إجابات أسئلة الدرس

القيم القصوى

١) جد القيم القصوى (العظمى والصغرى) المحلية (إن وجدت) لكل مما يأتي:

أ) ق (س) = س^{٣} − ٣س + ١

ب) ل (س) = ٤س^{٣} − ٦س^{٢} + ٢

جـ) هـ (س) = س^{٣} + ٤

د) ك (س) = س^{٣} − ٢س^{٢} − ٤س + ٨

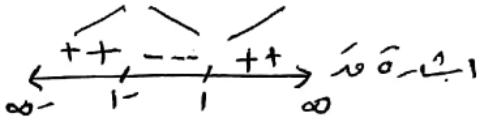
الحل

أ) $ق(س) = س^{٣} - ٣س + ١$

$ق'(س) = ٣س^{٢} - ٣$

$٣س^{٢} - ٣ = ٠$ ⇐ صفر $= \frac{٣}{٣} = \frac{٣ك}{٣}$

$س^{٢} = ١$ ⇐ $س = \pm ١$



عند س = −١ يتغير ق' من + إلى − فيكون ق عظمى محلية

$ق(-١) = (-١)^{٣} - ٣(-١) + ١ = ٣$

عند س = ١ يتغير ق' من − إلى + فيكون ق صغرى محلية

$ق(١) = ١^{٣} - ٣(١) + ١ = -١$

ب) $ل(س) = ٤س^{٣} - ٦س^{٢} + ٢$

$ل'(س) = ١٢س^{٢} - ١٢س$.

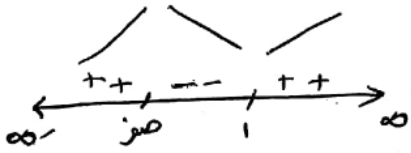
$١٢س^{٢} - ١٢س = صفر$

$١٢س(س - ١) = صفر$

$\frac{١٢س}{١٢} = \frac{صفر}{١٢} \Leftarrow$ **$س = صفر$**

$س - ١ = صفر \Leftarrow$ **$س = ١$**

إشارة $ل'$



عند $س = صفر$ يكون عظمى محلية هي $ل(٠) = ٢$

عند $س = ١$ يكون صغرى محلية هي

$ل(١) = ٤(١)^{٣} - ٦(١)^{٢} + ٢$

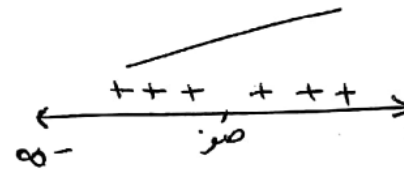
$= ٤ - ٦ + ٢ = -٢ + ٢ = صفر$.

جـ) $هـ(س) = س^{٣} + ٤$

$هـ'(س) = ٣س^{٢}$

$\frac{٣س^{٢}}{٣} = \frac{صفر}{٣} \Leftarrow س^{٢} = صفر \Leftarrow س = صفر$

إشارة $هـ'$



الاقتران $هـ(س)$ تزايد على $(-\infty, \infty)$ لا يوجد قيم قصوى

د) $ك(س) = س^{٣} - ٢س^{٢} - ٤س + ٨$.

$ك'(س) = ٣س^{٢} - ٤س - ٤$

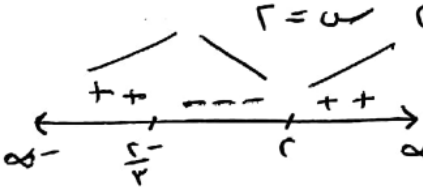
$٣س^{٢} - ٤س - ٤ = صفر$

$(٣س + ٢)(س - ٢) = صفر$

$س + ٢ = ٠ \Leftarrow \frac{٣س}{٣} = \frac{-٢}{٣} \Leftarrow س = \frac{-٢}{٣}$

$س - ٢ = صفر \Leftarrow س = ٢$

إشارة $ك'$



عند س = $-\frac{2}{3}$ فيه عظمى هي

$ق(-\frac{2}{3}) = (-\frac{2}{3})^3 - 6(-\frac{2}{3})^2 - 4(-\frac{2}{3}) + 8$

$= -\frac{8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{8}{3} + 8$

$= -\frac{8}{27} + \frac{24}{27} + \frac{72}{27} + \frac{216}{27} = \frac{304}{27}$

عند س = 2 فيه صغرى هي ق(2)

$ق(2) = 2^3 - 6\times2^2 + 4\times2 + 8$

$= 8 - 24 + 8 + 8 = 0$ صغ

---

٢) جد القيم القصوى (العظمى والصغرى) المحلية (إن وجدت) لكل مما يأتي باستخدام اختبار المشتقة الثانية:

أ) $ق(س) = 8 - س^2$

ب) $ق(س) = س^2 + 4$

جـ) $ق(س) = 2س^3 - 6س$

الحل

أ) $ق(س) = 8 - س^2$

$ق'(س) = -2س$

$-2س = 0$ ⇐ س = صفر

$ق''(س) = -2$

$ق''(0) = -2 < 0$ صغ فيه عظمى محلية

عند س = 0 هي ق(0) = 8

ب) $ق(س) = س^2 + 4$

$ق'(س) = 2س$

$2س = 0$ ⇐ س = 0

$ق''(س) = 2$

$ق''(0) = 2 > 0$ فيه صغرى محلية عند س = 0 هي ق(0) = 4

جـ) $ه(س) = ٢س^{٣} - ٦س$.

$ه'(س) = ٦س^{٢} - ٦$

$٦س^{٢} - ٦ = ٠ \Leftarrow \frac{٦س^{٢}}{٦} = \frac{٦}{٦}$

$س^{٢} = ١ \Leftarrow س = \pm ١$

$ه''(س) = ١٢س$

$ه''(١) = ١٢ > ٠$ فيه صغرى هي $ه(١) = -٤$

$ه''(-١) = -١٢ < ٠$ فيه عظمى هي

$ه(-١) = ٤$

---

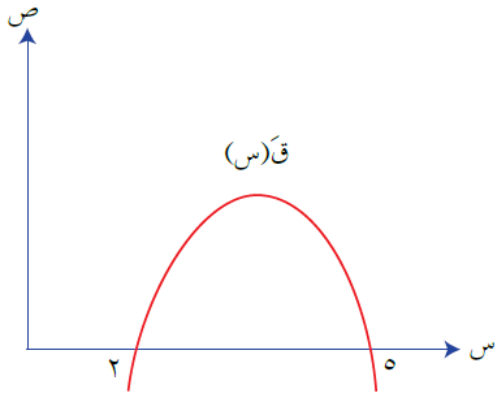
٣) اعتمادًا على الشكل (٣–١٢) الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق، حيث

$ق'(٢) = ق'(٥) =$ صفرًا ، جد كلًّا مما يأتي:

أ) قيم س الحرجة للاقتران ق.

ب) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق.

جـ) نقط القيم القصوى المحلية للاقتران ق مُحدِّدًا نوعها.



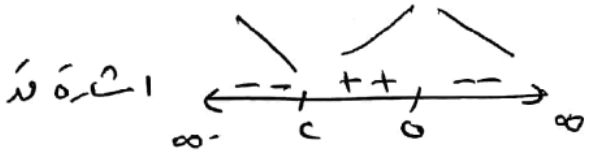
الشكل (٣–١٢).

الحل

أصفار المشتقة الأولى

أ) هي $\{٢ ، ٥\}$ وهي النقاط الحرجة

ب)



$(-\infty ، ٢]$ ، $[٥ ، \infty)$ تناقص .

$[٢ ، ٥]$ تزايد .

جـ) عند $س = ٢$ فيه صغرى هي $ه(٢)$

عند $س = ٥$ فيه عظمى هي $ه(٥)$.

٤) إذا كان للاقتران ق(س) = ٣س٢ – أس + ٤ قيمة حرجة عندما س = ٢، فجد قيمة الثابت أ.

الحل

ق(س) = ٣س٢ – أس + ٤

قيمة حرجة عند س = ٢ ⇐ ق′(٢) = صفر

ق′(س) = ٦س – أ

ق′(٢) = ٦×٢ – أ

صفر = ١٢ – أ

(١٢ –) = ١ – أ

أ = ١٢