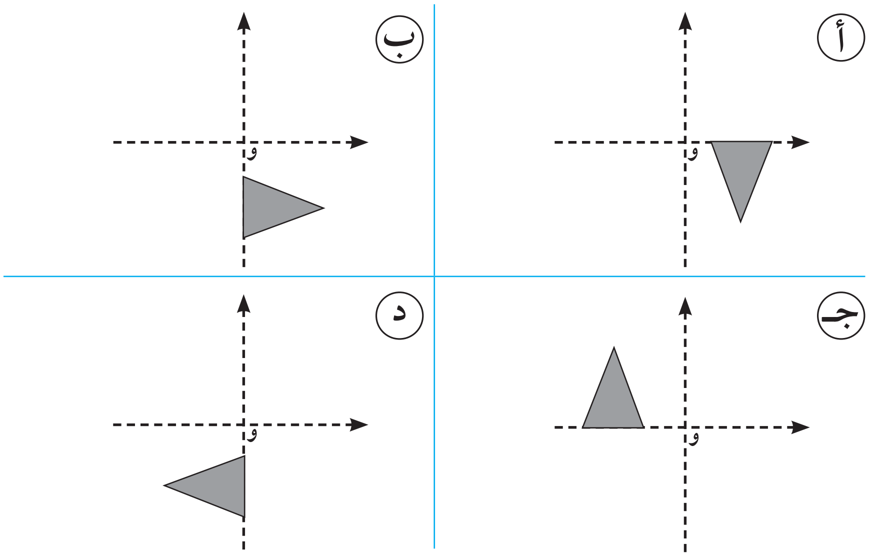
فكِّر وناقِش

يقول عبدالله :
إنَّ الدوران د(و، ١٨٠°) يكافئ الانعكاس في نقطة الأصل .
هل توافقه الرأي ؟ فسر إجابتك .

تدرّب (٣) :

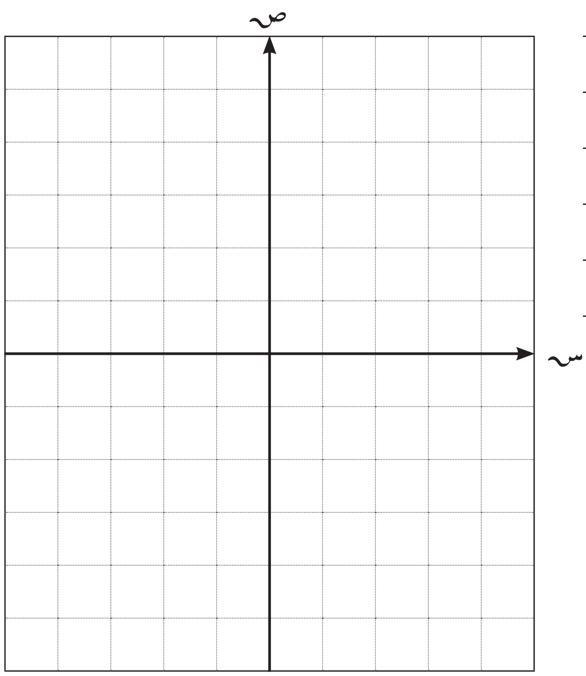
أي الأشكال التالية يظهر نتيجة دوران الشكل نصف دورة باتجاه عقارب الساعة حول النقطة و ؟



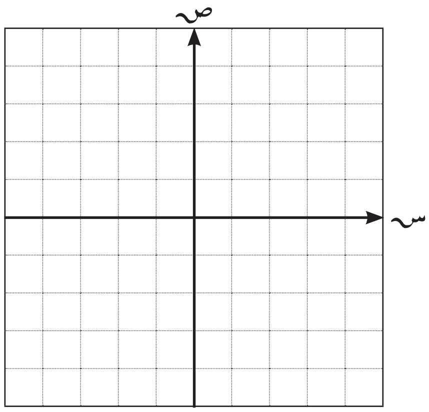


تمرَّنْ :

١ ارسم صورة المثلث أ ب جـ الذي رؤوسه أ (٤ ، ٠) ، ب (٠ ، ٥) ، جـ (−٢ ، −٤) بدوران نصف دورة حول نقطة الأصل .



٢ ارسم المستطيل ٲ ب جـ د الذي رؤوسه ٲ (١ ، ٠) ، ب (٤ ، ٠) ، جـ (٤ ، ٢) ، د (١ ، ٢) ، ثم ارسم صورته في الحالات التالية :



أ د (و ، ٩٠°)

ب د (و ، ٢٧٠°)

....

....

....

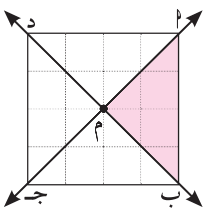
....

....

....

في التمارين (٣ – ٤) اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي :

٣ في الشكل المقابل : صورة Δ ٲ م ب تحت تأثير د (م ، ٢٧٠°) هي :



أ Δ د م جـ

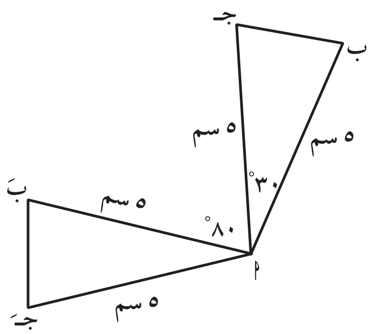
ب Δ ب م جـ

جـ Δ د م ٲ

د Δ ٲ ب د

---

٤ المثلث ٲ بَ جـَ هو صورة المثلث ٲ ب جـ بدوران حول ٲ ، قياس زاويته = ...



أ ٣٠°

ب ٨٠°

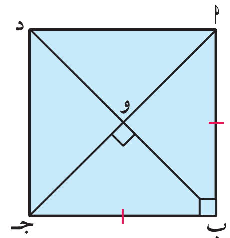
جـ ١١٠°

د ١٤٠°

٧-٤ مراجعة الوحدة السابعة
Revision Unit Seven

١ أي الأشكال التالية متناظر حول نقطة مُلتقى قُطريه (أقطاره)؟ ولماذا ؟

(مربع)



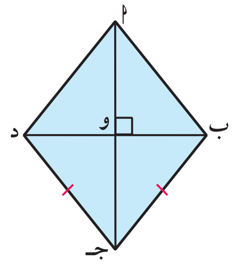
....

....

....

....

(معين)



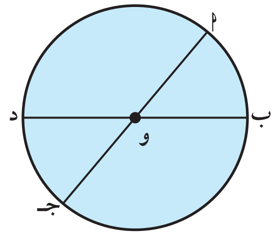
....

....

....

....

(دائرة)



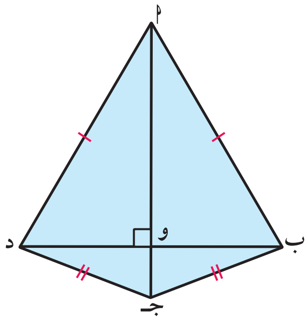
....

....

....

....

(طائرة ورقية)



....

....

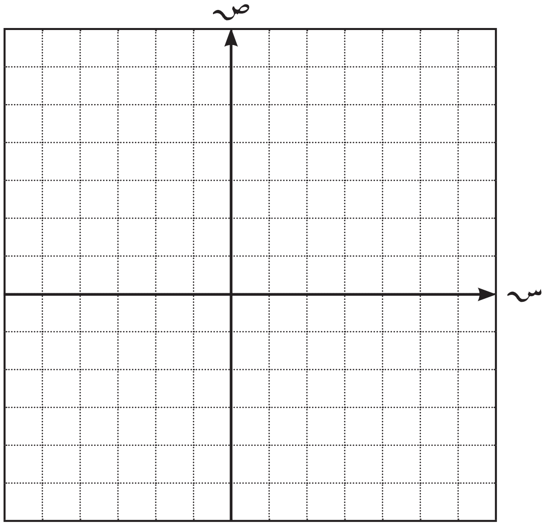
....

....

٢ أكمل الجدول التالي :

النقطة	صورتها بالانعكاس في المحور السيني	صورتها بالانعكاس في المحور الصادي	صورتها بالانعكاس في نقطة الأصل
أ (٤ ، ٥)	(............ ، ....)	(............ ، ....)	(............ ، ....)
ب (−٢ ، ٧)	(............ ، ....)	(............ ، ....)	(............ ، ....)
جـ (−٥ ، −٦)	(............ ، ....)	(............ ، ....)	(............ ، ....)
د (٠ ، ٩)	(............ ، ....)	(............ ، ....)	(............ ، ....)
هـ (−٥ ، ٠)	(............ ، ....)	(............ ، ....)	(............ ، ....)

٣ إذا كان المثلث لَ مَ نَ هو صورة المثلث ل م ن بالانعكاس في نقطة الأصل (و) ، وكانت ل (٠ ، ٣) ، م (٥ ، ٣) ، ن (–٣ ، –٥)
فعيِّن إحداثيات الرؤوس لَ ، مَ ، نَ ،
ثم ارسم المثلثين في مستوى الإحداثيات .



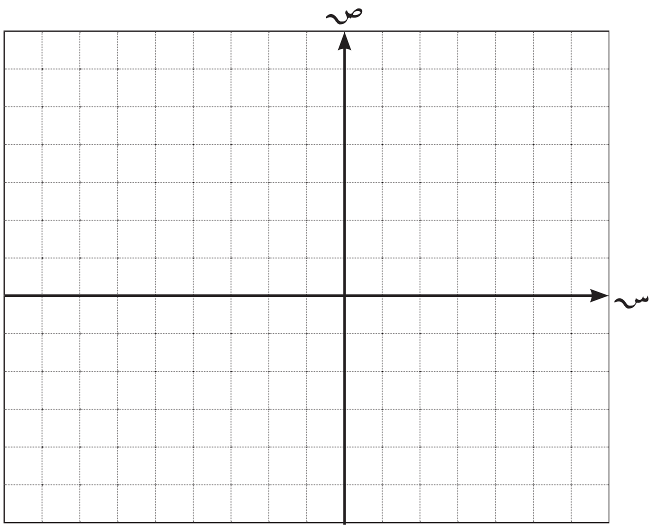
٤ أكمل الجدول التالي :

القاعدة	(س ، ص) ⟵ (س – ٢ ، ص + ٥)				
النقطة	(٤ ، ٢)	(.......... ، ....)	(٣ ، ٠)	(.......... ، ....)	(١ ، –١)
الصورة	(.......... ، ....)	(–٨ ، ١٢)	(.......... ، ....)	(–١١ ، –٣)	(.......... ، ....)

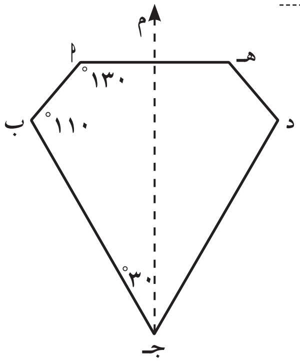
٥ مثلث ﺃ ب جـ رؤوسه هي :
(١ ، ٢) ، (٠ ، ٣) ، (–٢ ، –٢) ،
أوجد صور رؤوسه بعد الإزاحة تبعًا للقاعدة :
(س ، ص) ⟵ (س – ٥ ، ص + ١) ،
ثم ارسم المثلثين في مستوى الإحداثيات.

....

....



٦ إذا كان م محور تناظر للشكل المرسوم ، فإنَّ قياس (ب $\hat{\text{جـ}}$ د) = ...



أ ٣٠° ب ٥٠° جـ ٦٠° د ٧٠°

---

٧ تم التأثير بتحويل هندسي على المثلث أ ب جـ فكان :
للنقطة أ (٢ ، −٣) صورة هي د (٠ ، −٢) ،
للنقطة ب (١ ، ٤) صورة هي هـ (−١ ، ٥)
للنقطة جـ (−٢ ، ١) صورة هي ل (−٤ ، ٢) .

أ هل المثلث د هـ ل هو إزاحة للمثلث أ ب جـ ؟

....

ب إذا كان كذلك ، فما هي قاعدة هذه الإزاحة ؟ وإذا لم يكن كذلك فبيِّن السبب .

....

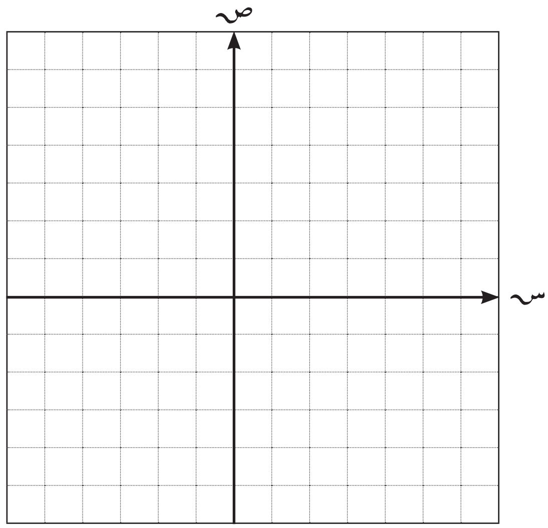
....

---

٨ أكمل الجدول التالي :

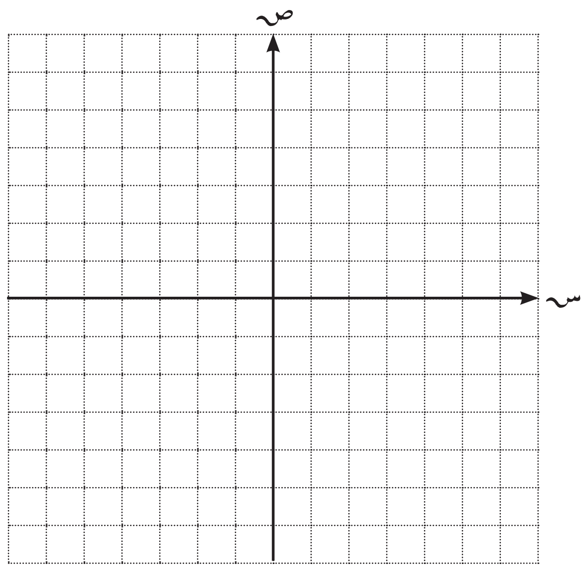
النقطة	د (و ، ٩٠°)	د (و ، ١٨٠°)	د (و ، ٢٧٠°)
أ (٢ ، ٥)	(........ ، ....)	(........ ، ....)	(........ ، ....)
ب (−٣ ، ٤)	(........ ، ....)	(........ ، ....)	(........ ، ....)
جـ (−١ ، −٧)	(........ ، ....)	(........ ، ....)	(........ ، ....)
د (−٦ ، ٠)	(........ ، ....)	(........ ، ....)	(........ ، ....)

٩ ارسم صورة الشكل الرباعي س ص ع ل ، حيث س (١ ، ٠) ، ص (−٢ ، −٣) ، ع (٣ ، ٥) ، ل (−٤ ، ٠) بالدوران حول نقطة الأصل وبزاوية قياسها ١٨٠° .

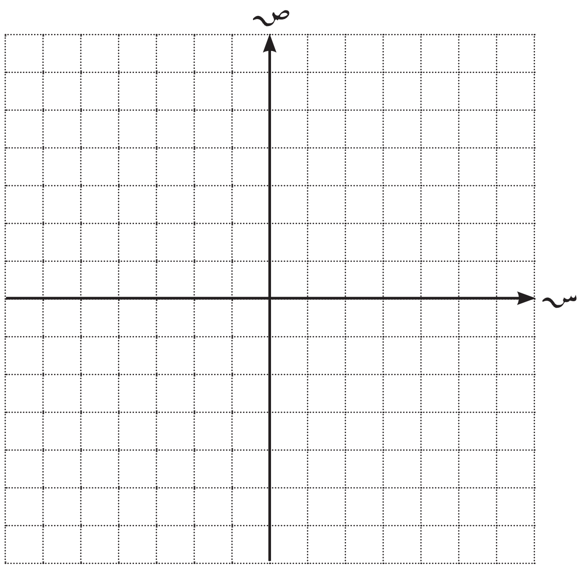


١٠ ارسم Δ ن ل ع حيث ن (−٣ ، −٣) ، ل (٠ ، ١) ، ع (٤ ، −٥) ، ثم عيّن صورته تحت تأثير كلٍّ من :

أ د (و ، ١٨٠°)



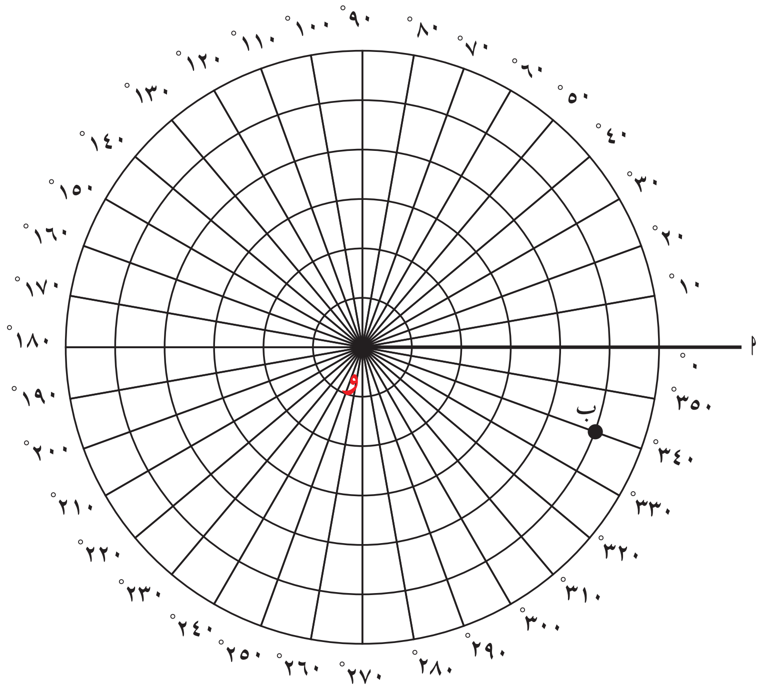
ب د (و ، ٢٧٠°)



معلومات مفيدة :

- الرادار هو نظام الكتروني يستخدم الموجات الكهرومغناطيسية لتحديد إحداثيات موقع الأجسام الثابتة والمتحركة في الفضاء وكذلك إتجاهها وسرعتها .
- هل تعلم أن شبكة الرادار مُقسمة إلى دوائر وكل دائرة تمثل أميال بحرية حسب وضع مفتاح الأميال على الشاشة .

١١ يبين الرسم التخطيطي نظامًا لتحديد النقاط :



في هذا النظام يوصف النقطة (ﺃ) بمسافة البعد عن المنشأ (و) . ومقدار اللفة عكس عقارب الساعة من خط الأساس (و ﺃ) إلى (و ب) وبالتالي إحداثيات ب هي (٥ ، ٣٤٠°) .

أ عين النقاط س (٣ ، ٣٠°) ، ص (٤ ، ١٢٠°) على الرسم البياني أعلاه .

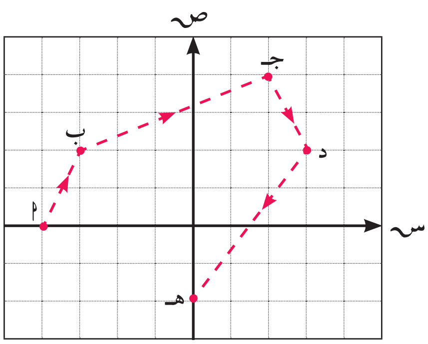
ب ارسم الزاوية ب و ص ؟ ما هو قياس الزاوية ب و ص ؟

....

....

....

١٢ تحركت سفينة من الميناء (ﺃ) مرورًا ببعض الموانئ إلى أن وصلت في نهاية رحلتها إلى الميناء (هـ) ، صف الإزاحة التي يمكن أن تتحركها السفينة من ميناء إلى آخر بدءًا من الميناء (ﺃ) .



....

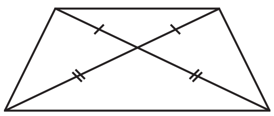
....

....

....

اختبار الوحدة السابعة

أوّلًا : في البنود (١–٤) ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ المربع متناظر حول نقطة مُلتقى قطريه .	(أ)	(ب)
٢ صورة النقطة أ (– ٣ ، ٥) بالدوران ٩٠° حول نقطة الأصل في اتجاه ضد عقارب الساعة هي أَ (٥ ، ٣) .	(أ)	(ب)
٣ صورة النقطة أ (٢ ، ٣) بانعكاس في نقطة الأصل يكافئ إزاحة حسب القاعدة (س – ٤ ، ص – ٦) .	(أ)	(ب)
٤ في الشكل المقابل الشكل متناظر حول نقطة تلاقي قطريه . 	(أ)	(ب)

ثانيًا: لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة :

٥ نَ (٧ ، – ١) صورة ن (٢ ، – ١) تحت تأثير :

(أ) انعكاس في المحور السيني   (ب) د (و ، ٢٧٠°)   (جـ) انعكاس في نقطة الأصل   (د) إزاحة إلى اليمين ٥ وحدات

---

٦ قياس الدرجة التي تمثل $\frac{1}{4}$ دورة كاملة ضد عقارب الساعة تساوي :

(أ) ٩٠°   (ب) ١٨٠°   (جـ) ٢٧٠°   (د) ٣٦٠°

---

٧ صورة النقطة ع (–٢ ، –٤) بالانعكاس في نقطة الأصل (و) هي :

(أ) (٢ ، – ٤)   (ب) (– ٢ ، ٤)   (جـ) (٢ ، ٤)   (د) (٤ ، ٢)

---

٨ صورة النقطة هـ (–٤ ، –١) باستخدام قاعدة الإزاحة
(س ، ص) ← (س + ٥ ، ص – ٤) هي :

(أ) هـَ (١ ، ٣)   (ب) هـَ (١ ، –٥)   (جـ) هـَ (٩ ، –٥)   (د) هـَ (٩ ، ٥)

٩ الانعكاس في نقطة الأصل يكافئ :

أ د (و ، ٩٠°)　　ب د (و ، ١٨٠°)　　جـ د (و ، ٢٧٠°)　　د د (و ، ٣٦٠°)

---

١٠ إذا كانت مَ (−٥ ، ٩) هي صورة النقطة م (٢ ، ٥) تحت تأثير إزاحة في المستوى الإحداثي ، فإنَّ قاعدة هذه الإزاحة هي :

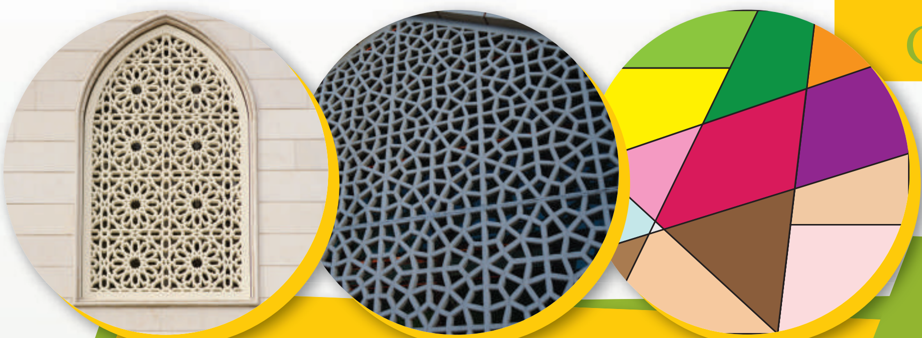
أ (س ، ص) ⟵ (س + ٧ ، ص − ٤)　　ب (س ، ص) ⟵ (س − ٧ ، ص + ٤)

جـ (س ، ص) ⟵ (س + ٤ ، ص + ٧)　　د (س ، ص) ⟵ (س − ٤ ، ص − ٧)

الوحدة الثامنة

الأشكال الرباعية
Quadrilaterals

تصاميم هندسية
Geometric Designs



مشروع الوحدة :
(تصميم هندسي)

عمليات التصميم الهندسي هي مجموعة من الخطوات التي تتم من أجل إخراج منتج جديد أو نظام جديد .

خطة العمل :

- توظيف أشكال رباعية لتكوين تصاميم هندسية مميزة .

خطوات تنفيذ المشروع :

- في تصميمك ارسم أشكالًا رباعية (مستخدمًا شبكة المربعات ، أدوات هندسية) .
- ضمِّن في تصميمك كل أنواع متوازيات الأضلاع (مستطيل ، معين ، مربع) .
- حدد الأشكال الرباعية المستخدمة في التصميم ، وحلِّل خواصها من حيث (التطابق ، والتماثل ، ... إلخ) بإكمال الجدول.
- استخدم أكثر عدد ممكن من الأشكال الرباعية لتكوّن التصميم .

اسم الشكل الرباعي	خواص			تماثل	
	الأضلاع	الزوايا	الأقطار	حول محور	حول نقطة

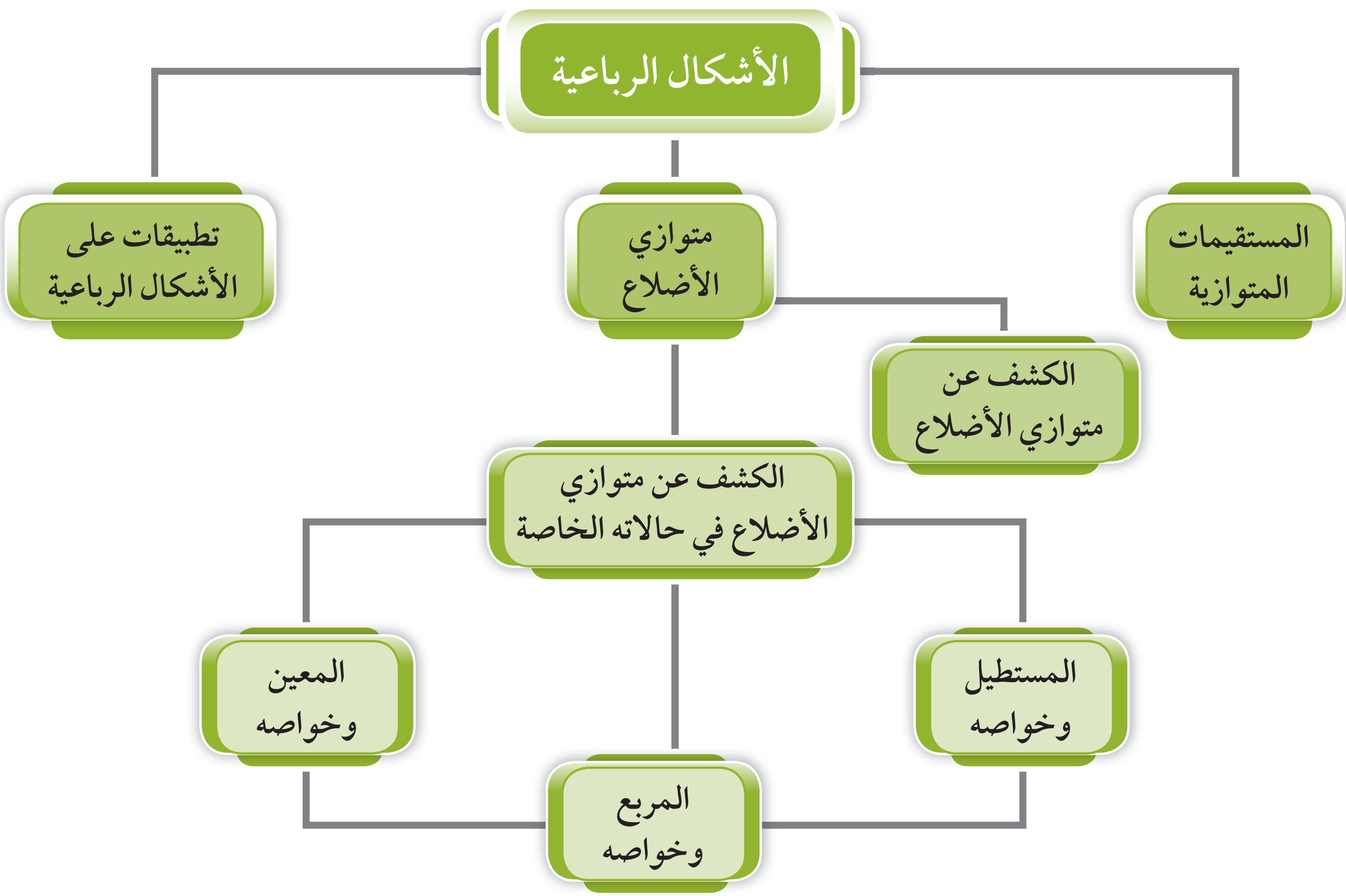
علاقات وتواصل :

- المجموعة الواحدة تصمم عدة تصاميم هندسية ويتم اختيار الأفضل .

عرض العمل :

- كل مجموعة تعرض التصميم النهائي مع الجدول المستخدم .

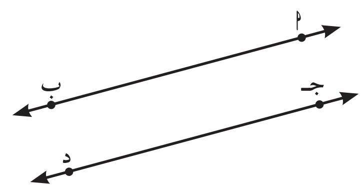
مخطَّط تنظيمي للوحدة الثامنة



٨-١ المستقيمات المتوازية
Parallel Lines

سوف تتعلّم : العلاقة بين الزوايا الناتجة من قطع مستقيم لمستقيمين متوازيين .

تسمّى الخطوط المستقيمة التي تقع في مستوى واحد ولا تتقاطع أبدًا **بالخطوط المتوازية** .

الرسم	تقرأ	تكتب بالرموز
	المستقيم (أ ب) يوازي المستقيم (جـ د)	$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

العبارات والمفردات :

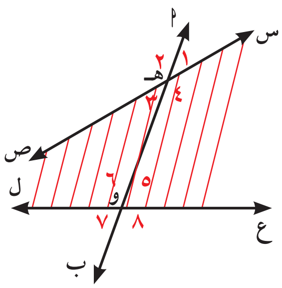
متوازٍ Parallel

زوايا متبادلة Alternate Angles

زوايا متناظرة Corresponding Angles

زوايا متحالفة Allied Angles

نشاط (١) :



أكمل ما يلي : عندما يقطع مستقيم مستقيمين

تنتج زوايا عددها ....

من هذه الزوايا زوايا متبادلة وزوايا

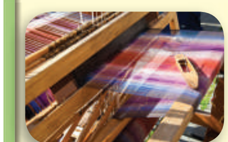
.... ، .... ، .... ، ....

أكمل الجدول التالي مستعينًا بالشكل المرسوم :

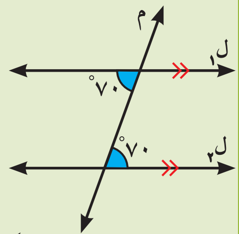
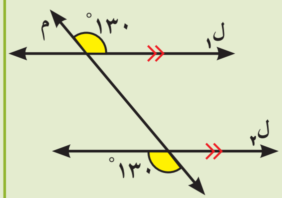
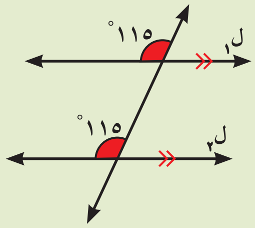
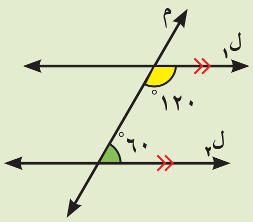
أزواج من الزوايا المتبادلة	داخليًا	
	خارجيًا	
أزواج من الزوايا المتناظرة		
أزواج من الزوايا المتحالفة		
أزواج من الزوايا المتقابلة بالرأس		
أزواج من الزوايا المتجاورة		

معلومات مفيدة :

– في صناعة النسيج تكون الخيوط متوازية ومتعامدة على النول .



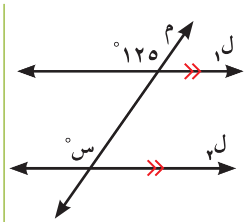
ربط الأفكار : إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين ، فإنَّ :

كل زاويتين **متبادلتين متطابقتان**		كل زاويتين **متناظرتين متطابقتان**	كل زاويتين **متحالفتين متكاملتان**
 زوايا متبادلة داخليًّا	 زوايا متبادلة خارجيًّا		

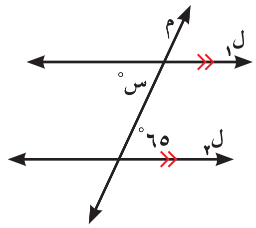
تذكر أنَّ :
- الزاويتان المتكاملتان مجموع قياسها ١٨٠°
- الزاويتان المتتامتان مجموع قياسها ٩٠°

تدرّب (١) :

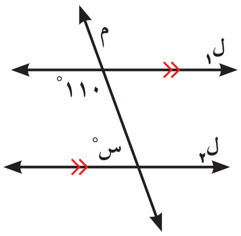
في كلّ من الأشكال التالية أوجد قيمة (س°) مع ذكر السبب.



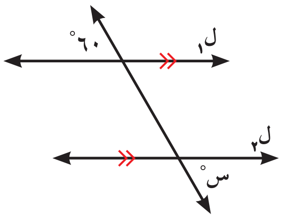
....



....



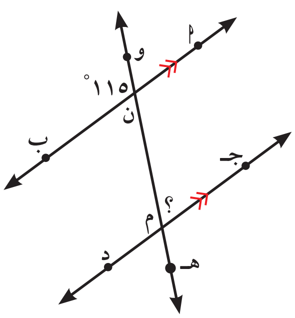
....



....

تذكر أنَّ :
- الزاويتان المتجاورتان على خط مستقيم واحد متكاملتان .
- الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان .

تدرّب (٢) :



في الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـد}$ ، و $\overleftrightarrow{و هـ}$ قاطع لهما

في ن ، م على الترتيب ، ق (و $\hat{ن}$ ب) = ١١٥° .

فأكمل لتوجد بالبرهان ق (جـ $\hat{م}$ ن) .

المعطيات : (١) ....

(٢) ....

المطلوب : إيجاد ق (جـ $\hat{م}$ ن)

البرهان : ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{........}$ ، $\overleftrightarrow{........}$ قاطع لهما **(معطى)**

∴ ق (و $\hat{ن}$ ب) = ... **(معطى)**

∴ ق (ن $\hat{م}$ د) = ق (و $\hat{ن}$ ب) = ... **(بالتوازي والتناظر)**

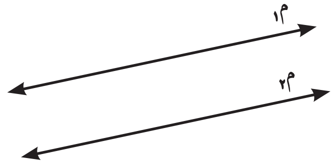
∴ ق (جـ $\hat{م}$ ن) = ١٨٠° − ١١٥° = ٦٥° **لأنَّ** ....

فكِّر وناقِش

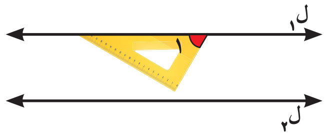
قال عبد الكريم : أستطيع حل تدرب (٢) السابق بطرق أخرى مختلفة ، فهل توافقه الرأي ؟ فسّر إجابتك .

نشاط (٢) :

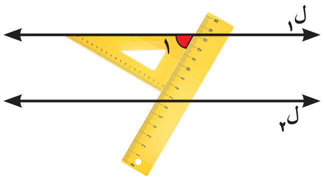
باستخدام المسطرة والمثلث القائم تحقق من صحة توازي المستقيمين $م_{١}$ ، $م_{٢}$ متبعًا الخطوات الأربع .



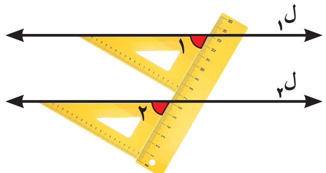
الخطوة الأولى :



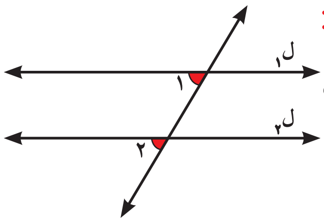
الخطوة الثانية :



الخطوة الثالثة : حرك المثلث إلى الأسفل



الخطوة الرابعة : ماذا تلاحظ على $\hat{١}$ ، $\hat{٢}$ ؟



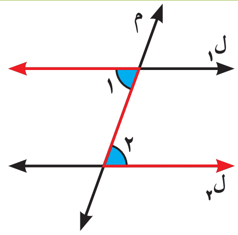
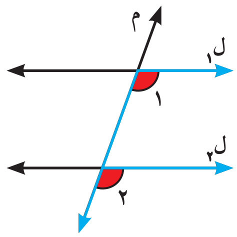
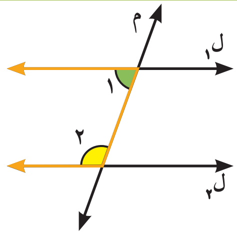
نتيجة : إذا قطع مستقيم مستقيمين في المستوى وتوفرت أحد الشروط التالية :

(١) زاويتان متبادلتان متطابقتان .

(٢) زاويتان متناظرتين متطابقتان .

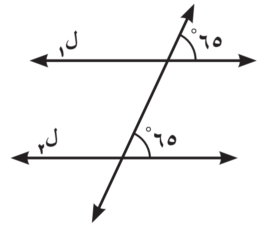
(٣) زاويتان متحالفتان متكاملتان.

فإن المستقيمين يكونان متوازيين .

إذا قطع مستقيم مستقيمين في المستوى وكان :		
الزاويتان المتبادلتان ١ ، ٢ متطابقتان	الزاويتان المتناظرتان ١ ، ٢ متطابقتان	الزاويتان المتحالفتان ١ ، ٢ متكاملتان
		
فإنَّ $\overleftrightarrow{ل_{١}} // \overleftrightarrow{ل_{٢}}$	فإنَّ $\overleftrightarrow{ل_{١}} // \overleftrightarrow{ل_{٢}}$	فإنَّ $\overleftrightarrow{ل_{١}} // \overleftrightarrow{ل_{٢}}$

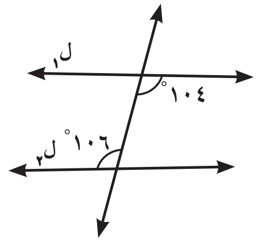
تدرّب (٣) :

في أي من الأشكال التالية يكون المستقيمان ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$ متوازيين ؟ وضّح ذلك .



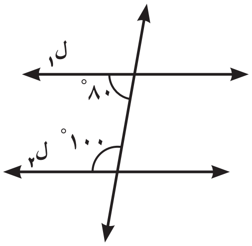
∵ الزاويتان المتناظرتان متطابقتان

∴ $\overleftrightarrow{\text{ل}_{١}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ل}_{٢}}$



∵ الزاويتان المتبادلتان غير متطابقتين

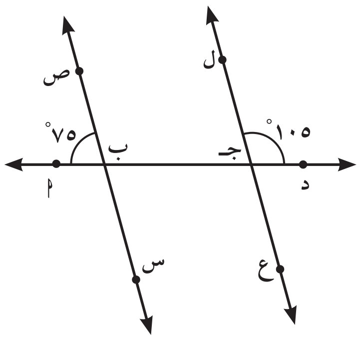
∴ ....



∵ الزاويتان ....

∴ ....

مثال :



في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ قاطع للمستقيمين $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ع ل}}$ في ب ، جـ على الترتيب ،

ق (أ $\hat{\text{ب}}$ ص) = ٧٥° ، ق (ل $\hat{\text{جـ}}$ د) = ١٠٥° ،

برهن أنَّ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ع ل}}$.

الحلّ :

المعطيات : (١) $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ قاطع للمستقيمين $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ع ل}}$.

(٢) ق (أ $\hat{\text{ب}}$ ص) = ٧٥° ، ق (ل $\hat{\text{جـ}}$ د) = ١٠٥°

المطلوب : إثبات أنَّ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ع ل}}$

البرهان : ∵ ق (ل $\hat{\text{جـ}}$ د) = ١٠٥° (معطى)

∴ ق (ب $\hat{\text{جـ}}$ ل) = ١٨٠° − ١٠٥° = ٧٥° (بالتجاور على مستقيم)

∵ ق (أ $\hat{\text{ب}}$ ص) = ٧٥° (معطى)

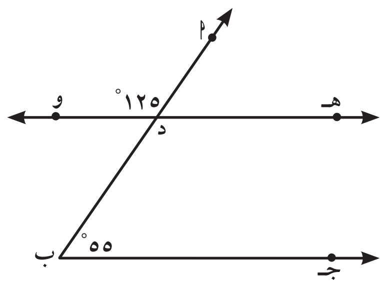
∵ ق (أ $\hat{\text{ب}}$ ص) = ق (ب $\hat{\text{جـ}}$ ل) = ٧٥° (وهما في وضع تناظر)

∴ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ع ل}}$

فكِّر وناقِش

قالت نور : أستطيع حل المثال السابق بطرق أخرى ، هل توافقها الرأي ، فسر إجابتك .

تدرّب (٤) :



في الشكل المقابل : ق (أ د̂ و) = ١٢٥° ،

ق (د ب̂ جـ) = ٥٥° ، أثبت أنَّ هـ و ↔ // ب جـ ↔

المعطيات : (١) ق (أ د̂ و) = ...

(٢) ق (..........̂..........) = ٥٥°

المطلوب : إثبات أنَّ هـ و ↔ // ب جـ ↔

البرهان : ∵ ق (..........̂..........) = ١٢٥° (معطى)

∴ ق (هـ د̂ ب) = ... (....) .

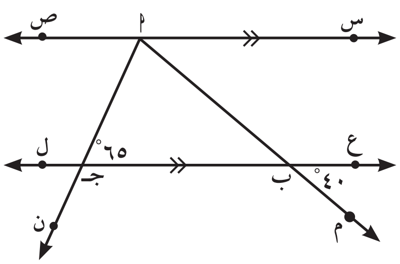
∵ ق (هـ د̂ ب) + ق (..........̂..........) = ١٢٥° + ... = ... (وهما متحالفتان)

∴ ....

هل يوجد لتدرب (٤) حلول أخرى لإثبات صحة التوازي ؟ وضح ذلك.

....

تمــرَّنْ :



١ في الشكل المقابل س ص ↔ // ع ل ↔ ،

ق (ع ب̂ م) = ٤٠° ، ق (أ جـ̂ ب) = ٦٥°

أوجد بالبرهان كلًّا من :

ق (ص أ̂ جـ) ، ق (س أ̂ ب) ، ق (جـ أ̂ ب)

....

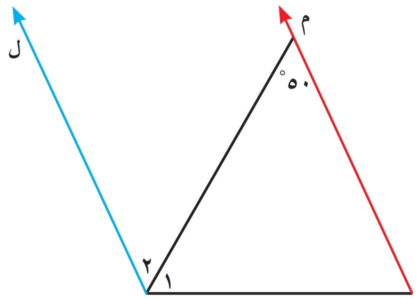
....

....

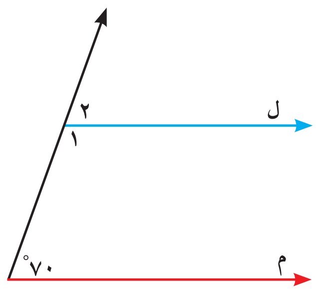
....

....

٢ في الشكل (أ) ، (ب) ضع قياسًا من عندك لإحدى الزاويتين ١ ، ٢ أو كلتيهما لتجعل $\overleftarrow{\text{ل}}$ ، $\overleftarrow{\text{م}}$ متوازيين .



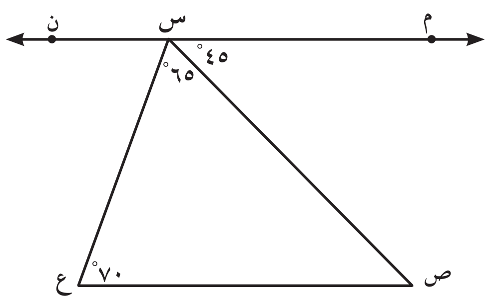
(أ)



(ب)

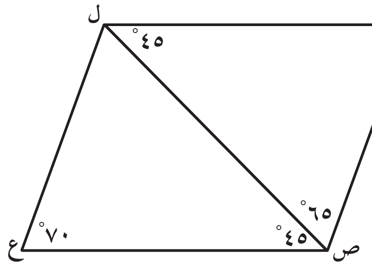
٣ في الشكل المقابل وحسب البيانات المحددة عليه ،

أثبت أنَّ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$.



❹ **في الشكل المقابل وحسب البيانات المدونة عليه ،**

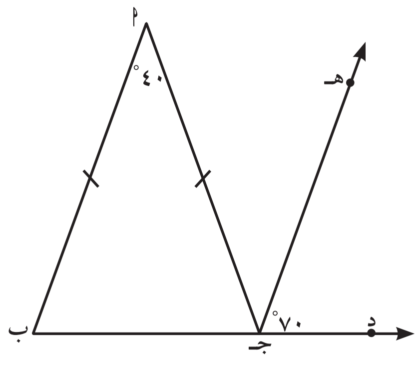
برهن أن $\overline{\text{س ل}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ل ع}}$.



---

❺ **في الشكل المقابل وحسب البيانات المحددة عليه ،**

أثبت أن $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ // $\overline{\text{ب أ}}$.

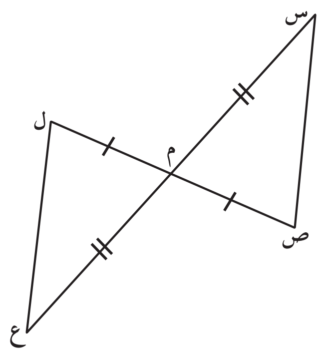


٦ في الشكل المقابل وحسب البيانات المحددة عليه ،

أثبت أنَّ :

(١) Δ س م ص $\cong$ Δ ع م ل

(٢) $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ع ل}}$



٨-٢ متوازي الأضلاع وخواصه
Parallelogram and its Properties

العبارات والمفردات :

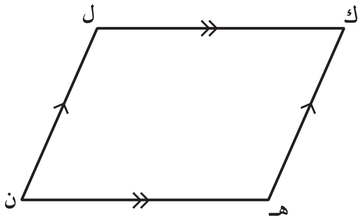
متوازي الأضلاع
Parallelogram

زاويتان متقابلتان
Opposite Angles

زاويتان متتاليتان
Consecutive Angles

سوف تتعلّم : خواص متوازي الأضلاع .

تعلمت سابقًا : أنَّ **متوازي الأضلاع هو شكل رُباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان .**

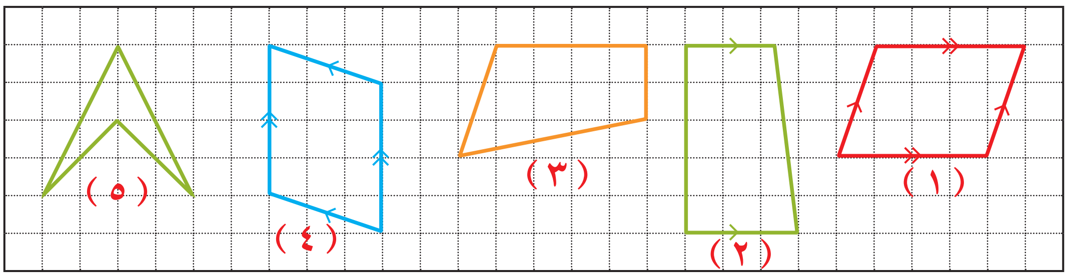


ك ل ن هـ متوازي أضلاع وعلى ذلك :

ك ل // هـ ن ، هـ ك // ل ن

نشاط :

لاحظ العلامات المستخدمة في الأشكال التالية (علامات التوازي) . أيّهما يمثل متوازي أضلاع ؟ ولماذا ؟

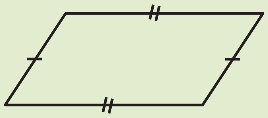


....

....

معلومات مفيدة :
معظم الأشكال التي تراها في الجسور الحديدية هي على شكل متوازي الأضلاع .

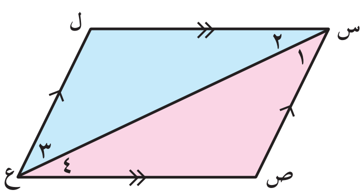
الخاصية الأولى :
في متوازي الأضلاع كل ضلعين متقابلين متطابقان .



سوف نثبت الخاصية كما يلي :

المعطيات : (١) س ص ع ل متوازي أضلاع

المطلوب : إثبات أنَّ : (١) س ص ≅ ع ل ،
(٢) س ل ≅ صع



البرهان : لإثبات ذلك نبحث عن مثلثين متطابقين .

وليكن Δ س ص ع ، Δع ل س فيهما :

(١) ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٣}$) (بالتبادل والتوازي)

(٢) ق ($\hat{٤}$) = ق ($\hat{٢}$) (بالتبادل والتوازي)

(٣) $\overline{\text{س ع}}$ (قطر متوازي الأضلاع (ضلع مشترك))

$\Leftarrow$ ∴ Δ س ص ع $\cong$ Δع ل س

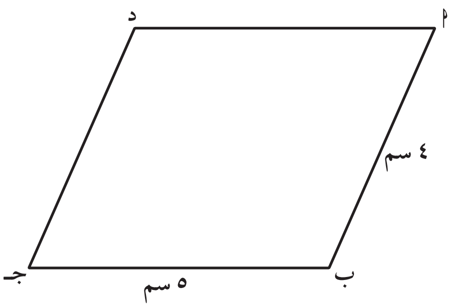
حالة التطابق هي (ز . ض . ز)

ينتج من التطابق أنَّ : $\overline{\text{س ص}}$ $\cong$ $\overline{\text{ع ل}}$ ، $\overline{\text{س ل}}$ $\cong$ $\overline{\text{ص ع}}$

∴ كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان .

تذكَّرْ أنَّ :
محيط الشكل (المضلع) الهندسي هو مجموع أطوال أضلاعه.

تدرّب (١) :



في الشكل المقابل متوازي أضلاع .

أوجد محيط متوازي الأضلاع :

لإيجاد المحيط نوجد باقي أطوال أضلاع متوازي الأضلاع :

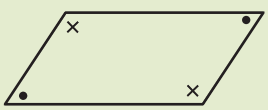
د جـ = ... السبب : ....

أ د = ... السبب : ....

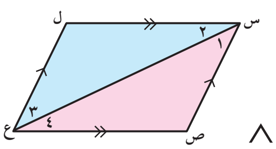
محيط متوازي الأضلاع = ...

الخاصية الثانية :

في متوازي الأضلاع كل زاويتين متقابلتين متطابقتان .



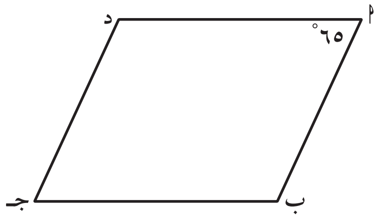
وسوف نثبت الخاصية الثانية كما في برهان الخاصية الأولى :



ينتج من التطابق أنَّ : $\hat{ص}$ $\cong$ $\hat{ل}$

∴ ق ($\hat{١}$) + ق ($\hat{٢}$) = ق ($\hat{٣}$) + ق ($\hat{٤}$) ومنه نجد أنَّ $\hat{س}$ $\cong$ $\hat{ع}$

∴ كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان .



تدرّب (٢) :

أب جـ د متوازي أضلاع . ق (أ̂) = ٦٥°

أوجد ق (ب̂) ، ق (جـ̂) ، ق (د̂)

المعطيات : (١) أب جـ د متوازي أضلاع ، (٢) ق (أ̂) = ٦٥°

المطلوب : إيجاد قياس .... ، .... ، ....

البرهان : ∵ أب جـ د متوازي أضلاع (معطى)

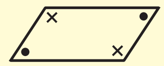
∴ ق (ب̂) = ١٨٠° − (............) = ... (لأنَّ كل زاويتين متتاليتين ....)

∴ ق (جـ̂) = ... = ... (لأنَّ كل زاويتين ....)

ق (د̂) = ... = ... (لأنَّ كل زاويتين متقابلتين ....)

تذكَّرْ أنَّ :

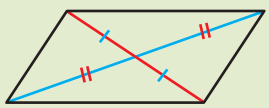
- في متوازي الأضلاع كل زاويتين متتاليتين متكاملتان .

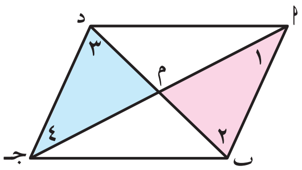


- مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمتوازي الأضلاع تساوي ٣٦٠°

الخاصية الثالثة :

في متوازي الأضلاع القطران ينصف كل منهما الآخر .





سوف نثبت الخاصية كما يلي :

المعطيات : (١) أب جـ د متوازي أضلاع تقاطع قطريه في م .

المطلوب : إثبات أنَّ : (١) م منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ ، (٢) م منتصف $\overline{\text{ب د}}$.

البرهان : لإثبات ذلك نبحث عن مثلثين متطابقين .

وليكن ∆ أم ب ، ∆ جـ م د فيهما :

(١) ق (١̂) = ق (٤̂) (بالتبادل والتوازي)

(٢) ق (٢̂) = ق (٣̂) (بالتبادل والتوازي)

(٣) أب = د جـ (من خواص متوازي الأضلاع)

⇐ ∴ ∆ أم ب ≅ ∆ جـ م د

حالة التطابق هي

(ز . ض . ز)

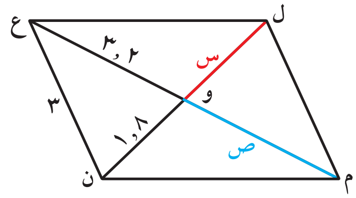
وينتج أنَّ : م أ = م جـ (أي أن : م منتصف $\overline{\text{أجـ}}$) ،

م ب = م د (أي أن : م منتصف $\overline{\text{ب د}}$)

نستنتج أنَّ : القطرين $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$ ينصف كلّ منهما الآخر .

∴ في متوازي الأضلاع القطران ينصف كلّ منهما الآخر .

تدرّب (٣) :



ل م ن ع متوازي أضلاع تقاطع قطريه في و .

أوجد : (١) س ، ص . (٢) محيط المثلث ل م و

∵ الشكل ل م ن ع .... (....................)

∴ القطران ....

∴ س = ... = ١,٨ وحدة طول ،

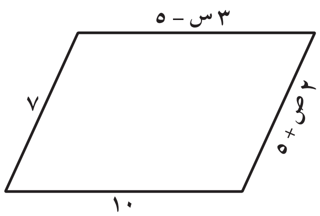
وبالمثل ص = ... = ٣,٢ وحدة طول

....

∴ محيط Δ ل م و = ...

....

تدرّب (٤) :



في متوازي الأضلاع المقابل ،

أوجد قيمة كلٍّ من س ، ص .

∵ من خواص متوازي الأضلاع كل ضلعين متقابلين متطابقان :

فيكون : $\boxed{\text{٣ س – ٥ = ١٠}}$

٣ س = ١٠ + ...

٣ س = ...

س = ...

بالمثل : $\boxed{\text{٢ ص + ٥ = ٧}}$

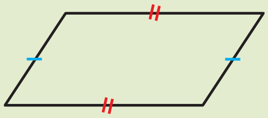
.... = ...

.... = ...

ص = ...

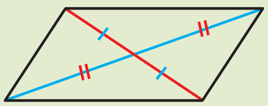
مما سبق : تحققنا من صحة خواص متوازي الأضلاع وهي :

(١) في متوازي الأضلاع كل ضلعين متقابلين متطابقان



(٢) في متوازي الأضلاع كل زاويتين متقابلتين متطابقتان

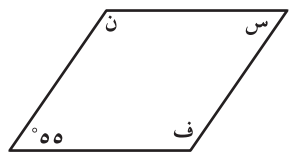
(٣) في متوازي الأضلاع القطران ينصف كلّ منهما الآخر



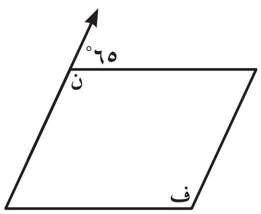
تمــرَّنْ :

١ أوجد قيمة كلٍّ من س ، ف ، ن في متوازيات الأضلاع التالية :

أ



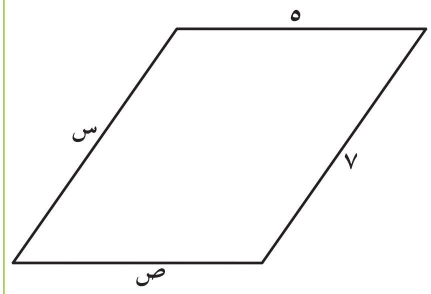
ب



٢ إذا كان أ ب جـ د متوازي أضلاع وكان الفرق بين أي زاويتين غير متقابلتين ٤٠° ، فما هو قياس الزاوية الصغرى لمتوازي الأضلاع؟

٣ أوجد الأطوال المجهولة في متوازيات الأضلاع التالية :

أ



س = ...

ص = ...

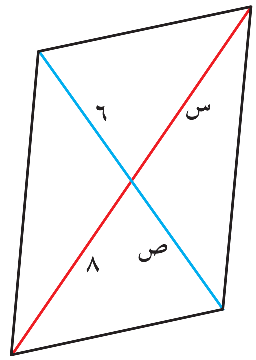
....

....

....

....

ب



س = ...

ص = ...

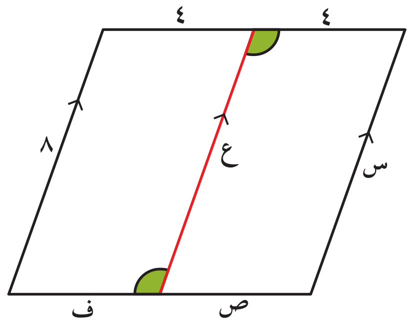
....

....

....

....

جـ



س = ...

ص = ...

ع = ...

ف = ...

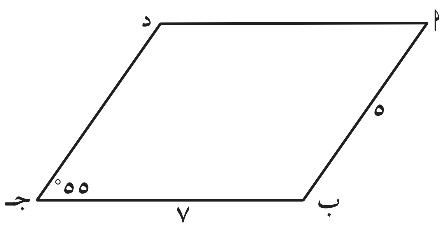
....

....

٤ ا ب جـ د متوازي أضلاع فيه ا ب = ٥ وحدة طول ،

ب جـ = ٧ وحدة طول ، ق (جـ^) = ٥٥° ،

أوجد ما يلي مع ذكر السبب :



ا د = ... السبب : ....

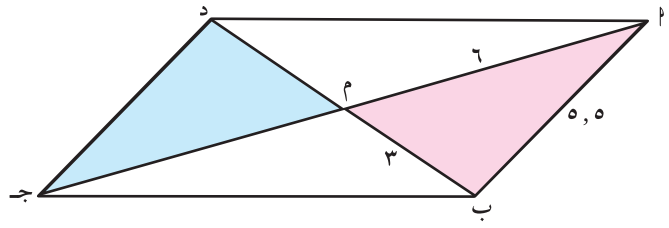
د جـ = ... السبب : ....

ق (ا^) = ... السبب : ....

ق (ب^) = ... السبب : ....

ق (د^) = ... السبب : ....

٥ ﺃ ب جـ د متوازي أضلاع تقاطع قطريه في م ، ﺃ ب = ٥,٥ وحدة طول ، ﺃ م = ٦ وحدة طول ، ب م = ٣ وحدة طول . احسب محيط Δ د م جـ .



د م = ... السبب : ....

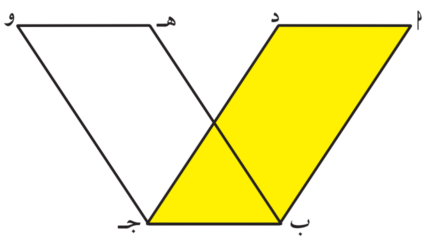
م جـ = ... السبب : ....

د جـ = ... السبب : ....

∴ محيط Δ د م جـ = ...

....

٦ ﺃ ب جـ د ، هـ ب جـ و متوازيا أضلاع ،
أثبت أن : ﺃ د = هـ و .



....

....

....

....

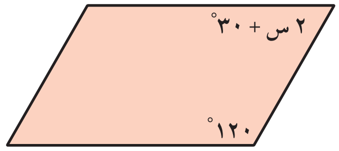
....

....

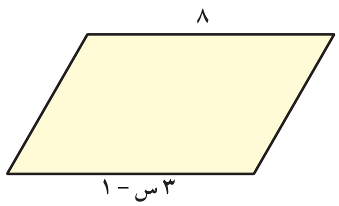
....

٧ أمامك متوازيات أضلاع ، أوجد قيمة س في كل مما يلي :

أ



ب



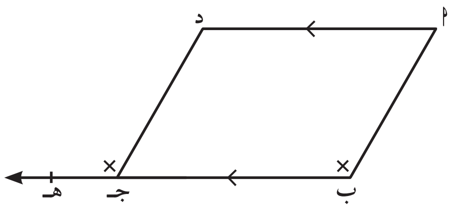
٨-٣ حالات الكشف عن متوازي الأضلاع
Conditions For a Quadrilateral To be a Parallelogram

سوف تتعلّم : متى يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع ؟

معلومات مفيدة :
يستخدم صانعو الدراجات الهوائية فكرة متوازي الأضلاع في تصميم الهيكل المعدني لها .

نشاط (١) :

تعلمت سابقًا أنّ الشكل الرباعي الذي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان يسمى متوازي أضلاع . وظف ما سبق لحل النشاط التالي :



١ ∵ $\overline{\text{أد}}$ // .... (١) (معطى)

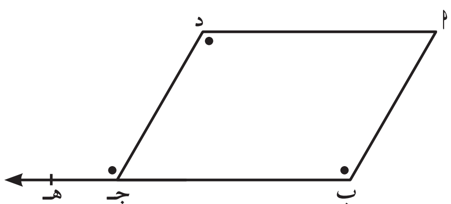
∵ ق ($\hat{\text{ب}}$) = ق (........) (معطى)

(وهما في وضع تناظر) .

∴ $\overline{\text{أب}}$ // .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع

لأنّ فيه ....



٢ ∵ ق ($\hat{\text{ب}}$) = ق (........)

(وهما في وضع ....)

∴ .... // $\overline{\text{دجـ}}$ (١)

∵ ق ($\hat{\text{د}}$) = ق (د $\hat{\text{جـ}}$ هـ)

(وهما في وضع ....)

∴ .... // .... (٢)

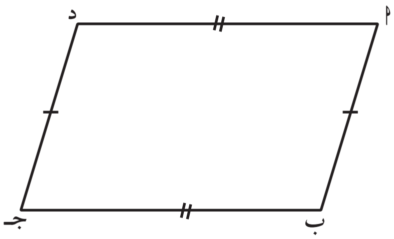
من (١) ، (٢) ينتج أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د ....

لأنّ فيه ....

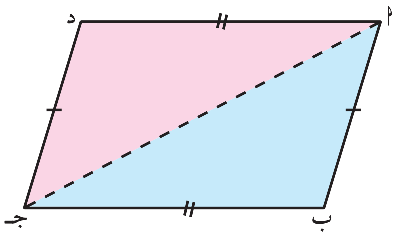
يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان (من التعريف).

سوف ندرس الأربع حالات للكشف عن متوازي الأضلاع .

الحالة الأولى : لإثبات أنَّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع .



سنتحقق معًا بأنَّ الشكل الرباعي الذي فيه كل ضلعين متقابلين متطابقان كحد أدنى من المعطيات تكفي لنقول إنَّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع .



المعطيات : (١) ﺃب جـ د شكل رباعي

(٢) ﺃب ≅ د جـ ، ﺃد ≅ ب جـ

المطلوب : إثبات أنَّ ﺃب جـ د متوازي أضلاع

العمل : نرسم ﺃجـ قطرًا في الشكل

البرهان : (نبحث عن زوايا (متبادلة – متناظرة – متتالية) تؤدي إلى التوازي من خلال تطابق مثلثين) .

Δ ﺃب جـ ، Δ ﺃد جـ فيهما :

(١) ﺃب ≅ د جـ	(معطى)	∴ Δ ﺃب جـ ≅ Δ جـ د ﺃ
(٢) جـ ب ≅ ﺃد	(معطى)	(ض . ض . ض)
(٣) ﺃجـ ضلع مشترك	(عملًا)	

وينتج من التطابق أنَّ : ب ﺃ جـ ≅ د جـ ﺃ (وهما في وضع تبادل) ، ∴ ﺃب // جـ د ،

ﺃ جـ ب ≅ د ﺃ جـ (وهما في وضع تبادل) ، ∴ ب جـ // ﺃد

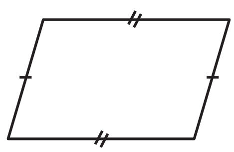
مما سبق ينتج أنَّ ﺃب جـ د متوازي أضلاع .

الحالة الأولى : إذا كان في الشكل الرباعي **كل ضلعين متقابلين متطابقين** فإنَّ الشكل يكون متوازي أضلاع .

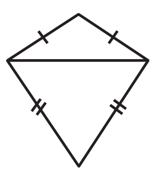
تدرّب (١) :

أي من الأشكال الرباعية التالية وحسب البيانات المدونة عليها يمكن أن تكون متوازي أضلاع ؟ ولماذا ؟

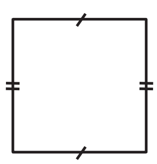
أ



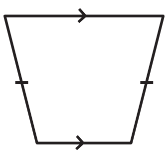
ب



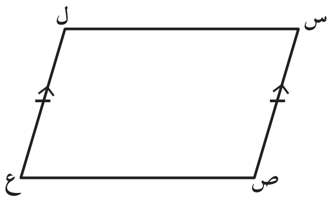
جـ



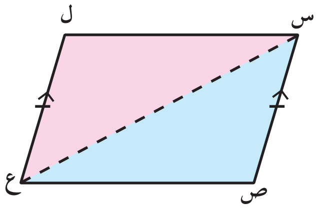
د



الحالة الثانية : لإثبات أنَّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع .



هل المعطيات في الشكل المقابل تكفي لأن يكون الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع ؟



المعطيات : (١) س ص ع ل شكل رباعي

(٢) $\overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{ل ع}}$ ، $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ل ع}}$

المطلوب : إثبات أنَّ س ص ع ل متوازي أضلاع

العمل : نرسم $\overline{\text{س ع}}$ قطرًا في الشكل

البرهان : **(نبحث عن مثلثين يضم أحدهما $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{س ع}}$ والآخر يضم $\overline{\text{ل ع}}$ ، $\overline{\text{س ع}}$ ونثبت تطابقهما) .**

Δ س ص ع ، Δ ع ل س فيهما :

(١) $\overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{ل ع}}$ **(فرضًا)**

(٢) ص $\hat{\text{س}}$ ع $\cong$ ل $\hat{\text{ع}}$ س **(بالتبادل والتوازي)**

(٣) $\overline{\text{س ع}}$ ضلع مشترك **(عملًا)**

$\Leftarrow$ ∴ Δ س ص ع $\cong$ Δ ع ل س

(ض . ز . ض)

وينتج من التطابق أنَّ : س $\hat{\text{ع}}$ ص $\cong$ ع $\hat{\text{س}}$ ل (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{\text{ل س}} \parallel \overline{\text{ص ع}}$ (١) ، ∵ $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ل ع}}$ **(معطى)** (٢)

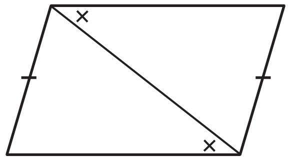
∴ **من (١) ، (٢) ينتج أنَّ س ص ع ل متوازي أضلاع .**

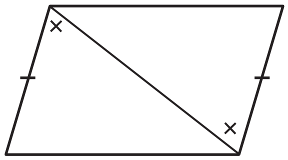
وعلى ذلك نقول : نعم المعطيات في الشكل تكفي لأن يكون الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع .

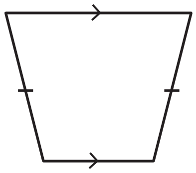
الحالة الثانية : إذا كان في الشكل الرباعي ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان فإنَّ الشكل يكون متوازي أضلاع .

تدرّب (٢) :

أي من الأشكال الرباعية التالية وحسب البيانات المدونة عليها يمكن أن تكون متوازي أضلاع ؟

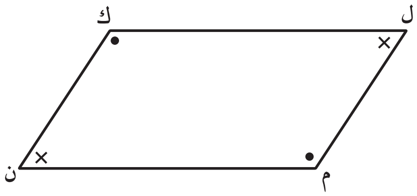
١ 

٢ 

٣ 

الحالة الثالثة : لإثبات أنَّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع .

هل المعطيات في الشكل المقابل تكفي لأن يكون الشكل الرباعي ل م ن ك متوازي أضلاع ؟



المعطيات : (١) ل م ن ك شكل رباعي

(٢) ق (ل̂) = ق (ن̂) ، ق (م̂) = ق (ك̂)

المطلوب : إثبات أنَّ ل م ن ك متوازي أضلاع

البرهان : ∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي يساوي ٣٦٠°

∴ ق (ل̂) + ق (ن̂) + ق (م̂) + ق (ك̂) = ٣٦٠°

ولكن ق (ل̂) = ق (ن̂) ، ق (م̂) = ق (ك̂) (فرضًا)

∴ ٢ ق (ل̂) + ٢ ق (م̂) = ٣٦٠° (بالقسمة على ٢)

∴ ق (ل̂) + ق (م̂) = ١٨٠° (ل̂ ، م̂ متكاملتان)

∵ ل̂ ، م̂ متتاليتان وفي جهة واحدة من القاطع ل م .

∴ ل ك // م ن (١)

وبالطريقة نفسها يمكننا إثبات أنَّ ل م // ك ن (٢) (بتطبيق الخطوات السابقة على م̂ ، ن̂)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أنَّ ل م ن ك متوازي أضلاع .

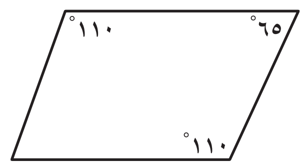
وعلى ذلك نقول : نعم المعطيات في الشكل تكفي لأن يكون الشكل الرباعي ل م ن ك متوازي أضلاع .

الحالة الثالثة : إذا كان في الشكل الرباعي كل زاويتين متقابلتين متطابقتين فإنَّ الشكل يكون متوازي أضلاع .

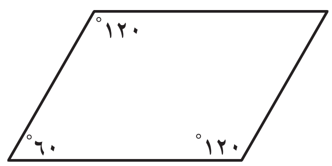
لاحظ أنَّ : الشكل الرباعي يكون متوازي أضلاع إذا كانت كل زاويتين متتاليتين فيه متكاملتين .

تدرّب (٣) :

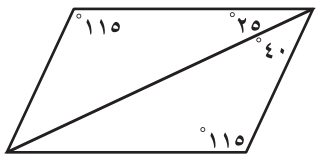
أي من الأشكال الرباعية التالية وحسب البيانات المدونة عليها يمكن أن تكون متوازي أضلاع :



....

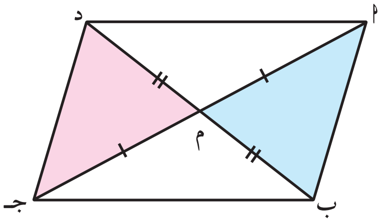


....



....

الحالة الرابعة : لإثبات أنَّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع.



هل المعطيات في الشكل المقابل تكفي لأن يكون الشكل الرباعي ا ب جـ د متوازي أضلاع ؟

المعطيات : (١) ا ب جـ د شكل رباعي

(٢) ا م = جـ م ، ب م = د م

المطلوب : إثبات أنَّ ا ب جـ د متوازي أضلاع .

البرهان : (نبحث عن مثلثين يضم أحدهما $\overline{\text{م ا}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ والآخر يضم $\overline{\text{م جـ}}$ ، $\overline{\text{م د}}$ ونثبت تطابقهما).

Δ ا ب م ، Δ جـ د م فيهما :

(١) ا م = جـ م (فرضًا)

(٢) ب م = د م (فرضًا)

(٣) ق (ا $\hat{\text{م}}$ ب) = ق (جـ $\hat{\text{م}}$ د) (بالتقابل بالرأس)

⇐ ∴ Δ ا م ب ≅ Δ جـ م د (ض . ز . ض)

وينتج من التطابق أنَّ :

ق (ب $\hat{\text{ا}}$ م) = ق (د $\hat{\text{جـ}}$ م) (وهما في وضع تبادل) ، ∴ $\overline{\text{ا ب}}$ // $\overline{\text{جـ د}}$ (١)

وبنفس الطريقة يمكن من تطابق المثلثين ا م د ، جـ م ب نثبت أنَّ $\overline{\text{ا د}}$ // $\overline{\text{جـ ب}}$ (٢)

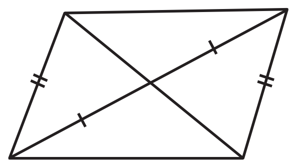
∴ من (١) ، (٢) ينتج أنَّ ا ب جـ د متوازي أضلاع .

الحالة الرابعة : إذا كان في الشكل الرباعي **القطران ينصف كلّ منهما الآخر** فإنَّ الشكل يكون متوازي أضلاع .

تدرّب (٤) :

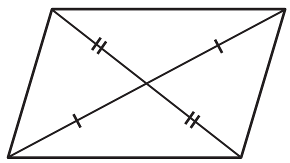
أي من الأشكال الرباعية التالية حسب البيانات المدونة عليها يمكن أن تكون متوازي أضلاع ؟

أ



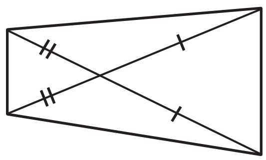
....

ب



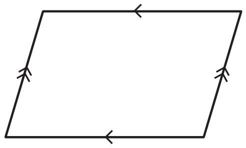
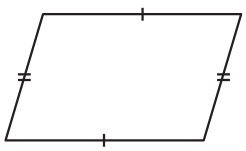
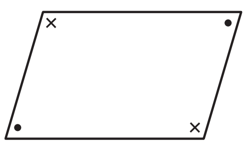
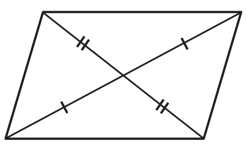
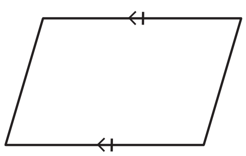
....

جـ



....

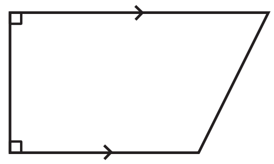
مما سبق نجد أنَّه : يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا توفرت أحد الشروط التالية :

١ كل ضلعين متقابلين متوازيين (من التعريف) .	
٢ كل ضلعين متقابلين متطابقين .	
٣ كل زاويتين متقابلتين متطابقتين .	
٤ القطران ينصف كل منها الآخر .	
٥ ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان .	

تدرّب (٥) :

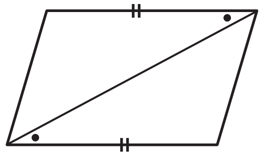
ضع علامة (✓) أسفل الشكل الذي يمثل متوازي أضلاع وفق المعطيات المبينة عليه مع ذكر السبب :

أ



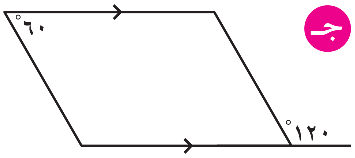
....

ب



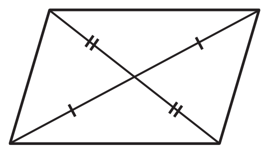
....

جـ



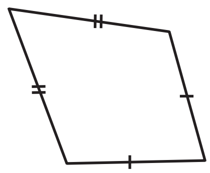
....

د



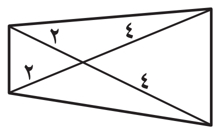
....

هـ



....

و

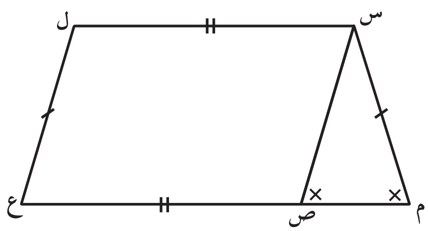


....

مثال (١) : إذا كان س ل = ص ع ، س م = ل ع ، $\hat{\text{م}}$ ≅ $\widehat{\text{س ص م}}$ ،

برهن أنَّ الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع .

الحلّ :



المعطيات : (١) س ل = ص ع

(٢) س م = ل ع

(٣) $\hat{\text{م}}$ ≅ $\widehat{\text{س ص م}}$

المطلوب : إثبات أنَّ الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع .

البرهان : في Δ س م ص ، $\hat{\text{م}}$ ≅ $\widehat{\text{س ص م}}$ (فرضًا)

∴ Δ س م ص متطابق الضلعين فيه س م = س ص

∵ س م = ل ع (فرضًا)

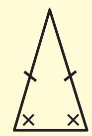
∴ س ص = ل ع (من خواص المساواة) (١)

∵ س ل = ص ع (فرضًا) (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أنَّ :

س ص ع ل متوازي أضلاع لأنَّه (شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متطابقان) .

تذكَّرْ أنَّ :
إذا كان المثلث متطابق الضلعين ، فإن زاويتي القاعدة فيه متطابقتان ، والعكس صحيح .

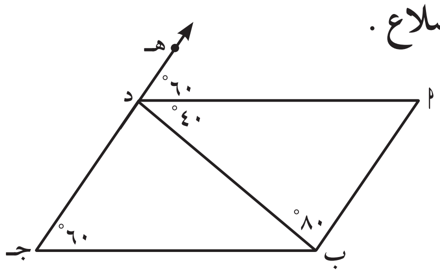


تذكَّرْ أنَّ :
خواص المساواة :
إذا كان ء ، ب ، جـ أعداد نسبية ، وكان ء = ب فإن :
ء + جـ = ب + جـ
ء − جـ = ب − جـ
ء × جـ = ب × جـ
ء ÷ جـ = ب ÷ جـ ، جـ ≠ ٠

ملاحظة :
إذا كان ء = ب ، ب = جـ فإن ء = جـ

تدرّب (٦) :

برهن على أنَّ الشكل الرباعي ٱ ب جـ د متوازي أضلاع .



المعطيات : ٱ ب جـ د شكل رباعي ،

(١) ق (ٱ د̂ هـ) = ق (جـ̂) = ٦٠°

(٢) ق (ٱ ب̂ د) = ٨٠°

(٣) ق (ٱ د̂ ب) = ٤٠°

المطلوب : إثبات أنَّ الشكل الرباعي ٱ ب جـ د متوازي أضلاع .

البرهان : ق (ٱ د̂ هـ) = ق (..........^) = ٦٠° (وهما في وضع ....)

∴ ٱد // .... (١)

في Δ ٱ ب د ، ق (ٱ̂) = ١٨٠° − (..........° + ...°)

= ١٨٠° − ....° = ...° لأنَّ ....

....

∵ ق (ٱ د̂ هـ) = ق (..........^) = ... (وهما في وضع تبادل)

∴ .... // د جـ (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أن :

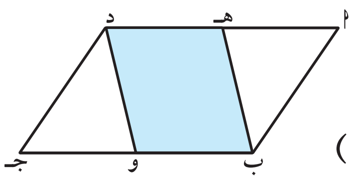
ٱ ب جـ د متوازي أضلاع لأنَّه (شكل رباعي فيه كل ....)

• فكر في طرق أخرى للحل .

....

....

مثال (٢) : إذا كان ٱ ب جـ د متوازي أضلاع فيه هـ منتصف ٱد ، و منتصف ب جـ
برهن أنَّ الشكل الرباعي هـ ب و د متوازي أضلاع .



المعطيات : ٱ ب جـ د متوازي أضلاع ،

(١) ٱ هـ = هـ د (هـ منتصف ٱد)

(٢) ب و = و جـ (و منتصف ب جـ)

المطلوب : إثبات أنَّ الشكل الرباعي هـ ب و د متوازي أضلاع .

الحلّ :

البرهان : ∵ ٰا ب جـ د متوازي أضلاع (فرضًا)

∴ ٰا د = ب جـ (من خواص متوازي الأضلاع)

∴ $\frac{1}{2}$ ٰا د = $\frac{1}{2}$ ب جـ (من خواص المساواة)

∵ هـ منتصف ٰا د ، و منتصف ب جـ (فرضًا)

∴ هـ د = ب و (١)

∵ ٰا د // ب جـ (من خواص متوازي الأضلاع)

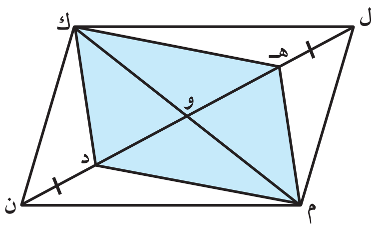
∵ هـ ∈ ٰا د ، و ∈ ب جـ

∴ هـ د // ب و (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أنَّ :

ٰا ب جـ د متوازي أضلاع لأنَّه (شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان)

تدرّب (٧) :



إذا كان ل م ن ك متوازي أضلاع تقاطع قطريه في و ، ل هـ = ن د ،

برهن أنَّ الشكل الرباعي هـ م د ك متوازي أضلاع .

المعطيات : ل م ن ك متوازي أضلاع ، ل هـ = ...

المطلوب : إثبات أنَّ الشكل الرباعي هـ م د ك متوازي أضلاع .

البرهان : ∵ ل م ن ك متوازي أضلاع (فرضًا)

∴ م و = ... (من خواص متوازي الأضلاع) (١)

∴ .... = و ن (من خواص متوازي الأضلاع)

∵ ل هـ = ن د (معطى)

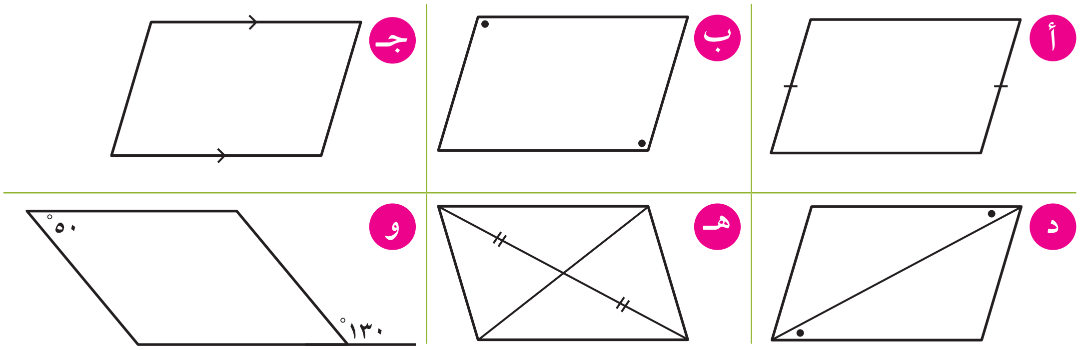
∴ ل و − ل هـ = و ن − د ن (من خواص المساواة)

∴ هـ و = ... (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أنَّ هـ م د ك متوازي أضلاع (....................................)

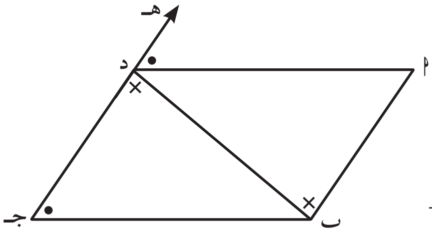
تمـــرَّنْ :

١ أضف معطى واحدًا فقط من عندك يجعل كلًّا من الأشكال التالية متوازي أضلاع :



٢ من البيانات على الشكل المقابل :

أثبت أنَّ أ ب جـ د متوازي أضلاع .



....

....

....

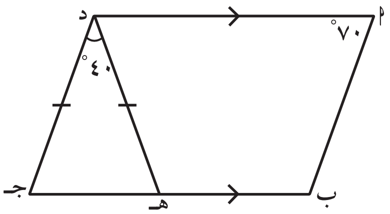
....

٣ في الشكل المقابل : أد // ب جـ ،

د هـ = د جـ ، ق (أ̂) = ٧٠° ،

ق (هـ د̂ جـ) = ٤٠° ،

برهن أنَّ الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع .



....

....

....

....

....

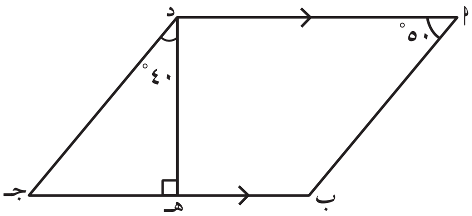
....

٤ إذا كان أ ب جـ د شكل رباعي فيه أ د // ب جـ ،

د هـ ⊥ ب جـ ، ق (أ) = ٥٠° ،

ق (هـ د جـ) = ٤٠° ، فبرهن أنَّ

الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع .

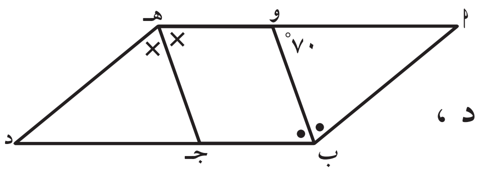


٥ إذا كان أ ب د هـ متوازي أضلاع ،

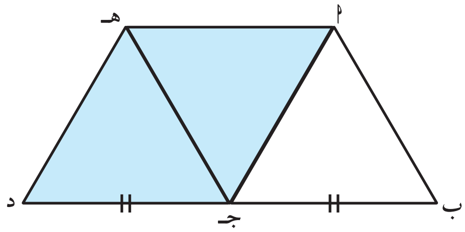
ب و منصف أ ب د ، هـ جـ منصف أ هـ د ،

ق (أ و ب) = ٧٠° ،

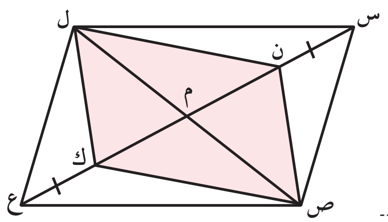
فبرهن أنَّ الشكل الرباعي و ب جـ هـ متوازي أضلاع .



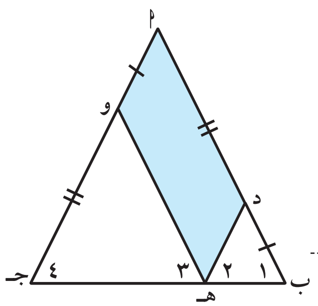
6 إذا كان أ ب جـ هـ متوازي أضلاع ،
ب جـ = جـ د ، ب ، جـ ، د على استقامة واحدة ، فبرهن أنَّ الشكل الرباعي أ جـ د هـ متوازي أضلاع .



7 إذا كان ن ص ك ل متوازي أضلاع
تقاطع قطريه في م ، س ن = ك ع ، فأثبت أنَّ الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع .



8 في الشكل المقابل : ق ($\hat{1}$) = ق ($\hat{2}$) ،
ق ($\hat{3}$) = ق ($\hat{4}$) ، أ د = و جـ ، أ و = د ب ،
برهن أنَّ أ د هـ و متوازي أضلاع .



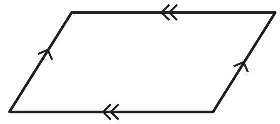
٨-٤ المستطيل (خواصه والكشف عنه)
Exploring Rectangle and its Properties

سوف تتعلّم : خواص المستطيل والشروط التي يكون فيها متوازي الأضلاع مستطيلًا .

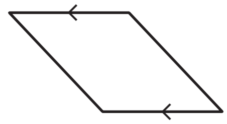
نشاط (١) :

تأمل الأشكال الأربعة التالية :

(١)

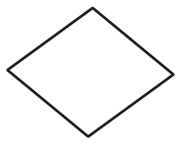


(٢)



(٣)

(٤)



أ اذكر أوجه الشبه والاختلاف بين الشكل (٣) والأشكال الأخرى :

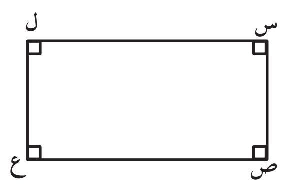
الشكل	(١)	(٢)	(٤)
أوجه الشبه			
أوجه الاختلاف			

تذكَّرْ أنَّ :
- زوايا المستطيل قوائم .
- أقطاره متطابقة .

ب يسمى الشكل (٣) ....

جـ .... هو شكل رباعي زواياه الأربع قوائم .

هل المستطيل متوازي أضلاع ؟ لمعرفة ذلك :



لاحظ أنَّ : س ص ع ل مستطيل

(شكل رباعي زواياه الأربع قوائم) فيه :

$\because$ ق ($\widehat{\text{س}}$) = ق ($\widehat{\text{ص}}$) = ٩٠° (وهما زاويتان في وضع متتاليتين ومتكاملتين)

$\therefore$ $\overline{\text{س ل}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ ،

كذلك $\because$ ق ($\widehat{\text{س}}$) = ق ($\widehat{\text{ل}}$) = ٩٠° (وهما زاويتان في وضع متتاليتين ومتكاملتين)

$\therefore$ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ل ع}}$ ،

نستنتج مما سبق أنَّ : المستطيل يكون متوازي أضلاع .

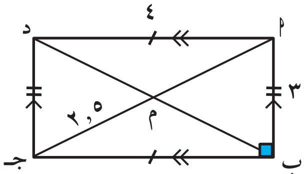
فكِّر وناقِش

هل يمكن إثبات أنَّ المستطيل متوازي أضلاع بطريقة أخرى ؟ وضّح ذلك .

الآن يمكن أن نعطي تعريفًا بسيطًا للمستطيل :

المستطيل هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة وله جميع خواص متوازي الأضلاع .

تدرّب (١) :



أ ب جـ د مستطيل فيه : ق ($\hat{\text{ب}}$) = ٩٠° ،

أ ب = ٣ ، أ د = ٤ ، م جـ = ٢,٥

أكمل ما يلي :

١ د جـ = ... لأن ....

٢ أ جـ = ... لأن ....

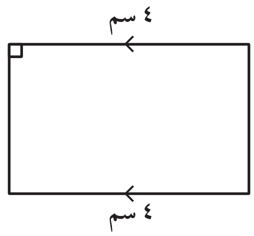
٣ ق ($\hat{\text{د}}$) = ... لأن ....

٤ ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ... لأن ....

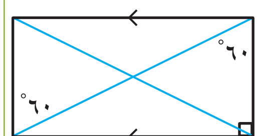
تدرّب (٢) :

استخدم المعطيات (موظفًا التعريف) التي على الأشكال لتبين أيًّا منها تمثل مستطيلًا .

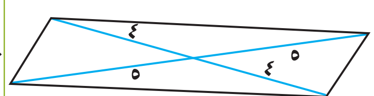
أ



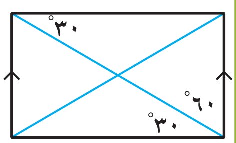
ب



جـ



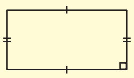
د



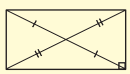
تذكَّرْ أنَّ :

للمستطيل الخواص التالية :

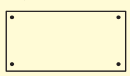
١ – كل ضلعين متقابلين متطابقان .



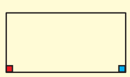
٢ – القطران ينصف كل منهما الآخر .



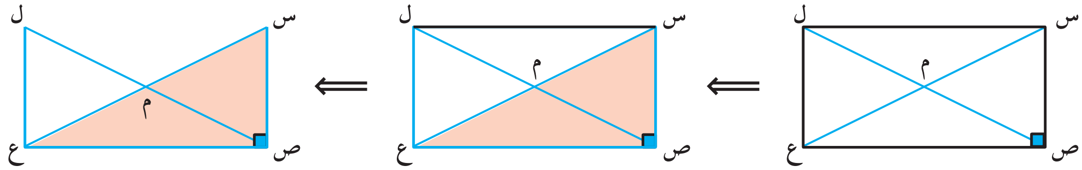
٣ – كل زاويتين متقابلتين متساويتان في القياس (زواياه الأربع قوائم) .



٤ – كل زاويتين متتاليتين متكاملتان .



سنبحث الآن ما إذا كان للمستطيل خواص أخرى خاصة به غير أنَّ زواياه قائمة ، وسوف نبيِّن أنَّ قطري المستطيل متطابقان .



المعطيات : (١) س ص ع ل مستطيل

(٢) $\overline{\text{س ع}}$ ، $\overline{\text{ص ل}}$ قطران في المستطيل

المطلوب : إثبات أن س ع = ص ل

البرهان : سنبحث عن مثلثين في المستطيل س ص ع ل يحتويان على قطريه ، وسوف نبيِّن أنَّ هذين المثلثين متطابقان .

Δ س ص ع ، Δ ل ع ص فيهما :

(١) س ص = ل ع (من خواص المستطيل)

(٢) $\overline{\text{ص ع}}$ (ضلع مشترك)

(٣) ق ($\hat{\text{ص}}$) = ق ($\hat{\text{ع}}$) (من خواص المستطيل)

$\Leftarrow$ Δ س ص ع $\cong$ Δ ل ع ص (ض . ز . ض)

وينتج من التطابق $\overline{\text{س ع}} \cong \overline{\text{ص ل}}$

نستنتج مما سبق أنَّ : قطري المستطيل متطابقان

فكِّر وناقِش

المستطيل متناظر (متماثل) حول نقطة تقاطع قطريه . فسّر ذلك .

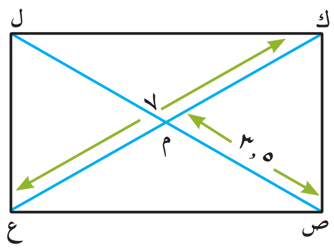
الكشف عن المستطيل

مما سبق نقول إنَّ متوازي الأضلاع يكون مستطيلًا إذا توفرت فيه أحد الشروط التالية :

(١) إحدى زواياه قائمة .

(٢) قطراه متطابقان .

تدرّب (٣) :



ك ص ع ل متوازي أضلاع فيه : ك ع = ٧ وحدة طول ،
ص م = ٣,٥ وحدة طول .

أثبت أنَّ : ك ص ع ل مستطيل

المعطيات : (١) ك ص ع ل متوازي أضلاع

(٢) ك ع = ٧ وحدة طول ، ص م = ٣,٥ وحدة طول

المطلوب : إثبات أنَّ ك ص ع ل مستطيل

البرهان : ∵ ك ص ع ل .... (معطى)

∴ ص م = ... = ... ، القطران ....

∴ ص ل = ...

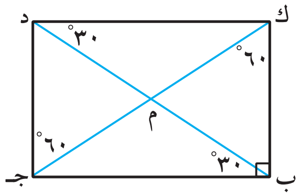
∴ ك ع = ... = ٧ ، القطران ....

∴ الشكل ك ص ع ل .... لأنَّ

ك ص ع ل شكل متوازي أضلاع فيه ....

تذكَّرْ أنَّ :
إذا توازى مستقيمان وقطعهما مستقيم ثالث فإنَّ :
الزوايا المتبادلة متساوية في القياس .

تدرّب (٤) :



في الشكل المقابل أثبت أنَّ : ك ب جـ د مستطيل .

البرهان :

∵ ق (ك $\hat{د}$ ب) = ق (....................) (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{ك د}$ // .... (١)

∵ ق (ب $\hat{ك}$ جـ) = ق (....................) (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{ك ب}$ // .... (٢)

∴ من (١) ، (٢) الشكل متوازي أضلاع ،

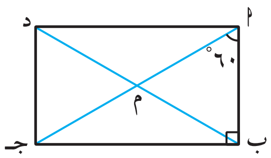
∵ ق (ك $\hat{ب}$ جـ) = ...

∴ الشكل مستطيل لأنّه متوازي أضلاع إحدى زواياه ....

فكِّر وناقِش

يرى المتعلّم بدر أنَّ جميع متوازيات الأضلاع هي مستطيلات ، ولكن المتعلّم أمير يرى أنَّ متوازيات الأضلاع مستطيلات إذا توافرت فيها شروط معينة . ما رأيك ؟ فسّر إجابتك .

تمــرَّنْ :



١ أ ب جـ د مستطيل فيه : ق (ب $\hat{أ}$ جـ) = ٦٠° ،
احسب ق (د $\hat{ب}$ جـ) .

....

....

....

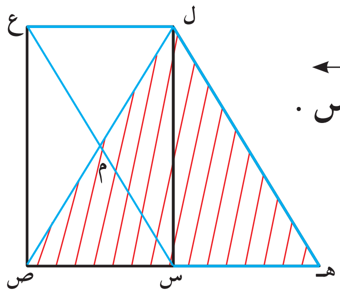
....

....

....

٢ س ص ع ل مستطيل ، هـ س ع ل متوازي أضلاع ،

أثبت أنَّ : Δ ل ص هـ متطابق الضلعين ، هـ $\in$ ص س .

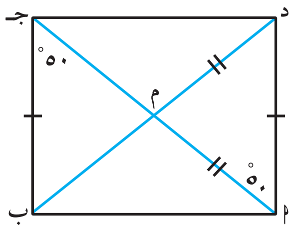


٣ ﺃ ب جـ د شكل رباعي يتقاطع قطراه في م

ﺃ د = ب جـ ، م د = م ﺃ ،

ق (د $\hat{ﺃ}$ جـ) = ق (ب $\hat{جـ}$ ﺃ) = ٥٠° ،

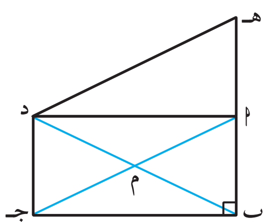
أثبت أنَّ : ﺃ ب جـ د مستطيل ، ثم أوجد ق (ب $\hat{ﺃ}$ جـ) .



٤ هـ ﺃ جـ د متوازي أضلاع ، ق (ﺃ $\hat{ب}$ جـ) = ٩٠° ،

$\overline{\text{ﺃ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، هـ ، ﺃ ، ب على استقامة واحدة .

أثبت أنَّ : ﺃ ب جـ د مستطيل .



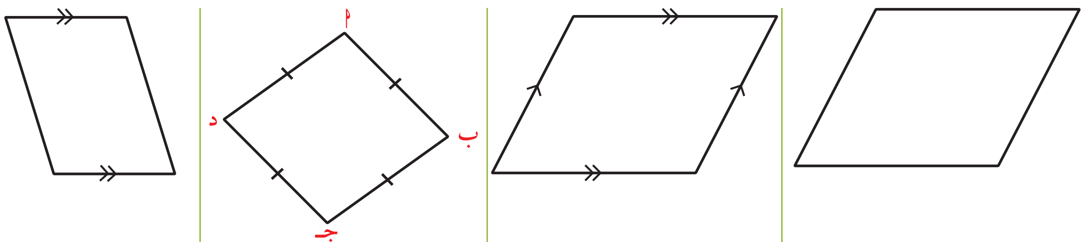
٨-٥ المعين (خواصه والكشف عنه)
Exploring Rhombus and its Properties

سوف تتعلّم : خواص المعين والشروط التي يكون فيها متوازي الأضلاع معينًا .

نشاط :

> **تذكر أنَّ :**
> المعين هو شكل رباعي أضلاعه الأربعة متطابقة .

١ في الأشكال الرباعية التالية ، بم يتميز الشكل (٣) عن الأشكال الأخرى :



شكل (١)   شكل (٢)   شكل (٣)   شكل (٤)

يتميز الشكل الرباعي (٣) بوجود أ ب = ... = ... = أ د

٢ ماذا نسمي الشكل (٣) ؟ ....

هل المعين متوازي أضلاع؟ لمعرفة ذلك لاحظ أنَّ :

أ ب = د جـ   (فرضًا) (١)

أ د = ب جـ   (فرضًا) (٢)

∴ من (١) ، (٢) نستنتج أنَّ كل ضلعين متقابلين متطابقان .

∴ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع .

∴ المعين أ ب جـ د متوازي أضلاع وله جميع خواص متوازي الأضلاع .

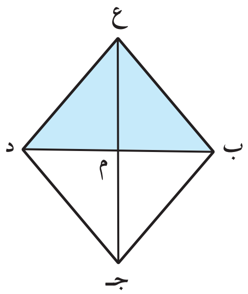
> **تذكر أنَّ :**
> خواص متوازي الأضلاع هي كالتالي :
> ١ – كل ضلعين متقابلين متطابقان .
> ٢ – كل زاويتين متقابلتين متطابقتان .
> ٣ – كل زاويتين متتاليتين متكاملتان .
> ٤ – القطران ينصف كل منهما الآخر .

سنبحث الآن ما إذا كان للمعين خواص أخرى وسوف نبيِّن أنَّ :

١ المعين قطراه متعامدان .

٢ كل قطر في المعين ينصف زاويتي الرأس الواصل بينهما .

ع ب جـ د معين تقاطع قطريه في م ،



أثبت أنَّ القطرين متعامدان $\overline{\text{ع جـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$.

المعطيات : ع ب جـ د معين ، م منتصف القطرين .

المطلوب : إثبات أنَّ القطرين متعامدان .

البرهان : لإثبات أنَّ القطرين متعامدان سوف نبحث عن مثلثين يحويان $\overline{\text{ع جـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$ **(أو جزءًا منهما) .**

نأخذ المثلثين : Δ ع م ب ، Δ ع م د فيهما :

(١) $\overline{\text{ع ب}} \cong \overline{\text{ع د}}$ (من خواص المعين)

(٢) $\overline{\text{ع م}}$ (ضلع مشترك)

(٣) $\overline{\text{ب م}} \cong \overline{\text{د م}}$ (من خواص المعين)

$\Leftarrow$ ∴ Δ ع م ب $\cong$ Δ ع م د
بحالة (ض . ض . ض)

ومنه نجد أنَّ ق (ع $\hat{\text{م}}$ ب) = ق (ع $\hat{\text{م}}$ د) = $\frac{١٨٠^\circ}{٢}$ = ٩٠° **(بالتجاور على مستقيم واحد)**

∴ **القطران متعامدان** $\overline{\text{ع جـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$ $\Leftarrow$ **قطرا المعين متعامدان .**

كذلك ينتج من التطابق : ∵ ق (ب $\hat{\text{ع}}$ م) = ق (د $\hat{\text{ع}}$ م)

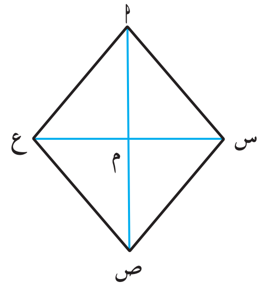
∴ $\overrightarrow{\text{ع م}}$ منصف (ب $\hat{\text{ع}}$ د)

بالمثل نقوم بمطابقة بقية المثلثات لنستنتج أنَّ :

كل قطر في المعين ينصف زاويتي الرأس الواصل بينهما .

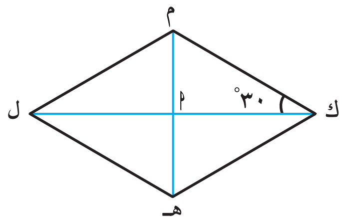
تدرّب (١) :

في الأشكال التالية معينات ، أوجد المطلوب مع ذكر السبب :



ق (س م̂ أ) = ...

السبب :..................................



ق (م ك̂ هـ) = ...

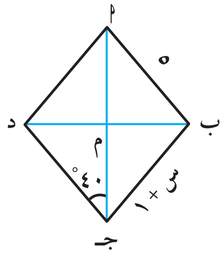
السبب :..................................

ق (م ل̂ هـ) = ...

السبب :..................................

ق (ل هـ̂ ك) = ...

السبب :..................................



طول $\overline{\text{ب جـ}}$ = ...

السبب :..................................

أوجد قيمة س :

س + ١ = ...

س = ...

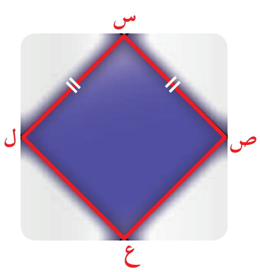
محيط المعين = ...

الكشف عن المعين

ما الشروط التي تجعل متوازي الأضلاع معينًا ؟

الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع فيه :

أولًا : $\overline{\text{س ص}}$ ≅ $\overline{\text{س ل}}$



أكمل ما يلي :

∵ س ص ع ل متوازي أضلاع فإن :

$\overline{\text{س ص}}$ ≅ $\overline{\text{ل ع}}$ (كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان)

$\overline{\text{س ل}}$ ≅ $\overline{\text{ص ع}}$ (كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان)

∵ $\overline{\text{س ص}}$ ≅ $\overline{\text{س ل}}$ (معطى)

∴ س ص = س ل = ل ع = ع ص (من خواص المساواة)

∴ س ص ع ل شكل رباعي أضلاعه الأربعة متطابقة فهو معين .

نلاحظ أنَّ : يكون متوازي الأضلاع معينًا إذا تطابق فيه ضلعان متجاوران .

معلومات مفيدة :

يستخدم البناؤون الأشكال الهندسية ، كالمربعات ، المستطيلات ، المثلثات ... إلخ في تنفيذ الفسيفساء .

ثانيًا : $\overline{\text{س ع}} \perp \overline{\text{ص ل}}$

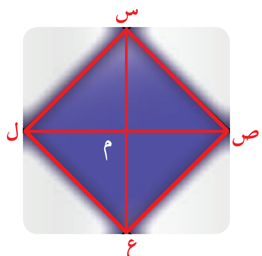
Δ س م ص ، Δ س م ل فيهما :

$\overline{\text{س م}}$ (ضلع مشترك)

ص م = ل م (قطرا متوازي الأضلاع متناصفان)

ق (س $\hat{\text{م}}$ ص) = ق (س $\hat{\text{م}}$ ل) = ٩٠° (فرضًا)

⇐ ∴ Δ س م ص $\cong$ Δ س م ل بحالة (ض . ز . ض)



∴ $\overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{س ل}}$

∵ س ص ع ل متوازي أضلاع

∴ س ص = ص ع = ل ع = س ل

∴ س ص ع ل شكل رباعي فيه أضلاعه الأربعة متطابقة فهو معين .

نلاحظ أنّ : يكون متوازي الأضلاع معين إذا تعامد قطراه .

مما سبق نلاحظ أنَّه يكون متوازي الأضلاع **معينًا** إذا توفر فيه أحد الشرطين التاليين :

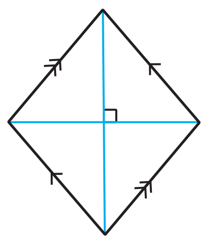
(١) إذا تطابق ضلعان متجاوران فيه .

(٢) إذا تعامد قطراه .

تدرّب (٢) :

أي الأشكال التالية يمثل معينًا مع ذكر السبب ؟

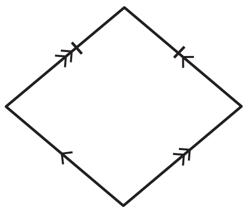
أ



....

....

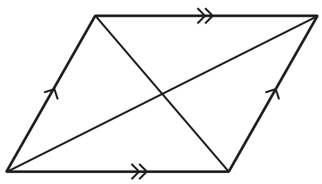
ب



....

....

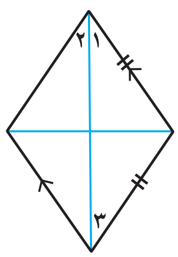
جـ



....

....

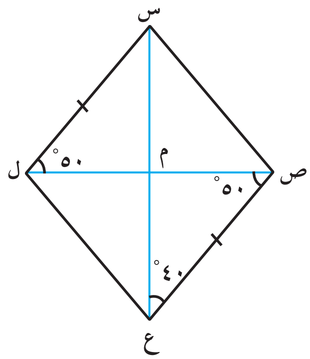
د



....

....

تدرّب (٣) :



في الشكل المقابل :

ق (س $\hat{ل}$ ص) = ق (ع $\hat{ص}$ ل) = ٥٠° ،

ق (ص $\hat{ع}$ س) = ٤٠° ، س ل = ص ع .

أثبت أنَّ الشكل الرباعي س ص ع ل معين .

المعطيات :

(١) س ل = ...

(٢) ق (س $\hat{ل}$ ص) = ق (..................) = ٥٠°

(٣) ق (ص $\hat{ع}$ س) = ...

المطلوب : إثبات أنَّ الشكل س ص ع ل ....

البرهان :

∵ س ل = ... (فرضًا) (١)

∵ ق (س $\hat{ل}$ ص) = ق (..................$\hat{}$) = ٥٠° (وهما في وضع ....)

∴ $\overline{\text{س ل}}$ // .... (٢)

∴ من (١) ، (٢) يكون الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع لأنَّ فيه ضلعين متقابلين .... ، .... (٣)

في Δ ص م ع فيه :

∵ ق (ع $\hat{ص}$ م) = ... (فرضًا) ، ∵ ق (ص $\hat{ع}$ م) = ... (فرضًا)

∴ ق (ص $\hat{م}$ ع) = ١٨٠° – (.......... + ٥٠°) = ... (مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي ١٨٠°)

ومنه نستنتج أن : $\overline{\text{س ع}}$ ⊥ ....

∴ القطران متعامدان (٤)

∴ من (٣) ، (٤) الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع قطراه متعامدان .

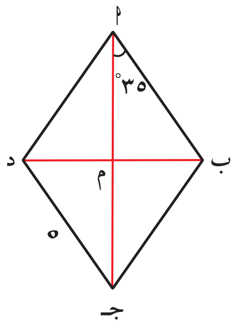
∴ الشكل س ص ع ل معين .

تذكر أنَّ :
- الرمز ⊥ هو رمز عمودي على .
- الرمز // هو رمز موازٍ لِـ .
- مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي ١٨٠° .

فكِّر وناقِش

يستطيع خالد أنَّ يذكر الحالات التي يكون فيها متوازي أضلاع معينًا . فهل تستطيع أن تتحدى خالد بإعطاء أمثلة لكل حالة .

تمــرَّنْ :



١ أ ب جـ د معين تقاطع قطريه في م ، ق (ب $\hat{أ}$ جـ) = ٣٥° ،
جـ د = ٥ وحدة طول .

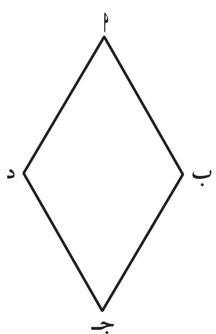
أ احسب قياسات زوايا المعين .

ب أوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$.

جـ أوجد قياس أ $\hat{م}$ ب .

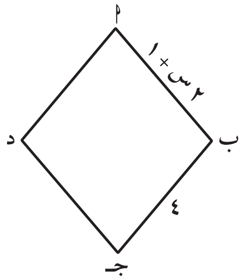
---

٢ أ ب جـ د معين طول قطره $\overline{\text{ب د}}$ يساوي طول ضلعه .
أوجد قياسات زوايا المعين أ ب جـ د الأربع .

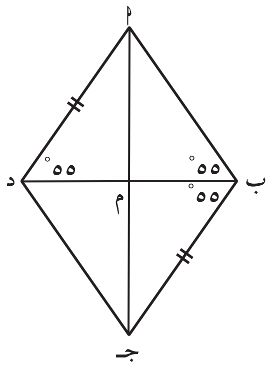


----

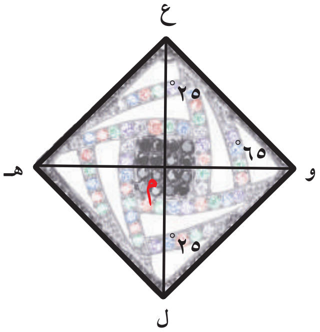
٣ ﺃب جـ د معين ، ﺃب = ٢ س + ١ وحدة طول ،
ب جـ = ٤ وحدة طول . أوجد قيمة س .



٤ في الشكل أمامك ، أثبت أنَّ ﺃب جـ د معين .



٥ يستعمل مصممو المجوهرات أشكالًا هندسية في تصميماتهم للحصول على أشكال جذابة ومميزة تخصهم .
الصورة المقابلة لقطعة ألماس تبدو رُباعية الشكل .



الشكل ع و ل هـ فيه :

$\overleftarrow{\text{ع ل}}$ منصف لكل من (و $\hat{\text{ع}}$ هـ) و (و $\hat{\text{ل}}$ هـ)

ں (و $\hat{\text{ع}}$ م) = ں (و $\hat{\text{ل}}$ م) = ٢٥°، ں (ع $\hat{\text{و}}$ م) = ٦٥° .

أثبت أنَّ الشكل الرباعي ع و ل هـ معين .

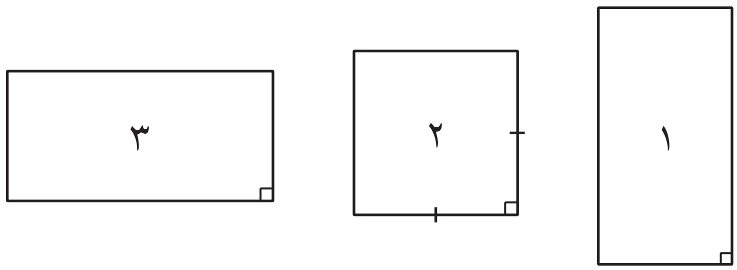
٦-٨ المربع (خواصه والكشف عنه)
Exploring Square and its Properties

سوف تتعلّم : خواص المربع والشروط التي يكون فيها متوازي الأضلاع مربعًا .

نشاط (١) :

لديك مجموعتان من الأشكال الرباعية :

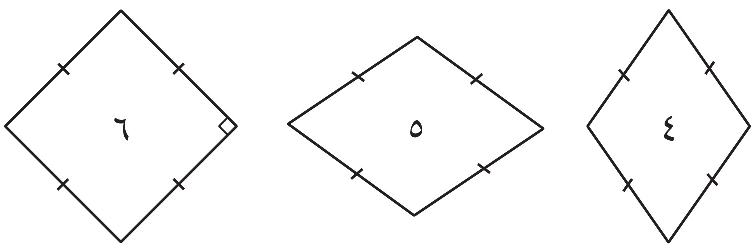
مجموعة (١)
مستطيلات



• الأشكال (١) ، (٢) ، (٣) كل منها يمثل مستطيلًا ، إلا أنَّ الشكل رقم (٢) يتميز بـ .... ونسمي هذا الشكل ....

المربع هو مستطيل فيه ضلعان متجاوران متطابقان (متساويان في الطول) .

مجموعة (٢)
معينات



• الأشكال (٤) ، (٥) ، (٦) كل منها يمثل معينًا ، إلا أنَّ الشكل رقم (٦) يتميز بـأنَّ إحدى زواياه قياسها ....

نسمي هذا المعين والذي إحدى زواياه = ... بالمربع .

المربع هو معين قياس إحدى زواياه °٩٠ .

نلاحظ ممّا سبق أنَّ :

للمربع كل خواص المستطيل وكل خواص المعين .

فكّر وناقِش

هل المربع متوازي أضلاع ؟ فسر ذلك .

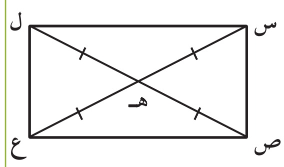
تذكر أنَّ :
خواص متوازي الأضلاع
١ - كل ضلعين متقابلين متطابقان .
٢ - كل زاويتين متقابلتين متطابقتان .
٣ - القطران ينصف كلّ منهما الآخر .

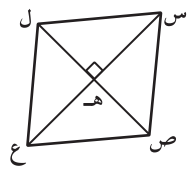
تذكر أنَّ :
خواص المستطيل :
١ - له جميع خواص متوازي الأضلاع .
٢ - القطران متطابقان .
٣ - زواياه الأربع قوائم .

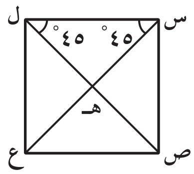
تذكر أنَّ :
خواص المعين :
١ - له جميع خواص متوازي الأضلاع .
٢ - القطران متعامدان .
٣ - الأضلاع متطابقة .
٤ - القطران ينصف كلّ منهما زواياه المتقابلة .

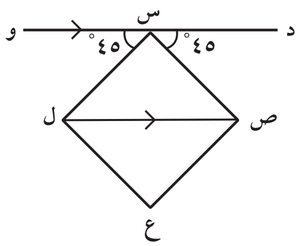
تدرّب (١) :

إذا كان س ص ع ل متوازي أضلاع ، فضع علامة (✓) أسفل الشكل الذي يمثل مربعًا مع ذكر السبب :









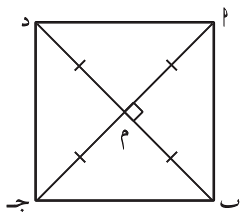
الكشف عن المربع

ما الشروط التي يجب أن يحققها متوازي الأضلاع ليكون مربعًا ؟

إذا كان في متوازي الأضلاع القطران متطابقان ومتعامدان ، فإنَّ متوازي الأضلاع هو مربع .

في الشكل المقابل أ ب جـ د متوازي أضلاع ،

أثبت أنَّ : أ ب جـ د مربع .

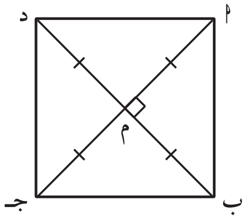


المعطيات :

أ ب جـ د متوازي أضلاع ، $\overline{\text{أجـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$ ، أجـ = ب د

المطلوب : إثبات أنَّ أ ب جـ د مربع

خطوات البرهان كالتالي :



الحالة الأولى :

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه :

أ جـ = ب د (قطراه متطابقان)

∴ أ ب جـ د مستطيل (١)

من تطابق Δ أ م ب ، Δ أ م د (ض . ز . ض) ⟸ أ ب = أ د (ضلعان متجاوران متطابقان) (٢)

∴ من (١) ، (٢) أ ب جـ د مربع

الحالة الثانية :

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه :

$\overline{\text{أ جـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$ (قطراه متعامدان)

∴ أ ب جـ د معين (١)

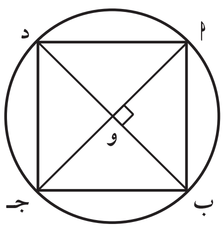
∵ Δ أ م ب قائم ومتطابق الضلعين (م أ = م ب) ⟸ ق (م $\hat{\text{أ}}$ ب) = ٤٥° ،

بالمثل ق (م $\hat{\text{أ}}$ د) = ٤٥° (قطرا المعين ينصفان زواياه)

∴ ق (ب $\hat{\text{أ}}$ د) = ٩٠° (قياس إحدى الزوايا قائمة) (٢)

∴ من (١) ، (٢) أ ب جـ د مربع

تدرّب (٢) :



في الشكل المقابل $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$ قطران في دائرة مركزها و ، $\overline{\text{أ جـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$. أثبت أنَّ أ ب جـ د مربع .

المعطيات : (١) و مركز الدائرة ، (٢) $\overline{\text{أ جـ}}$ ⊥ ....

المطلوب : إثبات أنَّ أ ب جـ د ....

البرهان : ∵ و مركز الدائرة

∴ أ و = ... = ... = ... (١)

....

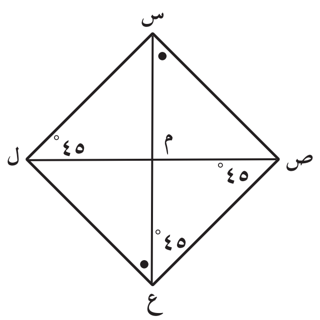
∴ أ جـ = ... ، القطران .... (٢)

ولكن $\overline{\text{أ جـ}}$ ⊥ .... (٣)

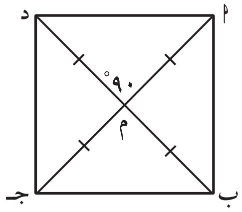
∴ من (١) ، (٢) ، (٣) أ ب جـ د ....

تمـــرَّنْ :

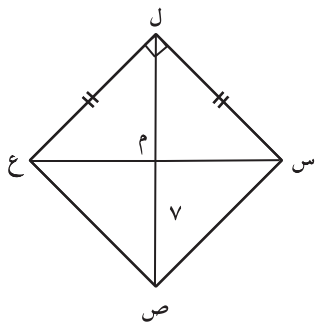
١ باستخدام المعطيات في الرسم أثبت أنَّ :
س ص ع ل مربع الشكل .



٢ مستعينًا بالمعطيات على الرسم أثبت أنَّ الشكل مربع .



٣ في الشكل المقابل ل س ص ع مربع فيه : ل م = ٣ ب + ٤ ،
ع م = ٢ جـ – ١ ، م ص = ٧ . أوجد قيمة كلٍّ من ب ، جـ .



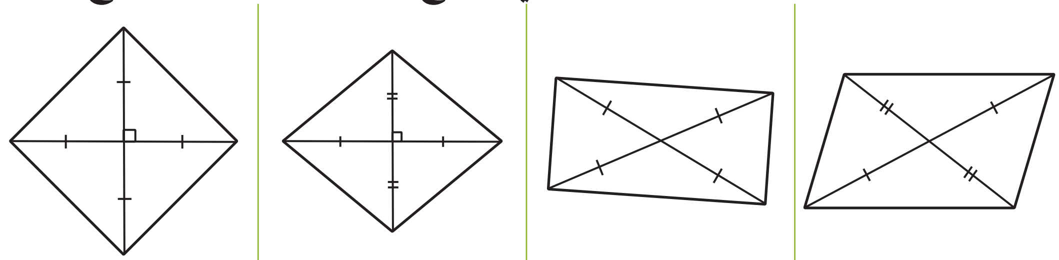
٨-٧ تطبيقات (حل مسائل على الأشكال الرباعية)
Applications (Problem Solving on Quadrilaterals)

سوف تتعلّم : حل مسائل على الأشكال الرباعية .

تذكر أنَّ :
يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان :
- فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان .
- فيه ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان .
- فيه كل ضلعين متقابلين متطابقان .
- فيه القطران ينصف كل منهما الآخر .
- فيه كل زاويتين متقابلتين متطابقتان .

نشاط :

حدّد أيًّا من الأشكال الرباعية التالية (متوازي أضلاع – مستطيل – معين – مربع) :

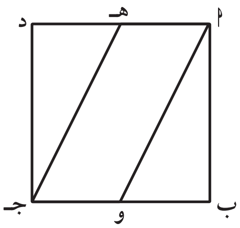


....

تدرّب (١) :

أ ب جـ د مربع ، هـ منتصف أ د ، و منتصف ب جـ

أثبت أنَّ : أ و جـ هـ متوازي أضلاع .



المعطيات : ....

المطلوب : إثبات أنَّ : ....

البرهان :

أ ب جـ د .... (معطى)

∴ أ د = ب جـ (أطوال أضلاع المربع ....)

∵ هـ .... أ د (معطى) ، ∴ أ هـ = $\frac{١}{٢}$ ....

∵ و .... ب جـ (معطى) ، ∴ و جـ = $\frac{١}{٢}$ ....

∴ أ هـ = ... (..............................) (١)

∵ أ د // .... (من خواص المربع)

∴ أ هـ // .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أنَّ :

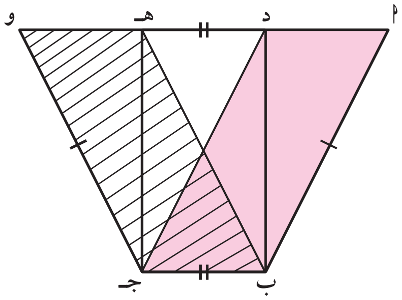
الشكل أ و جـ هـ .... (لأنَّه شكل رباعي فيه ضلعان ....)

تدرّب (٢) :

ﺃ ب جـ د ، هـ ب جـ و متوازيا أضلاع .

د ، هـ ∈ $\overline{\text{ﺃ و}}$ بحيث د هـ = ب جـ ، ﺃ ب = و جـ

أثبت أنَّ : د ب جـ هـ مستطيل .



تذكر أنَّ :
يكون متوازي الأضلاع مستطيلًا إذا كان :
١ – إحدى زواياه قائمة (قياسها ٩٠°) .
٢ – القطران متساويان في الطول .

المعطيات : ....

المطلوب : إثبات أنَّ : ....

البرهان :

∵ ﺃ ب جـ د ، هـ ب جـ و .... (معطى)

∴ $\overline{\text{ﺃ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$ // .... (من خواص ....)

∵ د ، هـ ∈ .... (معطى)

∴ $\overline{\text{د هـ}}$ // .... (١)

د هـ = ... (معطى) (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أنَّ :

د ب جـ هـ .... (لأنَّه شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان ....) (٣)

∵ ﺃ ب = ... ، و جـ = ... (من خواص متوازي الأضلاع)

∵ ﺃ ب = و جـ (معطى)

∴ ﺃ ب = د جـ = ب هـ = و جـ (من خواص المساواة)

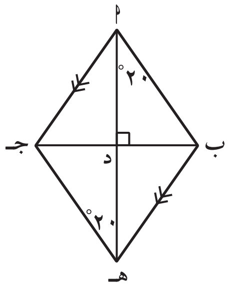
∴ د جـ = ... ، ∴ القطران متطابقان (٤)

من (٣) ، (٤) ينتج أنَّ :

الشكل د ب جـ هـ مستطيل (لأنَّه متوازي أضلاع فيه ....)

تذكر أنَّ :
يكون متوازي الأضلاع معينًا إذا كان :
١ – فيه ضلعان متجاوران متطابقان .
٢ – القطران متعامدان .

تدرّب (٣) :



في الشكل المقابل ، أثبت أنَّ : ٲ ب هـ جـ معين .

المعطيات : (١) .... ، (٢) ....
(٣) ....

المطلوب : ....

البرهان : $\overline{ٲجـ}$ // .... ، .... (١)

∵ ق (ب $\hat{ٲ}$ هـ) = ق (..................) (وهما في وضع ....)

∴ $\overline{ٲب}$ // .... (٢)

∴ من (١) ، (٢) الشكل ٲ ب هـ جـ ....

∵ $\overline{ٲهـ}$ ⊥ $\overline{بجـ}$ .... (معطى)

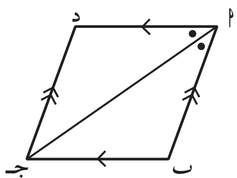
∴ الشكل ٲ ب هـ جـ معين لأنّه ....

تذكر أنَّ :
يكون متوازي الأضلاع مربعًا إذا كان :
١ – إحدى زواياه قائمة وفيه ضلعان متجاوران متطابقان .
٢ – إحدى زواياه قائمة وقطراه متعامدان .
٣ – القطران متساويان في الطول ومتعامدان .

تمـــرَّنْ :

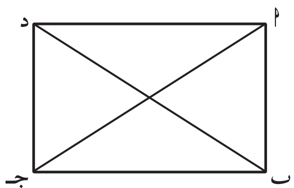
١ اكتب اسم الشكل في كل مما يلي حسب المعطيات على الرسم :

أ ٲ ب جـ د متوازي أضلاع فيه $\overleftarrow{ٲجـ}$ ينصف $\hat{ٲ}$.



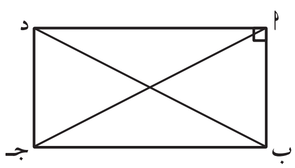
....
....

ب ٲ ب جـ د متوازي أضلاع فيه ٲ جـ = ب د .



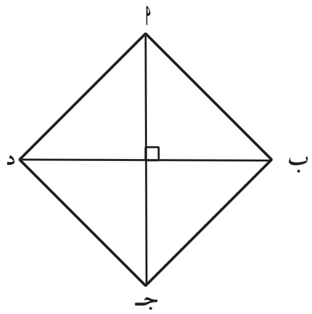
....
....

جـ ٲ ب جـ د متوازي أضلاع فيه ق ($\hat{ٲ}$) = ٩٠° .

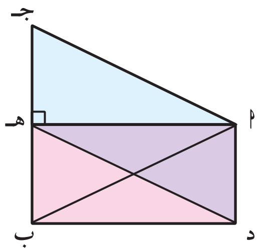


....
....

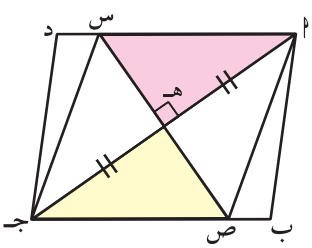
د ﻫ ب جـ د متوازي أضلاع فيه $\overline{\text{ﻫ جـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$ ،
ﻫ جـ = ب د .



٢ في الشكل ﻫ ب جـ مثلث متطابق الضلعين ،
ﻫ د هـ جـ متوازي أضلاع ، $\overline{\text{ﻫ هـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$.
أثبت أنَّ : الشكل ﻫ د ب هـ مستطيل .

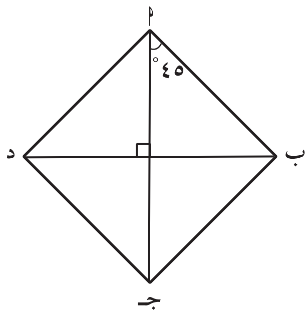


٣ ﻫ ب جـ د متوازي أضلاع ، $\overline{\text{س ص}} \perp \overline{\text{ﻫ جـ}}$ ،
هـ منتصف $\overline{\text{ﻫ جـ}}$ ، س $\in \overline{\text{ﻫ د}}$ ، ص $\in \overline{\text{ب جـ}}$.
أثبت أنَّ : الشكل ﻫ ص جـ س معين .



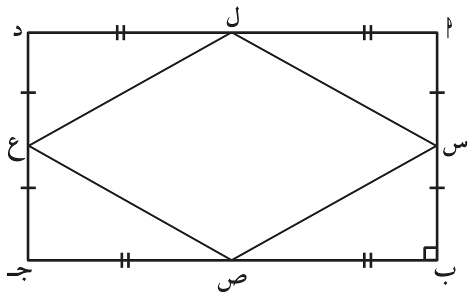
٤ أ ب جـ د معين فيه ق (ب أ̂ جـ) = ٤٥°،

أثبت أنَّ : الشكل أ ب جـ د مربع .

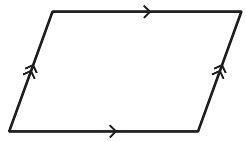
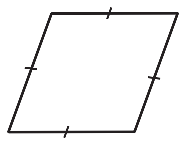
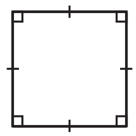
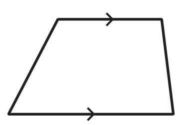


٥ أ ب جـ د مستطيل فيه س ، ص ، ع ، ل منتصفات أضلاعه $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ ، $\overline{\text{د أ}}$ على الترتيب .

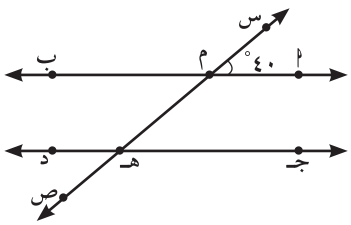
أثبت أنَّ س ص ع ل معين .



الأشكال الرباعية

اسم الشكل	رسم الشكل	تعريف الشكل	خواص الشكل
متوازي الأضلاع		هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان .	- الأضلاع المتقابلة متطابقة . - يتقاطع القطران في منتصفهما . - نقطة تقاطع قطريه هي مركز تناظر له . - كل زاويتين متقابلتين متساويتان في القياس . - كل زاويتين متتاليتين متكاملتان .
المعيّن		هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان .	- أضلاعه الأربعة متطابقة . - القطران متعامدان وينصف كل منهما الآخر . - كل قطر ينصف زاويتي الرأس الواصل بينهما .
المستطيل		هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة .	- زواياه الأربع قائمة . - قطراه متطابقان .
المربع		- هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان وإحدى زواياه قائمة. - هو معيّن إحدى زواياه قائمة . - هو مستطيل فيه ضلعان متجاوران متطابقان .	- قطراه متطابقان ومتعامدان ويتقاطعان في منتصفهما . - زواياه الأربع قائمة وأضلاعه متطابقة . - قطر المربع يصنع مع كل ضلع من أضلاعه زاوية قياسها °٤٥ .
شبه المنحرف		هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متقابلان متوازيان .	

٨-٨ مراجعة الوحدة الثامنة
Revision Unit Eight



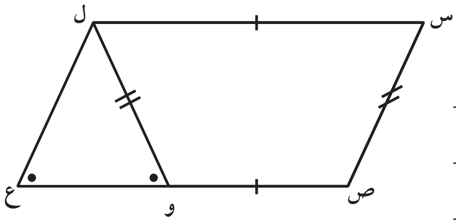
١ في الشكل المقابل إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ﺃ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ قاطع لهما في م ، هـ على الترتيب ،

ق (ﺃ م^ س) = ٤٠° ، أوجد مع ذكر السبب :

أ ق (جـ هـ^ م) = ... السبب : ....

ب ق (جـ هـ^ ص) = ... السبب : ....

جـ ق (م هـ^ د) = ... السبب : ....



٢ أثبت أنَّ : الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع .

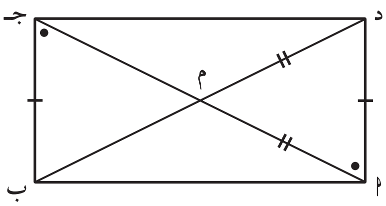
....

....

....

....

....



٣ أثبت أنَّ : الشكل ﺃ ب جـ د مستطيل .

....

....

....

....

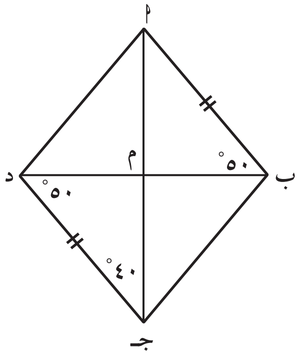
....

....

....

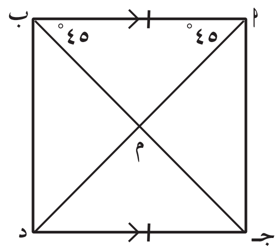
....

٤ أثبت أنَّ : الشكل أ ب جـ د معين .



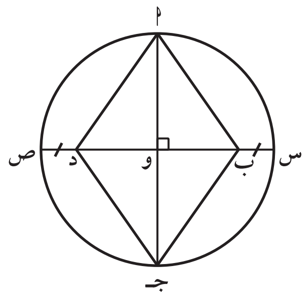
----

٥ أثبت أنَّ : الشكل أ ب د جـ مربع .



----

٦ في الشكل المقابل : و مركز الدائرة ،
أثبت أنَّ الشكل : أ ب جـ د معين .



----

٧ تهتم شركات الإلكترونيات الحديثة في تصميماتها على الأشكال الهندسية المتنوعة . ففي الصورة أمامك شاشة لجهاز التلفاز رُباعية الشكل .

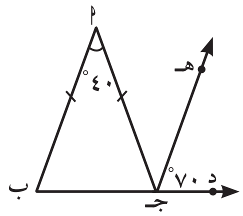
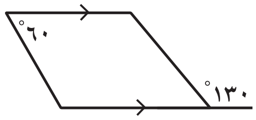
الشكل الرباعي أ ب جـ د فيه :

ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٢}$) = ق ($\hat{٣}$) ، ب جـ = أ د .

أثبت أنَّ الشكل أ ب جـ د مستطيل .

اِختبار الوحدة الثامنة

أوّلًا : في البنود (١–٤) ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

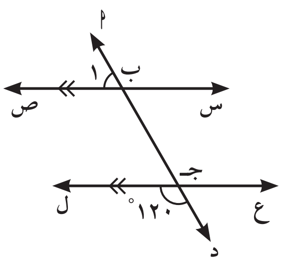
(١) المربع هو معين قطراه متطابقان .	(أ)	(ب)
(٢) في الشكل المرسوم $\overline{ب ٲ}$ // $\overleftarrow{جـ هـ}$ 	(أ)	(ب)
(٣) الشكل المقابل يمثل مستطيلًا 	(أ)	(ب)
(٤) الشكل الرباعي المرسوم يمثل متوازي أضلاع 	(أ)	(ب)

ثانيًا: لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة :

(٥) في الشكل المقابل ق ($\hat{1}$) يساوي :

(أ) ٦٠°　　(ب) ١٢٠°

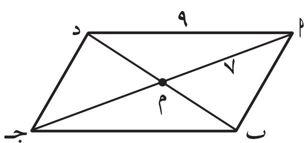
(جـ) ١٨٠°　　(د) ٣٦٠°



(٦) في متوازي الأضلاع المرسوم ، ٲ جـ =

(أ) ٧ وحدة طول　　(ب) ٣ وحدة طول

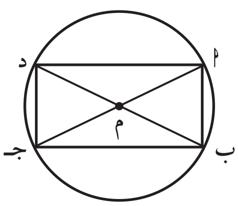
(جـ) ١٤ وحدة طول　　(د) ٩ وحدة طول



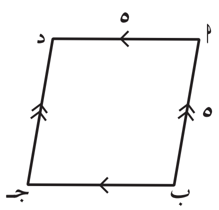
(٧) الشكل المقابل يمثل دائرة مركزها م فإنَّ الشكل ٲ ب جـ د هو :

(أ) مربع　　(ب) مستطيل

(جـ) معين　　(د) شبه منحرف



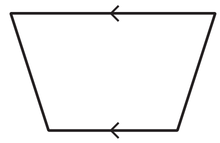
٨ في الشكل المقابل ﺍ ب جـ د يمثل :

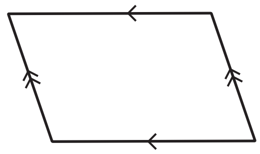


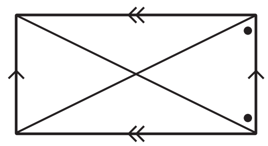
أ معين   ب مستطيل

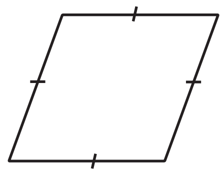
جـ مربع   د شبه منحرف

٩ الشكل الذي يمثل مستطيلًا هو :

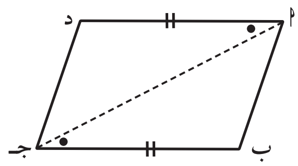
أ


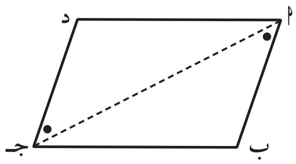
ب


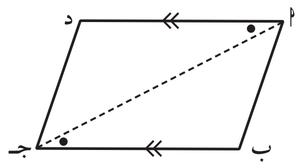
جـ


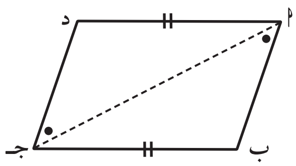
د


١٠ الشكل الذي يمثل متوازي أضلاع فيما يلي هو :

أ


ب


جـ


د


الوحدة التاسعة

المقادير الجبرية
Algebraic Expressions

بيئتي
My Environment

مشروع الوحدة :
(مرافق ترفيهية)

الترفيه هو نشاط نقوم به في أوقات الفراغ ، وتعتبر الحاجه للقيام بأنشطة ترويحية عنصرًا أساسيًا في علم النفس وعلم الأحياء البشري ، لذا ظهرت أهمية المرافق الترفيهية ليقوم الإنسان بالأنشطة المتنوعة .

خطة العمل :

- تحدد المجموعة بعض الأماكن الترفيهية في بيئتها وتذكر عمر المكان وتحدد العلاقة بين عمر المرفق وعمر الأشخاص في بيئتهم (معلم - مدير - إخصائي) .

الصيغ اللفظية	الصيغة بالرموز
ضعف عدد	
نصف عدد	
يزيد بمقدار ٢	
ينقص بمقدار ١	

خطوات تنفيذ المشروع :

- تكون المجموعة جدولًا بأسماء بعض المرافق الترفيهية من بيئتهم وتحدد عمر المرفق .
- تحدد المجموعة أشخاصًا من بيئتهم ويرمز إليهم بالرموز (س ، ص ....) .
- تحدد المجموعة العلاقة المسجلة في الجدول سواء بالزيادة عن العمر أو بالنقصان أو الضعف .... أكمل الجدول لبدء المشروع .
- توجد المجموعة عمر الشخص المطلوب بالسنين .

المرفق	تاريخ المرفق بالسنوات	اسم الشخص من بيئتك وعمره بالرموز	العمر بالسنين للشخص	العلاقة اللفظية للشخص مع المرفق
محمية صباح الأحمد	٣٠	معلم الصف س	٣٠	س = ٣٠
حديقة الحيوانات	٤٠	مدير المدرسة ص	٥٠	المرفق يقل ١٠ سنوات عن ص
أبراج الكويت				
منتزه الخيران				

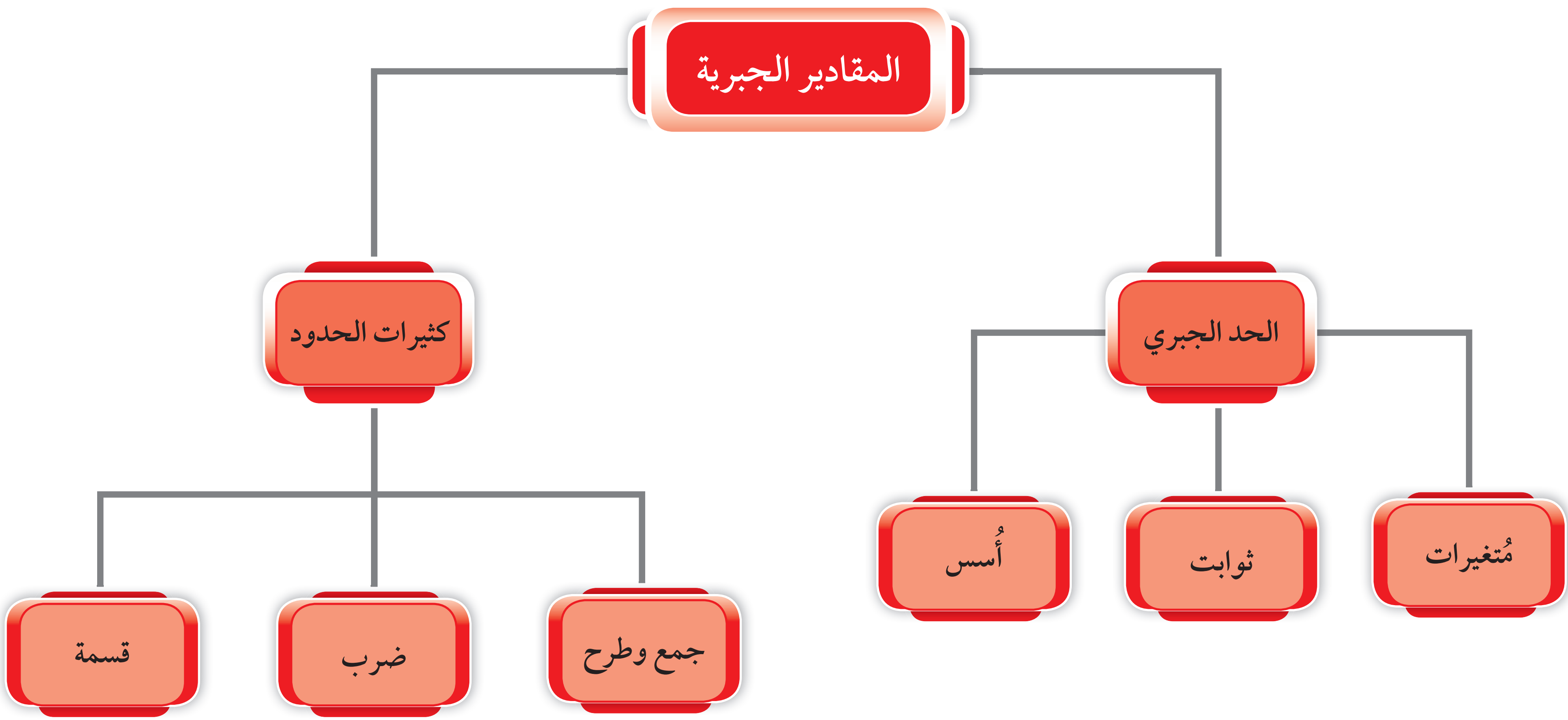
علاقات وتواصل :

- يناقش أفراد المجموعة الجداول ويتحققون من صحة عمر الأشخاص المعروضين .

عرض العمل :

- تعرض كل مجموعة الجدول الصحيح وتشرحه للمتعلمين في الفصل .

مخطَّط تنظيمي للوحدة التاسعة



٩-١ قوانين الأسس
Laws of Exponents

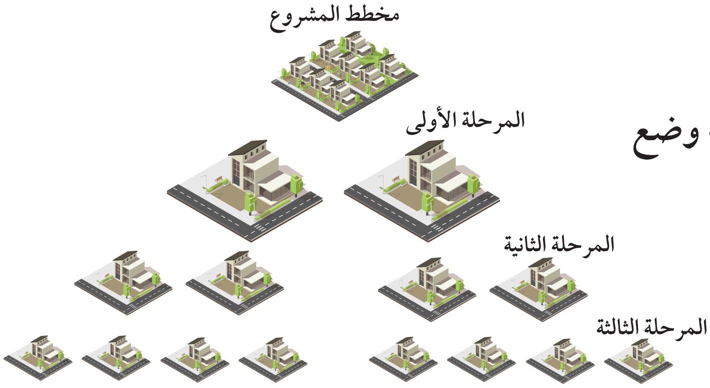
سوف تتعلّم : قوانين الأسس .

العبارات والمفردات :

أس
Exponent
أساس
Base
قوى
Power

نشاط (١) :

قررت إحدى الشركات الكبرى للبناء وضع مخطّط على عدة مراحل لبناء إحدى الضواحي السكنية . لاحظ الصور للمراحل الثلاث الأولى ، ثم أكمل :



المرحلة الأولى : $٢ = ٢^{١}$

المرحلة الثانية : $٤ = ٢ \times$ .... $= ٢^{٢}$

المرحلة الثالثة : $٨ = ٢ \times ٢ \times$ .... $= ٢^{٣}$

$$\underbrace{\text{ﺃ} \times \text{ﺃ} \times \text{ﺃ} \times \ldots \times \text{ﺃ}}_{\text{ﺃ مكررة ن مرة}} = \text{ﺃ}^{\text{ن}}$$

حيث ﺃ عدد نسبي غير صفري ، ن $\in$ ص_{+}

ويقرأ « ﺃ أس ن » أو القوة النونية للعدد ﺃ .

معلومات مفيدة :

– تقاس الأبعاد بين الكواكب باستخدام الأسس لبعد المسافات حيث المسافة بين الأرض وكوكب الزهرة ٢٧٥×١٠^{٦} كيلومتر.

تذكَّرْ أنّ :

– نسمي الصورة $٢^{٣}$ بالصورة الأسية حيث ٢ يسمى الأساس و٣ الأس ، وتقرأ ٢ أس ٣ أو ٢ للقوة ٣ أو ٢ تكعيب .

تدرّب (١) :

أكمل الجدول التالي :

الصورة الأسية	الأساس	الأس	صورة الضرب المتكرر	الناتج
$٤^{٢}$	٤	٢	٤ × ٤	١٦
$٣^{٥}$		٥	٣ × .... × .... × .... ×	٢٤٣
$٢^{٤}$	٢		٢ × ٢ × ٢ × ٢	
	٥–	٣		
٣		١		
	س	٤		
$\left(\frac{-٣}{٥}\right)^{\text{.....}}$	$\frac{-٣}{٥}$	٢		$\frac{٩}{\text{.......}}$
$\left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{.....}}$	$\frac{\text{.......}}{\text{.......}}$	٤	$\frac{١}{٢} \times$	$\frac{\text{.......}}{\text{.......}}$

نشاط (٢) :

أكمل ما يلي:

$٢^٢ \times ٢^٣ = \overbrace{٢ \times ٢} \times \overbrace{٢ \times ٢ \times ٢} = ٢^{\square} = ٢^{(٢+٣)}$

$٣^٢ \times ٣^٤ = \overbrace{٣ \times ٣} \times \overbrace{٣ \times ...... \times ...... \times ......} = ٣^{\square} = ٣^{(٢+٤)}$

ماذا تلاحظ ؟ ....

لكل $أ$ عدد نسبي غير صفري ، م ، ن عددان صحيحان يكون $أ^م \times أ^ن = أ^{م+ن}$.

تدرّب (٢) :

تذكَّرْ أنّ : ص = $ص^١$

اختصر كلًّا مما يلي :

أ) $٦^٤ \times ٦^٧ = ٦^{-----+-----} = ٦^{-----}$ ب) $س^٢ \times س^٣ = س^{-----+-----} = س^{-----}$

جـ) $ص \times ص^٢ \times ص^٣ = ص^{-----+-----+-----} = ص^{-----}$

د) $\left(\frac{٢}{٣}\right)^٢ \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^٣ = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{-----+-----} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{-----}$

فكِّر وناقِش

هل العبارة $٣^٢ \times ٢^٣ = ٦^٥$ صحيحة ؟ فسِّر إجابتك .

نشاط (٣) :

أكمل ما يلي :

أ) $\frac{٣^٥}{٣^٢} = \frac{\cancel{٣} \times \cancel{٣} \times ...... \times ...... \times ......}{\cancel{٣} \times \cancel{٣}} = ٣^{-----} = ٣^{٥-----٢}$

ب) $\frac{٧^٣}{٧} = \frac{\cancel{٧} \times ٧ \times ......}{\cancel{٧}} = ٧^{-----} = ٧^{٣-----١}$

ماذا تلاحظ ؟ ....

....

لكل $أ$ عدد نسبي غير صفري، م ، ن عددان صحيحان يكون : $\frac{أ^م}{أ^ن} = أ^{م-ن}$.

تذكَّرْ أنّ :

س − ص = س + (− ص)

تدرّب (٣) :

اختصر كلًّا مما يلي :

أ $\frac{٨^{٥}}{٨^{٣}}$ = ...

= ....

ب $\frac{س^{٥}}{س^{٥}}$ = ...

= ....

جـ $\frac{س^{٧}}{س^{-٣}}$ = ...

= ....

د $\frac{س^{٤}}{س^{٧}}$ = ...

= ....

فكِّر وناقِش

ماذا تلاحظ على ب ، د في تدرب (٣) ؟ فسِّر إجابتك .

لكل ٲ عدد نسبي غير صفري ، م عدد صحيح يكون : (١) $ٲ^{صفر} = ١$

(٢) $ٲ^{-م} = \frac{١}{ٲ^{م}}$

تدرّب (٤) :

اختصر ما يلي :

أ $٧^{-٣} \times ٧$ = ...

= ....

ب $\frac{٩^{-٣}}{٩^{-٢}}$ = ...

= ....

جـ $٨^{٥} \times ٨^{-٤}$ = ...

= ....

د $س^{٤} \times س^{-٦}$ = ...

= ....

نشاط (٤) :

أوجد ناتج ما يلي :

أ $(٢ \times ٣)^{٢} = ٦^{\square}$ = ...

ب $(٥ \times ٤)^{٣} = ٢٠^{\square}$ = ...

جـ $٢^{٢} \times ٣^{٢} = ٢ \times ٢ \times ٣ \times ٣ = ٤ \times ٩$ = ...

د $٥^{٣} \times ٤^{٣} = ٥ \times ٥ \times ٥ \times ٤ \times ٤ \times ٤$ = ...

ماذا تستنتج بالنسبة لـ أ ، جـ معًا ، ب ، د معًا ؟

....

لكل أ ، ب عددان نسبيان غير صفريين ، م عدد صحيح يكون $(\text{أ} \times \text{ب})^{\text{م}} = \text{أ}^{\text{م}} \times \text{ب}^{\text{م}}$.

فكِّر وناقِش

يقول عبد الله إنَّ $(٢ \times ٣)^{٢} = ٢ \times ٣^{٢}$. هل توافقه الرأي ؟

مثال (١) : اختصر كلًّا مما يلي:

أ) $(٤\text{أ})^{٥} = ٤^{٥}\text{أ}^{٥} = ١٠٢٤\,\text{أ}^{٥}$

ب) $(٢\,\text{س}\,\text{ص})^{٤} = ٢^{٤}\text{س}^{٤}\text{ص}^{٤} = ١٦\,\text{س}^{٤}\text{ص}^{٤}$

ج) $\text{ص}\,\text{س}^{٢} \times \text{ص}^{٣} = \text{ص}^{٤} \times \text{س}^{٢}$

نشاط (٥) :

أوجد ناتج ما يلي معتمدًا على قوانين الأسس :

أ) $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} = \frac{٢}{٣} \times .... = \frac{٢^{٢}}{٣^{٢}} = \frac{..........}{٩}$

ب) $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٣} = \frac{٣}{٥} \times .... \times .... = \frac{٣^{٣}}{٥^{٣}} = ...$

ج) $\frac{٤^{٥}}{٢^{٥}} = \left(\frac{٤}{٢}\right)^{....} = (....)^{٥}$

ماذا تستنتج ؟ ....

لكل أ ، ب عددان نسبيان غير صفريين ، م عدد صحيح يكون $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{م}} = \frac{\text{أ}^{\text{م}}}{\text{ب}^{\text{م}}}$.

ملاحظة : $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{-\text{م}} = \left(\frac{\text{ب}}{\text{أ}}\right)^{\text{م}}$

تدرّب (٥) :

أوجد ناتج ما يلي معتمدًا على قوانين الأسس .

أ) $\frac{٢٤^{٥}}{٨^{٥}} = \left(\frac{٢٤}{٨}\right)^{....} = (......)^{....}$

ب) $\frac{٢^{٤}}{٦^{٤}} = ...$

ج) $\left(\frac{٢}{٥}\right)^{٣} = ...$

د) $\left(\frac{٣}{٤}\right)^{-٢} = ...$

نشاط (٦) :

أكمل ما يلي :

أ) $(٣^{٢})^{٣} = ٣^{٢} \times ٣^{٢} \times$ ....
$= ٣^{.....}$
$= ٣^{..... \times .....}$

ب) $(أ^{٣} ب^{٢})^{٢} = أ^{٣} ب^{٢} \times$ ....
$= أ^{.....} \times ب^{.....}$
$= أ^{..... \times .....} ب^{..... \times .....}$

ماذا تلاحظ ؟ ....

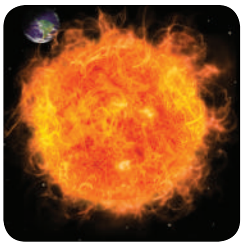
لكل أ عدد نسبي غير صفري ، م ، ن عددان صحيحان يكون : $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$.

تدرّب (٦) :

اختصر ما يلي:

أ) $(٣^{-٢})^{٢} =$	ب) $(٥^{-٣})^{-١} =$ ....
جـ) $(٤^{٥})^{-٣} =$	د) $(س^{٢} ص^{٣})^{٤} =$ ....

مثال (٢) :



يبلغ طول قطر الشمس نحو $١,٥ \times ١٠^{٦}$ كم ، ويبلغ طول قطر الأرض نحو $١,٢٧٦ \times ١٠^{٤}$ كم .

أوجد نسبة طول قطر الشمس إلى طول قطر الأرض .

الحلّ :

نسبة طول قطر الشمس إلى طول قطر الأرض $= \frac{١,٥ \times ١٠^{٦}}{١,٢ \times ١٠^{٤}} = \frac{١,٢٥ \times ١٠^{٦-٤}}{١}$

$= \frac{١,٢٥ \times ١٠^{٢}}{١}$

تمــرَّنْ :

١) أوجد ناتج ما يلي :

أ) $\frac{٩^{٤}}{٣^{٤}} =$	ب) $٢^{-٣} =$ ....
جـ) $(٢^{-٤})^{٢} \times ٢^{٥} =$	د) $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٦} \times \left(\frac{٣}{١٠}\right)^{-٦} =$ ....

٢ اختصر لأبسط صورة :

أ $س \times س^{٦} =$ ....

ب $(٥^{٢})^{٤} \times ٥ =$ ....

جـ $(-٢)^{٣} \times (-٢)^{٧} =$ ....

د $س^{١١} \times س^{٨} =$ ....

هـ $س^{٣} \times س \times س^{٢} =$ ....

و $(س^{٢} ص^{-٣}) \times (س^{-٧} ص^{-٤}) =$ ....

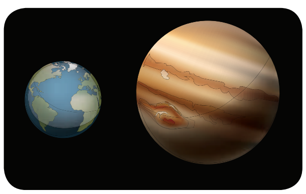
ز $(ا^{-٣} ب) \times (ا^{٢} ب^{٢}) \times (ا^{٢} ب) =$ ....

ح $(س^{٢} ص)^{-٢} \times (س^{٣})^{٢} =$ ....

ط $(ا^{٥})^{٢} \times (ا ب) =$ ....

ي $(-٢ص)^{٣} =$ ....

٣ يقدّر حجم الأرض بنحو $١٠^{٦}$ كم^{٣} ،
ويقدر حجم كوكب المشتري بنحو $٣,١٨ \times ١٠^{٢}$
مرّة من حجم الأرض ، ما حجم المشتري ؟



....

....

....

٩-٢ كثيرات الحدود (متعددة الحدود – الحدوديات)
Polynomials

العبارات والمفردات :

كثيرة الحدود
Polynomial

حد
Term

وحيدة الحد
Monomial

ثنائية الحد
(ذات الحدين)
Binomial

ثلاثية الحد
Trinomial

درجة
Degree

حدود متشابهة
Like Terms

حدود غير متشابهة
None Like Terms

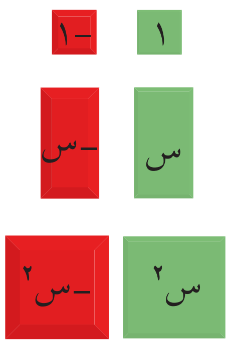
الصورة القياسية
Standard Form

سوف تتعلّم : ما هي كثيرات الحدود – إيجاد قيمة كثيرات الحدود وكتابتها بالصورة القياسية .

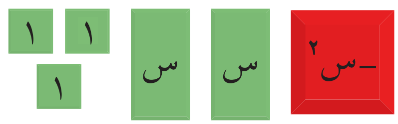
نشاط :

قسّم المعلم متعلمي الصف إلى مجموعات ، ثم وزّع المعلم على كل مجموعة بعض البطاقات الجبرية وطلب منهم نمذجة ما تعبر عنه البطاقات الجبرية .

البطاقات الجبرية

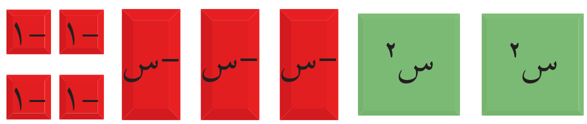


(١) مجموعة المتعلم فيصل كان نصيبها من البطاقات هو :



التعبير الجبري للنموذج هو : – س^٢ + ٢ س + ٣

(٢) مجموعة المتعلم بدر كان نصيبها من البطاقات هو :



كما تمت نمذجة بطاقات فيصل ، استخدم بطاقات بدر لكتابة التعبير الجبري للنموذج المعطى :

التعبير الجبري للنموذج هو : ....

* التعبيرات الجبرية السابقة مثل : – س^٢ + ٢ س + ٣ تُسمى **كثيرة حدود** .

كثيرة الحدود (مقدار جبري) هي تعبير جبري يتكون من واحد أو أكثر من الحدود الجبرية يتم بناؤها باستخدام عمليات الجمع والطرح .

أمثلة :

(١) ٢ س^٥ ، – ٤ س^٢ ، س ، – ٣	حدود جبرية
(٢) ٢ س^٥ – ٤ س^٢ + س – ٣	كثيرة حدود
(٣) س$^{-٣}$ ، $\sqrt{س}$ – ٥ س + ٧ ، ٦^{س} + س^٢	ليست كثيرات حدود (مقدار جبري)

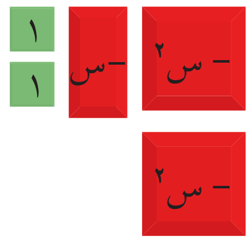
تذكّرْ أنّ :
٣ س^٢ يسمى حدًّا جبريًّا حيث :
٣ هو المعامل،
س^٢ هو المتغير.

كما في مثال فيصل ، اتبع الخطوات لكتابة الحدوديات باستخدام البطاقات الموضحة :

تدرّب (١) :

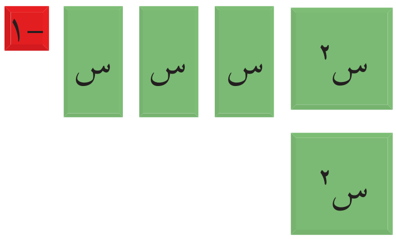
اكتب تعبيرًا جبريًّا لكل من النموذجين أدناه :

أ



التعبير الجبري : ....

ب



التعبير الجبري : ....

تدرّب (٢) :

حدد من التعابير الجبرية التالية ما يمثل حدودية وما لا يمثل ذلك .

١ $٤\text{س}^{٥} + ٢\text{س}^{٢} - ٦\text{س}$ ....

٢ $٣\text{س}^{٢} - \sqrt{\text{س}}$ ....

٣ $٥\text{س}^{٢} - \text{س ص} + \text{ص}^{٢} + ٤\text{ص} - ٧$ ....

٤ $\text{ص}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + \text{س}$ ....

٥ $\frac{٣}{\text{س}}$ ....

٦ $٣^{\text{س}} + ٥$ ....

أنواع كثيرات الحدود

كثيرة الحدود (الحدوديات)	تسميات خاصة
س ، $٣\text{س}^{٤}$ ، -٥	وحيدة الحد
$\text{ل} + ٢$ ، $٦\text{س}^{٢} - ٢\text{س}$ ، $\text{م}^{٢} + ١$	ثنائية الحد (حدانية)
$٣ + \text{س} + ٧\text{س}^{٢}$ ، $\text{س}^{٦} - ٥\text{س}^{٢} + ٢\text{س}^{٣}$	ثلاثية الحد (حدودية ثلاثية)

جميع الحدوديات في الجدول السابق تسمى **حدوديات في متغير واحد (مقدار جبري)** ،
بينما الحدوديات $-\text{س} - ٢\text{ص}$ ، $٥\text{س}^{٢} - \text{س ص} + \text{ص}^{٢} + ٤\text{ص} - ٩$ تسمى
حدوديات في متغيرين .

تدرّب (٣) :

حدد ما إذا كانت كل عبارة في الجدول كثيرة حدود أم لا ، وإذا كانت كذلك صنفها إلى (وحيدة حد – ثنائية حد – ثلاثية حد) ، ثم اذكر المتغيرات في الحدودية :

العبارة	هل هي كثيرة حدود ؟ ولماذا ؟	تصنيف الحدودية : وحيدة – ثنائية – ثلاثية	المتغير في الحدودية
٧ س^{٣}	نعم كثيرة حدود لأنَّها تتكون من حد واحد	وحيدة الحد	متغير واحد هو س
٩ س^{٤} + ٤ ص^{٢}	....	....	متغيران وهما : س ، ص
٦ ع$^{-٢}$ – ٩ ن	ليست كثيرة حدود	....	....
٦ س^{٥} + ٤ ^{س} – ٣	....	....	....
٧	نعم كثيرة حدود لأنها تتكون من	....	لا يوجد متغير لذلك يسمى (حد مطلق)

ملاحظة :
٥ س^{٢} ص^{٣}
مجموع أسس المتغيرات
= ٢ + ٣ = ٥

درجة الحدودية وترتيبها

– درجة كثيرة الحدود ذات متغير واحد هي قيمة أعلى (أس للمتغير) يظهر في أي حد
– درجة كثيرة الحدود ذات أكثر من متغير هي قيمة أعلى مجموع (لأسس المتغيرات) التي تظهر في أي حد .

تدرّب (٤) :

اكتب الحدود الجبرية لكثيرات الحدود التالية ، ثم اذكر أكبر أُس لكل حدودية وحدد درجة الحدودية لكل منها :

كثيرة الحدود	الحدود الجبرية	الحد	الأُس	أكبر أُس	درجة الحدودية
٢ س^{٢} + ٣	٢ س^{٢} ، ٣	٢ س^{٢}	٢	٢	الدرجة الثانية
		٣	صفر		
ص^{٤} + ٥ ص − ٧	ص^{٤} ، ٥ ص ،	ص^{٤}	٤	٤	....
		٥ ص	....		
		....	....		
ع^{٢} ن^{٣} + ع^{٣} + ١	ع^{٢} ن^{٣} ، .... ،	ع^{٢} ن^{٣}	٣ + ٢ = ٥	٥	الدرجة الخامسة
		....	....		
		....	....		
س ص ع − ٢ س ص^{٣} ع^{٤} + ٠,٥ س	.... ، .... ،	....	....	....	....
		....	....		
		....	....		

من الجدول نجد أنَّ الحدودية : ص^{٤} + ٥ ص − ٧ هي حدودية في متغير واحد ، من الدرجة الرابعة ومرتبة تنازليًّا بحسب أكبر أس .

الحدود المتشابهة والحدود المتساوية

	الحدود المتشابهة	الحدود المتساوية
التعريف	هي الحدود التي لها نفس المتغير مرفوعة لنفس الأس .	هي حدود متشابهة بمعاملات متساوية .
أمثلة	(١) ٤ س^{٢} ، − $\frac{١}{٢}$ س^{٢} ، π س^{٢} (٢) ٣ ص ، −٥ ص (٣) ل ع^{٢} ، − ٣ ل ع^{٢}	(١) ٣ س^{٢} ، ٣ س^{٢} (٢) $\frac{١}{٢}$ ص ، $\frac{١}{٢}$ ص (٣) ل ع^{٢} ، ع^{٢} ل

تدرّب (٥) :

حدد الحدود المتشابهة والمتساوية في ما يلي :

١ $\frac{١}{٣}$ ع^{٥} ص ، – ص ع^{٥} ....

٢ ٤ ك^{٣} ، – ٣,٠ ك ، $\frac{١}{٦}$ ك^{٢} ....

٣ ٧ س^{٤} ، ٢ س^{٤} ، – س^{٤} ....

٤ س^{٢} ل ، س ل^{٢} ....

٥ –٥ س^{٢} ص^{٣} ، –٥ ص^{٣} س^{٢} ....

٦ ٠,٥ س^{٢} ص ، $\frac{١}{٢}$ ص س^{٢} ....

ملاحظة :

يمكن كتابة كثيرة الحدود بأي ترتيب (تصاعدي – تنازلي) حسب درجتها ، ولكن عند ترتيب كثيرة الحدود بمتغير واحد تنازليًّا حسب درجتها يسمى هذا **بالصورة القياسية** .

مثل : ٤ ع^{٣} – ٥ ع^{٢} + ٢ ع + ٧

تدرّب (٦) :

اكتب كثيرات الحدود التالية بالصورة القياسية ، وحدد درجتها :

الحدودية	الصورة القياسية	درجة الحدودية
ص^{٢} – ٢ ص + ص^{٣}	ص^{٣} + ص^{٢} – ٢ ص	الدرجة الثالثة
س^{٤} + ٥ س – ٧ – س^{٢}	س^{٤} – .... + ... –	....
٢ ع^{٢} – ٣ ع + ع^{٤} + ٨	....	....
– ٠,٥ + ٣,٥ ص^{٥} – ٤ ص^{٢} + ٠,٠٤ ص^{٣}	....	....

تدرّب (٧) :

❶ أوجد قيمة كل من كثيرات الحدود التالية عندما س = ٣ ، ص = − ٢ :

أ $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + ٢ ص^{٢} + ٢٥

= $\frac{١}{٣}$ × ٣^{٣} + ٢ × (− ٢)^{٢} + ...

= $\frac{١}{٣}$ × .... + ٢ × .... + ...

= .... + ... + ... = ...

ب ٣ ص^{٤} − ٢ س ص − ٥٠

= ٣ × (− ٢)^{٤} − ٢ × ٣ × (− ٢) − ....

= ٣ × .... − (..................) − ....

= .... + ... − .... = ...

---

❷ إذا كانت س = ٧ ، ص = ٧ ، ن = ٣

أي المقادير الآتية صحيحة بحيث يكون الناتج ١٤ ؟

أ س × (ص + ن) ب س × ص × ن

ج ن × ص − س د (ص + ن) ÷ س

تمــرَّنْ :

❶ ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

٣ س^{٥} − $\frac{١}{س}$ + ٤	كثيرة حدود	(أ)	(ب)
$\sqrt{س}$ − ص^{س} + $\frac{٢}{٨}$ س	ليست كثيرة حدود	(أ)	(ب)
− $\frac{٣}{٥}$ س ص^{٣} ، − ٦,٠ ص^{٣} س	حدان جبريان متساويان	(أ)	(ب)

٢ صل من القائمة (أ) ما يناسبها من القائمة (ب) :

(أ) الحدودية	(ب) الدرجة
$\frac{١}{٢}$ ص − ع •	• الثالثة
ص^{٢}ع − $\frac{١}{٣}$ ص ع + ١ •	• الرابعة
− س^{٢} − $\frac{٢}{٥}$ ص^{٣}س + س ص^{٢} •	• الأولى
٥ ل^{٥} + ل + ل^{٤} − ل^{٦} •	• السادسة
	• الثانية

٣ صنّف الحدود الجبرية التالية حسب ما هو موضح في الجدول التالي :

٦ س^{٢}ص ، $\frac{١}{٢}$ ص^{٣} ، − ص س^{٢} ، ٤ س ص^{٢} ، $\frac{٢}{٥}$ س^{٢}ص ، − ٧

حدود متشابهة	حدود غير متشابهة

---

٤ ضع الحدوديات التالية في الصورة القياسية ، ثم حدد درجة الحدودية :

أ ٦ س^{٥} + ٤ س^{٣} − ٥

....

....

ب − ٧ + ٤ ص^{٣} − ٥ ص^{٢} + ص^{٤}

....

....

جـ − ٤ع + ٦ − ٢ ع^{٣}

....

....

د ٢ س − ٥ س^{٢} + $\frac{١}{٢}$

....

....

٥ إذا كانت أ + ٣ ب = ٥ ، جـ = ٤ ، فما قيمة أ + ٣ (ب + جـ) ؟

---

٦ أوجد قيمة كثيرات الحدود التالية :

أ $-٤\text{س}^{٢} + \frac{١}{٢}\text{س} + ٥ + ٢\text{س}^{٣}$ ، عندما س = ٢

ب $-\text{س ص}^{٢} + \frac{٣}{٤}\text{ص}^{٢}\text{س}^{٢} - ٩$ ، عندما س = ٤ ، ص = ١

---

٧ كتبت أمينة لغزًا هو عبارة عن أرقام خزنتها ، وأرادت من ابنتها رغد معرفة رقم الخزنة وهو عبارة عن $٣\text{س}^{٣}\text{ص} + \frac{١}{٣}\text{س}^{٤} - ٥$ ، عندما س = ٣ ، ص = ١ .
ساعد رغد على فتح الخزنة .

---

٨ إذا كانت س − ص = ٤ ، احسب قيمة $(\text{س} - \text{ص})^{٢} - ٢(\text{س} - \text{ص})$

---

٩ لدى سامي ضعف عدد الكتب التي مع جاسم ، ومع حسن ستة كتب زيادة عن التي مع جاسم ، فإذا كان مع جاسم س كتاب ، فأي العبارات الرياضية الآتية تمثل عدد جميع الكتب التي مع الأولاد الثلاثة ؟

أ ٤ س + ٦ | ب ٣ س + ٨ | جـ ٨ س + ٢ | د ٣ س + ٦

٩-٣ جمع كثيرات الحدود وطرحها
Adding and Subtracting Polynomials

العبارات والمفردات :

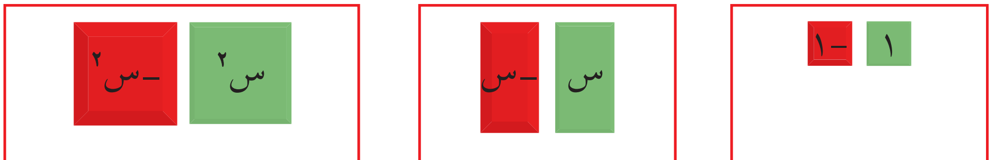
حدود متشابهة
Like Terms

مبسط
Simplified

سوف تتعلّم : جمع كثيرات الحدود وطرحها .

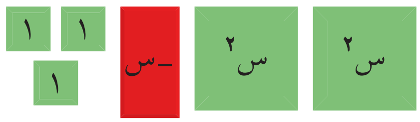
نشاط (١) :

سوف نستخدم البطاقات الجبرية لنمذجة كثيرات الحدود ، بفرض أن :

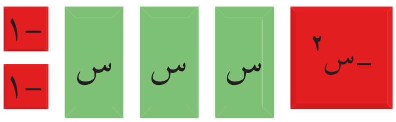


بطاقات للأعداد — بطاقات للمتغيرات — بطاقات مربعات المتغيرات

سنستخدم هذه البطاقات لنمذجة الحدوديات كما في المثال التالي :



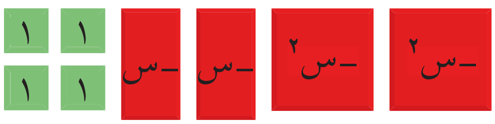
٢ س^٢ + (− س) + ٣



− س^٢ + ... + ...

تدرّب (١) :

أ اكتب كثيرة الحدود التي تمثل النموذج التالي :



(− ٢ س^٢) + (.................) + ...

ب نمذج كثيرة الحدود ٣ س^٢ + ٤ س − ١ مستخدمًا البطاقات .

جمع كثيرات الحدود

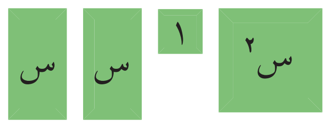
نشاط (٢) :

سوف نستخدم البطاقات الجبرية لنمذجة كثيرات الحدود ، بفرض أنَّ :

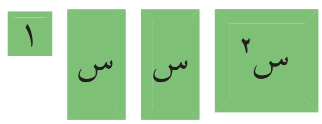
٢ س^{٢} + (– س) +٣	+	– س^{٢} + ... + ...

١ بالضم احذف الأزواج الصفرية :

٢ اكتب النمذجة التي حصلت عليها :



٣ رتب النمذجة التي حصلت عليها في الصورة القياسية :



٤ عبّر عن النمذجة بحدودية : س^{٢} + ... + ...

٥ لجمع كثيرات الحدود نقوم بجمع الحدود المتشابهة :

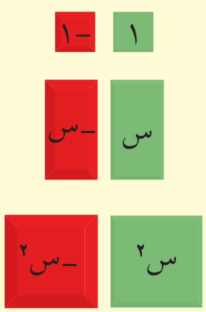
[٢ س^{٢} + (– س) + ٣] + [– س^{٢} + ٣ س + (– ٢)]

= ....

لجمع كثيرات الحدود نقوم بجمع الحدود المتشابهة معًا .

تذكَّرْ أنّ :

أزواج صفرية :



مثال (١) :

أوجد ناتج جمع كثيرات الحدود التالية :

٢ س^{٣} + ٤ س − ٦ مع − ٥ س^{٣} + ٢ س^{٢} − س + ٢

الحلّ :

الطريقة الرأسية :

اجمع الحدود المتشابهة

٢ س^{٣} + ٤ س − ٦

− ٥ س^{٣} + ٢ س^{٢} − س + ٢

− ٣ س^{٣} + ٢ س^{٢} + ٣ س − ٤

الطريقة الأفقية :

(٢ س^{٣} + ٤ س − ٦) + (− ٥ س^{٣} + ٢ س^{٢} − س + ٢)

= [٢ س^{٣} + (− ٥ س^{٣})] + ٢ س^{٢} + [٤ س + (− س)] + (− ٦ + ٢)

= − ٣ س^{٣} + ٢ س^{٢} + ٣ س + (− ٤) = −٣ س^{٣} + ٢ س^{٢} + ٣ س − ٤

تدرّب (٢) :

١ اجمع الحدوديات التالية :

أ س^{٢} + ٣ س^{٤} − ٧ س ، − س^{٢} − ١٠ س^{٤} ، ٥ س + ٢ س^{٢} − ٨ س^{٣}

(أكتب الحدودية بالصورة القياسية ، ثم أجمعها بالطريقة الرأسية) .

٣ س^{٤} + س^{٢} + ...

− ١٠ س^{٤} − س^{٢}

− ٨ س^{٣} + ٢ س^{٢} + ...

....

ب ٦ س^{٣} − ١ ، − ٢ س^{٢} − ٤ س + ٥ ، − س^{٣} − ٧ س^{٢}

....

....

....

---

٢ ناتج : ٣ س^{٢} + ٢ س + ٢ س^{٢} + س

أ ٨ س | ب ٨ س^{٢} | جـ ٥ س^{٢} + ٣ س | د ٧ س^{٢} + س

طرح كثيرات الحدود

تدرّب (٣) :

أكمل ما يلي لتصبح العبارة صحيحة :

م	كثيرة الحدود	المعكوس الجمعي
١	٣ س^{٢} – ٥ س – ٢	– (٣ س^{٢} – ٥ س – ٢) = – ٣ س^{٢} + ٥ س + ٢
٢	٤ س^{٢} – ٩ س + س^{٥}	– (٤ س^{٢} – ٩ س + س^{٥}) = ...
٣	– ٧ + ١٠ س^{٤} – ٦ س^{٣}	– (– ٧ + ١٠ س^{٤} – ٦ س^{٣}) = ...

تذكر أنّ :

- المعكوس الجمعي للعدد ٣ هو – ٣
- المعكوس الجمعي لـ س هو – س
- المعكوس الجمعي لـ –٣ س^{٥} هو ٣ س^{٥}
- أ – ب = أ + (– ب)

لطرح كثيرات الحدود نضيف المعكوس الجمعي للمطروح .

مثال (٢) :

أوجد ناتج ما يلي : (٦ س^{٣} – ٢ س^{٢} + ٤) – (س^{٣} – ٥ س^{٢} – ٣)

الحلّ:

الطريقة الأفقية :

- نكتب المعكوس الجمعي لكثيرة الحدود الثانية (المطروح) :

– (س^{٣} – ٥ س^{٢} – ٣) = – س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٣

- نجمع الحدودية الأولى ومعكوس الحدودية الثانية (المطروح) :

(٦ س^{٣} – ٢ س^{٢} + ٤) + (– س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٣)

= (٦ س^{٣} + (– س^{٣})) + (– ٢ س^{٢} + ٥ س^{٢}) + (٤ + ٣)

= (٦ – ١) س^{٣} + (– ٢ + ٥) س^{٢} + ٧ = ٥ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٧

نرتب الحدود المتشابهة ثم نجمعها .

الطريقة الرأسية :

- نكتب المعكوس الجمعي لكثيرة الحدود الثانية (المطروح) :

– (س^{٣} – ٥ س^{٢} – ٣) = – س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٣

- نجمع الحدودية الأولى ومعكوس الحدودية الثانية (المطروح) :

٦ س^{٣} – ٢ س^{٢} + ٤

– س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٣

―――――――――――

٥ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٧

نرتب الحدود تنازليًا (أو تصاعديًا) نضع الحدود المتشابهة أسفل بعض رأسيًا .

ثم نجمع الحدود المتشابهة .

تدرّب (٤) :

أ اطرح (٣ ص^{٤} − ٢ ص^{٣} − ٥ ص) من (١٢ ص^{٣} − ص^{٤} + ٢ ص^{٢})

الحلّ: المعكوس الجمعي للمطروح (..................................)

− ص^{٤} + ١٢ ص^{٣} + ٢ ص^{٢}

+ .... + ٢ ص^{٣} + ...

....

ب من (−٢س^{٢} − س + ١) اِطرح (− س^{٢} + ٣ س − ٢)

الحلّ: المعكوس الجمعي للمطروح (..................................)

= (−٢س^{٢} − س + ١) − (..................................)

= (−٢س^{٢} − س + ١) + (..................................)

= ....

تمــرَّنْ :

١ اجمع كثيرات الحدود التالية :

أ ٢ س^{٣} + ٥ س − ٢ ، − ٣ س^{٣} − ٢ س + ١٠

....

....

ب − ٤ س^{٥} + ٢ س^{٣} + ٦ ، − س^{٣} + ٤ س^{٥} − ٧

....

....

جـ − س^{٣} + ٦ س − ٥ ، ٧ س − س^{٢} − ٣ ، س^{٢} + ٨

....

....

د ٤ س − ٢ س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ س^{٣} ، ٣ س^{٤} + ٥ س^{٢} − س^{٣} ، س − $\frac{١}{٤}$

....

....

٢ اكتب المعكوس الجمعي لكثيرات الحدود التالية :

كثيرة الحدود	المعكوس الجمعي
$\frac{١}{٢}$ س^{٣} − ٣ س^{٢} − ٢	− (..............................) = ...
− ٣,٠ س^{٥} − س^{٤} + $\frac{٢}{٣}$	− (..............................) = ...
− س^{٣} − ٥ س + ١	− (..............................) = ...
٧ + ٤ س^{٢} − ٦ س + س^{٢}	− (..............................) = ...

٣ أوجد ناتج ما يلي :

أ ٣ س^{٤} − ٢ س^{٣} + ٧ س − (٢ س^{٣} − س^{٤} + ٥ س)

....

....

ب ٦ س^{٢} − س + ٥ − (١٠ س^{٢} − س − ١٥)

....

....

---

٤ **أ** اطرح (٥ س^{٢} + ٦ س^{٤} − ١) من (٤ س^{٤} − ١٤ س^{٢} + س)

....

....

....

....

ب من (٣ س − ٩ + س^{٢} − ٤ س^{٣}) اطرح (٢ س + ٩ س^{٣} − س^{٢} + ٩)

....

....

....

....

٩-٤ ضرب كثيرات الحدود
Multiplying Polynomials

سوف تتعلّم: ضرب كثيرات الحدود .

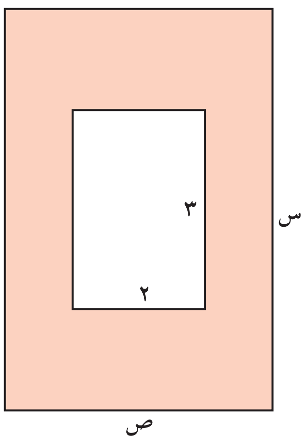
نشاط (١) :

أ أراد أحمد أن يشتري سجادة ليضعها في صالة المنزل ، ففكر بعدة أبعاد للسجادة وإيجاد مساحتها كما في الجدول .

أكمِل الجدول التالي :

الطول	العرض	الطول × العرض	مساحة الشكل
س	٢	س × ٢	٢ س
٢ س	س	٢ س × س	٢ س ....
٦ س	٢ س	....	....

ب باب على شكل مستطيل طوله س قدم ، وعرضه ص قدم ، وفي منتصفه نافذة زجاجية مستطيلة الشكل ، طولها ٣ أقدام وعرضها قدمان ، أي العبارات التالية يبين المساحة المدهونة من الباب بوحدة القدم المربعة ؟



(أ) س + ص – ٦ (ب) س ص + ٦

(جـ) س ص – ٦ (د) س + ص + ٦

> **ملاحظة :**
> ضرب قوى لأساسات متشابهة :
> عند ضرب قوى لأساسات متشابهة نجمع الأسس .
> $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$
> حيث أ ≠ ٠ ، م ، ن ∈ ص

تدرّب (١) :

أوجد ناتج ما يلي :

١ ٥ س^{٢} × ٧ س^{٣} = (٥ × ٧) × (س^{٢} × ....) = ٣٥ ....

٢ – ٣ س^{٤} × – ٥ س^{٥} = ...

يمكنك أن تضرب وحيدة حدّ في وحيدة حدّ ، قد تساعد خاصية التوزيع في أن تضرب وحيدة حدّ في كثيرة حدود .

> **تذكَّرْ أنّ :**
> الخاصية التوزيعية للضرب على الجمع
> ﺃ × (س + ص) =
> (ﺃ × س) + (ﺃ × ص)

تدرّب (٢) :

أكمل:

(٢ س^{٢}) × (٨ س^{٤} + ٣ س)

= (٢ س^{٢} × ....) + (٢ س^{٢} × .... س) = ... + ...

والآن ، يمكنك أيضًا إيجاد ناتج ضرب كثيرة حدود في أخرى حيث توجد طريقتان لإجراء عملية الضرب : الطريقة الرأسية والطريقة الأفقية . يمكنك استخدام أي منهما في الحلّ .

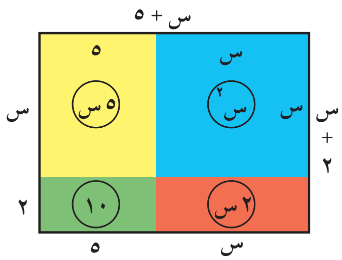
تدرّب (٣) :

بسط المقدار التالي : ٤ (٢ + س) – ٣ س + ٥ (س – ١)

....

مثال (١) :

في الشكل المقابل مستطيل بعداه (س + ٥) ، (س + ٢) أوجد مساحة المستطيل :



الحلّ:

نقسم المستطيل إلى أربعة أجزاء كما في الشكل المقابل.

مساحة الشكل = الطول × العرض = مجموع مساحات الأجزاء الأربعة

• **الطريقة الأولى : الأفقية**

(س + ٥) (س + ٢)

= س (س + ٢) + ٥ (س + ٢)

= (س × س) + (س × ٢) + (٥ × س) + (٥ × ٢)

= س^{٢} + ٢ س + ٥ س + ١٠

= س^{٢} + ٧ س + ١٠

• **الطريقة الثانية : الرأسية**

س + ٥
× س + ٢
―――――――
س^{٢} + ٥ س
+ ٢ س + ١٠
―――――――
س^{٢} + ٧ س + ١٠

> **تذكَّرْ أنّ :**
> مربع س = س^{٢}
> ضعف س = ٢ س

تدرّب (٤) :

أوجد ناتج (س + ٤) (س + ٣) = س (س + ٣) + ٤ (س + ٣)

= س^{٢} + ... + ... + ١٢

= س^{٢} + ... س + ١٢

تدرّب (٥) :

أكمل لإيجاد ناتج ما يلي :

أ (ص + ٥) (ص − ٥)

= ص (ص − ٥) + ٥ (........)

= ص^{٢} − .... + ... − ....

= ....

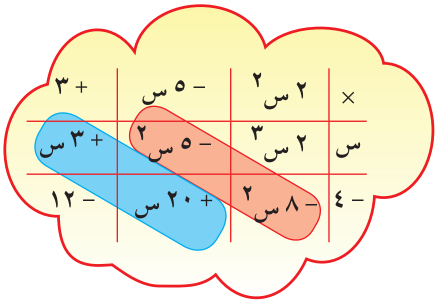
ب ٢ س^{٢} − ٥ س + ٣

× س − ٤

٢ س^{٣} − .... س^{٢} + ... س

+ .... س^{٢} + ٢٠ .... − ....

.... − ١٣ س^{٢} + ٢٣ .... − ١٢



= ٢ س^{٣} − $\boxed{\text{١٣ س}^{٢}}$ + $\boxed{\text{٢٣ س}}$ − ١٢

مثال (٢) :

أوجد مربع (س + ٣) = (س + ٣)^{٢}

الحلّ:

(س + ٣) (س + ٣)

= س^{٢} + ٣ س + ٣ س + ٩

= س^{٢} + ٦ س + ٩

لاحظ في مثال (٢) السابق :

(س + ٣)^{٢} هي **مربع الحدانية** (س + ٣) حيث :

س هي **الحد الأول** ، ٣ هي **الحد الثاني** ،

س^{٢} هي **مربع الحد الأول** ،

٩ هي **مربع الحد الثاني** ،

٦ س هي **ضعف الحد الأول × الحد الثاني** .

مربع (س ± ص) = (س ± ص)^{٢} **الصورة القياسية**

= س^{٢} ± ٢ س ص + ص^{٢} **حدودية ثلاثية على صورة مربع كامل**

= مربع الحد الأول ± ضعف الحد الأول × الحد الثاني

\+ مربع الحد الثاني

تدرّب (٦) :

أ أوجد (ص – ٧)^{٢} :

= [مربع الحد الأول] – [ضعف الحد الأول × الحد الثاني] + [مربع الحد الثاني]

= ص^{٢} – .... × .... × ص + ٧^{٢}

= .... – .... + ٤٩

ب (٢^{٢} + ٥ ب)^{٢}

= [مربع الحد الأول] + [ضعف الحد الأول × الحد الثاني] + [مربع الحد الثاني]

= .... + ... + ...

= ٢^{٤} + ... + ...

فكِّر وناقِش

ما التشابه والاختلاف بين ناتج (س + ٥)^{٢} و (س – ٥)^{٢} ؟

مثال (٣) :

شبه مكعب أبعاده هي : (س + ٥) ، (س − ٢) ، (س) وحدة طول .

أوجد حجمه .

الحلّ:

حجم شبه المكعب = حاصل ضرب أبعاده

$= (س + ٥) \times (س - ٢) \times (س)$

$= [س \times (س - ٢) + ٥ \times (س - ٢)] \times س$

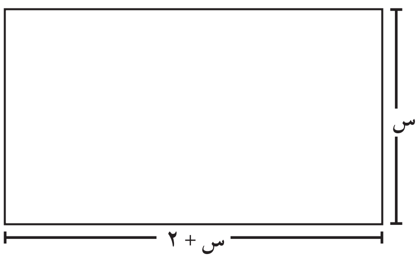
$= [س^{٢} - ٢س + ٥ س - ١٠] \times س$

$= [س^{٢} + ٣ س - ١٠] \times س$

$= س^{٣} + ٣ س^{٢} - ١٠ س$ وحدة مكعبة

تمــرَّنْ :

١ مساحة المستطيل المجاور هي :



أ) $س^{٢} + ٢$

ب) $س^{٢} + ٢س$

جـ) $٢ س + ٢$

د) $٤ س + ٤$

٢ أوجد ناتج كلّ مما يلي :

أ) $٢س \times ٣ س^{٢} =$

....

....

ب) $\frac{١}{٢} س \times \left(\frac{٢}{٣} س^{٢} - ٤ س + \frac{٣}{٢} \right) =$

....

....

جـ) $(٣ ص^{٢} + ص - ٢) \times (-٢ ص) =$

....

....

د) $(٢ س + ٣ ع)^{٢} =$

....

....

هـ) $(س + ٧) (س - ٥) =$

....

....

و) $(أ - ب) (أ + ب) =$

....

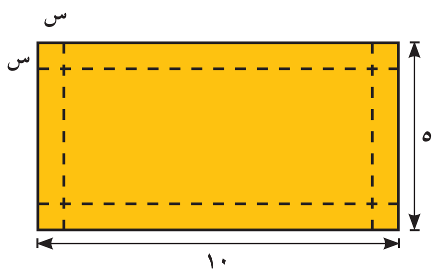
....

٣ أوجد مربع كل حدانية في ما يلي :

أ س – ٤ ....

ب ٣ م – ٢ جـ^{٢} ....

٤ أرادت شيماء صنع علبة من دون غطاء مستخدمة قطعة من الورق المقوى بعداها ١٠ وحدة طول ، ٥ وحدة طول ، وذلك بنزع مربع طول ضلعه س وحدة طول من كل زاوية من زوايا القطعة . ما حجم علبة شيماء ؟



....

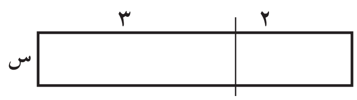
....

٥ أي مما يلي يمثل التعبير ٢ س + ٣ س ؟

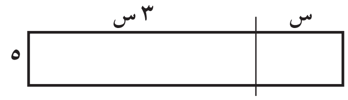
أ طول القطعة المستقيمة

ب طول القطعة المستقيمة

جـ مساحة الشكل



د مساحة الشكل



٦ إذا كانت س^{٢} = ١٦ ، ص^{٢} = ٤ ، فإنّ أكبر قيمة للمقدار (س – ص)^{٢} =

أ ٤ | ب ١٢ | جـ ١٦ | د ٣٦

٧ أي مما يلي يساوي ٢ (س + ع) – (٢ س – ع) ؟

أ ٣ ع | ب ع | جـ ٤ س + ٣ ع | د ٤ س + ٢ ع

٩-٥ قسمة كثيرة حدود على حد جبري
Dividing a Polynomial by a Monomial

سوف تتعلّم : قسمة حد جبري على حد جبري آخر ، قسمة كثيرة حدود على حد جبري

نشاط (١) :

باستخدام قسمة الأعداد النسبية وما تعلمته من ضرب وقسمة الأسس ، أكمل الجدول .

الحد الأول	الحد الثاني	الحد الأول ÷ الحد الثاني (الحد الثاني ≠ ٠)
١٥	٥	
$س^{٤}$	$س^{٢}$	
$س^{٥}$	٦	
$س^{٢}$	$ص^{٣}$	
$١٥\ س^{٤}$	$٣\ س^{٢}$	
$٤\ س^{٢}$	$٢\ ص^{٣}$	

تدرّب (١) :

أ أوجد ناتج قسمة $٨\ س^{٤}\ ص^{٣}$ على $٤\ ص^{٢}\ س^{٣}$

$$\frac{٨\ س^{٤}\ ص^{٣}}{٤\ ص^{٢}\ س^{٣}} = \text{..................}$$

ب أوجد ناتج قسمة $٥\ ع^{٢}\ ل^{٤}$ على $١٥\ ع^{٦}\ ل$

$$\frac{٥\ ع^{٢}\ ل^{٤}}{١٥\ ع^{٦}\ ل} = \frac{\text{..........}}{\text{..........}}$$

ملاحظة : المقام أينما وجد لا يساوي صفرًا.

إذا أردنا أن نقسم كثيرة حدود على حد جبري ، نقسم كل حد من كثيرة الحدود على هذا الحد الجبري .

مثال : اقسم $(٦\ س^{٤} + ٣\ س^{٣} - ١٢\ س^{٢})$ على $٣\ س^{٢}$

الحلّ :

$$\frac{٦\ س^{٤} + ٣\ س^{٣} - ١٢\ س^{٢}}{٣\ س^{٢}} = \frac{٦\ س^{٤}}{٣\ س^{٢}} + \frac{٣\ س^{٣}}{٣\ س^{٢}} - \frac{١٢\ س^{٢}}{٣\ س^{٢}}$$ اقسم كل حدّ على المقسوم عليه

$$= ٢س^{٢} + س - ٤$$ بسّط

العبارات والمفردات :

قسمة حد جبري
Dividing a Monomial

قسمة كثيرة حدود
Dividing a Polynomial

معلومات مفيدة :
تُستخدَم قسمة كثيرات الحدود عند الكيميائيين في صناعة الأدوية .

تذكَّرْ أنّ :

$$\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$$

حيث $أ \neq ٠$

تدرّب (٢) :

اقسم (٦ س^{٥} + ٨ س^{٤} − ٢ س^{٢}) على س^{٢}

$\frac{\text{٦ س}^{٥}}{\text{.........}}$ + $\frac{\text{.........}}{\text{.........}}$ − $\frac{\text{٢ س}^{٢}}{\text{.........}}$ = ٦ .... + ... س^{٢} − ....

تمــرَّنْ :

١ اختصر ما يلي :

أ $\frac{\text{س}^{٥}}{\text{س}^{٣}}$ = ...

ب $\frac{\text{٦ س}^{٤}}{\text{٢ س}^{٢}}$ = ...

جـ − $\frac{\text{٨ س}^{٣}}{\text{٨ س}^{٣}}$ = ...

د $\frac{\text{١٠ س}^{٢}}{\text{٢٥ س}^{٥}}$ = ...

٢ اقسم : ٦ س^{٢} ص^{٣} + ١٢ س^{٤} ص^{٤} − ١٨ س^{٥} ص^{٢} على ٦ س^{٢} ص^{٢}

= ....

= ....

= ....

٣ أوجد ناتج $\frac{\text{٥ س}^{٢}\text{ص}^{٣} + \text{٣ س}^{٧}\text{ص}^{٢} - ٥}{\text{١٥ س}}$

....

....

....

٤ مساحة مستطيل هي (٣ س^{٢} − ٢ س) مترًا مربّعًا ، عرض هذا المستطيل س مترًا ،
أوجد طول هذا المستطيل .

....

....

....

٩-٦ مراجعة الوحدة التاسعة
Revision Unit Nine

١ اختصر :

أ $(-٢ ٲ ب)(ٲ^{٢} ب^{٣})^{٤} =$ ....

ب $\frac{س^{٩}}{س^{٢}} =$ ....

جـ $\frac{-٢٤ ع^{٢} ل^{٢}}{٦ ع^{٣} ص} =$ ....

د $\left(\frac{-٢ ٲ^{٢}}{٣ ب}\right)^{٣} =$ ....

٢ احسب قيمة كل من كثيرات الحدود التالية عندما س = − ٢

أ $٢ س^{٢} - ٣ س + ٥$

....

ب $٣ س^{٣} - ٢ س + ٧$

....

جـ $\frac{١}{١٦} س^{٤} + \frac{٣}{٤} س^{٢}$

....

٣ اجمع كثيرات الحدود التالية :

أ $س^{٢} + ٦ س - ٤$ ، $٥ س - س^{٢} - ٤$

....

ب $٢ ص^{٣} - ٤ ص^{٢} + ٩$ ، $ص^{٣} + ٣ ص^{٢} - ٩$ ، $٥ ص^{٣} - ص^{٢}$

....

٤ اطرح $(٢ ص^{٤} - ٣ ص^{٣} + ٢)$ من $(٥ ص^{٣} + ٦ ص^{٤} - ١)$

....

٥ من (٤ هـ م^{٢} + ٣ هـ^{٣} م + ٧) اطرح (هـ^{٣} م + هـ م^{٢} + ٧)

٦ أوجد ناتج :

أ (س + ٤) (س − ٩) =

ب مربع (س^{٢} + ١) =

جـ (٢ أ + ٣) (٥ أ^{٢} − ٤ أ − ٧) =

٧ اقسم : ٤ س^{٣} ص^{٢} + ١٦ س^{٥} ص^{٦} + ٣٦ س^{٣} ص^{٤} على ٤ س^{٢} ص^{٣}

٨ اقسم : ١٥ س^{٢} ص^{٣} − ١٢ س^{٣} ص + ٩ س^{٤} ص^{٤} على ٦ س^{٢} ص

٩ منطقة مستطيلة مساحتها (٢ س^{٣} + ١٢ س^{٢} − ٤ س) وحدة مربّعة وعرضها ٢ س وحدة طول أوجد طولها .

اِختبار الوحدة التاسعة

أوّلًا : في البنود (١–٤) ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ ناتج $\left(\frac{\text{س}^{٥}}{٢\text{س}^{٥}}\right)^{٠} = ١$ ، حيث س $\neq ٠$	أ	ب
٢ $٣\text{س}^{٣} - \frac{١}{\text{س}} + ٤$ كثيرة حدود	أ	ب
٣ ناتج جمع $٣\text{س}^{٢}$ ، $٥\text{س}^{٣}$ هو $٨\text{س}^{٥}$	أ	ب
٤ $-٢٤\text{ع}^{٢}\text{ن}^{٦}$ ، $\pi\,\text{ن}^{-٦}\text{ع}^{٢}$ ، $\frac{٣}{٥}\text{ع}^{-٢}\text{ن}^{٦}$ حدود مُتشابهة	أ	ب

ثانيًا: لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة :

٥ المعكوس الجمعي لكثيرة الحدود $-٢\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٤$ هو :

(أ) $-٢\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٤$ (ب) $-٢\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٤$

(جـ) $٢\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٤$ (د) $٢\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٤$

---

٦ $٣\text{س}(٢\text{س} - ٥) =$

(أ) $٦\text{س}^{٢} - ٥$ (ب) $٦\text{س} - ١٥$ (جـ) $٦\text{س}^{٢} + ٥$ (د) $٦\text{س}^{٢} - ١٥\text{س}$

---

٧ $\frac{٦\text{س}^{٣} - ٣\text{س}}{٣\text{س}} =$

(أ) $٢\text{س}^{٢}$ (ب) $٢\text{س}^{٢} - \text{س}$ (جـ) $٢\text{س}^{٢} - ١$ (د) $\frac{١}{٢\text{س}^{٢}}$

٨ ناتج جمع ٤ س^{٣} + ٤ س^{٢} – ٢ س – ٢ ، ٢ س^{٢} + ٣ س^{٣} – ٤ س – ١ =

أ ٧ س^{٣} + ٢ س^{٢} – ٥ س + ٢

ب ٧ س^{٣} + ٦ س^{٢} – ٦ س – ٣

جـ ٤ س^{٣} – ٢ س^{٢} – ٥ س + ٢

د ٦ س^{٣} + ٧ س^{٢} + ٦ س – ٣

---

٩ (٣ س + ٤ ص) – (٣ س – ٤ ص) =

أ ٦ س – ٨ ص

ب ٦ س + ٨ ص

جـ ٨ ص

د ٦ س

---

١٠ التعبير الجبري المكافىء للتعبير ٢ + ٥ ن هو :

أ ٢ + ٢ ن + ٣

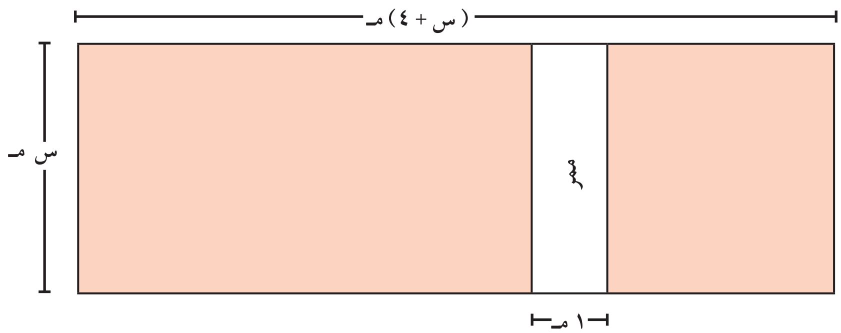
ب ن + (١ + ٢ ن)

جـ ٧ ن

د $\frac{\text{١٥ ن + ٦}}{\text{٣}}$

---

١١ الشكل أدناه هو رسم بياني لحديقة مستطيلة الشكل ، المنطقة البيضاء عبارة عن ممر مستطيل الشكل يبلغ عرضه ١ متر .



أي العبارات التالية يظهر مساحة المنطقة المظللة من الحديقة بالمتر المربع ؟

أ س^{٢} + ٣ س

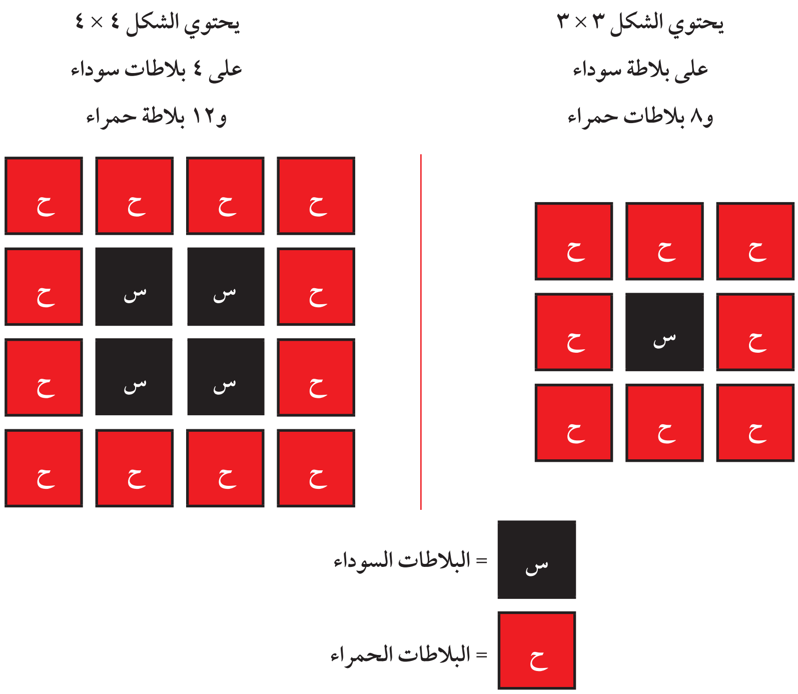
ب س^{٢} + ٤ س

جـ س^{٢} + ٤ س – ١

د س^{٢} + ٣ س – ١

أسئلة تحدي : فكر معنا في الأنماط

١ لدى محمد بلاطات حمراء وسوداء ، ويستخدم محمد البلاطات لتكوين مربعات ، ويحتوي الشكل على :



يوضح الجدول التالي عدد البلاطات في أول ٣ أشكال صنعها محمد. واستمر محمد في عمل المربعات بهذه الطريقة .

- أكمل الجدول للمربع بالشكل ٦ × ٦ و ٧ × ٧ و س × س

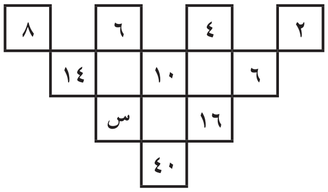
الشكل	عدد البلاطات السوداء	عدد البلاطات الحمراء	العدد الكلي للبلاط
٣ × ٣	١	٨	٩
٤ × ٤	٤	١٢	١٦
٥ × ٥	٩	١٦	٢٥
٦ × ٦	١٦		
٧ × ٧	٢٥		
س × س			

استخدم الأمثلة الواردة في الجدول السابق للإجابة على السؤال التالي :

صنع محمد شكلًا باستخدام ٤٤ بلاطة حمراء فكم عدد البلاط الأسود الذي يحتاجه محمد لاستكمال الجزء الأسود من الشكل ؟

....

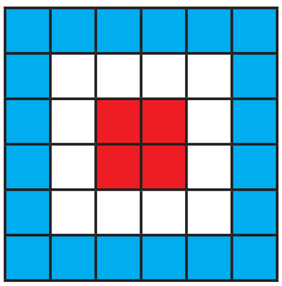
٢ ما قيمة س في هذا النمط؟



....

....

٣ تحب سيدة خياطة اللحف وقامت بصنع تصميمًا يقع في مركزه أربعة مربعات حمراء متماثلة، تشكل مربعًا كبيرًا محاطًا بإطار مكون من ١٢ مربعًا متماثلًا ذا لون أبيض . وإذا بدوره محاط بإطار آخر مكون من ٢٠ مربعًا متماثلًا أزرق اللون . كم سيكون عدد المربعات في الإطار التالي الذي يحيط بالمربعات الزرقاء ؟ وضح إجابتك .



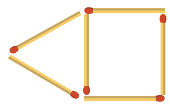
....

....

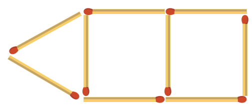
....

....

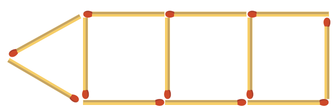
٤ الشكل ١



الشكل ٢



الشكل ٣



إذا استمر نفس النمط السابق، ما عدد أعواد الثقاب التي يتمّ استخدامها لعمل الشكل ١٠ ؟

أ ٣٠ | ب ٣٣ | جـ ٣٦ | د ٩٣

الوحدة العاشرة

تحليل المقادير الجبرية
Factorising Algebraic Expressions

العلم والحياة
Education and Life

مشروع الوحدة : (مزرعتي)

العلم هو الفكر الناتج عن دراسة سلوك وشكل وطبيعة الأشياء مما يؤدي إلى الحصول على معرفة عنها . فللعلم أهمية كبيرة في حياة الإنسان حيث إنَّه ساهم في تطور العديد من الأشياء وقدّم الكثير من الاختراعات التي أدت إلى تطور البشرية وزيادة ازدهارها .
مثال على ذلك ، التطور والازدهار الذي شهده مجال الزراعة .

خطة العمل :

- إيجاد (المساحة المتبقية) من مساحة معطاة .

خطوات تنفيذ المشروع :

تستعين كل مجموعة بمعلم الصف للقيام بما يلي :

- تحدد الشكل الهندسي لكل من (الأرض الزراعية - أرض المنزل) في الشكل المقابل .
- توجد المجموعة مساحة كل من :
  (أ) الأرض الزراعية (ب) أرض المنزل .
- توجد مساحة الأرض المُتبقية بعد بناء المنزل عليها بالاستعانة بالتحليل.
- توجد مساحة الأرض المُتبقية عندما ص = ٢٥ متر ، س = ٢٠ مترًا .

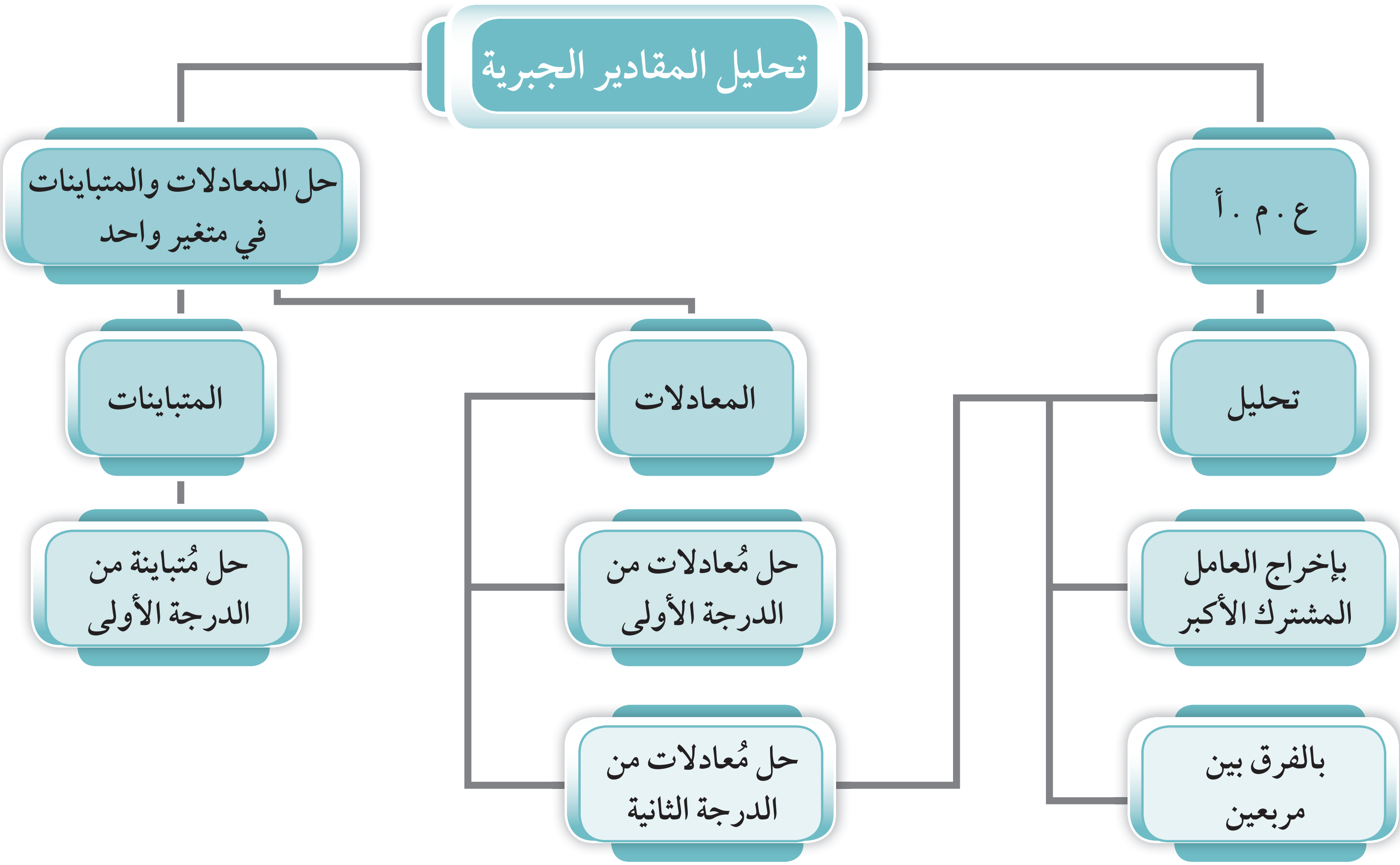
علاقات وتواصل :

- مناقشة المجموعات خطوات إعداد المشروع .

عرض العمل :

- كل مجموعة تعرض حلها ثم تناقش المجموعات الحلول وتصحح الأخطاء .

مخطَّط تنظيمي للوحدة العاشرة



١٠-١ العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ)
Greatest Common Factor (GCF)

سوف تتعلّم : إيجاد (ع . م . أ) لحدين أو أكثر - كثيرات حدود .

نشاط :

يمكننا إيجاد العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) للعددين ١٨ ، ٣٠ بطريقتين . أكمل ما يلي :

الطريقة الأولى : (عوامل العدد)

عوامل ١٨ هي : ١ ، .... ، ٣ ، ٦ ، .... ، ....

عوامل ٣٠ هي : ١ ، ٢ ، .... ، .... ، ٦ ، .... ، ١٥ ، ....

العوامل المشتركة بينهما هي : ١ ، .... ، .... ، ٦

فإنَّ العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) للعددين ١٨ ، ٣٠ هو ....

الطريقة الثانية : (التحليل بالعوامل الأولية)

١٨ = $\boxed{٢}$ × .... × ٣

٣٠ = $\boxed{٢}$ × ٣ × ....

فإنَّ العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) للعددين ١٨ ، ٣٠ هو ٢ × .... = ...

وظف ما سبق في إيجاد (ع . م . أ) للحدود الجبرية في الجدول التالي :

الحدود الجبرية	عوامل الحدود الجبرية	ع . م . أ للحدود
س ، س^{٤}	س = $\boxed{س}$ س^{٤} = $\boxed{س}$ × س × .... ×	س
٢ ص^{٣} ، ص^{٥}	٢ص^{٣} = ٢ × ص × .... × .... ص^{٥} = ص × .... × .... × .... ×	....
٢ن^{٢} ، ٦ن^{٣} ، ٤ن	٢ن^{٢} = ٢ × ن × .... ٦ن^{٣} = ٢ × .... × ن × .... × .... ٤ن = ٢ × .... ×	....

العبارات والمفردات :

عامل مشترك
Common Factor

العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ)
Greatest Common Factor (GCF)

معلومات مفيدة :

يستخدم الرسامون التحليل إلى (ع . م . أ) في لوحاتهم الفنية لأهميتها في دقة الرسومات باللوحة كي تكون أكثر حرفية وجمالًا .

تذكَّرْ أنَّ :

- الأعداد الأولية هي : الأعداد التي لها عاملان فقط هما الواحد والعدد نفسه .
- (ع . م . أ) لعددين أو أكثر هو أكبر عدد يكون عاملًا مشتركًا لعددين أو أكثر .
- العوامل الأولية للعدد ٦ هي : ٢ ، ٣ .

تدرّب (١) :

أ أوجد العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) للحدين ٨ ، ١٢ س .

نحلل الحدين إلى عواملهما الأولية .

$٨ = \boxed{٢} \times \boxed{٢} \times ...... = ٢^{٣}$

$١٢\ س = \boxed{٢} \times \boxed{......} \times ...... \times ...... = ٢^{٢} \times ٣ \times س$

فيكون (ع . م . أ) = ٢ × ٢ = $٢^{....}$ = ٤

∴ (ع . م . أ) للحدين ٨ ، ١٢ س هو ....

ب عيّن (ع . م . أ) للحدين ٤ $س^{٥}$ ، ١٢ $س^{٢}$:

$٤\ س^{٥} = \boxed{٢} \times \boxed{٢} \times \boxed{س} \times \boxed{س} \times ...... \times ...... \times ......$

$١٢\ س^{٢} = \boxed{٢} \times \boxed{......} \times ...... \times \boxed{س} \times \boxed{س}$

∴ ع . م . أ = ...

جـ عيّن (ع . م . أ) للحدود ١٤ س $ص^{٤}$ ، ٢١ $ص^{٢}$ ع ، ٧ س $ص^{٣}$ $ع^{٢}$:

$١٤\ س\ ص^{٤} = ٢ \times \boxed{......} \times س \times \boxed{ص} \times \boxed{......} \times ...... \times ......$

$٢١\ ص^{٢}\ ع = ٣ \times \boxed{......} \times \boxed{ص} \times \boxed{......} \times ......$

$٧\ س\ ص^{٣}\ ع^{٢} = \boxed{......} \times س \times \boxed{ص} \times \boxed{......} \times ...... \times ...... \times ......$

∴ ع . م . أ = ...

ملاحظة :

لإيجاد العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) لمجموعة من الحدود الجبرية :

نأخُذ العامل المُشترك في جميع الحدود بأصغر أُس .

معلومات مفيدة :

(١) تعتبر خوارزمية إقليدس في إيجاد العامل المشترك الأكبر واحدة من أقدم الخوارزميات الجارية الاستعمال ، ظهرت في كتاب الأصول لإقليدس عام ٣٠٠ ق . م تقريبًا .

(٢) المهندس الزراعي يقوم بتحليل التربة (طينية - رملية - صخرية) لمعرفة نوع الزراعة المناسبة لها ولزراعة أنواع من الخضروات والفواكه والمحاصيل الموسمية .

تدرّب (٢) :

أ أوجد (ع . م . أ) للحدين ٨ ب^{٤} جـ^{٣} ، ٣٢ ب^{٥} جـ^{٢}

٨ ب^{٤} جـ^{٣} = ٢^{٣} ب^{٤} جـ^{٣}

٣٢ ب^{٥} جـ^{٢} = ٢$^{....}$ ب^{٥} جـ^{٢}

∴ (ع . م . أ) للحدين هو ٢$^{....}$ ب$^{....}$ جـ$^{....}$

ب أوجد (ع . م . أ) لحدود المقدار ٣٥ ع^{٢} ل^{٣} + ١٤ ع^{٤} ل^{٢} − ٧ ع^{٣} ل

٣٥ ع^{٢} ل^{٣} = ٥ × .... × ع^{٢} × ل^{٣}

١٤ ع^{٤} ل^{٢} = ... × .... × ع^{٤} × ل$^{....}$

٧ ع^{٣} ل = ... × ع^{٣} × ....

∴ (ع . م . أ) للمقدار هو .... × ع$^{....}$ × ل$^{....}$ = ٧ ع^{٢} ل

تدرّب (٣) :

أوجد (ع . م . أ) لحدود كلٍّ من المقادير التالية :

أ ٣ ل^{٥} ع^{٤} − ٩ ع^{٥} ل^{٣} + ٦ ع^{٢} ل^{٢}

....

....

ب ١٤ ل^{٢} ص^{٥} س^{٣} + ٧ ل^{٣} ص^{٤} س^{٢} + ٥ ل^{٤} س

....

....

تمـــرَّنْ :

١ أوجد (ع . م . أ) لكلٍّ مما يلي :

أ ١٨ ، ٢٧

ب ٥ ص^{٢} ، ص^{٦}

جـ ٨ ص^{٤} ، ١٢ ص^{٣} ، ١٦

د ٦س^{٤}ص^{٣} ، ٩ س^{٢}ص^{٥}

هـ ٤ ب^{٣} ، ١٤ب^{٢} ، ٢٠ب^{٥}

و ٩ أ^{٢} ، ١٢ أ ب

ز ٢٧ب^{٢}ن^{٤} ، ١٨ ب ك^{٢}ن^{٣}

ح ١٠ص ع ، ٤٠ س^{٢}ص

٢ أوجد (ع . م . أ) لحدود المقادير التالية :

أ ٤٢ س^{٧}ص + ٦ س

ب ١٨ هـ^{٣}ص^{٤} − ٥٤ ل^{٢}هـ^{٦}

جـ ١٤ك^{٢}ص^{٥}س^{٣} + ٧ك ص س + ٢١ك س

د ٥س^{٤}ص^{٥} − ١٠ص^{٤}س^{٥} + ١٥ص^{٣}س^{٢}

١٠-٢ التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر
Factorise Using The GCF

العبارات والمفردات :

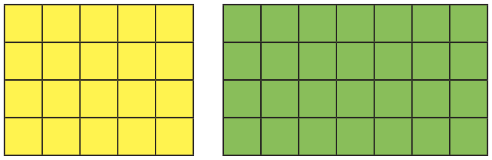
عامل **Factor**

عامل أولي **Prime Factor**

تحليل إلى عوامل أولية **Prime Factorisation**

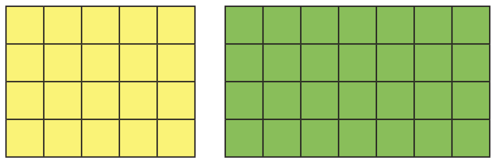
سوف تتعلّم : التحليل بإخراج العامل المُشترك الأكبر للتعبيرات الجبرية .

نشاط :



قال خالد لصديقه جاسم إنَّه يستطيع إيجاد مساحة المستطيلين المرسومين بطريقتين مختلفتين هما :

الطريقة الأولى :

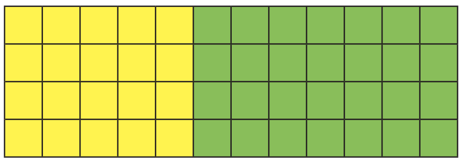


مساحة المستطيلين = (٤ × ٧) + (٤ × ٥)

= .... + ...

= ....

الطريقة الثانية :



مساحة المستطيلين = ٤ × (٧ + ٥)

= ٤ × ....

= ....

معلومات مفيدة :

يستخدم النجارون التحليل في كثير من الأمور ، كتصميمهم للخزائن الخشبية المُفرغة من الداخل ، وغيرها الكثير من الاستخدامات .

نلاحظ أنَّ :

(٤ × ٧) + (٤ × ٥) = ٤ × (٧ + ٥)

تحليل بأخذ العامل المشترك الأكبر

٤ × (٧ + ٥)

= (٤ × ٧) + (٤ × ٥)

توزيع عملية الضرب على الجمع

يسمى ٤ ، (٧ + ٥) **عاملي المقدار** ٤ × (٧ + ٥)،

حيث ٤ **هو العامل المشترك الأكبر للمقدار** : (٤ × ٧) ، (٤ × ٥)

تذكّرْ أنَّ :

الخاصية التوزيعية :

س × (ب + جـ)

= س ب + س جـ

بصورة عامة :

أ ب + أ جـ = أ (ب + جـ) ، أ ب − أ جـ = أ (ب − جـ)

ملاحظة : إنَّ المقدار بين القوسين ينتج من قسمة كل حد على (ع . م . أ) .

مثال :

حلل بإخراج العامل المشترك الأكبر للمقدار : ٤أ + ٦ب − ٨جـ

الحل :

(١) (ع . م .أ) للحدود هو ٢	نوجد (ع . م .أ) بين حدود المقدار الجبري
(٢) $\frac{٤أ}{٢}$ + $\frac{٦ب}{٢}$ − $\frac{٨جـ}{٢}$ = ٢أ + ٣ب − ٤جـ	نقسم كل حد من حدود المقدار على (ع . م .أ)
(٣) ٢ × (٢أ + ٣ب − ٤جـ)	نضع المقدار الجبري على صورة حاصل ضرب عاملين

تدرّب (١) :

حلِّل بإخراج العامل المشترك الأكبر :

أ ٤س − ٨ص

(١) (ع . م .أ) للحدين = ...

(٢) ($\frac{٤س − ٨ص}{٤}$) = ...

(٣) ٤س − ٨ص = ٤ (............. − ....)

ب ٣أب^٢^ + ٦أ^٢^ب

(١) (ع . م .أ) للحدين = ...

(٢) ($\frac{٣أب^{٢} + ٦أ^{٢}ب}{٣أب}$) = ...

(٣) ٣أب^٢^ + ٦أ^٢^ب = ٣أب (............... + ...)

جـ ٤س + ٦س^٢^ − ٨س^٣^

(١) (ع . م .أ) للحدود = ...

(٢) ٤س + ٦س^٢^ − ٨س^٣^ = ٢س ($\frac{٤س}{٢س}$ + $\frac{.........}{٢س}$ − $\frac{.........}{.........}$)

(٣) ٢س (............... + ... − ....)

تدرّب (٢) :

حلِّل المقادير الجبرية التالية بإخراج العامل المشترك الأكبر :

أ ٣ص − ٩ص^٢^

(١) (ع . م .أ) للحدين = ...

(٢) ٣ص − ٩ص^٢^ = ... (............... − ....)

ب ٤ (س + ٣) + ص (س + ٣)

(ع . م . أ) للحدود = س + ٣

٤ (س + ٣) + ص (س + ٣) = (س + ٣) (........... + ...)

تدرّب (٣) :

أ حلّل المقدار ٢س^{٢}ص + ٣ س ص^{٢} بإخراج العامل المشترك الأكبر.

(ع . م . أ) للحدين = ...

٢س^{٢}ص + ٣ س ص^{٢} = ... (..................... + ...)

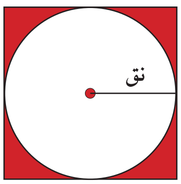
ب اكتب في أبسط صورة : $\frac{\text{٢ س}^{٢}\text{ص + ٣ س ص}^{٢}}{\text{س ص}}$ حيث س ≠ ٠ ، ص ≠ ٠

$\frac{\text{٢ س}^{٢}\text{ص + ٣ س ص}^{٢}}{\text{...............}}$ = $\frac{\text{............... (............... + ...)}}{\text{...............}}$ باستخدام التحليل في (أ)

= .... + ... بالتبسيط

فكِّر وناقِش

التحدي :



الشكل المقابل مربع ، رُسمت دائرة نصف قطرها (نق) تمس أضلاع المربع من الداخل . أراد سعود أن يُعيّن مساحة المنطقة الحمراء بدلالة (نق) ثم أن يقوم بتحليل مقدار الناتج . ساعد سعود على حلها .

مثال :

حلل ما يلي تحليلًا تامًا :

س^{٣} – س^{٢} + ٢س – ٢

الحل :

س^{٣} – س^{٢} + ٢س – ٢

= (س^{٣} – س^{٢}) + (٢س – ٢)

= س^{٢} (س – ١) + ٢(س – ١)

= (س – ١) (س^{٢} + ٢)

تمـــرَّنْ :

١ حلل المقادير التالية بإخراج العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) :

أ $٧ + ٧ص$

ب $٩س^{٢} + ٣س$

جـ $س^{٢}ص + س ك$

د $٦س^{٣} + ٨ص س$

هـ $٢ص^{٢}س^{٢} - ٢س$

و $٨س^{٢}ص^{٣} - ١٢س^{٣}ص$

ز $٢٧س ص^{٥} + ٩س^{٢}ص^{٣}$

ح $٣ل^{٥}ع^{٤} - ٩ع^{٥}ل^{٣} + ٦ع^{٢}ل^{٢}$

ط $١٤ك^{٢}ص^{٥}س^{٣} + ٧ك ص س + ٢١ك س$

ي $٥س^{٤}ص^{٥} - ١٠ص^{٤}س^{٥} + ١٥ص^{٣}س^{٢}$

ك $س(أ - ٢) - ص(أ - ٢)$

ل $أص - أس + ب ص - ب س$

----

٢ اكتب المقادير التالية في أبسط صورة :

أ $\frac{س^{٢} - س^{٣}}{س}$

ب $\frac{٣س^{٢} - ٦س ص}{٣س}$

----

٣ إذا كان : $أ + ب = ١٥$ ، فما هي قيمة $٢أ + ٢ب + ٨$ ؟

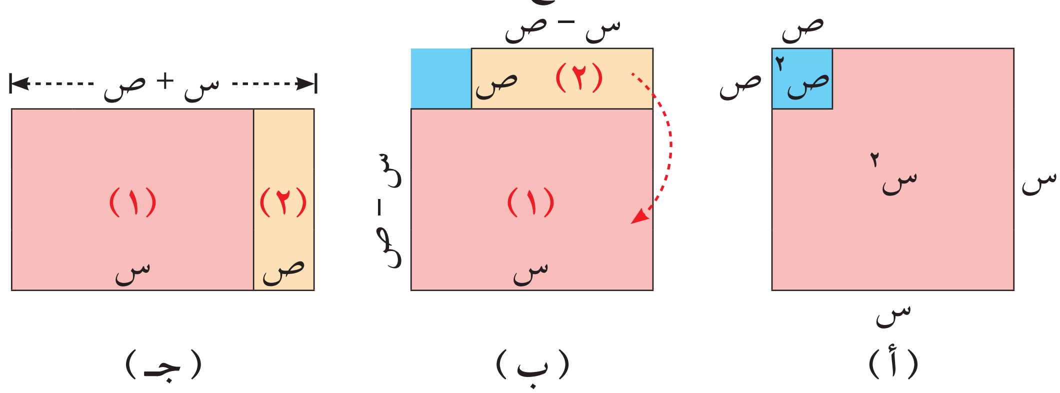
١٠-٣ تحليل الفرق بين مُربعين
Factorising the Difference of Two Squares

سوف تتعلّم : تحليل ثُنائية الحدّ في صورة فرق بين مُربعين .

نشاط :

أرض مصنع مربعة الشكل مساحتها $س^{٢}$ وحدة مربعة يراد أخذ غرفة منها مربعة الشكل مساحتها $ص^{٢}$ وحدة مربعة لاستخدامها كمخزن .

احسب المساحة المتبقية من أرض المصنع .



من التمثيل السابق نجد أنَّ :

في الشكل (أ) : يمثل قطعة الأرض التي مساحتها $س^{٢}$ وموضع الغرفة المراد أخذها والتي مساحتها $ص^{٢}$.

في الشكل (ب) : يمثل مساحة قطعة الأرض المتبقية من المصنع ($س^{٢}$ − $ص^{٢}$)

ومقسمة إلى منطقتين :

(١) منطقة مستطيلة بعداها س ، (س − ص) وحدة طول .

(٢) منطقة مستطيلة بعداها ص ، (س − ص) وحدة طول .

مساحة قطعة الأرض المتبقية = مساحة القطعة (١) + مساحة القطعة (٢)

= س (س − ص) + ص (س − ص)

($س^{٢}$ − $ص^{٢}$) = (س − ص) (س + ص) وحدة مربعة

عمومًا :

الفرق بين مُربعي كميتين يساوي حاصل ضرب مجموع الكميتين في الفرق بينهما .

أي أنَّ : $\text{ا}^{٢}$ − $ب^{٢}$ = (ا − ب) (ا + ب) .

العبارات والمفردات :

فرق بين مُربعين
Difference of Two Squares.

تحليل الفرق بين مُربعين
Factorising The Difference of Two Squares

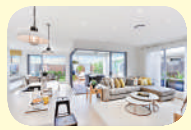
تذكَّرْ أنَّ :

− مساحة المستطيل = الطول × العرض

− مساحة المربع = طول الضلع × نفسه

معلومات مفيدة :

يستعمل مُصممو الأثاث التحليل إلى العوامل في تحديد أبعاد مساحة الغرف كي يستطيعوا تنظيم عملية توزيع الأثاث .



تذكَّرْ أنَّ :

$س^٢ = س × س$

مثال (١):

حلّل $س^٢ - ٤$ ، ثم تحقق من صحة إجابتك :

الحل :

لاحظ أنَّ : $س^٢$ مربع س ، كذلك ٤ مربع ٢

$س^٢ - ٤ = (س)^٢ - (٢)^٢$

$= (س + ٢)(س - ٢)$

التحقق : اضرب $(س + ٢)(س - ٢)$

$(س + ٢)(س - ٢) = س^٢ - \cancel{٢س} + \cancel{٢س} - ٤$

$= س^٢ - ٤$

تدرّب (١) :

حلّل ما يلي تحليلًا تامًّا :

أ) $ص^٢ - ١٦$

$ص^٢ - ١٦ = (ص)^٢ - (٤)^٢$

$= (\text{.......} + \text{.......})(\text{.......} - \text{.......})$

ب) $س^٢ - ٢٥ع^٢$

$س^٢ - ٢٥ع^٢ = (س)^٢ - (٥ع)^٢$

$= (\text{.......} + \text{.......})(\text{.......} - \text{.......})$

جـ) $٨١ - هـ^٢$

$٨١ - هـ^٢ = (٩)^٢ - (هـ)^٢$

$= (\text{.......} - \text{.......})(\text{.......} + \text{.......})$

د) $ل^٢ك^٢ - ٣٦$

....

....

....

تدرّب (٢) :

حلّل ما يلي تحليلًا تامًّا :

أ) $س^٣ - س$

$س^٣ - س = \text{..........} (\text{..........} - ١)$

$= \text{..........} (س - \text{..........})(\text{..........} + ١)$

ب) $٢ل^٢ - ١٨$

$٢ل^٢ - ١٨ = ٢(ل^٢ - ٩)$

$= ٢(\text{.......} - \text{.......})(\text{.......} + \text{.......})$

فكِّر وناقِش

يرى يوسف أنَّ $س^٢ + ص^٢$ يمكن تحليلها إلى (س + ص) (س + ص) .

فهل توافقه الرأي ؟ فسّر ذلك .

تدرّب (٣) :

حلّل ما يلي تحليلًا تامًّا :

أ) $(س - ٢)^٢ - ١٠٠$

$= (س - ٢)^٢ - (........)^٢$

$= (س - ٢ + ...) (س - ٢ - ....)$

$= (........................) (........................)$

ب) $٢٥ - (ن + ل)^٢$

$= (٥ - (ن + ل)) (٥ + (........))$

$= (٥ - ن - ل) (........................)$

تدرّب (٤) :

أوجد قيمة ما يلي بالتحليل :

أ) $(٩٣)^٢ - (٧)^٢$

$= (.......... + ...) (.......... - ....)$

$= .... \times ....$

$= ....$

ب) $(٥,٢٥)^٢ - (٥,٤)^٢$

$= (.......... + ...) (.......... - ....)$

$= .... \times ....$

$= ....$

مثال (٢) :

حلل ما يلي تحليلًا تامًا:

$ص^٢ (ص + ١) - ٤ (ص + ١)$

الحل :

$ص^٢ (ص + ١) - ٤ (ص + ١)$

$= (ص + ١) (ص^٢ - ٤)$

$= (ص + ١) (ص - ٢) (ص + ٢)$

تدرّب (٥) :

حلّل ما يلي :

أ $٢٥ س^٢ - \frac{ص^٢}{٣٦}$

$= (\text{..........})^٢ - (\text{..........})^٢$

$= (\text{..........} + \text{..........})(\text{..........} - \text{..........})$

ب $\frac{١}{٩} س^٢ - \frac{١٦}{٢٥} هـ^٢$

= ....

= ....

فكِّر وناقِش

هل (س + ص + ٨) (س + ص – ٨) يمثلان عاملين لفرق بين مُربعين ؟ فسر ذلك .

تدرّب (٦) :

يلجأ مُصممو الأثاث إلى مفاهيم الرياضيات في تصميماتهم وذلك للخروج بنتائج دقيقة ، حيث وضع المُصمم عبد المحسن سجادة مستطيلة الشكل بعداها س ، ٢س ثم وضع فوق هذه السجادة طاولة طعام مستطيلة الشكل بعداها ص ، ٢ص حيث (س > ص) .

أ اكتب تعبيرًا جبريًّا يبين مساحة القطعة المتبقية من السجادة مستخدمًا س ، ص ثم حلّل هذا التعبير .

مساحة القطعة المتبقية من السجادة = مساحة .... – مساحة ....

= ٢س × .... – .... × ص

= .... – ....

= ٢ (............... – ....)

= ٢ (............... – ....) (............... + ...)

ب أوجد المساحة المتبقية من السجادة إذا كان س = ٣ وحدات طول ، ص = ٢ وحدة طول .

المساحة المتبقية = ٢ (............... – ....) (............... + ...)

= ....

تمـــرَّنْ :

١ أكمل ما يلي لتصبح العبارة صحيحة :

أ $س^٢$ − .... = (........... + ١٠) (س − ١٠)

ب ٤$ص^٢$ − .... = (........... + ٧) (........... − ٧)

جـ .... − ٢٥$س^٢$ = (٣ + ...) (٣ − ....)

د ٠,١٦ − ٩ = $(...........)^٢ - (...........)^٢$

---

٢ حلّل ما يلي تحليلًا تامًّا ثم تحقق من صحة إجابتك :

أ $س^٢$ − ٢٥

....

....

....

....

ب $ل^٢$ − ١٠٠ $هـ^٢$

....

....

....

....

---

٣ حلّل ما يلي تحليلًا تامًّا :

أ ١ − $ص^٢$

....

....

ب ٤$م^٢$ − ٣٦

....

....

جـ ٤$س^٢$ − ٩$ص^٢$

....

....

د ٤٩$ن^٢$ − ٨١$ك^٢$

....

....

هـ ٤$س^٢$ − ١٠٠

....

....

و ٣٦ − ٩$ع^٢$

....

....

ز $٧٥ - ٣م^٢$

ح $٢س - ١٨س^٣$

٤ حلّل ما يلي تحليلًا تامًّا :

أ $(م + ١)^٢ - ٤٩$

ب $(ن - ٤,٠)^٢ - (١٦,٠)^٢$

٥ أوجد قيمة ما يلي بالتحليل :

أ $(١١٥)^٢ - (١١٤)^٢$

ب $(٩٩)^٢ - ١$

جـ $(٢١٠)^٢ - (٢٠٩)^٢$

د $(٥٧,٧)^٢ - (٤٢,٣)^٢$

٦ حلّل ما يلي تحليلًا تامًّا :

أ $\frac{٤ س^٢}{ب^٢} - \frac{جـ^٢}{٩}$

ب $\frac{١}{٢٥ ص^٢} - ع^٢$

جـ $(٥ - ٤م)^٢ - ١٢١$

د $\frac{١}{٤} هـ^٢ - ٢٥ع^٢ل^٢$

١٠-٤ حل معادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد
Solving a First Degree Equation With One Variable

العبارات والمفردات :

معادلة **Equation**

متغير **Variable**

عملية عكسية **Inverse Property**

سوف تتعلّم: كيفية حل معادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد .

نشاط :

مما سبق دراسته أكمل حل المعادلات التالية ، حيث س ∈ ص .

أ س + ٥ = ٧

س + ٥ .... = ٧ ....

س = ...

ب س − ٣ = ١٤

س − ٣ .... = ١٤ ....

س = ...

جـ ٢س = ١٠

$\frac{\text{٢}}{\text{.......}}$ س = $\frac{\text{١٠}}{\text{.......}}$

س = ...

د $\frac{\text{س}}{\text{٦}}$ = ٨

.... × $\frac{\text{س}}{\text{٦}}$ = ٨ × ....

س = ...

تدرّب (١) :

يعرض أحد مواقع الإعلانات فستانًا بتصميم معين بمبلغ ١٢ دينارًا ، يضاف إليه ٣ دنانير مقابل خدمة التوصيل إلى المشتري ، فإذا أرادت ندى أن تشتري عددًا من الفساتين بمبلغ ٧٥ دينارًا ، فكم فستانًا يمكن أن تشتري ؟

الحل :

نفرض أنَّ عدد الفساتين هو س فستانًا .

١٢س + ٣ = ٧٥

١٢س + ٣ − .... = ٧٥ − ....

١٢س = ...

$\frac{\text{١٢}}{\text{.......}}$ س = $\frac{\text{٧٢}}{\text{.......}}$

س = ...

∴ عدد الفساتين التي اشترتها ندى هو .... فساتين .

معلومات مفيدة :

يعتمد عمل كاميرات المرور لحساب سرعة السيارات المخالفة على معادلات مبرمجة داخلها ، وتقوم الكاميرا بحساب الزمن الذي تقطعه السيارة خلال المسافة التي ترصدها ومنها تعين السرعة وتحدد إن كانت السيارة مخالفة أم لا حسب حدود السرعة المسموح بها .

تدرّب (٢) :

أوجد حل المعادلات التالية حيث س ∈ ص :

أ ٣ س – ٤ = –١٨ – س

٣ س – ٤ + س = –١٨ – س + س

.... – ٤ = –١٨

٤س – ٤ .... = –١٨ ....

٤س = –١٤

$\frac{٤}{\text{.........}}$ س = $\frac{-١٤}{\text{.........}}$

س = $\frac{-٧}{٢}$

ب ٥ (س – ٢) = ٤

٥ .... – ١٠ = ٤

٥ س – ١٠.......... = ٤..........

.... = ...

س = ...

فكِّر وناقِش

لهذه المعادلة ٥س – ٢ = ٥س – ٦ يوجد :

أ حلّ وحيد

ب عدد لانهائي من الحلول

جـ لا يوجد حلّ

د يوجد حلّان

تدرّب (٣) :

أوجد حلّ المعادلة حيث س ∈ ص :

$\frac{٢}{٣}$ س + $\frac{٣}{٥}$ س = $\frac{٣٨}{٥}$

($\frac{٢}{٣}$ + $\frac{٣}{٥}$) س = $\frac{٣٨}{٥}$

($\frac{\text{.......}}{١٥}$ + $\frac{\text{.......}}{١٥}$) س = $\frac{٣٨}{٥}$

$\frac{\text{.......}}{١٥}$ س = $\frac{٣٨}{٥}$

س = $\frac{٣٨}{\cancel{٥}_{١}}$ × $\frac{\text{.......}}{\text{.......}}$

س = $\frac{\text{.......}}{\text{.......}}$

> **تذكَّرْ أنَّ :**
> - المعكوس الجمعي للعدد ﺃ هو (– ﺃ) بحيث ﺃ + (– ﺃ) = صفر
> - المعكوس الضربي للعدد ﺃ هو $\frac{١}{ﺃ}$ بحيث ﺃ × $\frac{١}{ﺃ}$ = ١

مثال (١):

اكتب $٠,\overline{٦}$ على شكل كسر في أبسط صورة .

الحل :

ليكن ن = $٠,\overline{٦}$ ……… (١) استخدم متغيِّرًا واجعله يساوي الكسر العشري المتكرر

١٠ × ن = ١٠ × $٠,\overline{٦}$ ……… اضرب الطرفين في ١٠ (لأن رقمًا عشريًّا واحدًا يتكرر)

١٠ن = $٦,\overline{٦}$ ……… (٢)

١٠ن – ن = $٦,\overline{٦}$ – $٠,\overline{٦}$ ……… اطرح (١) من (٢)

٩ن = ٦

$\frac{٩ن}{٩} = \frac{٦}{٩}$ ……… اقسم على ٩ لإيجاد قيمة ن

ن = $\frac{٢}{٣}$ ……… اكتب الكسر في أبسط صورة

∴ $٠,\overline{٦} = \frac{٢}{٣}$

مثال (٢):

اكتب $٠,\overline{١٥}$ على شكل كسر في أبسط صورة :

الحل :

ليكن ن = $٠,\overline{١٥}$ ……… (١) استخدم متغيِّرًا واجعله يساوي الكسر العشري المتكرر

١٠٠ × ن = ١٠٠ × $٠,\overline{١٥}$ ……… اضرب الطرفين في ١٠٠ (لأنَّ رقمين عشريّين يتكرّران)

١٠٠ن = $١٥,\overline{١٥}$ ……… (٢)

١٠٠ن – ن = $١٥,\overline{١٥}$ – $٠,\overline{١٥}$ ……… اطرح (١) من (٢)

٩٩ن = ١٥

$\frac{٩٩ن}{٩٩} = \frac{١٥}{٩٩}$ ……… اقسم على ٩٩ لإيجاد قيمة ن

ن = $\frac{١٥}{٩٩} = \frac{٥}{٣٣}$ ……… اكتب الكسر في أبسط صورة

∴ $٠,\overline{١٥} = \frac{٥}{٣٣}$

تمـــرَّنْ :

١ حل كلًّا من المعادلات التالية في ح ، ثم تحقق من صحة إجابتك :

أ ٣ص + ٤ = ١٩

ب ٢ (س − ٧) = ٥

جـ $\frac{١}{٢}$ ك + ١٩ = ١١

د ٥س = ٣ (س + ٢)

تذكَّرْ أنَّ :
الخاصية التوزيعية
أ (س + ص)
= أ س + أ ص

٢ قطعة خشبية كان يبلغ طولها ٤٠ سم قطعت إلى ثلاث قطع .

أطوال القطع الثلاث بالسنتيمتر هي :

٢س − ٥ ، س + ٧ ، س + ٦

ما هو طول القطعة الأكبر طولًا ؟

٣ اكتب كلًّا ممّا يلي على شكل كسر في أبسط صورة موضِّحًا خطوات الحل .

أ ٠,$\overline{٣}$

ب ٠,$\overline{٢٤}$

٤ يمثل ١٥س + ١٠ أجرة مريم بعملة (الزد) ليوم عمل واحد في أحد المطاعم ، س تمثل عدد الساعات التي تعملها مريم في اليوم . تأخذ مريم ١٠ زد في اليوم بدل سفرها في الباص .

أ ما الذي يمثله العدد ١٥ في التعبير الجبري ؟

....

....

ب عملت مريم يوم الأحد ٤ ساعات ، كم زدًا تأخذ ؟

....

....

....

جـ كم ساعة يجب أن تعمل مريم يوم الإثنين لكي تحصل على ١١٥ زد ؟

....

....

....

....

٥ كلفة إيجار سيارة في اليوم الواحد هي ١٢ دينارًا مضافًا إليها ٢٠ دينارًا بدل تأمين ثابت . في إحدى المرات دفع جمال ١٢٨ دينارًا مقابل سيارة استأجرها ، فكم يومًا استأجر جمال هذه السيارة ؟

....

....

....

....

....

....

....

....

٦ يقول سالم: أختي تبلغ من العمر ٤ أضعاف العمر الذي يبلغه أخي ، وعند جمع عمريهما معًا فإنَّ المجموع يصبح ٢٠ . فكم عمر أخو سالم ؟

....

....

....

....

....

٧ يبلغ راتب مدير في إحدى الشركات ٣ أمثال راتب موظّف في الشركة نفسها مضافًا إليه ٦٠ دينارًا. إذا كان راتب المدير يساوي ١٣٦٥ دينارًا ، فكم يبلغ راتب الموظّف ؟

....

....

....

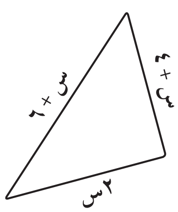
....

....

٨ إذا كان ٢س – ١ = ٩ ، فما قيمة ١٠س – ٥ ؟

أ ٧٥	ب ٥٥	جـ ٤٥	د ٢٥

٩ إذا كان مجموع أطوال أضلاع هذا المثلث = ٣٠ سم
فإنَّ طول الضلع الأطول بالسنتيمتر = ...



أ ١١	ب ١٢	جـ ١٣	د ١٥

١٠-٥ حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد بالتحليل
Solving Second Degree Equations with One Variable by Factorising

سوف تتعلّم: حل المعادلة التربيعية باستخدام التحليل .

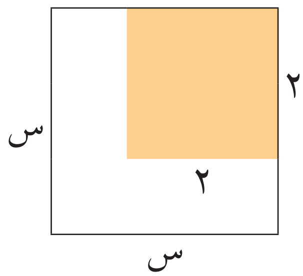
معلومات مفيدة :
يستخدم حل المعادلات التربيعية في مصانع إنتاج الصناديق الكرتونية .

العبارات والمفردات :
معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد **Second Degree Equation with One Variable**
تحليل **Factorise**

نشاط :

طلى أحمد الجزء العلوي والأيمن من حائط منزله المربع الشكل (انظر الصورة إلى اليسار) .

أراد أن يحسب عرض الحائط س مع علمه أنَّ المساحة المتبقية للطلي هي ٥ أمتار مربعة .



١ أوجد مساحة الجزء المطلي . ...

٢ أوجد المساحة الكلية للحائط بدلالة س . ...

٣ أوجد المساحة المتبقية للطلي بدلالة س . ...

٤ اكتب معادلة المساحة المتبقية بدلالة س . ...

٥ اكتب المعادلة في (٤) على صورة ضرب عاملين على أن يكون أحد طرفيها صفرًا . ...

٦ أوجد عرض الحائط . ...

٧ بعد إيجادك عرض الحائط ، ماذا تستنتج من المعادلة (س − ٣) (س + ٣) = ٠ ؟ ....

ملاحظة :

لكل ﺃ ، ب عددان نسبيان ، إذا كان ﺃ ب = ٠ ، فإنَّ ﺃ = ٠ أو ب = ٠ .

فمثلًا : إذا كان (س + ٣) (س + ٢) = ٠

فإنّ س + ٣ = ٠ أو س + ٢ = ٠

مثال (١):

أوجد مجموعة حل المعادلة (س + ٥) (س + ٦) = ٠ ، حيث س ∈ ص ، ثم تحقق من صحة الحل .

الحل :

(س + ٥) (س + ٦) = ٠

إما س + ٥ = ٠

س = −٥

∴ −٥ ∈ ص

أو س + ٦ = ٠

س = −٦

∴ −٦ ∈ ص

∴ مجموعة الحل = { −٥ ، −٦ }

التحقق من صحة الحل :

عندما س = −٥ **نعوّض**

(−٥ + ٥) (−٥ + ٦) ≟ ٠

٠ × ١ ≟ ٠

٠ =✓ ٠

عندما س = −٦ **نعوّض**

(−٦ + ٥) (−٦ + ٦) ≟ ٠

−١ × ٠ ≟ ٠

٠ =✓ ٠

تدرّب (١):

أوجد مجموعة حل المعادلة : (٣ص − ٥) (ص − ٢) = ٠ ، حيث ص ∈ ص ، ثم تحقق من صحة الحل .

(٣ص − ٥) (ص − ٢) = ٠

∴ إما ٣ص − ٥ = ...

٣ص = ...

ص = ٥ / .... ، .... ∈ ص

أو ص − ٢ = ...

ص = ... ، .... ∈ ص

∴ مجموعة الحل = { .... ، .... }

التحقق من صحة الحل :

عندما ص = ...

....

....

عندما ص = ...

....

....

> **ملاحظة :**
> المعادلتان:
> $س^{٢} - ٤ = ٠$ ،
> $(س - ٢)(س + ٢) = ٠$
> تسميان معادلتين متكافئتين .

مثال (٢) :

أ أوجد مجموعة حل المعادلة $٤س^{٢} - ٥س = ٠$ ، حيث $س \in ص$.

الحل :

$٤س^{٢} - ٥س = ٠$

$س(٤س - ٥) = ٠$ حلّل

إما $س = ٠$ أو $٤س - ٥ = ٠$ حل معادلات من الدرجة الأولى

$س = ٠$ أو $٤س = ٥$

$س = ٠$ أو $\frac{٤س}{٤} = \frac{٥}{٤}$

$\therefore س = ٠$ أو $س = \frac{٥}{٤}$

$\therefore ٠ \in ص$ $\therefore \frac{٥}{٤} \notin ص$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{٠\}$

ب أوجد مجموعة حل المعادلة $س^{٢} = ٤$ ، حيث $س \in ن$.

الحل :

$س^{٢} = ٤$

$س^{٢} - ٤ = ٠$

$(س)^{٢} - (٢)^{٢} = ٠$ فرق بين مربعين

$(س - ٢)(س + ٢) = ٠$

إما $س - ٢ = ٠$ أو $س + ٢ = ٠$

$\therefore س = ٢$ أو $س = -٢$

$\therefore ٢ \in ن$ $\therefore -٢ \in ن$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{٢ ، -٢\}$

جـ أوجد مجموعة حل المعادلة $(س + ٣)^{٢} - ١ = ٠$ ، حيث $س \in ط$.

الحل :

$(س + ٣)^{٢} - ١ = ٠$

$(س + ٣ + ١)(س + ٣ - ١) = ٠$ فرق بين مربعين

$(س + ٤)(س + ٢) = ٠$ بسّط

إما $س + ٤ = ٠$ أو $س + ٢ = ٠$

$\therefore س = -٤$ أو $س = -٢$

$\therefore -٤ \notin ط$ $\therefore -٢ \notin ط$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\varnothing$

فكِّر وناقِش

هل للمعادلة $س^٢ + ٤ = ٠$ حل في ن (مجموعة الأعداد النسبية) ؟ فسّر إجابتك .

تدرّب (٢) :

أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية :

أ $٢م^٢ = ٥٠$ ، حيث م ∈ ن

$٢م^٢$ − .... = ...

٢ ($م^٢$ − ....) = ...

٢ (م + ...) (م − ....) = ...

إما ٢ = ٠ وهو مرفوض أو (م + ٥) = ٠ ⟸ م = −٥

أو (م − ٥) = ٠ ⟸ م = ٥

∴ مجموعة الحل = { .... ، .... }

ب $(ص + ٢)^٢ − ٩ = ٠$ ، حيث ص ∈ ن

[(ص + ٢) − ....] [............ + ...] = ٠

(ص − ....) (ص + ...) = ٠

إما (ص − ....) = ٠ أو (ص + ٥) = ٠

ص = ... | ص = ...

∴ مجموعة الحل = { .... ، .... }

تمـــرَّنْ :

١ تحقق من أنَّ :

أ س = ١ حلًّا للمعادلة :

(س + ٤) (س − ١) = ٠

....

....

....

ب س = −١ حلًّا للمعادلة :

$(س − ١)^٢ = ٠$

....

....

....

٢ أوجد مجموعة حلّ كل من المعادلات التالية حيث س ∈ ص .

أ (س + ٤) (س – ٢) = ٠

ب (س + ٤) (٣س + ١٠) = ٠

جـ (س + ٨) (س + ٧) = ٠

د (٢س + ٥) (س – ٥) = ٠

---

٣ إذا كان س – ٤ = ٩ ، فما قيمة $س^{٢}$ – ٤ ؟

أ ١٦٩	ب ١٦٥	جـ ٩٧	د ٨١

٤ **أوجد مجموعة حلّ كل من المعادلات التالية حيث س ∈ ح .**

أ ٣س^{٢} − ٢٧ = ٠

ب (س + ٢)^{٢} − ٢٥ = ٠

جـ ٥س^{٢} = ٨٠

د (س − ٩)^{٢} = ٨١

٥ **مجموعة حل المعادلة ٤س^{٢} + ١ = ٠ ، حيث س ∈ ح تساوي :**

أ { $\frac{١}{٢}$ } ب { − $\frac{١}{٢}$ } جـ { $\frac{١}{٢}$ ، − $\frac{١}{٢}$ } د ∅

٦ **إذا كان مربع عدد (لا يساوي صفرًا) مضافًا إليه نصفه يساوي نفس العدد فإنَّ العدد هو :**

أ ١ ب $\frac{١}{٢}$ جـ $\frac{١}{٤}$ د − $\frac{١}{٢}$

٦-١٠ حل متباينات من الدرجة الأولى في متغير واحد
Solving First Degree Inequalities with One Variable

العبارات والمفردات :

متباينة من الدرجة الأولى في متغير واحد
First Degree Inequality with One Variable

حل متباينة
Solving Inequality

تذكَّر أنَّ :

العبارات التي تدل على المتباينات
- أقل من ، أصغر من (<)
- أكبر من ، أكثر من (>)
- أقل من أو يساوي (≤)
- على الأكثر ، لا يزيد على (≤)
- أكبر من أو يساوي (≥)
- على الأقل ، لا يقل عن (≥)

معلومات مفيدة :

يستخدم النجارون المتباينات لإيجاد العدد الأكبر من الخزائن التي يريدون صنعها إذا كان لديهم كمية محددة من الخشب .

سوف تتعلّم: كيفية حل متباينة من الدرجة الأولى في متغير واحد .

نشاط :

مصعد إحدى البنايات حمولته القصوى ٥٠٠ كيلوجرام ، فإذا كان متوسط وزن الشخص الواحد ٨٠ كيلوجرامًا من سكان البناية ، **فما هو أكبر عدد من الأشخاص الذين يسمح لهم بركوب المصعد في الوقت نفسه ؟**

نفرض أنَّ عدد الأشخاص هو ....

وزن الشخص الواحد هو ....

الوزن الكلي للأشخاص هو ....

أقصى حمولة للمصعد هي ....

يجب أن يكون الوزن الكلي للأشخاص .... أقصى حمولة للمصعد

نعبّر عن ذلك بالمتباينة : ....

المتباينة : هي جملة رياضية (تعبير رياضي) تربط بين أعداد أو مقادير بإحدى العلاقات (الرموز) : < ، > ، ≤ ، ≥

نعلم أنَّ : ٣ > ٢ ونفس المعنى ٢ < ٣

كذلك ٣ + ٤ > ٢ + ٤ ، ٣ − ١ > ٢ − ....

٣ × ٥ > ٢ × .... ولكن ٣ × −٢ < ٢ × −٢

خواص المتباينات : إذا كانت أ ، ب ، جـ أعدادًا نسبية وكانت أ > ب فإنَّ :

١) أ + جـ > ب + جـ

٢) أ − جـ > ب − جـ

٣) أ × جـ > ب × جـ ، جـ > ٠ **(جـ عدد موجب) .**

٤) أ × جـ < ب × جـ ، جـ < ٠ **(جـ عدد سالب) .**

مثال :

حل المتباينات التالية :

أ $٣م < ٩$ ، م ∋ ط

الحل :

$$\frac{٣م}{٣} < \frac{٩}{٣}$$

$$م < ٣$$

م ∋ {٢ ، ١ ، ٠}

∴ مجموعة الحل = {٢ ، ١ ، ٠}

ب $٣م < ٩$ ، م ∋ ص

الحل :

$$\frac{٣م}{٣} < \frac{٩}{٣}$$

$$م < ٣$$

م ∋ {٢ ، ١ ، ٠ ، −١ ، ...}

∴ مجموعة الحل = {٢ ، ١ ، ٠ ، −١ ، ...}

جـ $٣م \leq ٩$ ، م ∋ ص

الحل :

$$\frac{٣م}{٣} \leq \frac{٩}{٣}$$

$$م \leq ٣$$

م ∋ {٣ ، ٢ ، ١ ، ٠ ، ...}

∴ مجموعة الحل = {٣ ، ٢ ، ١ ، ٠ ، ...}

تذكَّرْ أنَّ :

– النظير الجمعي للعدد أ هو (−أ) بحيث أ + (−أ) = ٠

– النظير الضربي للعدد أ هو $\frac{١}{أ}$ بحيث أ × $\frac{١}{أ}$ = ١

فكِّر وناقِش

من المثال السابق قالت نورة : أنَّني لا أستطيع أن أكتب مجموعة الحل بذكر العناصر إذا كانت م ∋ ح . فهل ما تقوله نورة صحيح ؟ فسّر إجابتك .

تذكَّرْ أنَّ :

خطوات حل المتباينة من الدرجة الأولى في متغير واحد تطابق خطوات حل المعادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد.

تدرّب (١) :

اكتب أول خطوة تجريها في حل كل متباينة من المتباينات التالية :

أ ص + ٥ ≥ −٣

....

ب $٢م < ٩$

....

جـ ٤ك − ٣ < $\frac{٢}{٥}$

....

تدرّب (٢) :

حل المتباينة : م + ٥ > ٠ ، م ∋ ح .

م + ٥ .... > ٠ ....

م > ....

∴ حل المتباينة هو مجموعة الأعداد النسبية الأكبر من ....

تدرّب (٣) :

حل المتباينات التالية حيث س ∈ ن :

أ ٢ س + ٣ ≥ ١

٢س + ٣ − .... ≥ ١ − ....

العملية العكسية :

٢س ≥ ....

$\frac{٢س}{٢}$ ≥ $\frac{........}{٢}$

العملية العكسية :

س ≥ ....

∴ حل المتباينة هو مجموعة الأعداد النسبية الأكبر من أو تساوي ....

ب $\frac{٢}{٣}$ س − $\frac{١}{٢}$ < $\frac{٣}{٢}$

$\frac{٢}{٣}$ س − $\frac{١}{٢}$ < $\frac{٣}{٢}$

$\frac{٢}{٣}$ س − $\frac{١}{٢}$ .... < $\frac{٣}{٢}$ ....

$\frac{٢}{٣}$ س < ....

.... × $\frac{٢}{٣}$ س < .... × ....

س < ....

∴ حل المتباينة هو مجموعة الأعداد النسبية الأصغر من ....

فكِّر وناقِش

يقول أحمد : أنَّني أستطيع حل تدرب (٣) (ب) بطريقة أخرى وهي ضرب طرفي المتباينة في المضاعف المشترك الأدنى (م . م . أ) للمقامات ، هل توافقه الرأي ؟ فسّر إجابتك .

تدرّب (٤) :

حل المتباينات التالية حيث س ∈ ن :

أ $\frac{س}{٣}$ > $\frac{-٥}{٣}$

.... × $\frac{س}{٣}$ > .... × $\frac{-٥}{٣}$

س > ....

∴ حل المتباينة هو مجموعة الأعداد النسبية الأكبر من ....

ب ٢س + ٢,٥ ≤ س

٢ س + ٢,٥ − س ≤ س − س

س + ٢,٥ ≤ ٠

س + ٢,٥ .... ≤ ٠ ....

س ≤ ....

....

....

تدرّب (٥) :

عند الضرب في عدد سالب نغير رمز التباين

أ حل المتباينة ٤ – ٣ س > – ٨ حيث س ∈ ط :

٤ – ٣ س .... > – ٨ ....

–٣ س > ....

(– $\frac{١}{٣}$) × (– ٣ س) < (– $\frac{١}{٣}$) × ....

س < .... ⟸ حل المتباينة ....

ب حل المتباينة ٥ ص – ٣ ≤ ٤ + ٢ ص حيث ص ∈ ط :

٥ ص – ٣ – ٢ ص ≤ ٤ + ٢ ص – ٢ ص

٣ ص – ٣ ≤ ٤ + ٠

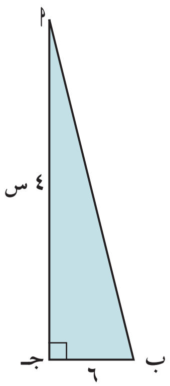
٣ ص + (–٣) .... ≤ ٤ ....

٣ ص ≤ ....

.... × ٣ ص ≤ .... × ....

ص ≤ .... ⟸ حل المتباينة ....

تدرّب (٦) :



في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في جـ ، من البيانات المدونة عليه أوجد مجموعة قيم س التي تجعل مساحة المثلث أصغر من ٤٨ وحدة مربعة .

مساحة المثلث < ٤٨

$\frac{١}{٢}$ × .... × .... < ٤٨

.... × س < ٤٨

.... × .... × س < .... × ٤٨

س < ....

∴ مجموعة قيم س التي تجعل مساحة المثلث أصغر من ٤٨ وحدة مربعة هي :

....

تدرّب (٧) :

س = ٧ يمثل أحد الحلول المتباينة :

أ) س − ٥ > ١	ب) ٩ − س ≥ ١	جـ) ٢ س ≤ ٥	د) ٣ س > ٢٧

تمــرَّنْ :

١ حل كلًّا من المتباينات التالية في ص :

أ) ٢ص + ٤ ≥ ١٩

ب) ٢س + ٣ < ١٥

جـ) ب − ٢ $\frac{١}{٢}$ < $\frac{١}{٣}$

د) ٥م − ٤,٣ ≤ ١,١

هـ) ٥ − ٣ س < −١

و) −٣ ≤ ٤ص − ٥

ز ١٠ (س – ٥) < ٧ (٦ – س)

ح ٢س + ٤ ≥ ٣ (س + ١)

٢ أوجد طول ضلع مربع الذي يجعل محيط المربع أكبر من محيط مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ٨ وحدة طول .

٣ إذا كانت : ٢,٥ ≥ س ≥ ٧,٥ ، ٤,٥ ≥ ص ≥ ٦,٥ ،
فما هي أصغر قيمة للمقدار : س – ٢ص ؟

أ –١٠,٥	ب – ٦	جـ ١٠,٥	د ١١,٥

٤ إذا كانت : – ٤ ≥ س ≥ ١ ، –٦ ≥ ص ≥ ٤ ،
فما أعلى قيمة للمقدار : س^{٢} – ص^{٢} ؟

أ ١٦	ب ٢٤	جـ ٣٠	د ٣٦

٥ س هو عدد إذا جمعنا له العدد ٦ وضربنا الناتج في ٧ نحصل على عدد أكبر من ٤١ . أي من المتباينات التالية تصف هذه المعطيات ؟

أ ٧ س + ٦ < ٤١	ب ٧ س < ٣٥	جـ ٧ س × ٦ > ٤١	د ٧ (س + ٦) < ٤١

١٠-٧ مراجعة الوحدة العاشرة
Revision Unit Ten

١ أوجد العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) لما يلي :

أ ٧ $س^٢$ ص ، ١٤ س $ص^٢$

ب ٦ $س^٧$ ص ، ٥ س ص

٢ حلّل المقادير التالية بإيجاد العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) :

أ ١٥ $س^٢$ + ٩ س

ب ٣ س − $س^٢$ ص + ١٥ $س^٣$ $ص^٥$

٣ حلّل ما يلي تحليلًا تامًّا :

أ $س^٢$ − ٩

ب $(س - ١)^٢$ − ٤

٤ حل المعادلات التالية حيث س ، ص ∈ ص :

أ $\frac{ص}{٢}$ − ٣ = ١٥

ب (س − ١) (س + ٣) = ٠

جـ $س^٢$ = ٨١

د $(س - ٣)^٢$ − ٤ = ٠

٥ حل المتباينات التالية حيث س ∈ ص :

أ ٢س – ٣ < ١٧

ب ١ – ٥ س < ٦

---

٦ إذا كان لشركة تأجير السيارات تعريفة أساسية قدرها ٢٥ دينار و ٠,٢ دينار عن كل كيلومتر تقطعها سيارة الأجرة .
فأيّ مما يلي يمثل التكلفة بالدينار لكي تستقل سيارة الأجرة لرحلة بمسافة س كيلومتر ؟

أ ٠,٢ س + ٢٥

ب ٠,٢ س × ٢٥

جـ (س + ٢٥) × ٠,٢

د س + ٢٥ × ٠,٢

---

٧ المتباينة – ٢ س < ٦ تكافئ :

أ س < ١٢

ب س < – $\frac{١}{٢}$

جـ س > – ٣

د س < ٣

---

٨ إذا كان س + ص = ٣٥ ، وكان كل من س ، ص عددًا صحيحًا موجبًا يقبل القسمة على العدد ٥ ، وكان س > ص ، فإنَّ إحدى قيم س الممكنة هي :

أ ٢٠

ب ٢٥

جـ ٣٠

د ٣٥

اِختبار الوحدة العاشرة

أوّلًا : في البنود (١–٤) ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) بين ٦س^{٢}ص ، ٢س^{٣}ص^{٢} هو ٦س^{٣}ص^{٢}	أ	ب
٢ ٢س + ٤س^{٢} = ٢س (١ + ٢ س)	أ	ب
٣ مجموعة حل المعادلة س^{٢} – ٢٥ = ٠ ، حيث س ∋ ط ، هي {–٥ ، ٥}	أ	ب
٤ حل المتباينة – ٥ س < ٢٠ هو س < – ٤	أ	ب

ثانيًا: لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة :

٥ المقدار $\frac{\text{٨ س}^{٥}\text{ ص}^{٢}}{\text{٢ س}^{٥}\text{ ص}^{٧}}$ في أبسط صورة هو :

(أ) ٦ س^{٥}ص^{٥} (ب) $\frac{٤}{\text{ص}^{٥}}$ (جـ) ٤ ص^{٥} (د) ٦ ص^{٥}

---

٦ العدد الذي يمثل حلًّا للمعادلة (س – ٣)^{٢} = ٠ ، (حيث س ∋ ص) هو :

(أ) صفر (ب) –٣ (جـ) ٣ (د) ٦

---

٧ اشترى هشام كتابًا و ٥ دفاتر بثمن ١٣٥ زد ، إذا علم أنّ ثمن الكتاب يبلغ ٤ أضعاف ثمن الدفتر الواحد ، فما ثمن الكتاب ؟

(أ) ١٥ زد (ب) ٨٠ زد (جـ) ٦٠ زد (د) ٤٥ زد

٨ حل المتباينة ٢ س < ١٠ ، (حيث س ∈ ك) هو :

(أ) مجموعة الأعداد النسبية الأصغر من ٥ (ب) مجموعة الأعداد النسبية الأكبر وتساوي ٥

(جـ) مجموعة الأعداد النسبية الأصغر وتساوي ٥ (د) مجموعة الأعداد النسبية الأكبر من ٥

---

٩ مجموعة حل المعادلة : س^{٢} = −٤ ، (حيث س ∈ ك) هو :

(أ) ٢ أو −٢ (ب) ٤ أو −٤ (جـ) مجموعة خالية (د) كل الأعداد النسبية الأكبر من −٤

---

١٠ تحليل المقدار ٤ + ٤ ك هو :

(أ) ٨ ك (ب) ٤ (جـ) ك (د) ٤ (١ + ك)

أسئلة تحدي : فكر معنا في المعادلات الخطية

١ سقطت كرة من ارتفاع ١٢,٥ مترًا عن سطح الأرض وكانت ترتفع إلى ٨٠٪ من الارتفاع السابق في كل مرة عندما تصطدم بالأرض .

احسب ارتفاع الكرة بعد الاصطدام الرابع ؟

....

٢ انطلق شخصان كل منهما على دراجته في نفس الوقت من نقطتين تبعدان الواحدة عن الأخرى مسافة ١٠٥ كم ، سرعة الراكب الأوّل تزيد بـ ٦ كم / ساعة عن سرعة الراكب الآخر ، زمن السفر حتى ساعة اللقاء ٣,٥ ساعة .

أي معادلة مما يلي ملائمة لإيجاد سرعة الراكب البطيء بينهما ؟

أ ٣,٥ س + ٣,٥ س + ٦ = ١٠٥

ب ٣,٥ (س + ٦) = ٣,٥ س

جـ ٣,٥ س + ٣,٥ (س + ٦) = ١٠٥

د س = $\frac{١٠٥}{٣,٥}$

٣ مع أحمد ١٦ ورقة نقدية من فئتي الخمسة دنانير والعشرة دنانير . إذا كان مجموع ما بحوزة أحمد هو ١٠٥ دنانير ، فما عدد الأوراق النقدية من فئة الخمسة دنانير التي يمتلكها أحمد ؟

وضح طريقة الحل

أ ١١ | ب ٥ | جـ ٨ | د ١٠

٤ يوضّح الجدول عدد زوار أحد المعارض خلال أربعة أيام . اكتب معادلة لإيجاد عدد الزوار في أي يوم من الأيام .

عدد الأيام (س)	١	٢	٣	٤
عدد الزوار (ص)	٣	٦	٩	١٢

....

٥ اكتب ثلاثة حلول للمعادلة ٢ س + ٥ ص = ٠ حيث س ، ص أعداد نسبية .

....

....

٦ إذا كان عدد زوار المعرض خلال أربعة أيام موضحة بالجدول التالي :

عدد الأيام (س)	١	٢	٣	٤
عدد الزوار (ص)	٤	٧	١٠	١٣

فإنّ عدد الزوار بعد ٥٠ يوم هو :

(أ) ٥٤ | (ب) ١٠٠ | (جـ) ١٠١ | (د) ١٥١

٧ إذا كانت س + ٣ ص = ١١ ، ٢ س + ٣ ص = ١٣ ، ص = ٣ فإنّ س = ...

(أ) ٣ | (ب) ٢ | (جـ) −٢ | (د) −٣

٨ المعادلة التالية تعبر عن تكاليف إرسال طرد بريدي ص = ٤ س + ٣٠ حيث س هو وزن الطرد (بوحدات الجرام) و ص هو تكاليف الإرسال بالزد . كم جرام نستطيع أن نرسل بمبلغ ١٥٠ زد ؟

(أ) ٦٣٠ جرام | (ب) ١٥٠ جرام | (جـ) ١٢٠ جرام | (د) ٣٠ جرام

٩ أي من المعادلات التالية هي معادلة خطية ؟

(أ) − ٥ ع = ١١ ل − ٥ ن | (ب) ٧ ص + س = ٥٣ | (جـ) ٤٤ − ص = س^{٢} | (د) ع (١ − ل) = ٠

١٠ قيمة هـ التي تجعل النقطة (١ ، ٣) حلًّا للمعادلة ص = ٢ س + هـ هي :

(أ) ٣ | (ب) ٢ | (جـ) ١ | (د) −١

١١ إذا كانت س + ٥ ص = ١٥ ، ٢ س + ٣ ص = ١٦

فإنّ قيمة س ، ص على الترتيب هي :

أ ٢ ، ٥	ب ٥ ، ٢	جـ ١٥ ، ١٦	د ١٥ ، ٣

---

١٢ إذا كانت (أ ، ٢ ب) حلًّا للمعادلتين :

٣ س – ص = ٥ ، س + ص = –١ ، فأوجد قيمتي أ ، ب .

....

---

١٣ مجموعة حل المعادلتين : س – ٢ ص = ٧ ، ٢ س + ص = –١ هي :

أ {(٢ ، ٥)}	ب {(٣ ، –١)}	جـ {(٢ ، ٤)}	د {(١ ، –٣)}

---

١٤ العددان س ، ص يحققان المعادلتين التاليتين معًا س + ٢ ص = ١٠ ، ص + ٢ س = ١٧

ما قيمة س – ص ؟

أ ٤	ب ٥	جـ ٦	د ٧

---

١٥ إذا كان المستقيمان الممثلان للمعادلتين س + ٢ ص = ٤ ، ٢ س + ك ص = ١١

متوازيان ، فإنّ ك = ...

أ ٤	ب –٤	جـ ١	د –١

---

١٦ أي من بين المعادلات التالية تصف مستقيمًا موازيًا للمستقيم : ص = س – ٥ ؟

أ ص = ٥ س	ب ٢ ص = س – ٥	جـ س + ص = ٥	د ٢ ص = ٢ س + ٥

---

١٧ أي نقطة تقع على المستقيم ص = س + ٢ ؟

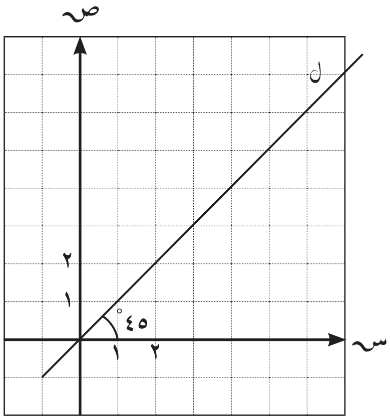
أ (–٢ ، ٠)	ب (–٤ ، ٢)	جـ (٦ ، ٤)	د (٤ ، –٦)

١٨ النقطة التي تقع على المستقيم المار بالنقطتين : (٤ ، ٦) ، (٤ ، ٤) هي :

(أ) (٢ ، ٤) | (ب) (٦ ، ٣) | (جـ) (٤ ، ٢) | (د) (٥ ، ٦)

---

١٩ في الشكل المقابل ، معادلة المستقيم (ل) هي :

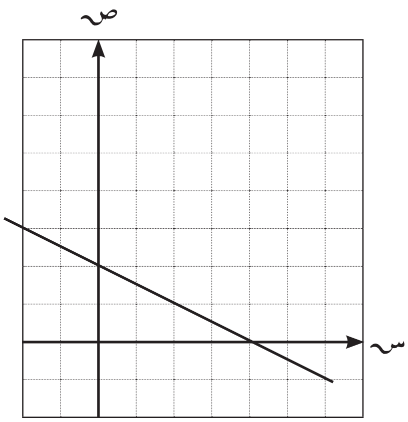


(أ) س = ١ (ب) ص = ١

(جـ) ص = س (د) ص = − س

---

٢٠ أي مما يلي يساوي ميل المستقيم المبين في الشكل ؟



(أ) $\frac{-١}{٢}$ (ب) − ٢

(جـ) ٢ (د) $\frac{١}{٢}$

---

٢١ ما قيمة س التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٠) ، (س ، ٣) يساوي ٢ ؟

(أ) $\frac{٢}{٥}$ | (ب) $\frac{٥}{٢}$ | (جـ) ٣ | (د) ٣−

---

٢٢ يمر خط مستقيم خلال النقطتين (٤ ، ٢) ، (٢ ، ٥) ، أي النقاط التالية يمر خلالها أيضًا هذا الخط المستقيم ؟

(أ) (٥ ، ٠) | (ب) (٣ ، ١) | (جـ) (٦ ، −١) | (د) (٥ ، ٤)

الوحدة الحادية عشرة

الهندسة والقياس
Geometry and Measurement

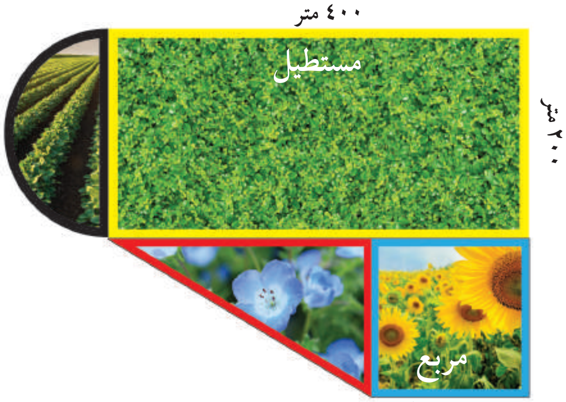
الزراعة
Agriculture

مشروع الوحدة :
(مساحات زراعية)

الزراعة هي النواة الرئيسية التي ما زال الإنسان يُطورها بالعلم والمعرفة ويرعاها بالجد والعمل والسعي إلى اكتشاف آفاق جديدة وتطوير وتحسين جميع جوانبها ومجالاتها سعيًا إلى المزيد من الإنتاج والمزيد من الفوائد لأنَّ الزراعة تُعد أحد المصادر الأساسية للدخل وأسلوب حياة إنساني ووسيلة للتحكم والسيطرة على الأسواق العالمية .

خطة العمل :

تُشجع دولة الكويت المواطنين على ممارسة الأنشطة الزراعية ، ففي الصورة أمامك جزء من منطقة زراعية زرعت عدة أنواع وكل نوع محاط بشكل هندسي . كل مجموعة تقوم بتوظيف مفاهيم المساحات غير المنتظمة في إيجاد المساحة الكلية لهذه الأرض الزراعية .



خطوات تنفيذ المشروع :

- ارسم مزرعتك الخاصة كما في الشكل المقابل ، استخدم ٣ إلى ٥ أشكال هندسية وأعطِها قياسات مناسبة .
- أوجد مساحة الأشكال الهندسية المرسومة .
- أوجد المساحة الكلية للمنطقة الزراعية كلها .

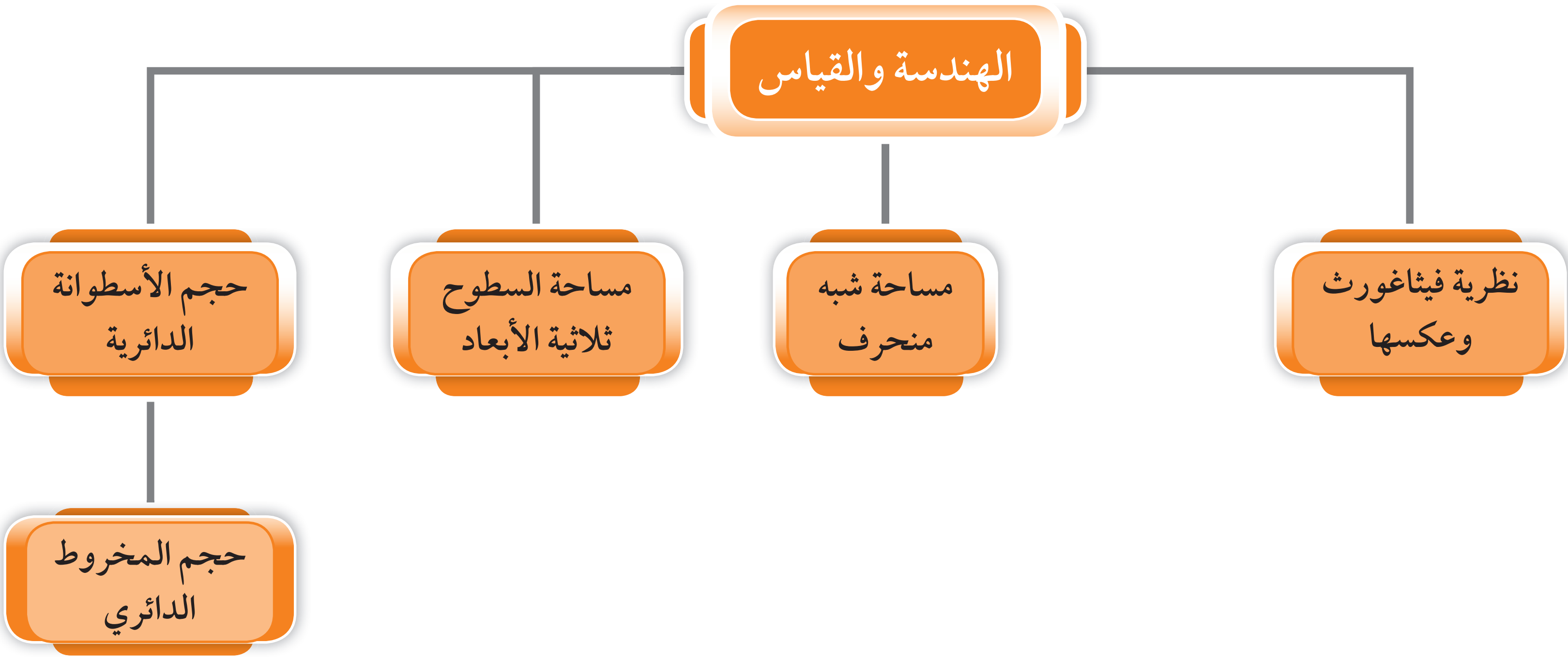
علاقات وتواصل :

- تبادل الرسومات والحسابات التي أوجدتها كل مجموعة .
- تتحقق كل مجموعة من صحة حل المجموعة الثانية .

عرض العمل :

- تُقدم كل مجموعة المُخطط (الرسم) الهندسي والمساحة الكلية للمشروع .
- وتعرض الإجابات للتحقق من الحل .

مخطَّط تنظيمي للوحدة الحادية عشرة



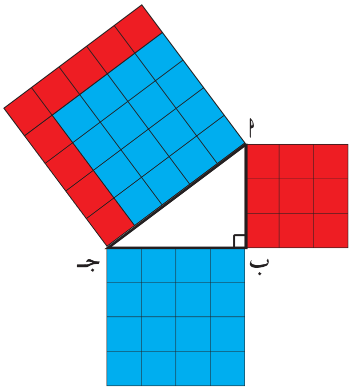
١١-١ نظرية فيثاغورث وعكسها
Pythagorean Theorem and its Reciprocal

العبارات والمفردات :
نظريّةُ فيثاغورث
Pythagorean Theorem
عكسُ نظريّةِ فيثاغورث
Reciprocal of Pythagorean Theorem

سوف تتعلّم : نظرية فيثاغورث وتطبيقاتها .

نشاط (١) :

في الشكل المقابل : Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب بحيث أ ب = ٣ وحدة طول ، ب جـ = ٤ وحدة طول ، من الرسم وباستخدام الوحدات المربعة ، أكمل الجدول التالي :



المثلث	أطوال الأضلاع	مربعاتها	ماذا تلاحظ؟
أ ب جـ قائم الزاوية في ب	ضلع القائمة : أ ب = ...	(أ ب)٢ = ...	.... + ... = ...
	ضلع القائمة : ب جـ = ...	(ب جـ)٢ = ...	
	الوتر : أ جـ = ...	(أ جـ)٢ = ...	

معلومات مفيدة :
يستخدم عاملو البناء نظريّة فيثاغورث لتشييد جدران مستوية .

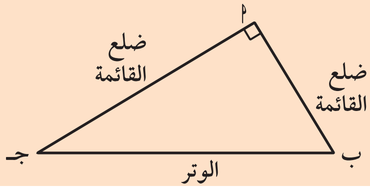
الاستنتاج :

∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب ⟸ (أ جـ)٢ = ... + ...

نظرية فيثاغورث : في المثلث القائم الزاوية يكون مربع طول الوتر مساويًا لمجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين .

Δ أ ب جـ قائم الزاوية في أ ⟸

(ب جـ)٢ = (أ ب)٢ + (أ جـ)٢

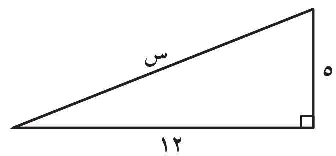


تذكر أنَّ :
في المثلّثات قائمة الزاوية ضلعا القائمة هما الضلعان اللذان يشكلان الزاوية القائمة ، والوتر هو أطول ضلع في المثلّث وهو الضلع المقابل للزاوية القائمة .

تدرّب (١) :

أوجد قيمة المجهول في كل مما يلي :

أ



س^{٢} = (٥)^{٢} + (١٢)^{٢}

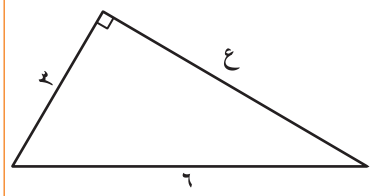
س^{٢} = ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩

(بأخذ الجذر التربيعي للطرفين)

س = $\sqrt{١٦٩}$

س = ١٣

ب



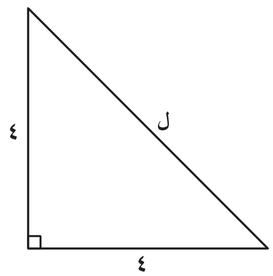
(٦)^{٢} = (ع)^{٢} + (٣)^{٢}

٣٦ = (ع)^{٢} + ٩ (العملية العكسية)

ع^{٢} = ٣٦ − ٩ = ٢٧

ع = $\sqrt{٢٧}$

جـ



ل^{٢} = (..........)^{٢} + (..........)^{٢}

....

....

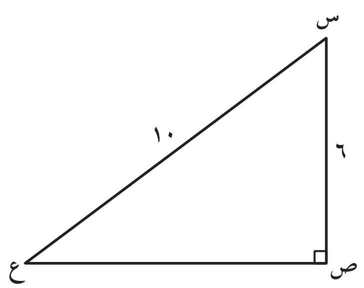
....

تدرّب (٢) :

س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص فيه :

س ص = ٦ وحدة طول ، س ع = ١٠ وحدة طول .

أوجد ص ع .



المعطيات : ....

المطلوب : ....

البرهان : $\because \Delta$ س ص ع قائم الزاوية في ص

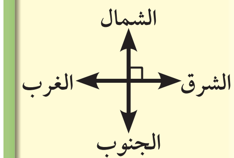
$\therefore$ (..........)^{٢} = (..........)^{٢} + (..........)^{٢}

.... = ... + (..........)^{٢} (باستخدام العملية العكسية)

....

$\therefore$ ص ع = $\sqrt{..........}$ = ...

معلومات مفيدة :



الجهات الأصلية .

تدرّب (٣) :

إذا كانت المدينة (ب) تقع شرق المدينة (ٲ) بمسافة ١٥ كم وكانت المدينة (جـ) تقع في شمال المدينة (ٲ) بحيث تبعد عن المدينة (ب) مسافة ٢٥ كم . أوجد المسافة بين المدينتين (ٲ) ، (جـ) .

المعطيات : ....

المطلوب : ....

البرهان : ∵ Δ ٲ ب جـ قائم الزاوية في ....

∴ (..........)^{٢} = (ٲ جـ)^{٢} + (..........)^{٢}

.... = (ٲ جـ)^{٢} + ...

(ٲ جـ)^{٢} = ... − .... = ...   **(بأخذ الجذر التربيعي للطرفين)**

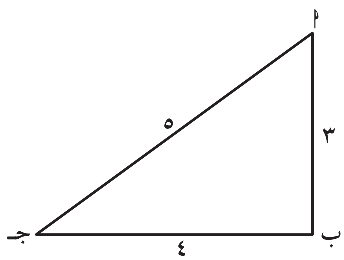
∴ ٲ جـ = $\sqrt{..........}$ = ...

∴ المسافة بين المدينتين (ٲ) ، (جـ) هي .... كم

نشاط (٢) :

اللوازم :
منقلة

في ما يلي عدة مثلثات معلوم أطوال أضلاعها . **قارن بين مربع أكبر الأضلاع طولًا** ، **ومجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين** .في كل من المثلثات التالية باستخدام المنقلة حاول التعرف على قياس الزاوية المقابلة لأكبر الأضلاع طولًا (بالقياس) .



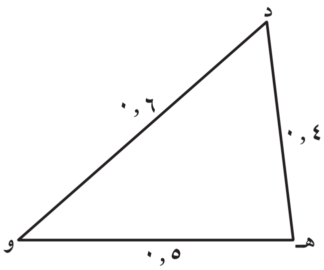
(ٲ جـ)^{٢} = ...

(ٲ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

= ....

ماذا تلاحظ ؟ ....

ق ($\hat{ب}$) = ...



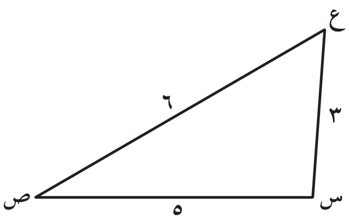
(د و)^{٢} = ...

(د هـ)^{٢} + (هـ و)^{٢}

= ....

ماذا تلاحظ ؟ ....

ق ($\hat{هـ}$) ≠ ....



(ع ص)^{٢} = ...

(ع س)^{٢} + (س ص)^{٢}

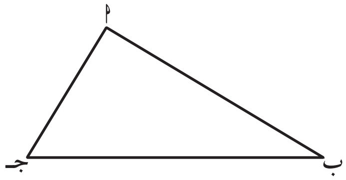
= ....

ماذا تلاحظ ؟ ....

ق ($\hat{س}$) ≠ ....

مما سبق نصل إلى ما نسميه عكس نظرية فيثاغورث :

عكس نظرية فيثاغورث : إذا كان مربع طول الضلع الأطول في مثلث مساويًا لمجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين ، فإنَّ هذا المثلث قائم الزاوية .



بالرموز :

إذا كان (ب جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢} + (أ ب)^{٢} ، فإنَّ :

Δ أ ب جـ قائم الزاوية في أ .

ملاحظة :

(ب جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢} + (أ ب)^{٢} $\Longleftrightarrow$ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في أ .

تدرّب (٤) :

في الحالات التالية : ابحث في ما إذا كانت الأطوال المعطاة يمكن أن تمثل أطوالًا لمثلث قائم الزاوية .

أ ٥ وحدة طول ، ١٢ وحدة طول ، ١٣ وحدة طول

(١٣)^{٢} = ...

(٥)^{٢} + (١٢)^{٢}

= ....

ماذا تلاحظ ؟ ....

ب ٥ وحدة طول ، ٥ وحدة طول ، ٧ وحدة طول

(٧)^{٢} = ...

(........)^{٢} + (........)^{٢}

= ....

ماذا تلاحظ ؟ ....

جـ ٥ وحدة طول ، ٧ وحدة طول ، ٩ وحدة طول

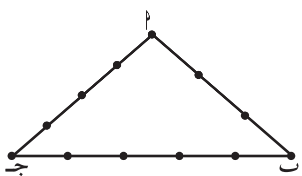
(٩)^{٢} = ...

(........)^{٢} + (........)^{٢}

= ....

ماذا تلاحظ ؟ ....

تدرّب (٥) :



استخدم المصريون القدامى أحبالًا ذات عقد تكون مثلثًا تبلغ أطوال أضلاعه بوحدات الطول ٣ ، ٤ ، ٥ على التوالي لمساعدتهم على تشكيل الزوايا القائمة أثناء بناء الأهرامات .

وضح كيف يعمل هذا النظام .

مربع طول الضلع الأطول (ب جـ)^{٢} = (..........)^{٢} = ...

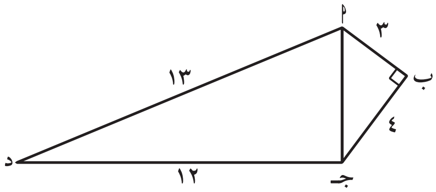
مربعا طولي الضلعين الآخرين (..........)^{٢} + (..........)^{٢} = ... + ... = ...

نلاحظ أنَّ : .... = ...

$\therefore$ (ب جـ)^{٢} = (..........)^{٢} + (..........)^{٢}

$\therefore$ النظام يكوّن مثلث ....

مثال :



في الشكل المقابل : ق ($\hat{ب}$) = ٩٠° ،
أ ب = ٣ وحدة طول ، ب جـ = ٤ وحدة طول ،
جـ د = ١٢ وحدة طول ، أ د = ١٣ وحدة طول .
احسب طول $\overline{\text{أ جـ}}$ ، ثم أثبت أن Δ أ جـ د قائم الزاوية .

الحلّ :

المعطيات : (١) ق ($\hat{ب}$) = ٩٠° ، أ ب = ٣ وحدة طول ، ب جـ = ٤ وحدة طول ،
جـ د = ١٢ وحدة طول ، أ د = ١٣ وحدة طول .

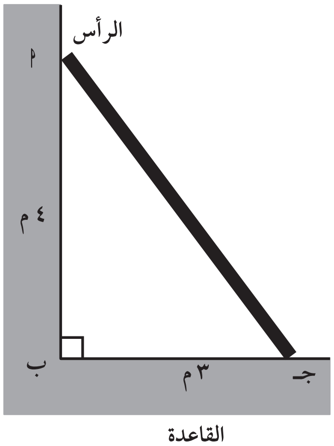
المطلوب : (١) إيجاد طول $\overline{\text{أ جـ}}$.
(٢) إثبات أنَّ Δ أ جـ د قائم الزاوية .

البرهان : ∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في $\hat{ب}$
∴ (أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}
(أ جـ)^{٢} = ٩ + ١٦ = ٢٥ **(بأخذ الجذر التربيعي للطرفين)**
∴ أ جـ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥
في Δ أ جـ د : (أ د)^{٢} = (١٣)^{٢} = ١٦٩ ،
(جـ د)^{٢} + (أ جـ)^{٢} = (١٢)^{٢} + (..........)^{٢}
= .... + ... = ...
∵ (١٣)^{٢} = (١٢)^{٢} + (٥)^{٢}
∴ (أ د)^{٢} = (جـ د)^{٢} + (أ جـ)^{٢}

∴ مربع طول الضلع الأكبر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين .

∴ المثلث أ جـ د قائم الزاوية في جـ .

تدرّب (٦) :



سلم يرتكز على حائط رأسي بحيث تبعد قمته عن سطح الأرض بمقدار ٤ أمتار ، وتبعد قاعدة السلم عن الحائط ٣ أمتار . أوجد طول السلم .

المعطيات : ....

المطلوب : ....

البرهان : ∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ....

∴ (أ جـ)^{٢} = (..........)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

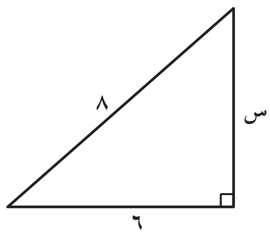
(أ جـ)^{٢} = ... + ... = ... **(بأخذ الجذر التربيعي للطرفين)**

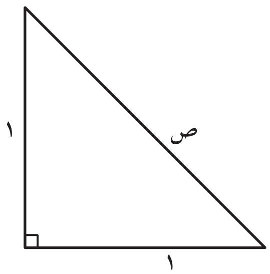
∴ أ جـ = $\sqrt{}$.......... = ...

∴ طول السلم = ...

تمــرَّنْ :

١ **أ** أوجد قيمة المجهول في كل مما يلي :

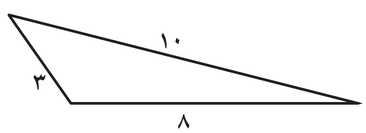


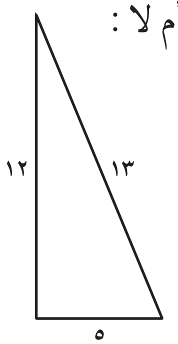


....

....

ب في كلٍّ ممّا يلي ، حدّد ما إذا كان المثلّث قائم الزاوية أم لا :

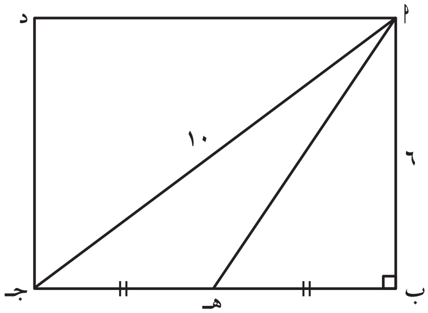




....

....

٢ أ ب جـ د مستطيل فيه :
أجـ = ١٠ وحدة طول ، أب = ٦ وحدة طول ،
هـ منتصف ب جـ . أوجد بالبرهان طول كل
من : ب جـ ، ب هـ ، أ هـ .



....

....

....

....

....

٣ ساعة حائط طول مؤشر الساعات فيها ٦ وحدة طول ، بينما
طول مؤشر الدقائق ٨ وحدة طول . أوجد المسافة بين
طرفي المؤشرين عند تمام الساعة الثالثة .

....

....

....

....

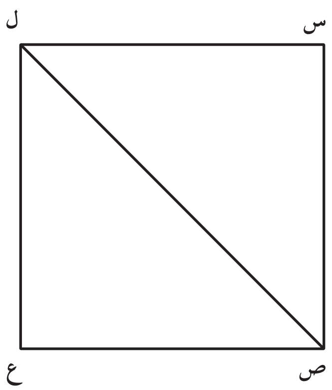
٤ تبلغ مساحة فناء مربع الشكل ٨١ وحدة مربعة
ويتضمن ممرًّا قطريًّا .

أ أوجد طول ضلع الفناء . ...

....

ب أوجد طول الممر القطري . ...

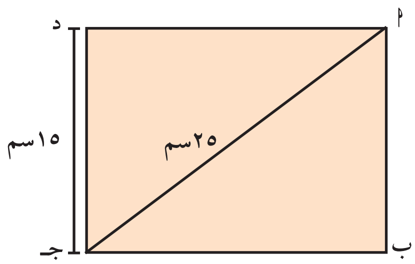
....



٥ تحدّد كلّ مجموعة من الأعداد التالية أطوال أضلاع مثلث .
حدّد المجموعة التي لا تناسب المجموعات الأخرى ؟

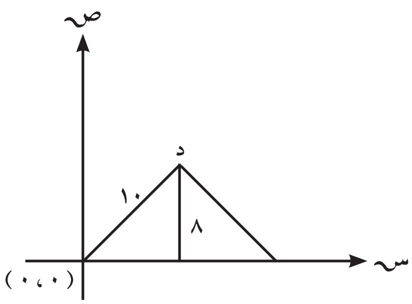
أ ٣ ، ٤ ، ٥	ب ٣ ، ٥ ، ٧	جـ ١٢ ، ٣٥ ، ٣٧	د ٦ ، ٨ ، ١٠

٦ يصنّف مغلف البريد الذي على شكل مستطيل بأنّه كبير إذا تجاوز طوله ٣٠ سم .
هل المغلّف التالي كبير ؟ وضّح إجابتك .



----

٧ إحداثي النقطة د هو :



أ (٨، ٦)	ب (٦، ٨)	جـ (٨، ١٠)	د (١٠، ٨)

١١-٢ مساحة شبه المنحرف
Area of Trapezoid

سوف تتعلّم : إيجاد مساحة شبه المنحرف .

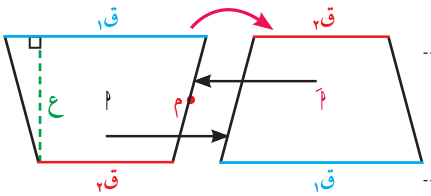
نشاط :

اللوازم :
- زوج متطابق من شبه المنحرف على ورق مُقوى .
- شريط لاصق ، قلم ، ورقة

أراد مُزارع أن يضع مُلصقًا دعائيًّا على سلة من سعف النخيل أوجهها على شكل شبه منحرف ، فاستعان بابنه أحمد ليُساعده في ذلك وطلب منه الآتي :

خذ زوجًا مُتطابقًا من شبه المنحرف ودور أحدهما ١٨٠° حول م ، وألصق البطاقتين ببعضهما بعضًا كما هو موضح في الشكل .

سوف نتعلّم من نشاط المزارع وابنه أحمد كيفية حساب مساحة شبه المنحرف .



١ ما اسم الشكل الناتج ؟ ....

٢ ما العلاقة بين مساحة شبه المنحرف ومساحة الشكل الناتج ؟ ....

٣ ما العلاقة بين ارتفاع وطول قاعدة الشكل الناتج ، وارتفاع وطول قاعدة شبه المنحرف ؟ ....

معلومات مفيدة :
سعف النخيل عبارة عن أوراق شجرة النخيل المركبة وهي ريشيّة الشكل ، طولها يتراوح ما بين ٣ – ٦ أمتار تقريبًا وتنتج النخلة ما بين العشرة والعشرين سعفة في السنة .

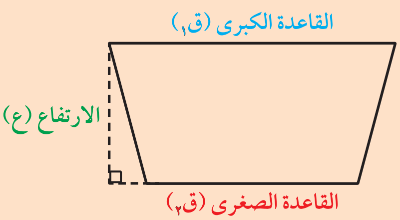
فكر في استنتاج قاعدة لحساب مساحة شبه المنحرف باستخدام الارتفاع وطول القاعدة .

مما سبق نجد أنَّ :

مساحة شبه المنحرف

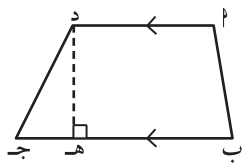
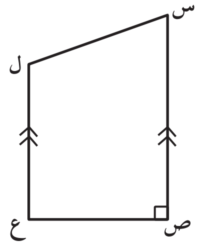
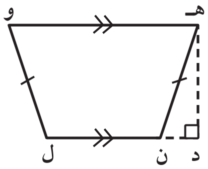
$$= \frac{\text{مجموع طولي القاعدتين}}{٢} \times \text{الارتفاع}$$

$$= \frac{(ق_١ + ق_٢)}{٢} \times ع$$



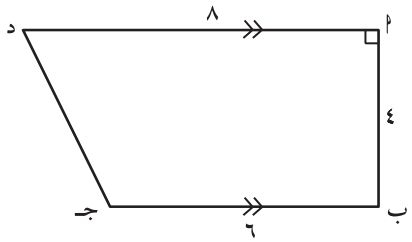
تدرّب (١) :

سمِّ القاعدتين والارتفاع في كل شكل مما يلي :

		
$ق_1$		
$ق_2$		
ع		

تدرّب (٢) :

أوجد مساحة شبه المنحرف أ ب جـ د .



$م = \frac{(ق_1 + ق_2)}{٢} \times ع$

$= \frac{(\text{.......} + \text{.......})}{٢} \times \text{..............}$

$= \text{..............} \times \text{..............}$

$\therefore م = \text{..............}$

تدرّب (٣) :

أوجد مساحة شبه المنحرف الذي فيه :

أ

$ق_1 = ٧$ وحدة طول

$ق_2 = ٥$ وحدة طول

$ع = ٦$ وحدة طول

$م = \left(\frac{ق_1 + ق_2}{٢}\right) \times ع$

$\therefore م = \frac{\text{.......}}{\text{.......}} \times \text{.......} = \text{..............................}$

ب

$ق_1 = ٦,٣$ وحدة طول

$ق_2 = ٣,٧$ وحدة طول

$ع = ٧$ وحدة طول

$م = \left(\frac{ق_1 + ق_2}{٢}\right) \times ع$

$\therefore م = \text{..............................}$

تدرّب (٤) :

أوجد ارتفاع شبه منحرف مساحته ١٦ وحدة مربعة وطول القاعدتين فيه ٣ وحدة طول ، ٥ وحدة طول .

$$\text{م} = \left(\frac{\text{ق}_{١} + \text{ق}_{٢}}{٢}\right) \times \text{ع}$$

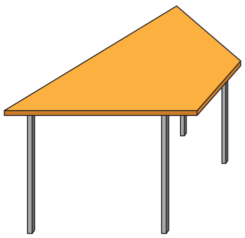
$$١٦ = \left(\frac{\text{.......} + \text{.......}}{٢}\right) \times \text{ع}$$

$$١٦ \times \text{.........} = \text{.........} \times \text{ع}$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{\text{.........}}{\text{.........}} = \text{..................}$$

تمــرَّنْ :

١ طاولة على شكل شبه منحرف طولا ضلعيها : المتوازيين ٢,٦ وحدة طول ، ١,٤ وحدة طول والبعد العمودي بين الضلعين ٠,٥ . أوجد مساحة الطاولة .



....

....

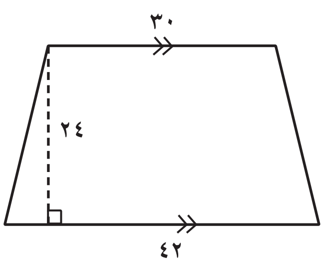
....

....

....

---

٢ يبين الشكل المجاور حديقة منزلية على شكل شبه منحرف يراد زراعتها بالعشب الطبيعي ، إذا كان سعر الوحدة المربعة من العشب الطبيعي ١٢ دينارًا ، فكم تكلف زراعة الحديقة بالعشب ؟



....

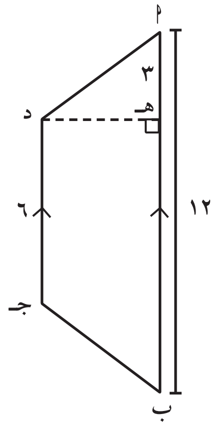
....

....

....

....

٣ في الشكل المقابل أ ب جـ د شبه منحرف مساحته ٣٦ وحدة مربعة . فيه أ هـ = ٣ ، أ ب = ١٢ ، د جـ = ٦ أوجد كلاًّ من د هـ ، أ د .



....

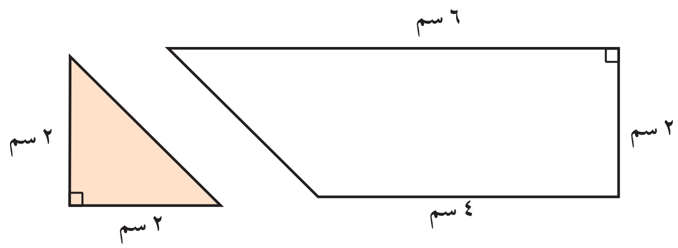
....

....

....

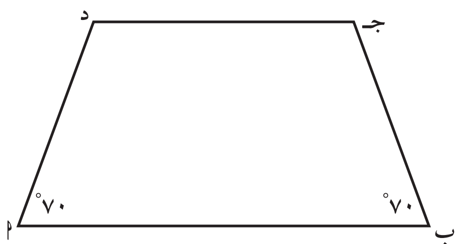
....

٤ إذا استخدمنا المثلث المظلّل كوحدة لقياس مساحة شبه المنحرف ، فإنَّ هذه المساحة تساوي :



أ ٣ مثلثات	ب ٤ مثلثات	جـ ٥ مثلثات	د ٦ مثلثات

٥ أ ب جـ د شبه منحرف ، س ص ع ل شبه منحرف آخر مطابق له (له الشكل والمساحة نفسها) ،



فإذا كان ق ($\hat{\text{س}}$) = ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٧٠° ،

فإنَّ العبارة الصحيحة فيما يلي هي :

أ س ص = أ ب

ب مساحة المنطقة س ص ع ل < مساحة المنطقة أ ب جـ د .

جـ أطوال أضلاع الشكل س ص ع ل متطابقة .

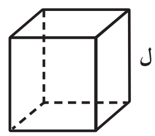
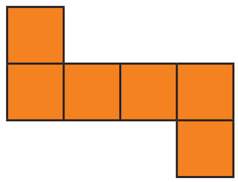
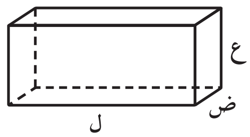
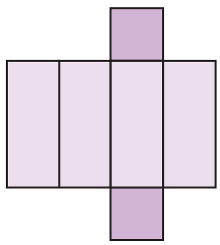
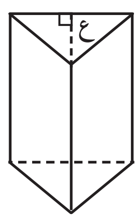
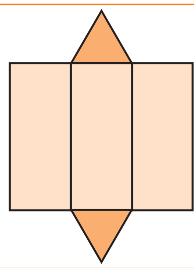
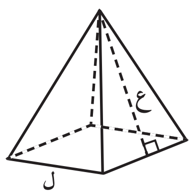
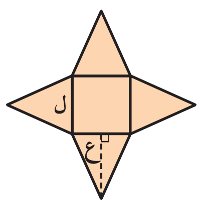
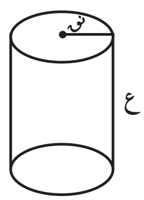
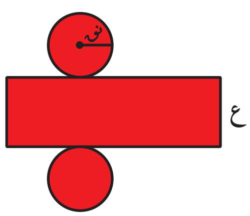
د محيط الشكل س ص ع ل = ٣ أمثال محيط الشكل أ ب جـ د .

١١-٣ مساحةُ السطوح (ثلاثية الأبعاد)
3 D Surface Area

سوف تتعلّم : إيجاد مساحة سطح المجسم المتعدد السطوح .

نشاط (١) :

مما سبق دراسته أكمل الجدول التالي :

اسم	المجسم	الشبكة للمجسم	قانون المساحة السطحية
مكعب			٦ × مساحة المربع .... = ...
شبه مكعب			٢ × (مساحة القاعدة) + ٢ × (مساحة الوجه ١) + ٢ × (مساحة الوجه ٢) .... = ...
منشور ثلاثي قائم قاعدته مثلث متطابق الأضلاع			٢ × مساحة المثلث + ٣ × مساحة المستطيل .... = ...
هرم رباعي قاعدته مربعة الشكل			مساحة القاعدة (المربع) + ٤ × مساحة السطح الجانبي الواحد (المثلث) .... = ...
أسطوانة دائرية قائمة			٢ × مساحة القاعدة (الدائرة) + مساحةالسطحالجانبي(المستطيل) .... = ...

العبارات والمفردات :

مجسّم متعدد الأوجه **Polyhedron**

وجه **Face**

حرف **Edge**

رأس **Vertex**

مساحة سطحيّة **Surface Area**

منشور **Prism**

قاعدة **Base**

أسطوانة **Cylinder**

معلومات مفيدة :

يستخدمُ مصمِّمو الديكوراتِ الداخليّةِ المساحةَ السطحيّةَ لتحديدِ كمّيّةِ الموادِّ اللازمةِ لتغطيةِ الأشياءِ المجسَّمةِ .

تذكر أنّ :

المنشور القائم هو منشور حروفه الجانبيّة متعامدة مع قاعدته.

نشاط (٢) :

بالرجوع إلى النشاط (١) :

المساحة السطحية للمنشور القائم المرسوم

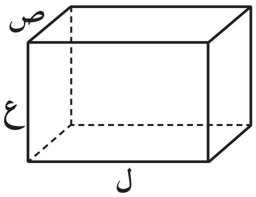
= ٢ (ل × ع) + ٢ (ض × ع) + ٢ (ل × ض)

بأخذ ٢ و ع عامل مشترك من الحد الأول والثاني :

= ٢ × ع (ل + ...) + (٢ × .... × ....)

= ٢ (ل + ض) × الارتفاع + ٢ مساحة القاعدة

= **محيط القاعدة × الارتفاع + ٢ مساحة القاعدة**



المساحة الجانبية للمنشور الرباعي القائم = محيط القاعدة × الارتفاع

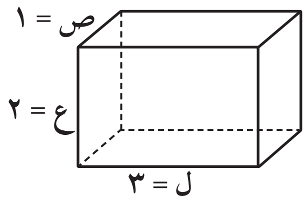
تذكر أنَّ :

- محيط المستطيل = ٢ × (ل + ض)
- مساحة المستطيل = ل × ض

تدرّب (١) :

أوجد المساحة السطحيّة للمنشور القائم الذي أبعاده : ١ وحدة طول ، ٢ وحدة طول ، ٣ وحدة طول .

الحلّ :



المساحة السطحية للمنشور القائم

= محيط القاعدة × الارتفاع + ٢ مساحة القاعدة

= ٢ (........ + ...) × .... + ... × .... × ....

= ....

= ....

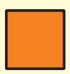
= ....

تذكر أنَّ :

- مساحة الشكل تعني مساحة منطقة الشكلِ .
- مساحة المثلّث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدةِ × الارتفاع

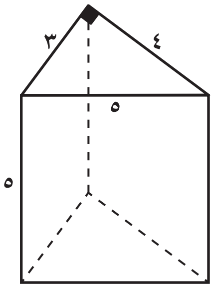
- مساحة المستطيل = الطول × العرض

- مساحة المربّع = طول الضلع × نفسه



- مساحة متوازي الأضلاع = طول القاعدة × الارتفاع

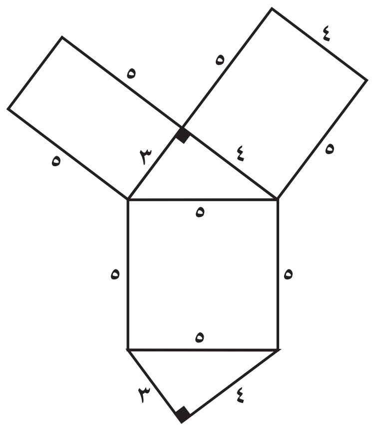
مثال (١) :



منشور ثلاثي قائم قاعدته على شكل مثلث قائم الزاوية كما في الشكل ، وارتفاع المنشور ٥ وحدات طول ، أوجد المساحة السطحية للمنشور .

الحلّ :

مساحة سطح المنشور = ٢ مساحة القاعدة + مساحة الأوجه الجانبية



مساحة القاعدة = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٣ = ٦ سم^{٢}

مساحة الأوجه الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

= (٣ + ٤ + ٥) × ٥ = ١٢ × ٥ = ٦٠ سم^{٢}

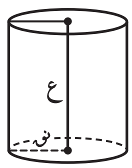
مساحة سطح المنشور = ٢ × ٦ + ٦٠

= ١٢ + ٦٠

= ٧٢ سم^{٢}

نشاط (٣) :

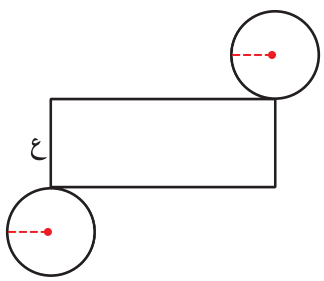
بالرجوع إلى النشاط (١) :



مساحة سطح الأسطوانة الجانبي = محيط القاعدة × الارتفاع

= ٢π نق × ع

المساحة السطحية للأسطوانة الدائرية القائمة



= ٢ مساحة القاعدة + مساحة السطح الجانبي للأسطوانة

(مساحة المستطيل)

= ٢ π نق^{٢} + ٢ π نق ع

= ٢ π نق (نق + ع)

تذكر أنَّ :

– محيط الدائرة

= ٢ π نق

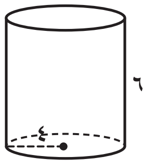
– مساحة الدائرة

= π نق^{٢}

المساحة السطحية للأسطوانة الدائرية القائمة = ٢ π نق (نق + ع)

تدرّب (٢) :

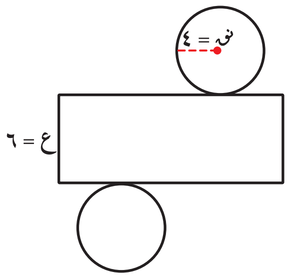
أوجِدْ المساحة السطحية للأسطوانة . (باعتبار π = ١٤ ,٣)



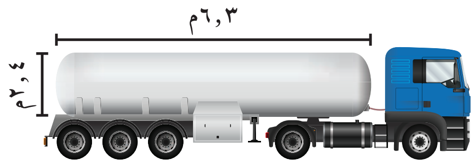
المساحة السطحية للأسطوانة = ٢ π نق (نق + ع)

= ....

= ....



تدرّب (٣) :



إذا أردنا طلاء خزان الناقلة الأسطواني الشكل بدهان يتكلف المتر المربع منه ٤ دنانير .

فكم يكلف دهان الخزان ؟ (باعتبار π = ١٤ ,٣)

مساحة سطح الخزان = ٢ π نق (نق + ع)

= ٢ × .... × .... × (.......... + ...)

= ٢ × .... (.......... + ...)

= .... × ....

= ....

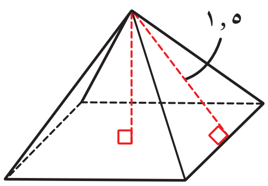
∴ تكلفة دهان الخزان = ...

فكِّر وناقِش

إذا كانت الأسطوانة من غير قاعدتين ، فما المساحة السطحية لها ؟

مثال (٢) :

يُستخدم في إحدى المسرحيّات التي تدور أحداث قصتها في مصر نموذج لهرم منتظم رباعي القاعدة . ومساحة قاعدته ٦,٢٥ وحدة طول مربعة . إذا كان ارتفاع الوجه الجانبي ١,٥ وحدة طول ، فأوجد المساحة السطحيّة لهذا الهرم .



الحلّ :

بما أنَّ قاعدة الهرم هي مربّع مساحته ٦,٢٥ وحدة طول مربعة .

إذًا طول ضلع المربّع = $\sqrt{٦,٢٥}$ = ٢,٥ وحدة طول

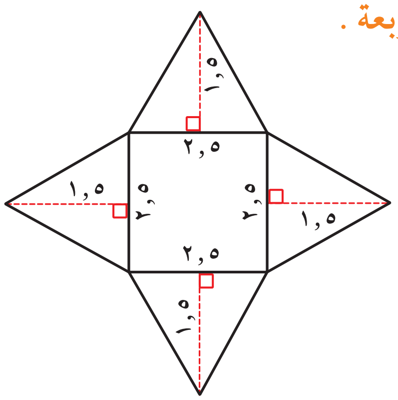
يتضمّن الهرم ٤ أوجه مثلّثيّة متطابقة.

مساحة الوجه الواحد = $\frac{١}{٢}$ ق × ع

= $\frac{١}{٢}$ × (٢,٥ × ١,٥) = ١,٨٧٥ وحدة مربعة

∴ المساحة السطحيّة للهرم = ٦,٢٥ + ٤ × ١,٨٧٥

= ١٣,٧٥ وحدة مربعة .



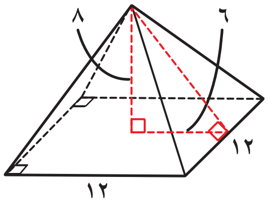
تمــرَّنْ :

١ ما الفرق بين المساحة السطحية لمكعب طول ضلعه ٥ وحدة طول وشبه مكعب أبعاده ٣ وحدة طول ، ٤ وحدة طول ، ٧ وحدة طول .

٢ في إحدى المدن الكبرى فندق أسطوانيّ الشكل طول قطر قاعدته الدائرية ٣٥ وحدة طول وارتفاعه ٥٠ وحدة طول . تمت تغطية السطح المنحني بالزجاج .
ما مساحة الزجاج الذي يُغطّي السطح الجانبي للفندق ؟ (اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

---

٣ أ ما نوع الهرم المبيَّن في الشكل ؟



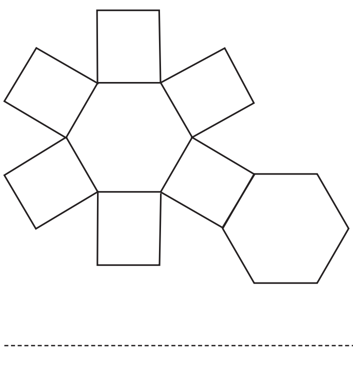
ب ما ارتفاع هذا الهرم ؟

جـ ما مساحة الوجه المثلّثيِّ ؟

د ما المساحة السطحيّة للهرم ؟

---

٤ من خلال الشبكة المرسومة أكمل:



أ اسم المجسم :

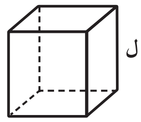
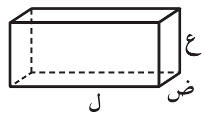
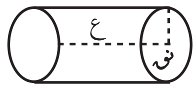
ب عدد الأسطح الجانبية =

١١-٤ حجم الأسطوانة الدائرية – حجم المخروط الدائري
Volume of Cylinder and Cone

سوف تتعلّم : إيجاد حجم الأسطوانة وحجم المخروط .

نشاط (١) :

أكمل الجدول التالي :

الشكل	اسم الشكل	مساحة القاعدة للشكل	حجم الشكل (رمزيًّا)	الحجم (لفظيًّا)
	مكعب	ل ×	ل × ...... ×	الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع
	شبه المكعب	.... × ض	ل × ض ×	الحجم = مساحة القاعدة × ....
	أسطوانة	π نق^{٢}	π نق^{٢} ع	مساحة القاعدة × الارتفاع

يمكن إيجاد حجم المنشور القائم باستخدام القانون التالي :

حجم المنشور القائم	=	مساحة القاعدة (م)	×	الارتفاع (ع)		(لفظيًّا)
ح	=	م	×	ع		(رمزيًّا)

مساحة قاعدة الأسطوانة (م) = π نق^{٢} ، حيث نق = طول نصف القطر . بالتالي :

حجم الأسطوانة (ح) = م × ع = (π نق^{٢}) × ع

معلومات مفيدة :

تكون الطرود المرسَلة أحيانًا على شكل منشور أو أسطوانة ، ويُحدّدُ حجمُ الطردِ مقدار الحيّز اللازم لشحنه.

تذكر أنّ :

– مساحة المربع
= ل × ل = ل^{٢}
– مساحة المستطيل
= ل × ض
– حجم المكعب
= ل × ل × ل = ل^{٣}
– حجم شبه المكعب
= ل × ض × ع

تذكر أنَّ :

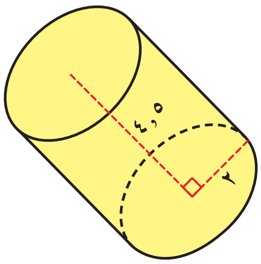
– مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

– مساحة الدائرة = π نق٢

مثال (١) :

أوجد حجم الأسطوانة المبيَّنة في الشكل المجاور : (اعتبر π = ٣,١٤)

الحلّ :



أوجد أوّلًا مساحة القاعدة (م) :

م = π نق٢

م = ٣,١٤(٢)٢ = ١٢,٥٦ وحدة مربعة

استخدم م لإيجاد الحجم :

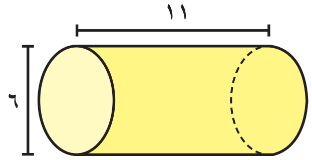
ح = م × ع = ١٢,٥٦ × ٤,٥ = ٥٦,٥٢ وحدة مكعبة

∴ الحجم = ٥٦,٥٢ وحدة مكعبة .

تدرّب (١) :

أوجد حجم كلِّ أسطوانة .

أ



استخدم π = ٣,١٤

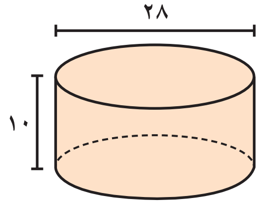
حجم الأسطوانة = م × ع

= π نق٢ × ع

= ٣,١٤ × .... × .... × ١١

= ....

ب



استخدم π = $\frac{٢٢}{٧}$

حجم الأسطوانة = ... × ع

= ....

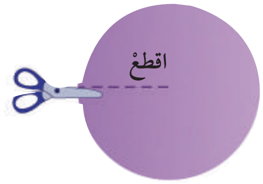
= $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ × .... × ....

= ....

اللوازم :

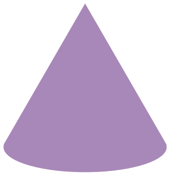
- أكواب وأقماع
- مقصّ
- شريط لاصق
- مسطرة
- ورق مقوًّى
- فرجار
- رمل ملون

نشاط (٢) :



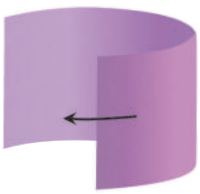
١ استخدم الفرجار لترسم دائرةً طول نصف قطرها ١٠ وحدة طول ، واستخدم المسطرة لترسم نصف قطر هذه الدائرة ، ثمّ قصّ الدائرة .

٢ قصّ الورقة عند نصف القطر الذي رسمته .

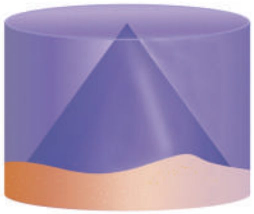


٣ أمسك أحد طرفي الخطّ الذي قطعت عنده ولفّه بحيث تصنع مخروطًا . استخدم الشريط اللاصق لتثبيت المخروط .

٤ قس ارتفاع هذا المخروط وسجّله .



٥ قص مستطيلًا ارتفاعه مساوٍ لارتفاع المخروط ، واصنع منه أسطوانة على أن يكون قطر قاعدتها مساويًا لقطر قاعدة المخروط .

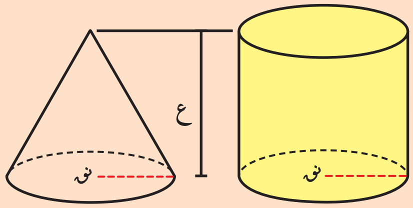


٦ املأ المخروط بالرمل الملون ، ثمّ اسكبه في الأسطوانة . كرّر هذه العمليّة بعد ذلك مرّتين .

٧ ماذا تلاحظ عن كمّيّة الرمل في الأسطوانة في نهاية المرحلة الثالثة ؟ اشرح إجابتك .

٨ ناقش مع زملائك العلاقة بين حجم الأسطوانة وحجم المخروط .

حجم المخروط هو $\frac{١}{٣}$ حجم الأسطوانة المشتركة معه في القاعدة والارتفاع .



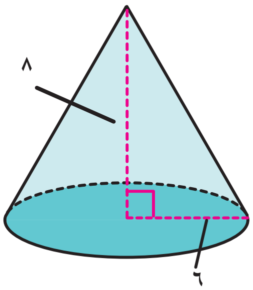
ح مخروط = $\frac{١}{٣}$ × (م × ع) = $\frac{١}{٣}$ × (π نق٢ × ع) ،

حيث م مساحة القاعدة ، ع الارتفاع .

مثال (٢) :

أوجد حجم المخروط المبيّن في الشكل المجاور :

(اعتبر π = ٣,١٤)



الحلّ :

أوجد أوّلًا مساحة القاعدة الدائريّة (م) :

م = π نق٢

م = ٣,١٤ × ٦٢ = ١١٣,٠٤ وحدة مربعة

استخدِم م لإيجاد الحجم :

ح = $\frac{١}{٣}$ × (م × ع)

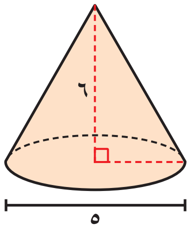
ح = $\frac{١}{٣}$ × (١١٣,٠٤ × ٨) = ٣٠١,٤٤ وحدة مكعبة

∴ الحجم = ٣٠١,٤٤ وحدة مكعبة .

فكِّر وناقِش

قال جمال إنَّ حجم المخروط يساوي ثلث حجم أي أسطوانة . فهل ما قاله جمال صحيح ؟ وضّح ذلك .

تدرّب (٢) :



أوجد حجم المخروط المبيّن في الشكل المجاور :

(اعتبر π = ٣,١٤)

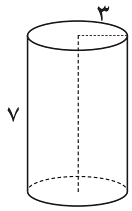
حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ × .... × .... × ٢,٥ × .... = ...

تمـــرَّنْ :

أوجد حجم كلّ مجسم مما يلي :

١ (اعتبر π = $\frac{٢٢}{٧}$)

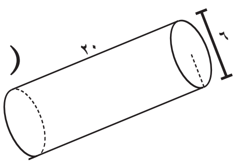


....

....

....

٢ (اعتبر π = ٣,١٤)

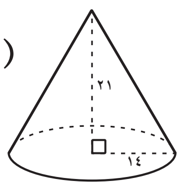


....

....

....

٣ (اعتبر π = $\frac{٢٢}{٧}$)

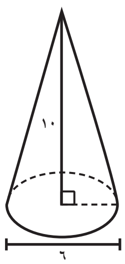


....

....

....

٤ (اعتبر π = ٣,١٤)



....

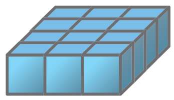
....

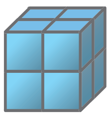
....

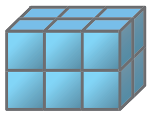
٥ صومعة (مخزن) للغلال على شكل أسطوانة ارتفاعها ٩ أمتار ، وطول قطرها ٤,٢ أمتار ، ما عدد الأمتار المكعبة التي يمكن للصومعة تخزينها ، مقربًا الناتج إلى أقرب م^{٣} ؟ (اعتبر π = ٣,١٤)

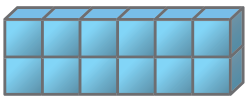
---

٦ جميع المكعّبات الصغيرة التالية لها نفس الحجم ،
أي مجسم من المجسمات التالية له حجم مختلف عن باقي المجسمات ؟

أ


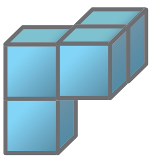
ب


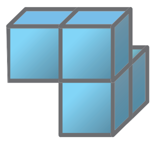
جـ


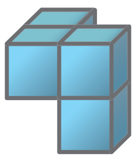
د


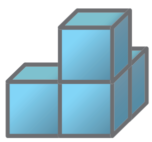
---

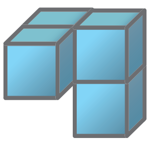
٧ يقلب الشكل التالي في وضعيات مختلفة .
أي من الأشكال التالية يمكن أن يمثل هذا الشكل السابق بعد قلبه ؟



أ


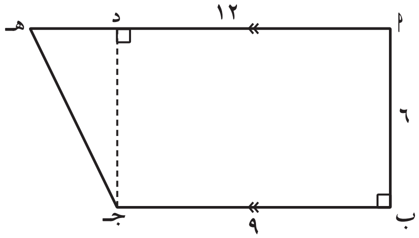
ب


جـ


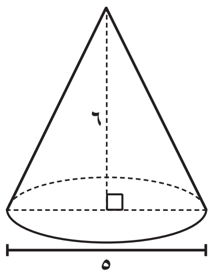
د


١١-٥ مراجعة الوحدة الحادية عشرة
Revision Unit Eleven

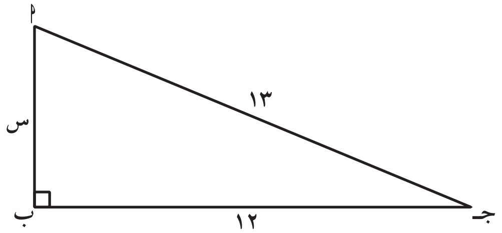
١ أوجد مساحة شبه المنحرف أ ب جـ هـ المرسوم أمامك .



٢ أوجدْ حجم المخروط المرسوم أمامك . (اعتبر π = ٣,١٤)

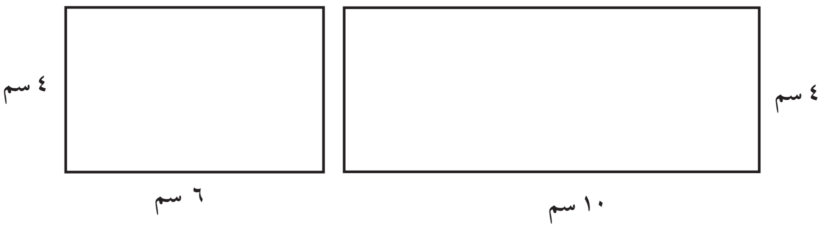


٣ أوجد طول ضلع القائمة في المثلث أ ب جـ المرسوم أمامك :



٤ أثبت أنَّ Δ أ ب جـ قائم الزاوية ، حيث أ ب = ٧ وحدة طول ،
أ جـ = ٢٤ وحدة طول ، ب جـ = ٢٥ وحدة طول .

٥ إذا كان المستطيلان المرسومان وجهين لصندوق واحد ، فكم يكون حجم هذا الصندوق ؟



(أ) ٩٦٠ سم^{3}

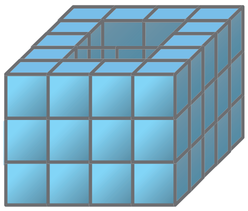
(ب) ٦٢٠ سم^{3}

(جـ) ٢٤٠ سم^{3}

(د) ٦٠ سم^{3}

---

٦ الشكل المقابل مكون من مكعبات جميعها من نفس الحجم وتوجد فتحة في منتصف الشكل ، فكم عدد المكعبات اللازمة لتعبئة الفتحة ؟



(أ) ٦ | (ب) ١٢ | (جـ) ١٥ | (د) ١٨

---

٧ إذا كان حجم مكعب وحجم أسطوانة متساويين وكان طول حرف المكعب وطول نصف قطر قاعدة الأسطوانة كلٌّ منهما يساوي ٦ سم ، فأي من القياسات الآتية هو الأقرب لأن يكون ارتفاعًا لهذه الأسطوانة ؟

(أ) ١ سم | (ب) ٢ سم | (جـ) ٣ سم | (د) ٤ سم

---

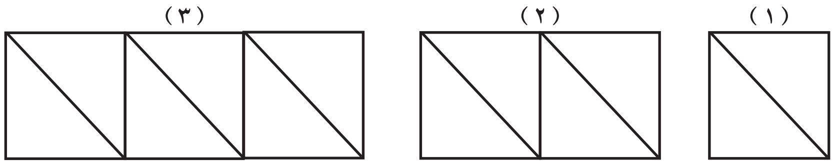
٨ يملك أحمد مزرعة على شكل مستطيل محيطه يساوي ٦٢ متر ، إذا كان طول الحديقة يزيد عن عرضها بـ ٥ أمتار ، فما طول وعرض هذه الحديقة ؟

الطول يساوي : ....

العرض يساوي : ....

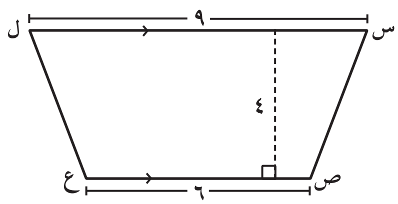
اِختبار الوحدة الحادية عشرة

أوّلًا : في البنود (١-٤) ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ حجم أسطوانة طول نصف قطرها ٧ وحدة طول وارتفاعها ٥ وحدة طول يساوي ١١٠ وحدة مكعبة .	أ	ب
٢ المثلث الذي أطوال أضلاعه ٣ وحدة طول ، ٦ وحدة طول ، ٥ وحدة طول مثلث قائم الزاوية .	أ	ب
٣ تم ترتيب المثلثات القائمة الزاوية لتكوّن النمط المبين ، إذا كانت مساحة كل مثلث منها تساوي ١٢ سم^{٢} ، فإنّ مساحة الشكل الخامس تساوي ١٢٠ سم^{٢} . 	أ	ب
٤ إذا كان حجم أسطوانة دائرية يساوي ٩٩ وحدة مكعبة ، فإنَّ حجم المخروط المشترك معها بالقاعدة والارتفاع يساوي ٣٣ وحدة مكعبة .	أ	ب

ثانيًا: لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة :

٥ مساحة شبه المنحرف س ص ع ل المرسوم تساوي :



(أ) ٣٠ وحدة مربعة (ب) ٦٠ وحدة مربعة

(جـ) ١٩ وحدة مربعة (د) ٤٢ وحدة مربعة

---

٦ صفيحة فارغة على شكل مكعب ، صب فيها الماء بمعدل ٢٠٠ سم^{٣} في الدقيقة فامتلأت بعد ٤٠ دقيقة ، فإنَّ طول ضلع المكعب يساوي :

(أ) ٨٠٠ سم (ب) ٢٠٠ سم (جـ) ٤٠ سم (د) ٢٠ سم

٧ خمسة مربّعات وضعت بجانب بعضها بحيث أصبح محيطها ٧٢ سم ، فما طول ضلع المربّع ؟

(أ) ١٢ سم (ب) ٨ سم (جـ) ١٠ سم (د) ٦ سم

---

٨ أسطوانة دائرية قائمة محيط قاعدتها ١٥ وحدة طول وارتفاعها ٣ وحدة طول ،
فإنَّ مساحة السطح المنحني فقط تساوي :

(أ) ٧٠ وحدة مربعة (ب) ٤٥ وحدة مربعة (جـ) ١٨ وحدة مربعة (د) ٤٤١ وحدة مربعة

---

٩ علبة بدون غطاء على شكل مكعب طول ضلعه س ، فإنَّ المساحة السطحية للعلبة تساوي :

(أ) ٤ س^{٢} (ب) ٥ س^{٢} (جـ) ٦ س^{٢} (د) س^{٢}

---

١٠ إذا كانت مساحة قاعدة الهرم الرباعي تساوي ٢٥ وحدة مربعة ومساحة أحد الأوجه المثلثة ١٥ وحدة مربعة ، فإنَّ مساحة الهرم السطحية تساوي :

(أ) ٨٥ وحدة مربعة (ب) ٤٠ وحدة مربعة (جـ) ٦٠ وحدة مربعة (د) ٧٠ وحدة مربعة

الوحدة الثانية عشرة

الاحتمال
Probability

عالم المرح
World of Fun

مشروع الوحدة :
(تصميم لعبة)

تساعد الألعاب على دخول البهجة والسرور إلى صدر المشترك عند معرفة فرص فوزه . فمثلًا لعب الاحتمالات تساعد على المرح واللعب في الحياة . وعند ممارسة الإنسان لهذه الألعاب فإنّه يشعر بالسعادة فيؤثر ذلك إيجابيًّا على جميع نواحي حياته .

خطة العمل : تصميم لعبة على شكل دوّارة :

- ستقوم كل مجموعة بتصميم دوارة تعتمد على مبادئ الاحتمال برسم عدد من القطاعات الدائرية المميزة (برقم ، حرف ، لون ، شكل ، ....) .

خطوات تنفيذ المشروع :

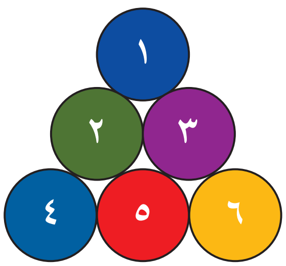
- حدد قوانين اللعبة الدوّارة .
- أوجد فضاء العينة للدوارة التي رسمت عند كل مجموعة .
- أوجد احتمالات وقوف المؤشر عند أي قطاع دائري .

علاقات وتواصل :

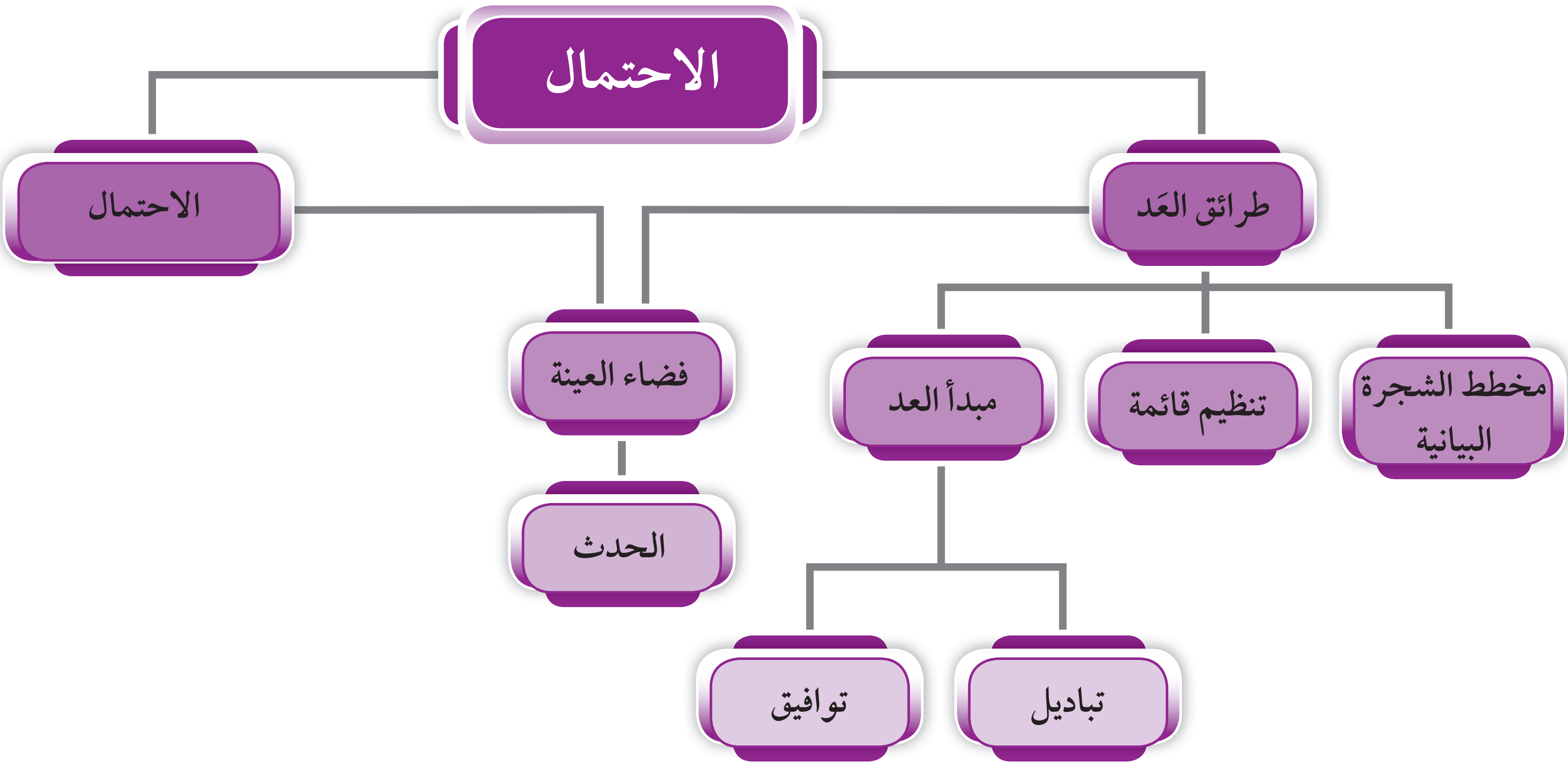
- تلعب المجموعات .
- تبادل الدّوّارات بين المجموعات للعب .
- حدّد مواصفات التقييم ومدى جودة اللعبة (العدالة - التصميم - الأدوات) .

عرض العمل :

- اعرض وناقش اللعبة الأفضل جودة (العدالة - التصميم) .



مخطَّط تنظيمي للوحدة الثانية عشرة



١٢-١ طرائق العد
Counting Methods

العبارات والمفردات :

مخطّط الشجرة البيانية
Tree Diagram

مبدأ العد
Counting Principle

تنظيم قائمة
Organizing a list

ترتيب
Arragement

تباديل
Permutation

مضروب
Factorial

توافيق
Combination

سوف تتعلّم :مخطط الشجرة البيانية –تنظيم قائمة – مبدأ العد – التباديل – التوافيق .

(١) مبدأ العد

نشاط (١) :

زار خالد المدينة الترفيهية ، وعند دخوله حصل على هدية عبارة عن تذاكر مجانية للعبتين من أصل أربع لعب متاحة ومختلفة .

فإذا كانت اللعب الأربع هي : الإعصار ، الدردور ، البرق ، السندباد .

فبكم طريقة يستطيع خالد اختيار اللعبتين المتاحتين له بشرط عدم تكرار اللعبة ؟

يمكن التوصل إلى عدد طرائق اختيار خالد للعبتين متاحتين له بعدة طرق منها :

(أ) القائمة المنظمة

اللعبة الأولى	اللعبة الثانية
الإعصار	الدردور
الإعصار	البرق
الإعصار	السندباد
الدردور	....
....	البرق
الدردور	....
البرق	الإعصار
البرق	....
....	السندباد
السندباد	الإعصار
....	....
....	....

(ب) مخطط الشجرة البيانية

اللعبة الأولى	اللعبة الثانية
الإعصار	الدردور
	البرق
	السندباد
الدردور	....
	البرق
	....
البرق	الإعصار
	....
	السندباد
....	....
	....
	....

معلومات مفيدة :

يستخدم علماء الأحياء مخطّطات الشجرة البيانية لتحليل ما قد يحدث في أجيال مختلفة من الكائنات الحية .

لاحظ أنَّ :
عدد طرق اختيار خالد للعبة الأولى هو ٤ طرق ، وعدد طرق اختياره للعبة الثانية هو ٣ طرق وبذلك يستطيع اختيار لعبتين بـ ١٢ طريقة مختلفة .

ويمكن أيضًا التوصل لعدد طرق اختيار خالد للعبتين متاحتين له بطريقة أخرى وهي :

عدد الطرق = عدد طرق اختيار اللعبة الأولى × عدد طرق اختيار اللعبة الثانية

= .... × .... = ... طريقة

هذه الطريقة تسمى « **مبدأ العد** » ويفضّل العمل بها إذا كان التمثيل بالقائمة المنظمة أو بالشجرة البيانية فيه صعوبة لكثرة البيانات المستخدمة وتعددها .

مبدأ العد : هو عملية تتكون من خطوتين مستقلتين ، إذا كان عدد طرق إجراء الخطوة الأولى $ن_1$ ، وعدد طرق إجراء الخطوة الثانية $ن_2$ ، فإنَّ عدد الطرق الممكنة لإجراء العملية هو :
$ن_1 \times ن_2$. ويمكن تعميم المبدأ لأكثر من خطوتين .

تدرّب (١) :

يقدم مطعم وجبات من طبق رئيسي إما لحم أو سمك أو دجاج ، وكل طبق رئيسي يقدّم معه مقبلات من حساء أو سلطة .

أ) أكمل مخطط الشجرة البيانية لتبين الوجبات الممكن تقديمها .

الأطباق	المقبلات	الوجبات
لحم	....	(لحم ، ....)
	سلطة	(لحم ، سلطة)
....	حساء	(............ ، حساء)
	....	(............ ، ....)
دجاج	....	(دجاج ، ....)
	....	(............ ، ....)

ب) كم عدد الوجبات التي يمكن تقديمها ؟

عدد الوجبات = ... × .... = ... وجبات

معلومات مفيدة :

تستخدم التباديل عند ترتيب مجموعة مختارة من الصور الفوتوغرافية في ألبوم حسب ترتيب الأحداث .

(٢) التباديل والترتيبات

١ ٢ ٣ ٤

نشاط (٢) :

أراد خالد التعرف على جميع الأعداد والتي يتكون كل منها من رقمين فقط من مجموعة الأرقام { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، على ألا يسمح بتكرار الرقم في العدد ، فهل تستطيع أن تساعده في إكمال مخطط الشجرة التالي ؟

الرقم الأول (رقم الآحاد)	الرقم الثاني (رقم العشرات)	الأعداد الممكنة
١	٢	١ ٢
	٣	١ ٣
	٤	١ ٤
٢	١	٢ ١
	٣	٢ ٣
	......	......
٣	١	٣ ١
	......	......
	......	......
٤	......	......
	......	......
	......	......

توجد ١٢ طريقة ممكنة لاختيار الرقمين المسموح بهما لنكون بهما العدد أي أن :

عدد الطرائق = عدد طرق اختيار الرقم الأول × عدد طرق اختيار الرقم الثاني

= ٤ × ٣ = ١٢

لاحظ أن : عند تبديل الرقمين ١ ، ٢ مثلًا حصلنا على العددين (٢١) ، (١٢) لذلك يكون الترتيب هنا مهم ، وتسمى كلًّا منهما ترتيبة .

مما سبق عندما يكون ترتيب العناصر مهمًا دون تكرار نسمي هذا الاختيار تبديلًا ونرمز له بالرمز (ل) .

من النشاط السابق :

استطعنا مع خالد أن نحصل على ١٢ طريقة (تبديلة) لنكوّن العدد المطلوب عند اختيار عنصران مختلفان من ٤ عناصر دون تكرار ومراعاة الترتيب فيهما ويمكننا كتابة ذلك على **الصورة الرمزية** :

$$ل^{\boxed{٤}}_{\boxed{٢}} = ٤ \times ٣ = ١٢$$

عدد عناصر المجموعة

عدد العناصر التي تم اختيارها

أ ما هو عدد التبديلات الممكنة لاختيار ٣ عناصر من { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } لنكوّن بها أعدادًا من ثلاثة أرقام مختلفة ؟

عدد التبديلات = ٤ × ٣ × .... = ... تبديلة

$ل^{٤}_{٣}$ = ٤ × ٣ × ٢ = ...

منازل العدد	آحاد	عشرات	مئات
عدد طرق الاختيار	٤	٣	٢

ب ما هي عدد التبديلات الممكنة لاختيار ٤ عناصر من {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } لنكون بها أعدادًا من أربعة أرقام مختلفة ؟

عدد التبديلات = ٤ × ٣ × .... × .... = ... تبديلة = $ل^{٤}_{٤}$

- هل لاحظت نمطًا معينًا في عمليات الضرب السابقة ؟
- عملية الضرب على الصورة ٤ × ٣ × ٢ × ١ (العوامل تتناقص بمقدار ١ ، وتنتهي بالعدد ١) يمكن كتابتها على الصور (**٤!**) وتقرأ (**مضروب ٤**) .

مضروب العدد : اختيار (ن) عنصر من بين (ن) عنصر مختلف وبدون تكرار أي عنصر منها ، حيث ترتيب العناصر مهم سنرمز له بالرمز **ن!** ويكتب على الصورة :

$$ن! = ن(ن-١)(ن-٢) \ldots \times ٢ \times ١ = ل^{ن}_{ن} ، ن \in ص_{+}$$

أيضًا يمكننا كتابة $ل^{٤}_{٢}$ على الصورة : $ل^{٤}_{٢} = \frac{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٢ \times ١} = \frac{٤!}{٢!}$

فمثلًا : $ل^{٥}_{٢} = ٥ \times ٤ = \frac{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٣ \times ٢ \times ١} = \frac{٥!}{٣!} = \frac{٥!}{(٥-٢)!} = ٢٠$

التبديلة

في صورة مفكوك

في صورة مضروب

قيمة التبديلة

التباديل : عند اختيار (م) عنصر من بين (ن) عنصر مختلف (م ≥ ن) ومن دون تكرار أي عنصر منها ، حيث ترتيب العناصر مهم سنرمز له برمز **التبديلة** ($^{ن}ل_{م}$) ويكتب على الصورة :

(١) $^{ن}ل_{م}$ = ن (ن – ١) (ن – ٢) ... إلى م من العوامل.

(٢) $^{ن}ل_{م} = \frac{ن\,!}{(ن - م)\,!}$ ، ن ، م ∈ $ص_{+}$

تدرّب (٢) :

أوجد كل من :

أ) ٥ ! = ٥ × ٤ × ...... × ...... × ...... = ...

ب) ٤ ! = ... × ...... × ...... × ...... = ...

جـ) ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ... !

د) $^{٥}ل_{٣}$ = ٥ × ...... × ...... = ...

هـ) $^{٩}ل_{٢}$ = ... × ...... = ...

و) ٨ × ٧ × ٦ × ٥ = $^{....}ل_{....}$

ز) (١٠ – ٧) ! = ...

تدرّب (٣) :

تستخدم إحدى المدن لوحات ترخيص الدرجات والتي تحتوي على عدد مكوّن من ٣ أرقام مختلفة للوحة ، (وباستخدام الأرقام من ١ إلى ٩) يريد المدير المسؤول عن تنظيم الدراجات أن يعرف عدد لوحات التراخيص التي يمكن إصدارها .

الحل : عدد طرق اختيار الرقم الأول (الآحاد) = ٩ طرق

عدد طرق اختيار الرقم الثاني (العشرات) = ... طرق

عدد طرق اختيار الرقم الثالث (المئات) = ... طرق

منازل العدد	آحاد	عشرات	مئات
عدد طرق الاختيار	٩	......	......

∴ **عدد لوحات التراخيص** = ٩ × .... × .... = ...

حل آخر : ∵ ترتيب العناصر مهم ، وبدون تكرار فإن :

عدد لوحات التراخيص = $^{......}ل_{......}$ = ...

مثال :

في تدرّب (٣) ، إذا سمح المدير المسؤول بتكرار الرقم ، فكم عدد لوحات التراخيص التي يمكن إصدارها ؟

الحل : ∵ ترتيب العناصر مهم ، ومسموح بالتكرار فإن :

عدد لوحات التراخيص = ٩ × ٩ × ٩ = ٧٢٩ لوحة

فكِّر وناقِش

عرض المعلم المثال التالي : كم عددًا مكوّنًا من أربعة أرقام يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ في حالة السماح بتكرار الأرقام .

وليد يرى أنّ حل المثال هو : عدد الطرق الممكنة = ٤ × ٤ × ٤ × ٤ = ٢٥٦ طريقة

جاسم يرى أنّ حل المثال هو : عدد الطرق الممكنة = ٤ × ٤ × ٤ × ٣ = ١٩٢ طريقة

فأيهما إجابته صحيحة ؟ فسِّر ذلك .

لاحظ أنَّ :

(١) ٠! = ١

(٢) ١! = ١

(٣) ن! = ن × (ن − ١)! ، حيث ن ∈ $ص_+$

فمثلًا : ٥! = ٥ × ٤!

= ٥ × ٤ × ٣!

= ٥ × ٤ × ٣ × ٢! وهكذا ...

تدرّب (٤) :

اختير ٥ طلاب للجنة الرياضية بفصلك ، على أن يتم اختيار رئيس ونائب رئيس ومقرر لهذه اللجنة من الطلاب الخمس ، فبكم طريقة يتم اختيار المرشحون للمناصب الثلاث ؟

عدد طرق اختيار المرشحون للمناصب الثلاث = ...

....

(٣) التوافيق

نشاط (٣) :

معلومات مفيدة :
يختار المدربون التوافيق عندما يبدأون في تشكيل فريق .

أراد معلم الرياضة البدنية في مدرستك أن يستعين بك لتصمم معه جدول مباريات لفرق كرة القدم من فصول الصف الثامن من مجموعة الفرق { ٲ ، ب ، ج ، د } من دور واحد . **فهل تستطيع أن تساعده في إكمال مخطط الشجرة التالي لتصميم جدول المباريات ؟**

الفريق الأول	الفريق الثاني	المباريات الممكنة
ٲ	ب	ٲ ، ب
	ج	ٲ ، ج
	د	ٲ ، د
ب	ٲ	ب ، ٲ
	ج	ب ، ج
	....	.... ، ....
ج	ٲ	ج ، ٲ
	....	.... ، ....
	....	.... ، ....
د	....	.... ، ....
	....	.... ، ....
	....	.... ، ....

أكمل ما يلي :

١ هل المباراة بين الفريقين ٲ ، ب هي نفسها المباراة بين الفريقين ب ، ٲ ؟ ....

٢ هل الترتيب مهم لإيجاد عدد المباريات ؟ .... ولماذا ؟ ....

٣ عدد المباريات الممكنة = ... مباريات

مما سبق عندما يكون ترتيب العناصر غير مهم نسمي هذا الاختيار توافيق ونرمز له بالرمز (ق) .

- **في النشاط السابق** ، إن اختيار فريقين من أربعة فرق لا يحتاج إلى ترتيب ، أي أن ترتيب فريقين نعتبره اختيارا واحدًا .

لذلك نقسم عدد التباديل $^{٤}ل_{٢}$ على (٢ !) التي تمثل عدد المجموعات الثنائية المكررة أي أن :

$$^{٤}ق_{٢} = \frac{^{٤}ل_{٢}}{٢\,!} = \frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١} = ٦$$

عدد عناصر المجموعة

عدد عناصر المجموعة الجزئية

التوافيق : عند اختيار (م) عنصر من بين (ن) عنصر مختلف (م ≤ ن) حيث ترتيب العناصر غير مهم سنرمز له برمز **التوفيقة** ($^{ن}ق_{م}$) وتكتب على الصورة :

$$^{ن}ق_{م} = \frac{^{ن}ل_{م}}{م\,!} \quad ، \text{ حيث } \quad ن ، م \in ص_{+}$$

إذا كان $^{ن}ل_{م} = \frac{ن\,!}{(ن - م)\,!}$ ، فإن $^{ن}ق_{م} = \frac{ن\,!}{م\,! \times (ن - م)\,!}$

تكتب التوافيق بصورة أخرى : $^{ن}ق_{م} = \binom{ن}{م}$ وتقرأ ن فوق م .

ملاحظة :

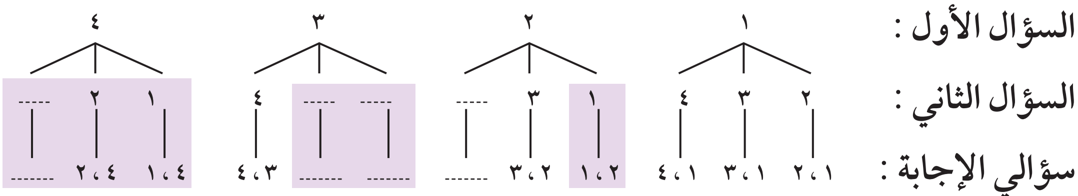
عندما تتحقق من إجابتك عن مسألة ما تتضمن توافيق ، تأكد من إلغاء الإمكانيات التي هي عبارة عن تكرار لبعضها بعضًا .

تدرّب (٥) :

في إحدى الاختبارات مطلوب الإجابة على سؤالين فقط من أربعة أسئلة متاحة ، فبكم طريقة يمكنك أن تختار سؤالين للإجابة ؟

نفرض أن أرقام الأسئلة هي ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ فتكون طرق اختيار سؤالي الإجابة هي :
(نلاحظ أن اختيار السؤالين لا يهم فيهما الترتيب)

- **الطريقة الأولى :** (طريقة مخطط الشجرة)



∴ عدد طرق اختيار سؤالي الإجابة = ... طرق

- **الطريقة الثانية : (طريقة المجموعات)**
- المجموعات التي تتضمن اختيار السؤال الأول هي : { ١ ، ٢ } ، { ١ ، ٣ } ، { ١ ، .... }
- المجموعات التي تتضمن اختيار السؤال الثاني (ما عدا السؤال الأول) هي : { ٢ ، ٣ } ، { ٢ ، .... }
- المجموعات التي تتضمن اختيار السؤال الثالث (ما عدا السؤالين الأول والثاني) هي : { .... ، .... }

∴ عدد طرق اختيار سؤالي الإجابة = ... طرق

- **الطريقة الثالثة : (بقانون التوافيق)**

$$^{٤}ق_{٢} = \frac{^{٤}ل_{٢}}{٢!} = \frac{\cancel{٤}^{٢} \times ......}{\cancel{٢}_{١} \times ......} = ... \quad \text{أو} \quad \binom{٤}{٢} = \frac{٤!}{٢! \times (٤ - ......)!} = \frac{٤!}{٢! \times ......!}$$

$$= \frac{٤ \times ٣ \times \cancel{٢!}}{\cancel{٢!} \times ......!} = \frac{٤ \times ٣}{...... \times ......} = ٦$$

تدرّب (٦) :

تقدم إحدى المطاعم أنواع من الفطائر حسب الطلب ، مما يلزم وضع خمسة أنواع من منكهات الطعام وهي (فلفل ، بصل ، طماطم ، تونة ، زيتون) . ما عدد الطرائق المختلفة :

أ لاختيار اثنان من منكهات الطعام ؟ ....

....

ب لاختيار ثلاثة من منكهات الطعام ؟ ....

....

جـ لاختيار خمسة من منكهات الطعام ؟ ....

....

د لعدم اختيار أي نوع من منكهات الطعام ؟ ....

....

فكّر وناقِش

في تدرّب (٦) ، ماذا تلاحظ في إجابتك على كل من (أ) ، (ب) وأيضًا إجابتك على كل من (جـ) ، (د) ؟

تمــرَّنْ :

١ اِستخدم مبدأ العد لإيجاد عدد النواتج في كل حالة :

أ ما عدد طرائق الاختيار لطلاء : من نوعين من الطلاء ، ٥ ألوان ؟

....

....

ب ما عدد طرائق الاختيار لدراجة : من ٥ ألوان ، ٣ أحجام ، ٤ موديلات ؟

....

....

٢ أوجد كل مما يلي :

أ ٦ ! = ...

ب (٨ – ٤) ! = ...

جـ ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = $ل^{.......}_{.......}$ = ... !

د $^{٨}ل_{٣}$ = ...

هـ ٠ ! = ...

و ٢ ! × ٣ ! = ...

ز ٤ × ٣ ! = ...

٣ كم عددًا مكوّنًا من أربعة أرقام يمكن تكوينه من ١ إلى ٥ إذا كان :

أ يمكن تكرار الأرقام . ...

ب لا يمكن تكرار الأرقام . ...

---

٤ في مزرعة أرانب يلزم وضع ٦ أرانب في ٦ أقفاص . بكم طريقة يمكن عمل ذلك بحيث يكون أرنب واحد في كل قفص؟

....

....

....

---

٥ كم عدد الطرائق التي يمكن أن يتم بواسطتها اختيار طالبين مع مراعاة الترتيب أو أن يكون واحدًا تلو الآخر من ٨ طلاب؟

....

....

....

---

٦ أوجد قيمة كلٍّ من :

أ $^{٨}ق_{٨}$ = ...	ب $\binom{٧}{٠}$ = ...
جـ $^{٨}ق_{٥}$ = ...	د $^{٧}ق_{١}$ = ...

هـ $^{٤}ق_{٠} + {}^{٤}ق_{١} + {}^{٤}ق_{٢} + {}^{٤}ق_{٣} + {}^{٤}ق_{٤}$ = ...

....

....

....

٧ ذهبت مع أصدقائك إلى مطعم صيني يقدم ٦ أطباق . فبكم طريقة يمكنك اختيار ٣ من هذه الأطباق للمشاركة مع أصدقائك؟

٨ في لعبة الكراسي الموسيقية يقوم جاسم وخالد ومحمد بالجري للجلوس على مقعدين ، أوجد عدد الطرائق المختلفة للجلوس على المقعدين .

٩ ما هي عدد الطرائق المختلفة لقراءة كتابين من ٥ كتب خلال إجازة نهاية الأسبوع ؟

٢-١٢ فضاء العينة
Sample Space

العبارات والمفردات :
فضاء العينة
Sample Space

سوف تتعلّم : إيجاد فضاء العينة .

نشاط (١) :

يمكن لرواد أحد المطاعم اختيار وجبة طعام تتكون من طبق رئيسي ومقبلات وحلوى من بين عدة خيارات موضحة في قائمة الطعام المقابلة .

أجب عن الأسئلة التالية من خلال قائمة الطعام الموضحة أمامك :

١ ما عدد خيارات المقبلات ؟ ....

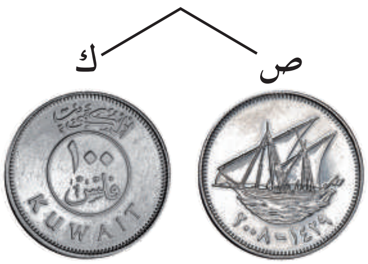
٢ ما عدد خيارات الطبق الرئيسي ؟ ....

٣ ما عدد خيارات الحلوى ؟ ....

٤ ما عدد الوجبات الممكنة التي يُقدمها المطعم ؟ ....

إنَّ مجموعة كل النواتج الممكنة عند إجراء تجربة عشوائية تسمى **فضاء العينة (ف)** .

مثلًا : عند إلقاء قطعة نقود مرة واحدة فإنَّ :
كل النواتج الممكنة هي ظهور صورة (ص)
أو ظهور كتابة (ك) ويكون فضاء العينة هو { ص ، ك } ،
وعدد النواتج يساوي ٢ .



تدرّب (١) :

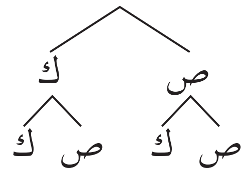
اكتب فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين وحدد عدد النواتج .

أ أكمل الجدول لتبين كل النواتج الممكنة :

الرمية الأولى / الرمية الثانية	ص	ك
ص	ص ، ص	...... ، ......
ك	...... ،	ك ، ك

ب فضاء العينة (ف) = { (ص ، ص) ، (ص ، ....) ،
(ك ، ....) ، (........... ، ....) } .

جـ عدد النواتج = ٢ × .... = ...

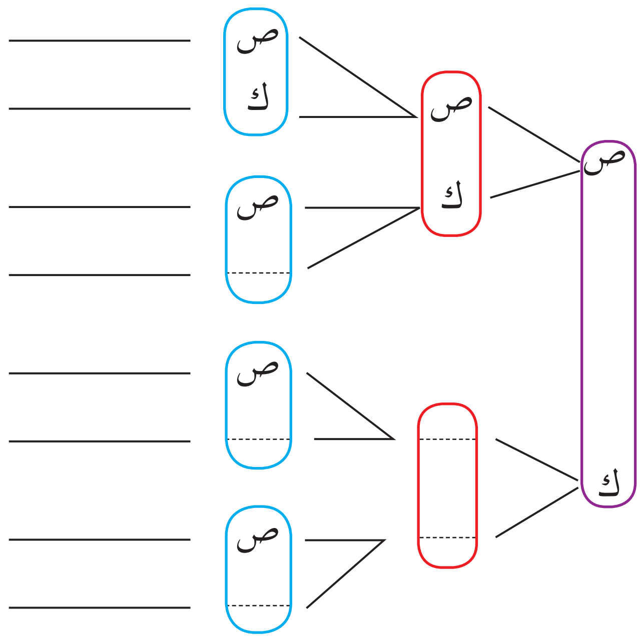


تدرّب (٢) :

اكتب فضاء العينة لتجربة رمي ثلاث قطع نقود متمايزة مرة واحدة وحدد عدد النواتج .

أ أكمل مخطط الشجرة لتبين كل النواتج الممكنة :

الرمية(١) الرمية(٢) الرمية(٣)



(ص ، ص ، ص)
(ص ، ص ، ك)
(ص ، .... ، ....)
(........... ، ك ، ....)
(........... ، .... ، ....)
(........... ، .... ، ....)
(........... ، .... ، ....)
(........... ، .... ، ....)

ب فضاء العينة = { (ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ، ص ....
ك ....
....

جـ عدد النواتج ....

د عدد الاختيارات باستخدام مبدأ العد = ٢ × ٢ × ٢ = $(٢)^{٣}$ = ...

تذكَّرْ أنّ :
متمايز تعني مختلفة من حيث اللون والشكل والحجم .

ملاحظة :
ناتج التجربة (ﺃ ، ب) يسمى زوج مرتب ، (ﺃ ، ب ، جـ) يسمى ثلاثي مرتب .

فكِّر وناقِش

هل عدد النواتج الممكنة لرمي قطعة نقود أربع مرات متتالية يساوي عدد النواتج الممكنة لرمي أربع قطع نقود متمايزة مرة واحدة ؟ وضح ذلك .

تدرّب (٣) :

يمكنك أن تختار شطيرة من بين ثلاثة أنواع من الشطائر (دجاج ، لحم ، سمك) للغداء ، وعصيرًا من بين ثلاثة أنواع من العصير (برتقال ، مانجو ، فراولة) .

اكتب فضاء العينة ، ثم أوجد عدد الطرائق الممكنة التي يمكن أن تحصل عليها .

ف = ...

....

....

تذكَّرْ أنّ :

– الحدث المؤكد : هو الحدث الذي يقع دائمًا عند إجراء التجربة العشوائية .

– الحدث المستحيل : هو الحدث الذي لا يقع أبدًا عند إجراء التجربة العشوائية .

– الحدث البسيط : هو الحدث الذي يتكون من ناتج واحد فقط من نواتج تجربة الاحتمال .

– الحدث المركب : هو الحدث الذي يتكون من ناتج أو أكثر من نواتج تجربة الاحتمال .

الحدث (الحادثة) هو : مجموعة جزئية من فضاء العينة (ف) .

تدرّب (٤) :

صندوق فيه ثلاث كرات ألوانها هي : الأحمر (ح) ، البرتقالي (ب) ، الأزرق (ز) .
إذا سحبت من الصندوق كرة عشوائيًّا ثم أعدتها ، وسحبت كرة مرة أخرى عشوائيًّا .

١ أكمل لكتابة فضاء العينة (ف) .

الكرة	ح	ب	ز
ح	(ح ، ح)	(...... ، ......)	(...... ، ......)
ب	(...... ، ......)	(...... ، ......)	(ب ، ز)
ز	(...... ، ......)	(...... ، ......)	(...... ، ......)

٢ أي الأحداث التالية (مؤكد – مستحيل – بسيط – مركب) ؟

أ سحبت كرتين الأولى حمراء والأخرى برتقالية اللون . ...

ب سحبت كرة حمراء اللون وكرة حمراء . ...

جـ سحبت كرة برتقالية اللون وكرة صفراء . ...

د سحبت كرتين من اللون نفسه . ...

هـ سحبت كرة حمراء اللون وكرة سوداء اللون . ...

تمـــرَّنْ :

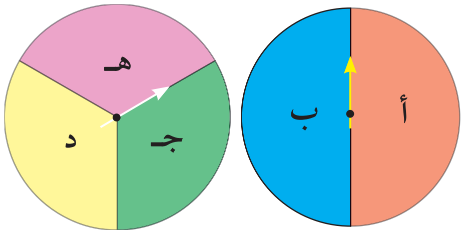
١ اكتب فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد ثم إلقاء قطعة نقود .

....

....

....

٢ تم تدوير الدوارتين المقابلتين معًا . اكتب فضاء العينة وحدد عدد النواتج الممكنة .

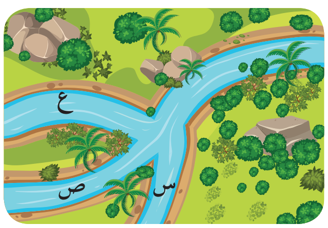


----

٣ اختار جاسم الأرقام التالية : ١ ، ٢ ، ٣
ارسم مخطّط الشجرة البيانية لتبين كل الأعداد المؤلفة من رقمين مختلفين التي تختارها من بين هذه الأرقام .

----

٤ يريد أحمد أن يقوم برحلة عبر النهر .
يوجد نوعان من المراكب (أ) ، (ب) كما في الصورة ليختار بينهما ويختار من بين ثلاثة جداول مائية صغيرة في ثلاثة اتّجاهات مختلفة : س أو ص أو ع .



أ اصنع مخطط الشجرة البيانية لكل النواتج الممكنة .

ب ما فضاء العينة لرحلة أحمد ؟

جـ أوجد عدد النواتج الممكنة .

١٢-٣ الاحتمال
Probability

سوف تتعلّم : احتمال وقوع الحدث - الاحتمال الهندسي .

معلومات مفيدة :

يستخدم علماء الجيولوجيا (علم طبقات الأرض) الاحتمال لوصف إمكانية حدوث زلزال بالخطأ خلال عدد معين من السنوات.

نشاط :

أراد مبارك أن يدخل في لعبة ويجرب حظه فيها ، فاختار حجر نرد ورماه وحدّد ظهور عدد زوجي لدخوله اللعبة .

ساعد مبارك لمعرفة هل يدخل إلى هذه اللعبة أم لا بإكمال ما يلي :

أ عناصر فضاء العينة = ... ، عددها ....

ب عناصر الحدث ظهور «عدد زوجي » = ... ، عددها ....

جـ نسبة عدد عناصر الحدث « ظهور عدد زوجي » إلى عدد عناصر فضاء العينة = ...

د النسبة المئوية لدخوله إلى اللعبة المختارة = ... × ١٠٠٪ = ...

إنَّ احتمال وقوع حدث ما يقارن عدد الطرائق التي يمكن أن يقع فيها هذا الحدث بعدد النواتج الممكنة بحيث يعبر عن الاحتمال بكسر اعتيادي كالتالي :

احتمال وقوع (حدث ٥) = $\frac{\text{عدد عناصر الحدث ٥}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة ف}}$ ⟸ ل (٥) = $\frac{\text{عدد عناصر ٥}}{\text{عدد عناصر ف}}$

يرمز لاحتمال وقوع (حدث) بالرمز ل (حدث) .

لاحظ أنَّ :

(١) احتمال فضاء العينة (الحدث المؤكد) = ١ أي أنّ ل (ف) = ١

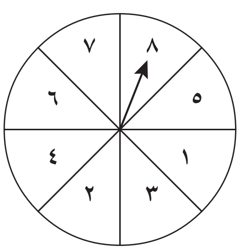
(٢) احتمال الحدث المستحيل = صفر أي أنّ ل ($\emptyset$) = ٠

تذكَّر أنّ :

- عند تحويل كسر اعتيادي إلى كسر عشري ، اقسم البسط على المقام .
- الحدث (الحادثة) هو مجموعة جزئية من فضاء العينة .
- يمكن التعبير عن الاحتمال أيضًا في صورة نسبة مئوية أو كسر عشري أو نسبة .

تدرّب (١) :

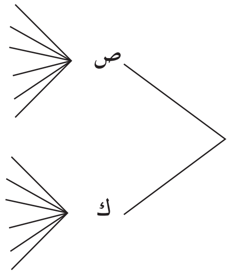
يلعب حسن وعلي لعبة القرص الدوار المبين بالشكل بحيث يربح حسن الجائزة إذا وقف المؤشر على عدد فردي ، ويربح علي الجائزة إذا وقف المؤشر على عدد زوجي من برأيك فرصته أكبر للفوز ؟ فسّر إجابتك.



تدرّب (٢) :

إذا تم رمي قطعة نقود معدنية وحجر نرد معًا مرة واحدة .

أ أكمل مخطط الشجرة واكتب فضاء العينة .



ف = ...

....

....

ب نفرض أن ج حدث ظهور صورة وعدد زوجي .

ج ={ (............ ، ....) ، (............ ، ....) ، (............ ، ....) }

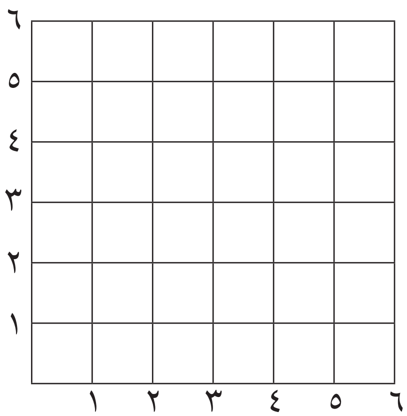
عدد عناصر ج = ... ، عدد عناصر ف = ... ،

∴ احتمال ظهور صورة و عدد زوجي = $\frac{\text{عدد عناصر ج}}{\text{عدد عناصر ف}}$ = ...

تدرّب (٣) :

في تجربة إلقاء حجري نرد متمايزين ،

مستعينًا بالشبكة المقابلة احسب الاحتمالات التالية :



أ ل (مجموع العددين الظاهرين أصغر من ٥) ؟

نفرض أنَّ ﺃ حدث «مجموع العددين الظاهرين أصغر من ٥»

∴ ﺃ = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ١) }

عدد عناصر ﺃ = ... ، عدد عناصر ف = ...

∴ ل (ﺃ) = $\frac{\text{عدد عناصر ﺃ}}{\text{عدد عناصر ف}}$ = $\frac{..............}{..............}$ = $\frac{..............}{..............}$

ملاحظة :

القاء حجري نرد متمايزين هو نفسه القاء حجر نرد مرتين متتاليتين .

ب ل (ظهور العدد ٥ في الحجر الأول والعدد ٤ في الحجر الثاني)؟

نفرض أنَّ ب حدث «ظهور العدد ٥ في الحجر الأول وظهور ٤ في الحجر الثاني»

ب = ...

عدد عناصر ب = ... ، عدد عناصر ف = ...

∴ ل (ب) = $\frac{..............}{..............}$

جـ ل (مجموع العددين الظاهرين ٩ أو ١٢) ؟

....

د ل (مجموع العددين الظاهرين ١٣) ؟

....

تدرّب (٤) :

صندوق فيه ٩ كرات متماثلة تمامًا مرقمة من ١ إلى ٩ . سحبت كرة عشوائيًّا من الصندوق . أوجد احتمال كل من الأحداث التالية :

١ أ « ظهور عدد أصغر من ٤ » .

....

٢ ب « ظهور عدد فردي » .

....

٣ جـ « ظهور عدد أصغر من ٤ أو ظهور عدد فردي » .

....

....

تذكَّرْ أنّ :

- **التقاطع** بين س ، ص :
س تقاطع ص : هي مجموعة العناصر التي **تنتمي** إلى س **وتنتمي** إلى ص أي تنتمي إلى (المجموعتين معًا) .
- **الاتّحاد** بين س ، ص :
س إتحاد ص : هي مجموعة العناصر التي **تنتمي** إلى س أو ص .

تمــرَّنْ :

١ هناك ١٠ أزرار باللون الأحمر و ٤ باللون الأزرق و ٨ باللون الأبيض في حقيبة ، ما هي فرصة استخراج الزر الأزرق أو الأبيض؟

أ $\frac{٤}{٢٢}$	ب $\frac{٨}{٢٢}$	جـ $\frac{١٠}{٢٢}$	د $\frac{١٢}{٢٢}$

٢ اشتركت ٤ طالبات في مسابقة { شوق ، شمائل ، مريم ، شهد } وسيتم اختيار الترتيب بصورة عشوائية ، ما احتمال أن يتم اختيار طالبة يبدأ اسمها بحرف الـ شين ؟

أ ٪٢٥	ب ٪٥٠	جـ ٪٧٥	د ٪٩٠

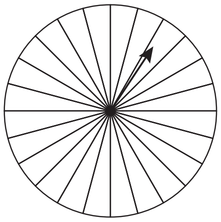
٣ يبين الشكل التالي مغزل دائري بـ ٢٤ قطاع دائري . إذا أدار أحد الأشخاص السهم فإنه من المحتمل أن يقف السهم عند أي قطاع من القطاعات المرسومة ، إذا كان :

أ $\frac{١}{٨}$ من القطاعات زرقاء

ب $\frac{١}{٢٤}$ منها بنفسجية

جـ $\frac{١}{٢}$ منها برتقالية

د $\frac{١}{٣}$ منها حمراء



وأدار شخص السهم ، فأي لون من القطاعات سيكون له أقل احتمالية بأن يقف عنده السهم ؟ ....

٤ **في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة ، وملاحظة العدد الظاهر على وجهه .**
أوجد احتمال كل من الأحداث التالية :

أ ظهور عدد زوجي ....

ب ظهور عدد أولي ....

جـ ظهور عدد أكبر من ٧ ....

د ظهور عدد أصغر من ٦ ....

---

٥ **ثلاث بطاقات مرقمة بالأرقام ١ ، ٤ ، ٧ في كيس ورقي ، سحبت بطاقة واحدة بطريقة عشوائية ثم أعيدت وسحبت بطاقة مرة أخرى .**

أ اكتب فضاء العينة .

....

....

ب اكتب حدث ظهور عدد أولي في السحبة الأولى وعدد زوجي في السحبة الثانية .

....

....

جـ احتمال حدث ظهور عدد أولي في السحبة الأولى وعدد زوجي في السحبة الثانية .

....

....

---

٦ **ألقى سامي حجر نرد منتظمًا رميتين متتاليتين ، أوجد احتمال ظهور العدد ٦ في الرمية الأولى والعدد ١ في الرمية الثانية .**

....

....

٧ في تجربة رمي قطعة نقود منتظمة مرتين متتاليتين .
أوجد احتمال كل من الأحداث التالية :

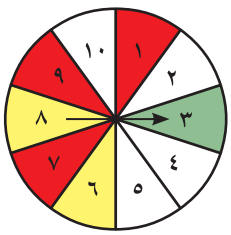
أ « ظهور صورة في الرمية الأولى » .

ب « ظهور كتابة في الرمية الثانية » .

جـ « ظهور صورة في الرمية الأولى أو ظهور كتابة في الرمية الثانية » .

----

٨ عند تدوير القرص المجاور مرة واحدة . أوجد احتمال وقوف المؤشر عند كل من :



أ العدد ١ أو عدد أصغر من ٨ .

ب قطاع أصفر أو قطاع أبيض .

جـ قطاع أحمر أو عدد زوجي .

د مضاعف للعدد ٢ أو عدد يقبل القسمة على ٤ .

هـ عدد أولي أو قطاع أصفر .

----

٩ يوجد في أحد معسكرات الشباب ٩ أشخاص من البحرين و ٨ أشخاص من الكويت ، ٧ أشخاص من السعودية . اختير من بينهم أحد الأشخاص عشوائيًّا . احسب احتمال أن يكون من السعودية أو من الكويت .

----

١٠ في كيس يوجد ٢٥ كرة بألوان مختلفة : أحمر ، أصفر ، أزرق ، وأخضر . معطى أن عدد الكرات الحمراء مساو لعدد الكرات الزرقاء . احتمال إخراج كرة حمراء هو ٠,٢٨ واحتمال إخراج كرة خضراء هو ٠,٣٢

أ أكمل الجدول :

احتمال إخراج كرة حمراء	٠,٢٨
احتمال إخراج كرة صفراء	------------------
احتمال إخراج كرة زرقاء	------------------
احتمال إخراج كرة خضراء	------------------

ب ما هو عدد الكرات الخضراء بالكيس؟

----

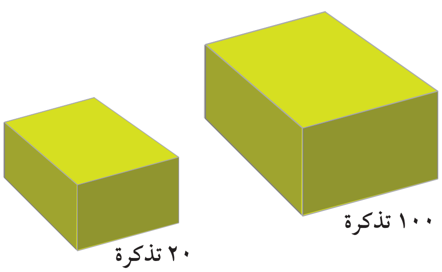
١١ تحتوي العلبة الأصغر على ٢٠ تذكرة مرقمة من ١ إلى ٢٠ . بينما تحتوي العلبة الأكبر على ١٠٠ تذكرة مرقمة من ١ إلى ١٠٠ ، بدون النظر إلى التذاكر يمكنك سحب تذكرة واحدة من كل علبة . أي علبة يكثر فيها احتمال سحبك لتذكرة عليها الرقم ١٧ ؟

أ العلبة ذات التذاكر الـ ٢٠ .

ب العلبة ذات الـ ١٠٠ تذكرة .

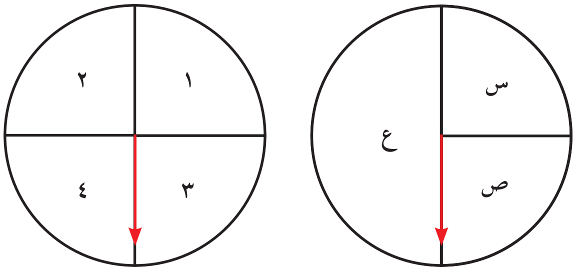
جـ العلبتان لهما نفس الاحتمال .

د من المستحيل معرفة ذلك .



١٢-٤ مراجعة الوحدة الثانية عشرة
Revision Unit Twelve

١ ارسم مخطط الشجرة البيانية لتوضيح النواتج الممكنة لتدوير اللوحتين الدوارتين :

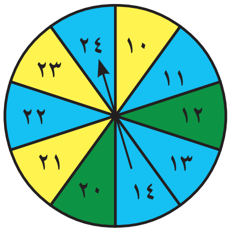


٢ اتخذ خالد ٤ أرقام سرية لفتح الحاسوب. إذا كان اختياره لأرقام مختلفة من ١ إلى ٦ ، فأوجد عدد الطرائق المختلفة في اختيار ذلك الرقم السري .

٣ تألفت لجنة من ٤ طلاب في الصف الثامن البالغ عدده ٢٨ طالبًا. بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من ٤ طلاب مؤلفة من : رئيس ، نائب رئيس ، أمين سر ، أمين صندوق ؟

٤ عشرة من المخبرين السريين طلب رئيسهم ارسال اثنين منهم للقبض على أحد المشتبه فيهم ، ما عدد الطرائق المختلفة لإرسال اثنين منهم لإنجاز هذه المهمة ؟

٥ عند تدوير القرص المجاور مرة واحدة .
أوجد :



أ احتمال الحصول على (العدد ١١ أو عدد أكبر من ٢١) .

....

ب احتمال الحصول على (قطاع أزرق أو عدد يقبل القسمة على ٢٣) .

....

جـ احتمال الحصول على (قطاع أصفر أو مضاعف للعدد ١١) .

....

د احتمال الحصول على (قطاع أخضر أو عامل من عوامل العدد ٧) .

....

٦ عند رمي حجر نرد مرة واحدة ، وسحب كرة عشوائيًا من الكيس المجاور الذي فيه كرات . أوجد احتمال كل من :

أ ل (الحصول على ١ و كرة حمراء) ....

ب ل (الحصول على ٣ و كرة بنفسجية) ....

٧ عدد ركاب باص ٣٦ راكبًا ، نسبة الأطفال إلى الكبار في الباص ٥ إلى ٤

أ ما هو عدد الأطفال في الباص ؟

....

....

ب إذا اخترنا بشكل عشوائي أحد الركاب في الباص . ما هو الاحتمال بأن يكون الراكب من الكبار ؟

....

....

اِختبار الوحدة الثانية عشرة

أوّلًا : في البنود (١-٤) ظلِّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

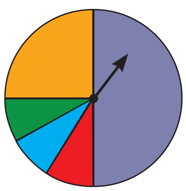
١ عند رمي حجري نرد متمايزين مرة واحدة . فإنَّ فضاء العينة يساوي ٦ .	أ	ب
٢ $^{٥}ل_{٢}$ = ١٠ .	أ	ب
٣ في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين فإنّ احتمال ظهور صورة واحدة على الأكثر يساوي $\frac{٣}{٤}$	أ	ب
٤ $^{٥}ق_{٢}$ = $^{٥}ق_{٣}$.	أ	ب

ثانيًا: لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة :

٥ في تجربة إلقاء حجري نرد متمايزين مرة واحدة ، فإنَّ احتمال الحصول على رقمين مجموعهما يساوي ٨ هو :

(أ) $\frac{٥}{٣٦}$ (ب) $\frac{٥}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) ١

٦ الدوارة هي لعبة محمد الجديدة ، من ٦٠٠ لفة كم مرة تقريبًا يجب أن يتوقع استقرار السهم على القطاع الأحمر ؟



(أ) ٣٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٥٠ (د) ٦٠

٧ في الصف الثامن ٣٠ طالب ، احتمال اختيار طالب عشوائيًا بحيث يكون عمره أقل من ١٣ سنة هو $\frac{١}{٥}$. ما عدد طلاب الصف الذين تقل أعمارهم عن ١٣ سنة ؟

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

٨ العدد ١٢٠ في صورة مضروب هو :

(أ) !٣ (ب) !٤ (جـ) !٥ (د) !٦

٩ يوجد ١٠ كرات زجاجية (بلي) في حقيبة : ٥ كرات حمراء و٥ كرات زرقاء .
قامت سلوى بسحب كرة من الحقيبة بشكل عشوائي لون الكرة المسحوبة أحمر ، ثم قامت سلوى بإعادة الكرة إلى الحقيبة مرة أخرى ، ما مدى احتمالية أن تكون الكرة المسحوبة في المرة القادمة بشكل عشوائي حمراء ؟

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{٤}{١٠}$ جـ) $\frac{١}{٥}$ د) $\frac{١}{١٠}$

---

١٠ ٥ × ٤ ! =

أ) ٢٠ !   ب) ٩ !   جـ) ٥ !   د) ٤٥ !

أسئلة تحدي : فكر معنا في الاحتمال

١ آلة تنتج ١٠٠ قطعة حلوى وتوزع الحلوى عند تشغيل الرافعة. ويوجد بالآلة نفس عدد الحلوى باللون الأزرق والوردي والأصفر والأخضر وجميعها مختلطة معًا .
قام مازن بتحريك الرافعة وحصل على حلوى وردية اللون ، وقام باسل بتشغيل الرافعة فيما بعد .
ما مدى احتمال حصول باسل على حلوى وردية اللون ؟

(أ) من المؤكّد أن تكون الحلوى وردية اللون .

(ب) من المرجّح أن يكون ذلك من نصيب مازن .

(جـ) تمامًا مثلما فعل مازن .

(د) يقل احتمال ذلك عما فعله مازن .

---

٢ تملك سناء حقيبة بداخلها ١٦ كرة ٨ منها حمراء و ٨ سوداء ، استخرجت سناء كرتين من الحقيبة ولم تعدهما إلى الحقيبة وكانت الكرتان من اللون الأسود . ثم استخرجت كرة ثالثة من الحقيبة . ما الذي يمكنك قوله بخصوص اللون المحتمل للكرة الثالثة ؟

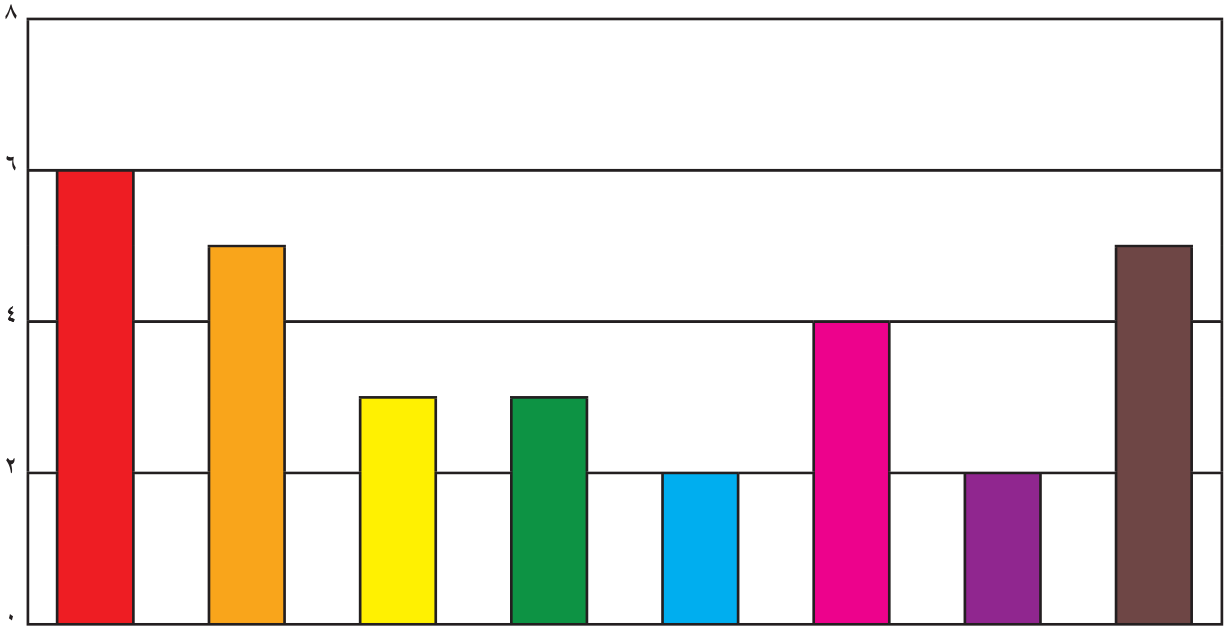
(أ) على الأرجح أن تكون حمراء لا سوداء .

(ب) على الأرجح أن تكون سوداء لا حمراء .

(جـ) قد تكون حمراء أو سوداء على حد سواء .

(د) من المستحيل معرفة أي من اللون الأحمر أو اللون الأسود أكثر احتمالًا .

٣ تسمح والدة فارس لابنها بأخذ قطعة حلوى واحدة من الكيس دون أن يسمح له بالاختيار ، يوضح الرسم البياني المرسوم عدد قطع الحلوى من كل لون في الكيس :



احتمال أن يأخذ فارس قطعة حلوى لونها أحمر هو :

أ ١٠ ٪ | ب ٢٠ ٪ | جـ ٢٥ ٪ | د ٥٠ ٪