المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

المركز الوطني لتطوير المناهج والتقويم
National Center for Curriculum Development and Evaluation

الرياضيات

الصف الحادي عشر - المسار الأكاديمي
الفصل الدراسي الأول
كتاب التمارين

11

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي   يوسف سليمان جرادات   أ.د محمد صبح صبابحة

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج والتقويم

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج والتقويم استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237   06-5376266   P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor   feedback@nccd.gov.jo   www.nccd.gov.jo

قـرّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطويـر المناهـج والتقويـم في جلسـته رقـم (2024/4)، تاريـخ 2024/6/6 م، وقـرار مجلـس التربيـة والتعليـم رقـم (2024/65) تاريـخ 2024/6/26 م بـدءًا مـن العـام الـدراسي 2024 / 2025 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development and Evaluation. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development and Evaluation. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 793 - 5

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2025/1/377)

بيانات الفهرسة الأولية للكتاب:

عنوان الكتاب	الرياضيات، كتاب التمارين: الصف الحادي عشر المسار الأكاديمي، الفصل الدراسي الأول.
إعداد/ هيئة	الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج
بيانات النشر	عمّان: المركز الوطني لتطوير المناهج، 2025
رقم التصنيف	373.19
الواصفات	/ تدريس الرياضيات/ / أساليب التدريس/ / المناهج/ / التعليم الثانوي/
الطبعة	الطبعة الثانية، مزيدة ومنقحة

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مُصنَّفه، ولا يعبّر هذا المُصنَّف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

التحكيم التربوي:
أ.د. خالد أبو اللوم

التصميم الجرافيكي:
راكان محمد السعدي

التحرير اللغوي:
نضال أحمد موسى
ميسرة عبد الحليم صويص

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الطبعة الأولى (التجريبية) 1445 هـ / 2024 م
الطبعة الثانية 1447 هـ / 2026 م

أعزاءنا الطلبة ...

يحتوي هذا الكتاب على تمارين مُتنوِّعة أُعِدَّت بعناية لتغنيكم عن استعمال مراجع إضافية، وهي تُعَدُّ استكمالًا للتمارين الواردة في كتاب الطالب، وتهدف إلى مساعدتكم على ترسيخ المفاهيم التي تتعلَّمونها في كل درس، وتُنمّي مهاراتكم الحسابية.

قد يختار المُعلِّم/ المُعلِّمة بعض تمارين هذا الكتاب واجبًا منزليًّا، ويترك لكم بعضها الآخر لكي تحلّوها عند الاستعداد للاختبارات الشهرية واختبارات نهاية الفصل الدراسي.

أمّا الصفحات التي تحمل عنوان (أستعد لدراسة الوحدة) في بداية كل وحدة، فإنَّها تساعدكم على مراجعة المفاهيم التي درستموها سابقًا؛ ما يُعزِّز قدرتكم على متابعة التعلُّم في الوحدة الجديدة بسلاسة ويسر.

قد لا يتوافر فراغ كافٍ إزاء كل تمرين لكتابة خطوات الحلِّ جميعها؛ لذا يُمكِن استعمال دفتر إضافي لكتابتها بوضوح.

متمنين لكم تعلُّمًا ممتعًا ومُيسَّرًا.

المركز الوطني لتطوير المناهج والتقويم

قائمة المحتويات

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

الوحدة 2 الاقترانات المثلثية

قائمة المحتويات

الوحدة 3 النهايات والمشتقّات

الوحدة 1: الاقترانات والمقادير الجبرية

أختبر معلوماتي بحلّ التدريبات أوّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

إيجاد قيمة اقتران عند قيمة معطاة (الدرس 1)

إذا كان $g(x) = 10 - x$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:

1. أجد $g(-5)$
2. أجد $g(3) + 6$
3. أجد قيمة x التي تجعل $g(x) = -35$

إذا كان $f(x) = 5x - 3$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

4. $f(0)$
5. $f(5)$
6. $25 - f(-2)$
7. $f(2) + f(-1)$

مثال: إذا كان $f(x) = 2x + 6$، فأجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:

a) أجد $f(3)$

الاقتران المعطى	$f(x) = 2x + 6$
بتعويض $x = 3$	$f(3) = 2(3) + 6$
بالتبسيط	$= 12$

b) أجد $f(-4) + 10$

بتعويض $x = -4$	$f(-4) + 10 = (2(-4) + 6) + 10$
بالتبسيط	$= -2 + 10$
بالتبسيط	$= 8$

c) أجد قيمة x التي تجعل $f(x) = -10$

الاقتران المعطى	$f(x) = 2x + 6$
بتعويض $f(x) = -10$	$-10 = 2x + 6$
بطرح 6 من طرفي المعادلة	$-16 = 2x$
بقسمة طرفي المعادلة على 2	$x = -8$

إذن، قيمة x التي تجعل $f(x) = -10$ هي -8

تمثيل الاقتران الخطّيّ بيانيًّا (الدرس 1)

أمثّل كلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

8) $f(x) = 4 - x$
9) $g(x) = x + 2$
10) $h(x) = 2x - 5$
11) $r(x) = -x$
12) $s(x) = 2(1 + x)$
13) $m(x) = 3$

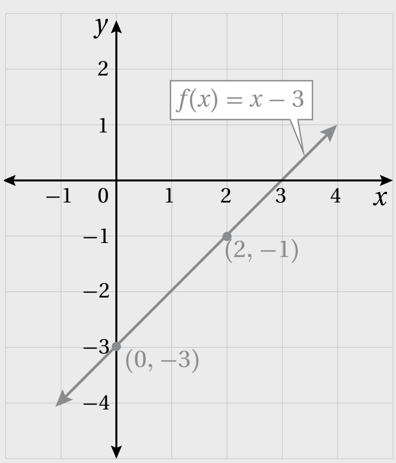
مثال: أمثّل الاقتران $f(x) = x - 3$ بيانيًّا.

الخطـوة 1 أختار بعض قِيَم المدخَلات x، ولتكنْ: 0, 2

الخطـوة 2 أُنشئ جدولًا لإيجاد قِيَم المخرَجات المقابلة لهذه المدخَلات.

x	$x - 3$	$f(x)$	$(x, f(x))$
2	$(2) - 3$	-1	$(2, -1)$
0	$(0) - 3$	-3	$(0, -3)$

الخطـوة 3 أمثّل الأزواج المُرتّبة في المستوى الإحداثي، وأصل بينها بخطّ مستقيم.



تمثيل كثير حدود معرّف على فترة بيانيًّا وتحديد مجاله ومداه (الدرس 1)

أمثّل كل اقتران مما يأتي بيانيًّا، وأحدّد مجاله ومداه:

14) $f(x) = x^2 - 3x - 4, -1 \leq x \leq 5$

15) $f(x) = -4x^2 + 8x + 3, 0 \leq x \leq 3$

16) $y = 2x^3 - 6x + 4, -2 \leq x \leq 3$

17) $y = 3x^2 - x^3 + 9x - 4, -3 \leq x \leq 4$

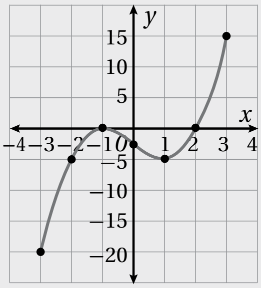
مثال: أمثّل كل اقتران مما يأتي بيانيًّا، وأحدّد مجاله ومداه:

a) $f(x) = x^3 - 3x - 2, -3 \leq x \leq 3$

الخطوة 1 أنشئ جدول قيم.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	-20	-4	0	-2	-4	0	16
(x, y)	$(-3, -20)$	$(-2, -4)$	$(-1,0)$	$(0, -2)$	$(1, -4)$	$(2, 0)$	$(3, 16)$

الخطوة 2 أعيّن النقاط التي تمثّل الأزواج (x, y) في المستوى الإحداثي، وأصل بينها بمنحنى متصل كما في الشكل المجاور.



مجال هذا الاقتران هو مجموعة قيم x الحقيقية، حيث: $-3 \leq x \leq 3$،

أو الفترة $[-3, 3]$، ومداه: $-20 \leq y \leq 16$، أو الفترة $[-20, 16]$.

b) $f(x) = x^2 - 4x, -1 \le x \le 4$

هـذا اقتـران تربيعي علـى الصـورة $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيـث $a = 1, b = -4, c = 0$، ومنحنى $f(x)$ قطع مكافئ يمكن تمثيله بيانيًّا كما يأتي:

- بما أنّ $a > 0$، فمنحنى القطع المكافئ مفتوح للأعلى، ويمثّل الرأس نقطته الصغرى.

- معادلة محور تماثل القطع المكافئ هي:

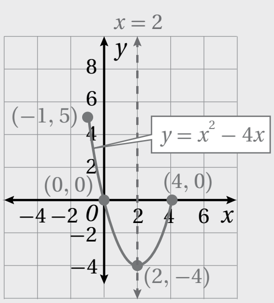
$$x = -\frac{b}{2a} = 2$$

- إحداثيا الرأس هما: $(2, -4)$

- نقطة تقاطع منحنى الاقتران مع المحور y هي: $(0, 0)$

- النقطة $(-1, 5)$ هي نقطة بداية منحنى الاقتران، وتقع في الجانب نفسـه الذي يقـع فيه المقطع y من محور التماثل (يسار محور التماثل)، أما النقطة $(4, 0)$ فهي نقطة نهاية منحنى الاقتران وتقع يمين محور التماثل.

- أمثّل الرأس والنقاط الثلاث في المسـتوى الإحداثي، وأصل بينها بمنحنى متصل كما في الشكل المجاور.

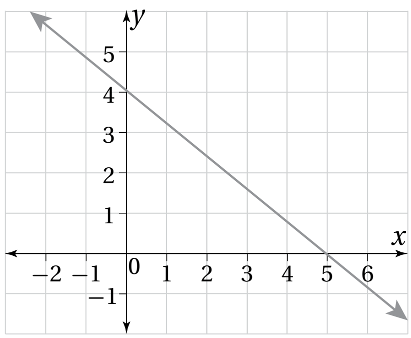


مجال هذا الاقتران هو مجموعة قيم x الحقيقية حيث: $-1 \le x \le 4$؛ أي الفترة $[-1, 4]$، ومداه: $-4 \le y \le 5$، أي الفترة $[-4, 5]$.

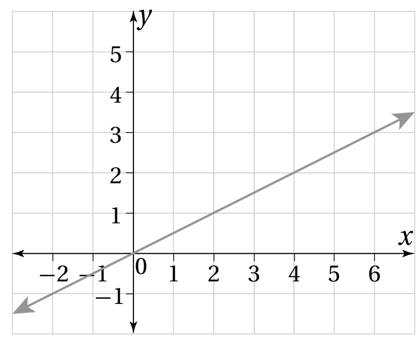
إيجاد معادلة مستقيم مُمثَّل بيانيًّا (الدرس 1)

أجد معادلة المستقيم المُمثَّل بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي بصيغة الميل والمقطع:

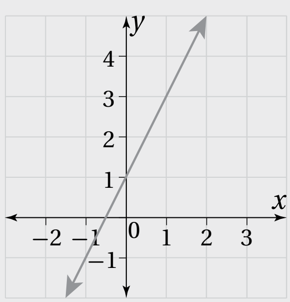
18



19



مثال: أجد معادلة المستقيم المُمثَّل بيانيًّا في الشكل المجاور بصيغة الميل والمقطع.



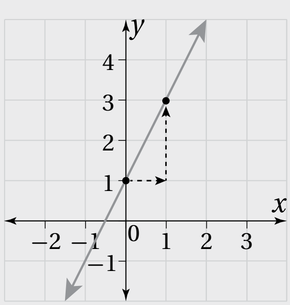
الخطـوة 1 أجد المقطع y.

أُلاحِظ أنَّ المستقيم قطع المحور y عند 1

إذن، المقطع y هو $b = 1$

الخطـوة 2 أجد الميل.

أختار نقطتين على المستقيم، ثم أجد مقدار التغيُّر الرأسي والتغيُّر الأفقي بينهما.



أُلاحِظ أنَّ:

عدد الخطوات الأفقية هو 1

عدد الخطوات الرأسية هو 2

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغيُّر الرأسي}}{\text{التغيُّر الأفقي}}$$

إذن، ميل المستقيم هو: $m = \frac{2}{1} = 2$

الخطـوة 3 أُعوِّض في صيغة الميل والمقطع.

أُعوِّض المقطع y والميل في صيغة الميل والمقطع:

صيغة الميل والمقطع	$y = mx + b$
بتعويض $m = 2$، و $b = 1$	$y = 2x + 1$

إذن، معادلة المستقيم هي: $y = 2x + 1$

مفهوم القيمة المطلَقة (الدرس 1)

أجد قيمة كلّ من المقادير الآتية:

22) $4 + |12|$

21) $|-32| - 10$

20) $|17|$

25) $|-9| - 2$

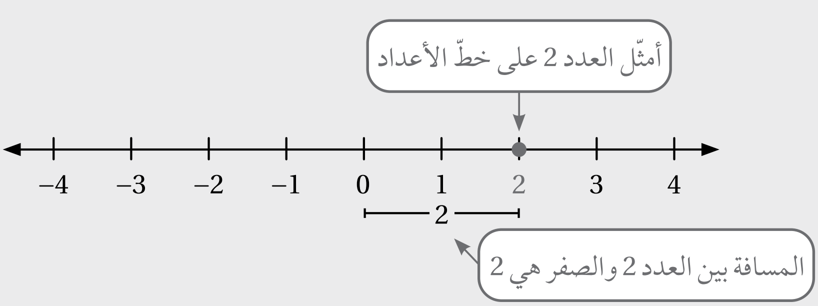
24) $|-8| + |-22|$

23) $3 + |-7|$

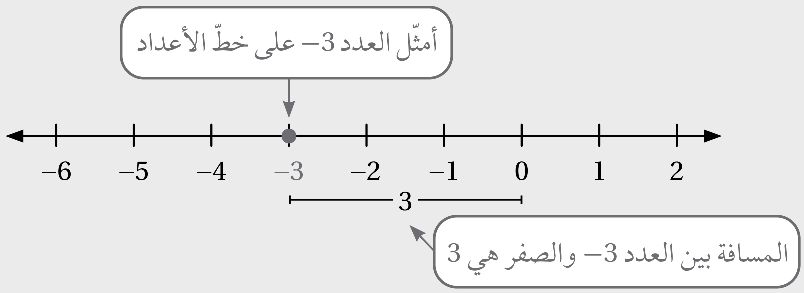
مثال: أجد القيمة المطلَقة لكلّ عدد ممّا يأتي:

a) العددُ 2

بما أنّ المسافة بَين العدد 2 والصفر هي 2، فإنّ $|2| = 2$.



b) العدد 3−



بما أنّ المسافة بين العدد 3−

والصفر هي 3، فإنّ $3 = |-3|$.

حلّ المعادلة الخطية بمتغّير واحد (الدرس 2)

أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

26) $x + 4 = -2$

27) $8 = y - 2$

28) $-4.5 + u = 6.5$

29) $4\,m = -24$

30) $\frac{n}{5} = -1$

31) $7.5 = \frac{h}{-2}$

32) $2(4x + 1) = 16$

33) $3 - 2b = -5\,(b + 2) - 1$

مثال: أحلّ المعادلة $2(3x + 4) = 4x + 17$

المعادلة الأصلية	$2(3x + 4) = 4x + 17$
خاصّيّة التوزيع	$6x + 8 = 4x + 17$
بطرح 8 من طرفَي المعادلة	$6x + 8 - 8 = 4x + 17 - 8$
بطرح $4x$ من طرفَي المعادلة	$6x - 4x = 4x - 4x + 9$
بقسمة طرفَي المعادلة على 2	$\frac{2x}{2} = \frac{9}{2}$
بالتبسيط	$x = 4.5$

حلّ متباينات خطّية بمتغيّر واحد، وتمثيل الحلّ على خطّ الأعداد (الدرس 2)

أحلّ كلّ متباينة ممّا يأتي، وأمثّل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد:

34) $x - 3 > 2$

35) $2 - x > -3$

36) $3x \geq 12$

37) $2x - 3 \leq 9$

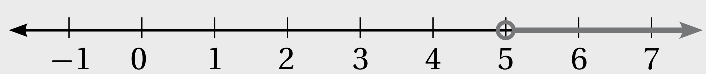
38) $6 - 4x < x - 14$

39) $2(x+5) - 9x \geq 45$

مثال: أحلّ المتباينة $2x + 3 > 13$، وأمثّل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد:

المتباينة الأصلية	$2x + 3 > 13$
بطرح 3 من الطرفين	$2x > 10$
بقسمة الطرفين على 2	$x > 5$

مجموعة الحلّ هي: $\{x \mid x > 5\}$ أو الفترة $(5, \infty)$. وتمثيلها على خطّ الأعداد كما يأتي:



أتذكّر

وُضِعت دائرة مفتوحة عند 5؛ لعدم وجود إشارة المساواة، أي إنّ 5 ليس من ضمن مجموعة الحلّ.

قسمة كثيرات الحدود (الدرس 3)

أجد ناتج القسمة والباقي في كلٍّ ممّا يأتي:

40) $(3x^3 - 6x^2 + 9x - 5) \div (x - 4)$

41) $(8x^4 + 6x^2 - 12x + 7) \div (2x + 5)$

مثال: أجد ناتج القسمة والباقي في ما يأتي: $(3x^3 + 9x - 5) \div (x^2 - 3x + 1)$.

$$
\begin{array}{r l}
 & 3x + 9 \\
x^2 - 3x + 1 \enclose{longdiv}{} & 3x^3 + 0x^2 + 9x - 5 \\
 & \underline{(-)\ 3x^3 - 9x^2 + 3x} \\
 & 9x^2 + 6x - 5 \\
 & \underline{(-)\ 9x^2 - 27x + 9} \\
 & 33x - 14
\end{array}
$$

بقسمة $3x^3$ على x^2، وكتابة الناتج $3x$ فوق المقسوم

بضرب $3x$ في المقسوم عليه

بالطرح، وتنزيل -5، وقسمة $9x^2$ على x^2، وكتابة 9 في الناتج

بضرب 9 في المقسوم عليه

بالطرح

إذن: الناتج $(3x + 9)$، والباقي $(33x - 14)$.

تحليل المقادير الجبرية (الدرس 3)

أحلّل كلًّا من المقادير الآتية تحليلًا كاملًا:

42) $4x + 12$

43) $3x^2 + 15x$

44) $x^2 - 25$

45) $x^3 + 4x^2 - 4x - 16$

46) $x^2 - 5x + 6$

47) $x^2 + 4x - 12$

48) $2x^2 - 15x - 8$

49) $3x^2 + 7x - 6$

مثال: أحلّل كلًّا من المقادير الآتية تحليلًا كاملًا:

a) $4x^2 - 6x$

المقدار المعطى	$4x^2 - 6x$
بإعادة كتابة كل حدّ باستعمال العامل المشترك الأكبر	$= 2x(2x) + 2x(-3)$
بإخراج العامل المشترك الأكبر خارج القوس	$= 2x(2x + (-3))$
بالتبسيط	$= 2x(2x - 3)$

ويمكن التحقق من صحة التحليل بضرب العاملين بعضهما ببعض باستعمال خاصية التوزيع.

b) $9x^2 - 16$

المقدار المعطى	$9x^2 - 16$
بكتابة المقدار على صورة $a^2 - b^2$	$= (3x)^2 - (4)^2$
بتطبيق قاعدة تحليل فرق المربعين	$= (3x + 4)(3x - 4)$

c) $x^3 + 6x^2 - 9x - 54$

المقدار المعطى	$x^3 + 6x^2 - 9x - 54$
بتجميع الحدود ذات العوامل المشتركة	$= (x^3 + 6x^2) + (-9x - 54)$
بتحليل كل تجميع بإخراج العامل المشترك الأكبر	$= x^2(x + 6) - 9(x + 6)$
بإخراج $(x + 6)$ عاملًا مشتركًا	$= (x + 6)(x^2 - 9)$
بتحليل $(x^2 - 9)$ كفرق بين مربعين	$= (x + 6)(x + 3)(x - 3)$

d) $\mathbf{x^2 + 6x - 16}$

بكتابة القاعدة	$x^2 + 6x - 16 = (x + m)(x + n)$
بتعويض $m = 8, n = -2$	$= (x + 8)(x - 2)$

أتذكّر

لتحليل ثلاثي حدود في صورة: $x^2 + bx + c$، حيث b، و c عددان صحيحان، أبحث عن عددين صحيحين m و n، مجموعهما يساوي b، وحاصل ضربهما يساوي c، ثمَّ أكتب x^2+bx+c في صورة: $(x+m)(x+n)$.

e) $\mathbf{2x^2 + 9x + 10}$

المقدار المعطى	$2x^2 + 9x + 10$
بكتابة $9x$ في صورة $(5x + 4x)$	$= 2x^2 + 5x + 4x + 10$
بتجميع الحدود ذات العوامل المشتركة	$= (2x^2 + 5x) + (4x + 10)$
بإخراج ع.م.أ. من كل تجميع	$= x(2x + 5) + 2(2x + 5)$
بإخراج $(2x + 5)$ عاملًا مشتركًا	$= (2x + 5)(x + 2)$

أتذكّر

لتحليل ثلاثي حدود في صورة: $ax^2 + bx + c$، حيث a، وb، وc أعداد صحيحة، أجد عددين صحيحين m و n، حاصل ضربهما يساوي (ac)، ومجموعهما يساوي b، ثمَّ أكتب $ax^2 + bx + c$ في صورة: $ax^2 + mx + nx + c$، ثمَّ أُحلِّل بتجميع الحدود.

حلّ المعادلات التربيعية (الدرس 3)

أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

52) $x^2 + 7x + 12 = 0$

51) $4x^2 = 25$

50) $3x^2 + 5x = 0$

55) $3x^2 + 6x - 24 = 0$

54) $x^2 + 7x - 18 = 0$

53) $x^2 - 5x - 14 = 0$

58) $6x^2 + 11x - 10 = 0$

57) $5x^2 - 9x = 2$

56) $2x^2 - 19x + 24 = 0$

مثال: أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

a) $6x^2 = 20x$

المعادلة المعطاة	$6x^2 = 20x$
بطرح $20x$ من طرفي المعادلة	$6x^2 - 20x = 0$
بإخراج العامل المشترك الأكبر	$2x(3x - 10) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$2x = 0 \quad \text{or} \quad 3x - 10 = 0$
بحلِّ كل معادلة	$x = 0 \qquad x = \frac{10}{3}$

إذن، الجذران هما: $0, \frac{10}{3}$

التحقُّق: أُعوِّض قيمتي x في المعادلة الأصلية.

b) $x^2 + 6x + 8 = 0$

المعادلة المعطاة	$x^2 + 6x + 8 = 0$
بالتحليل إلى العوامل	$(x + 4)(x + 2) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$x + 4 = 0 \quad \text{or} \quad x + 2 = 0$
بحلِّ كل معادلة	$x = -4 \qquad x = -2$

إذن، الجذران هما: $-4, -2$

التحقُّق: أُعوِّض قيمتي x في المعادلة الأصلية.

c) $30x^2 - 5x = 5$

أحُلُّ المعادلة:

المعادلة المعطاة	$30x^2 - 5x = 5$
بطرح 5 من طرفي المعادلة	$30x^2 - 5x - 5 = 0$
بقسمة طرفي المعادلة على 5	$6x^2 - x - 1 = 0$
بالتحليل إلى العوامل	$(3x + 1)(2x - 1) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$3x+1 = 0 \quad \text{or} \quad 2x-1 = 0$
بحلِّ كل معادلة	$x = -\frac{1}{3} \qquad x = \frac{1}{2}$

إذن، الجذران هما: $-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

التحقُّق: أُعوِّض قيمتي x في المعادلة الأصلية.

d) $x^2 - 6x + 4 = 0$

لا يمكـــن حل هذه المعادلة بالتحليل؛ لعدم وجود عددين صحيحيـــن مجموعهما (-6)، وحاصل ضربها 4، لذا سأحلّها باستخدام القانون العام. وبمقارنة هذه المعادلة مع الصورة العامة $ax^2 + bx + c = 0$، أجد أنّ:

$$a = 1, b = -6, c = 4$$

الخطـوة 1 أستعمل المُميِّز لتحديد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة.

صيغة المُميِّز	$\Delta = b^2 - 4ac$
بتعويض $a = 1, b = -6, c = 4$	$= (-6)^2 - 4(1)(4)$
بالتبسيط	$= 20$

بما أن $\Delta > 0$، إذن للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان.

الخطـوة 2 أطبّق القانون العام.

القانون العام	$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
بالتعويض	$= \dfrac{-(-6) \pm \sqrt{20}}{2 \times 1}$
بالتبسيط	$= \dfrac{6 \pm \sqrt{20}}{2}$
بتبسيط $\sqrt{20}$ إلى $\sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$	$= \dfrac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2}$
بقسمة كل حد في البسط على 2	$= 3 \pm \sqrt{5}$

إذن، للمعادلة جذران، هما: $x = 3 + \sqrt{5}$, $x = 3 - \sqrt{5}$

تبسيط المقادير النسبية (الدرس 4)

أُبسِّط المقادير الآتية:

59) $\frac{2}{x+1} + \frac{5}{x-3}$

60) $\frac{4}{x-3} - \frac{5}{x+2}$

61) $\frac{3x}{x-1} \times \frac{x+4}{6x}$

62) $\frac{x}{x+1} \div \frac{x+4}{2x+2}$

63) $\frac{x+4}{x^2-16}$

64) $\frac{x^2-4x-5}{x+1}$

مثال: أُبسِّط المقدارين الآتيين:

a) $\frac{2}{x+6} + \frac{3}{x-5}$

بتوحيد المقامات
$$\frac{2}{x+6} + \frac{3}{x-5} = \frac{2}{x+6}\left(\frac{x-5}{x-5}\right) + \frac{3}{x-5}\left(\frac{x+6}{x+6}\right)$$

بضرب البسطين، وضرب المقامين
$$= \frac{2(x-5)}{(x+6)(x-5)} + \frac{3(x+6)}{(x-5)(x+6)}$$

بجمع بسطي الكسرين
$$= \frac{2(x-5)+3(x+6)}{(x+6)(x-5)}$$

خاصية التوزيع
$$= \frac{2x-10+3x+18}{x^2-5x+6x-30}$$

بجمع الحدود المُتشابِهة
$$= \frac{5x+8}{x^2+x-30}$$

b) $\frac{5x+2}{6x} \div \frac{x+1}{2x}$

بتحويل القسمة إلى ضرب في مقلوب المقسوم عليه
$$\frac{5x+2}{6x} \div \frac{x+1}{2x} = \frac{5x+2}{6x} \times \frac{2x}{x+1}$$

بضرب البسطين، وضرب المقامين
$$= \frac{2x(5x+2)}{6x(x+1)}$$

بقسمة البسط والمقام على $2x$
$$= \frac{5x+2}{3(x+1)}$$

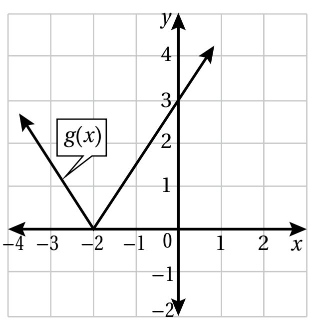
الاقترانات المتشعّبة
Piecewise Functions

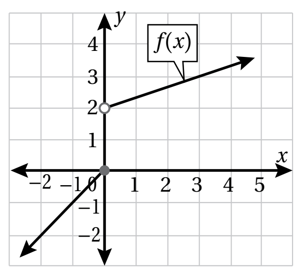
أُعيد تعريف كُلّ من الاقترانات الآتية:

1. $f(x) = |5x - 4|$

2. $f(x) = |3 - 2x| - 6$

أكتبُ قاعدة الاقتران المعطى تمثيله البياني، في كُلّ ممّا يأتي:

3. 

4. 

أُمثّل كُلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا، وأُحدّد مجاله ومداه:

5. $f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & , x < 3 \\ x + 3 & , x \geq 3 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3 & , x < 1 \\ 5 & , 1 \leq x < 4 \\ x + 2 & , x \geq 4 \end{cases}$

7. $f(x) = 2\,|x - 6| + 3$

8. $f(x) = |4x - 16| + 5$

9. **كهربـاء:** تزوّد شركة الكهرباء القطاع التجاري بالطاقة الكهربائية مقابل 1.20 دينار شهريًّا (رسومًا ثابتة)، يُضاف إليها 0.121 دينار لكُلّ كيلو واط ساعة لأول 2000 كيلو واط ساعة في الشهر، و 0.176 دينار لكُلّ كيلو واط ساعة من كمّية الاستهلاك الزائدة على 2000 كيلو واط ساعة في الشهر. أكتبُ الاقتران الذي يُعطي قيمة فاتورة الكهرباء بدلالة كمّية الاستهلاك x كيلو واط ساعة شهريًّا.

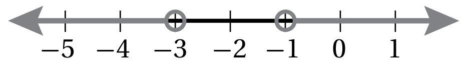
الدرس 2

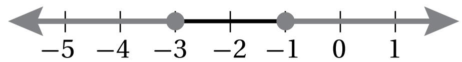
حلّ معادلات القيمة المطلقة ومتبايناتها

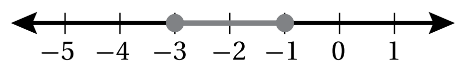
Solving Absolute-Value Equations and Inequalities

أَصِلُ المُتباينةَ بتمثيلِها على خطِّ الأعدادِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $|x+2| \geq 1$
2. $|x+2| \leq 1$
3. $|x+2| > 1$

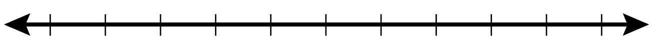




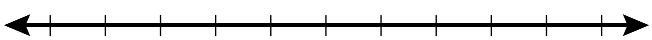


أكتبُ مُتباينةً تمثِّلُ كلَّ جملةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أمثِّلُها على خطِّ الأعدادِ:

4. المسافةُ بينَ عددٍ و2 على الأكثرِ 13



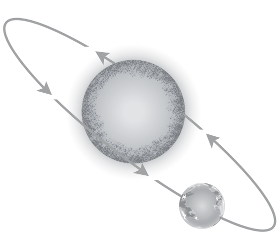
5. المسافةُ بينَ عددٍ والصِّفرِ على الأقلِّ 6



أَحُلُّ كلًّا مِنَ المُعادلاتِ والمُتبايناتِ الآتيةِ:

6. $|x-8| = 5$
7. $2|x+3|=8$
8. $|5x-8| + 14 = 12$
9. $|8-(x-1)| \leq 9$
10. $\left|\frac{2-3x}{5}\right| \geq 2$
11. $|x-6| + 4 > 1$

12. **فلك:** في أثناء دوران الأرض حول الشمس، يكون متوسّط المسافة بينهما 92.95 مليون ميل، ولا يزيد بعدها عن الشمس أو يقلّ عن هذا المتوسط بأكثر من 1.55 مليون ميل خلال العام. أكتبُ متباينة قيمة مطلقة ، ثم أستعملها لإيجاد مدى بعد الأرض عن الشمس خلال العام.



13. **أكتشفُ الخطأَ:** أكتشفُ الخطأَ في حلِّ مُعادلةِ القيمةِ المُطلقةِ الآتيةِ، وأصحّحُهُ:

$$|2x-1| = -9$$

$$2x-1=-9 \quad \text{or} \quad 2x-1=-(-9)$$

$$2x=-8 \qquad\qquad 2x=10$$

$$x=-4 \qquad\qquad x=5$$

الدرس 3

نظريتا الباقي والعوامل
Remainder and Factor Theorems

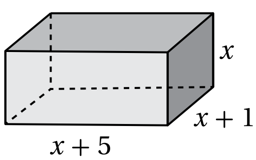
أستعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج القسمة والباقي في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $(6x^3 - 7x^2 + 6x + 45) \div (2x + 3)$

2. $(3x^4 + x^3 - 9x^2 - 8x + 9) \div (x - 2)$

3. إذا كان باقي قسمة: $f(x) = 2x^3 - x^2 + a\,x + 6$ على $h(x) = x + 2$ يساوي (-4)، فما قيمة a؟

4. أجد أبعاد متوازي المستطيلات في الشكل المجاور إذا كان حجمه 180 cm^3



5. إذا كان باقي قسمة: $f(x) = ax^3 + bx^2 + bx + 3$ على $h(x) = x - 1$ يساوي (4)، وكان $(x + 1)$ عاملًا من عوامل $f(x)$، فما قيمة كلٍّ من a، و b؟

أُحلِّل كل اقتران ممّا يأتي تحليلًا تامًّا:

6. $3x^3 + 14x^2 - 7x - 10$

7. $2x^4 + x^3 - 5x^2 + 2x$

أَحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

8. $3x^3 - 4x^2 - 6x + 4 = 0$

9. $2x^3 + 5x^2 - 16x - 36 = 0$

الكسور الجزئية
Partial Fractions

أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

1. $\dfrac{x-17}{(x+1)(x-5)}$

2. $\dfrac{x^2+x-2}{(2x-1)(x^2+1)}$

3. $\dfrac{5x-1}{2x^2-5x-3}$

4. $\dfrac{9-5x}{x^3-4x^2+3x}$

5. $\dfrac{36+5x}{16-x^2}$

6. $\dfrac{8x+3}{x^2-3x}$

7. $\dfrac{5x^2+2}{(x^2+3)(1-2x)}$

8. $\dfrac{24}{(2x^2+x+5)(x-1)}$

9. $\dfrac{6x^2+8x-7}{2x^2+3x-5}$

10. $\dfrac{x^3-3x^2-3x+12}{x^2-3x+2}$

أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

11. $\dfrac{1}{x^2-ax-bx+abx}$

12. $\dfrac{ax+b}{x^2-c^2}$

13. أُجزِّئ المقدار: $\dfrac{2}{x(x+2)}$ ، ثمَّ أستعمل ناتج التجزئة لإيجاد المجموع الآتي:

$$\frac{2}{1\times 3}+\frac{2}{3\times 5}+\frac{2}{5\times 7}+\dots+\frac{2}{11\times 13}$$

أختبر معلوماتي بحلّ التدريبات أوّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

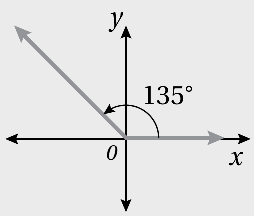
رسم الزاوية في الوضع القياسي (الدرس 1)

أرسم في الوضع القياسي الزاوية المعطى قياسها في ما يأتي، وأحدّد الربع أو المحور الذي تقع عليه:

1) $150°$ 2) $240°$ 3) $290°$ 4) $180°$

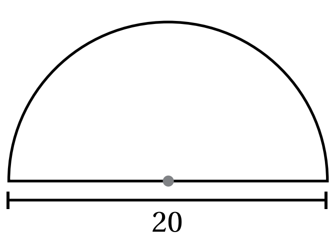
مثال: أرسم الزاوية $135°$ في الوضع القياسي، وأحدّد الربع أو المحور الذي تقع عليه:

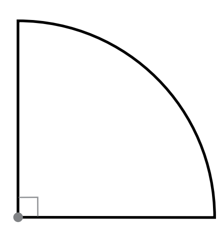
أرسم المحورين الإحداثيين. ومن نقطة الأصل أرسم ضلع الابتداء مُنطبِقًا على محور x الموجب، ثم أضع مركز المنقلة على نقطة الأصل، وأضع تدريج المنقلة $0°$ على ضلع الابتداء، ثم أُعيِّن نقطةً مقابل التدريج $135°$. بعد ذلك أرسم ضلع الانتهاء من نقطة الأصل إلى النقطة الثابتة التي عيَّنْتُها، فأجد أنَّ ضلع انتهاء الزاوية يقع في الربع الثاني.

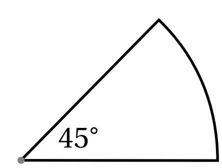


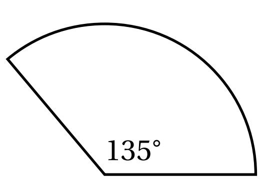
إيجاد طول القوس ومساحة القطاع الدائري (الدرس 1)

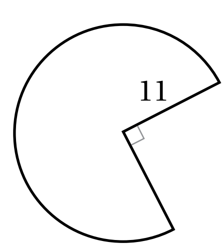
أجد طول القوس ومساحة القطاع في كلّ من الأشكال الآتية (أكتب الإجابة بدلالة π):

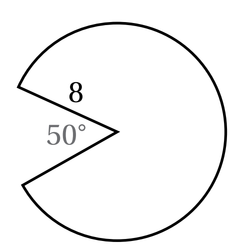
5) 

6) 

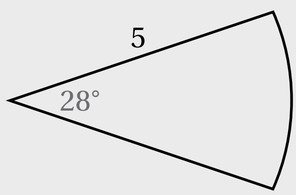
7) 

8) 

9) 

10) 

مثال: أجد طول القوس ومساحة القطاع في الشكل المجاور (أكتب الإجابة بدلالة π).



زاوية القطاع هي 28°، وطول نصف القطر هو 5 وحدات طول:

قانون طول القوس $l = \frac{\theta}{360°} \times 2\pi r$

بتعويض $\theta = 28°, r = 5$ $l = \frac{28°}{360°} \times \pi \times 2 \times 5$

بالتبسيط $= \frac{7\pi}{9}$

إذن، طول هذا القوس مقرَّبًا إلى أقرب منزلة عشرية واحدة هو: $\frac{7\pi}{9}$ وحدة طول.

قانون مساحة القطاع $A = \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$

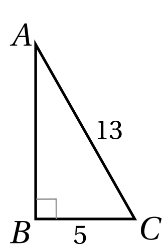
بتعويض $r = 5, \theta = 28°$ $= \frac{28°}{360°} \times \pi \times 5^2$

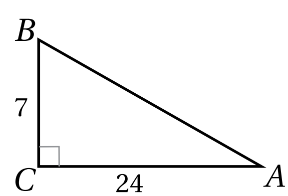
بالتبسيط $= \frac{35}{18}\pi$

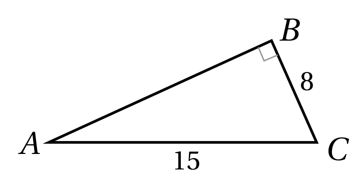
إذن، مساحة هذا القطاع هي: $\frac{35}{18}\pi$ وحدة مربعة.

إيجاد النسب المثلثية لزوايا في المثلث قائم الزاوية (الدرس 2)

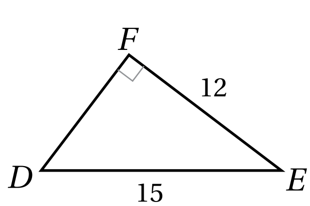
أجد قِيَم النسب المثلثية الثلاث للزاوية A في كلّ مما يأتي، وأترك إجابتي في صورةِ كسر:

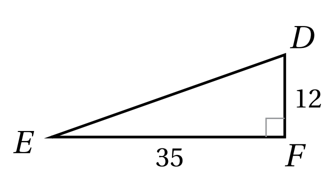
11


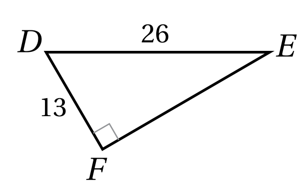
12


13


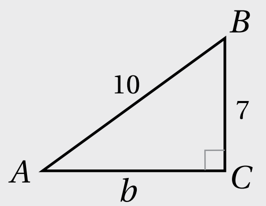
أجد قِيَم النسب المثلثية الثلاث للزاوية E في كلّ ممّا يأتي، وأترك إجابتي في صورة كسر:

14


15


16


مثال: أجد قِيَم النسب المثلثية الثلاث للزاوية A في المثلث المجاور، وأترك إجابتي في صورة كسر.



الخطـوة 1 أستعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد b.

نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
بتعويض $a = 7, c = 10$	$7^2 + b^2 = 10^2$
بالتبسيط	$49 + b^2 = 100$
بطرح 49 من طرفي المعادلة	$b^2 = 51$
بأخذ الجذر التربيعيّ لطرفي المعادلة	$b = \pm\sqrt{51}$

بما أنّ الطول لا يمكن أنْ يكون سالبًا، فإنّ $b = \sqrt{51}$.

الخطـوة 2 أجد النسب المثلثية الثلاث.

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{7}{\sqrt{51}} \qquad \cos A = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{51}}{10} \qquad \sin A = \frac{a}{c} = \frac{7}{10}$$

- **إيجاد النسب المثلثية الأساسية باستعمال دائرة الوحدة** (الدرس 2)

أجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، التي يقطع ضلع انتهائها دائرة الوحدة في النقطة الواردة في ما يأتي:

19) $P(1, 0)$

18) $P\left(-\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$

17) $P\left(-\frac{8}{17}, \frac{15}{17}\right)$

مثال: أجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، التي يقطع ضلع انتهائها دائرة الوحدة في النقطة الواردة في ما يأتي:

a) $P(-0.6, 0.8)$

$\sin\theta = y = 0.8,\qquad \cos\theta = x = -0.6,\qquad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{0.8}{-0.6} = -\frac{4}{3}$

b) $P(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13})$

$\sin\theta = y = -\frac{12}{13},\qquad \cos\theta = x = \frac{5}{13},\qquad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-12/13}{5/13} = -\frac{12}{5}$

إيجاد قِيَم النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الواحدة (الدرس 2)

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

20) $\cos 120°$

21) $\sin 225°$

22) $\tan 330°$

23) $\cos 315°$

24) $\tan 240°$

25) $\sin 210°$

مثال: أجد قيمة $\sin 120°$.

$\theta' = 180° - \theta$ بإيجاد قياس الزاوية المرجعية

$= 180° - 120°$ بتعويض $\theta = 120°$

$= 60°$ بالطرح

$\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ الجيب موجب في الربع الثاني

تمثيل الاقترانات المثلثية (الدرس 3)

أرسم منحنى الاقتران لكلّ ممّا يأتي في الفترة المعطاة، ثمّ أصفه:

27) $y = \cos x, \quad 0° \le x \le 180°$

26) $y = \sin x, \quad 0° \le x \le 270°$

مثال: أرسم منحنى الاقتران $y = \sin x$، ثمّ أصفه، علمًا بأن $0° \le x \le 360°$

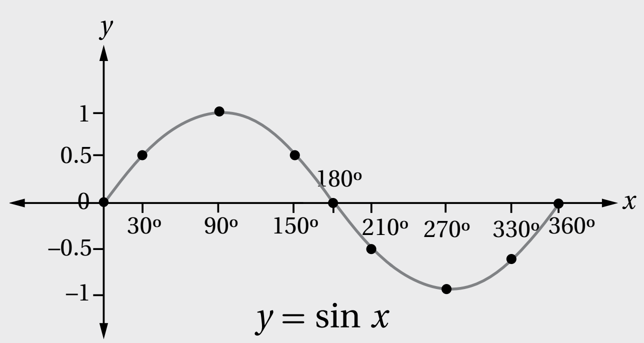
الخطوة 1 أكوّن جدولًا أكتب فيه زوايا شائعة، نِسبُها المثلثية معروفة، مثل: الزوايا الربعية، والزوايا التي زاويتها المرجعية 30°

الخطوة 2 أجد قيمة $\sin x$ لكلّ زاوية x، ثم أكتبها في الجدول:

x	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°	330°	360°
$y = \sin x$	0	0.5	1	0.5	0	– 0.5	–1	– 0.5	0

الخطوة 3 أُعيِّن الأزواج المُرتَّبة: (0°, 0), (30°, 0.5), (90°, 1), ...(360°, 0) في المستوى الإحداثيّ.

الخطوة 4 أصل بمنحنى متصل بين النقاط، فينتج رسم كما في الشكل الآتي.



من التمثيل البياني لاقتران $\sin x$، ألاحظ أن أكبر قيمة للاقتران $\sin x$ هي 1، وأصغر قيمة له هي –1

- **تمثيل منحنيات الاقترانات التربيعية الناتجة عن تطبيق تحويل هندسي أو أكثر على منحنى الاقتران الرئيس** (الدرس 3)

أصف كيف يرتبط منحنى كل من الاقترانات الآتية بمنحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$، ثم أمثّله بيانيًّا:

28) $g(x) = x^2 + 4$

29) $h(x) = (x - 2)^2$

30) $p(x) = 3x^2$

31) $s(x) = -x^2 - 2$

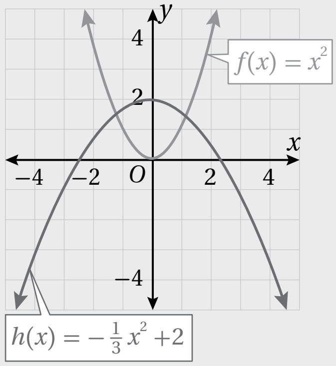
32) $m(x) = 2(x + 3)^2 + 3$

مثال: أصف كيف يرتبط منحنى الاقتران: $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2$ بمنحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$، ثم أمثّله بيانيًّا.

منحنى $h(x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x) = x^2$ حول المحور x، ثم تضييق رأسي بمعامل مقداره $\frac{1}{3}$، ثم انسحاب وحدتين إلى الأعلى.

لتمثيل منحنى $h(x)$ بيانيًّا أتّبع الإجراءات الآتية:

- أختار مجموعة من النقاط التي تقع على منحنى $f(x) = x^2$.
- أضرب الإحداثي y للنقاط التي اخترتها في $-\frac{1}{3}$
- أُضيف 2 إلى الإحداثي y للنقاط الناتجة من الخطوة السابقة.
- أمثل النقاط من الخطوة السابقة في المستوى الإحداثي، ثم أصلُ بينها بمنحنى أملس، كما يظهر في الشكل المجاور.



قياس الزاوية بالراديان
Angle Measure in Radian

أُحوِّل قياس الزاوية المكتوب بالدرجات إلى الراديان، وقياس الزاوية المكتوب بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $225°$

2) $840°$

3) $\frac{11\pi}{6}$

4) $-\frac{23\pi}{4}$

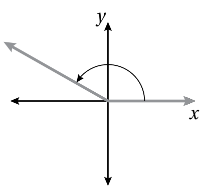
أكتبُ بجانب كل زاوية ممّا يأتي رمز الرسم في الوضع القياسي المناسب لها من بين الرسومات (a–d) الظاهرة أدناه:

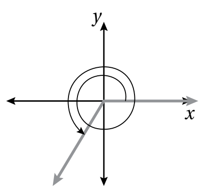
5) $600°$

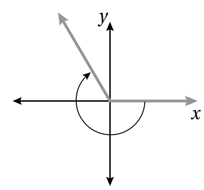
6) $-\frac{9\pi}{4}$

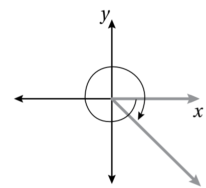
7) $\frac{5\pi}{6}$

8) $-240°$

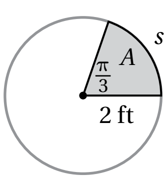
a)


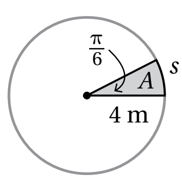
b)


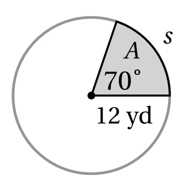
c)


d)


أجد طول القوس ومساحة القطاع في كلٍّ ممّا يأتي، وأقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

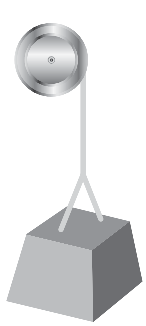
9)


10)


11)


12) إذا كانت مساحة دائرة 72 cm^2، فأجد مساحة قطاع دائري من هذه الدائرة يقابل زاوية مركزية قياسها $\frac{\pi}{6}$.

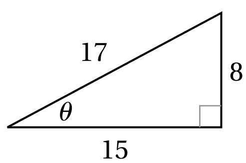
13) قطاع دائري نصف قُطْره 24 cm، ومساحته 288 cm^2. أجد الزاوية المركزية لهذا القطاع.

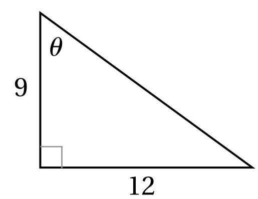


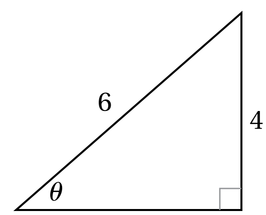
14) **رافعة:** يبلغ طول نصف القُطْر لبكرة رافعة 2 ft، وهي تُستعمَل لرفع الأحمال الثقيلة، وتؤدي 8 دورات كل 15 ثانية. أجد السرعة الخطية والسرعة الزاويّة للرافعة.

الاقترانات المثلثية
Trigonometric Functions

أجد قيم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في كلّ مما يأتي:

1


2


3


تقع النقطة المعطاة في كلّ مما يأتي على ضلع انتهاء الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، أجد قيم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ:

4 $(-6, 6)$

5 $(5, -3)$

6 $(-8, 15)$

أجد قيمة كلّ مما يأتي:

7 $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

8 $\cos\frac{7\pi}{6}$

9 $\tan\frac{13\pi}{6}$

10 $\sec(-150°)$

11 $\cot\frac{4\pi}{3}$

12 $\sin 300°$

أجد قيمة كلّ من الاقترانات المثلثية الخمسة المتبقية للزاوية θ في كلّ مما يأتي:

13 $\csc\theta = 2, \cos\theta < 0$

14 $\cot\theta = 1, \sin\theta > 0$

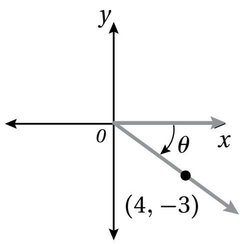
15 $\sin\theta = -\frac{1}{5}, \cos\theta > 0$

16 $\sec\theta = \sqrt{3}, \sin\theta < 0$

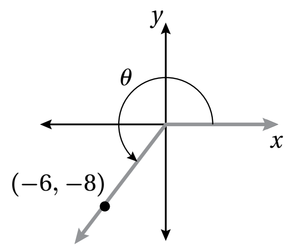
الاقترانات المثلثية
Trigonometric Functions

أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في كلٍّ ممّا يأتي:

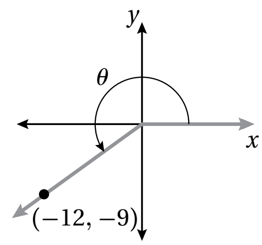
17



18



19



إذا كان: $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x, h(x) = 2x$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

20 $f\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{4\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

21 $(h \circ g)\left(\frac{17\pi}{3}\right)$

22 $(h \circ f)\left(\frac{11\pi}{4}\right)$

إذا كان $\sin 70° = \cos 20° = 0.940$ لأقرب ثلاث منازل عشرية، فأستعمل هذه الحقيقة لإيجاد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

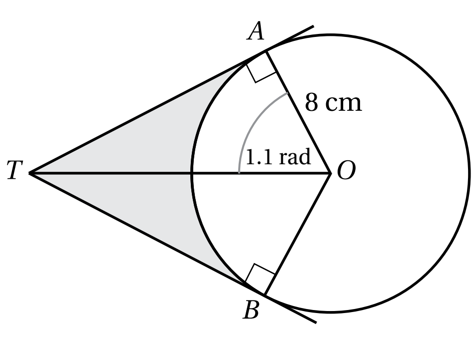
23 $\cos 560°$

24 $\sin 430°$

25 $\sin 470°$

26 $\cos (-380°)$

يُبيِّن الشكل المجاور دائرة مركزها O، وطول نصف قُطْرها 8 cm، إذا كان $\overline{TA}$ و $\overline{TB}$ مماسَّين للدائرة، وكان $m\angle AOT = 1.1$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



27 طول TA.

28 مساحة الجزء المُظلَّل في الشكل.

تمثيل الاقترانات الجيبية بيانيًّا
Graphing Sinusoidal Functions

أجد طول الدورة والسعة (إن وُجِدَت) لكلّ اقتران ممّا يأتي، ثم أُمثِّله بيانيًّا:

1) $g(x) = 2 + \sin x$

2) $g(x) = 5 - \cos x$

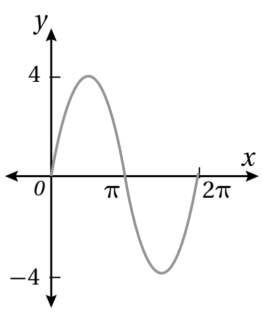
3) $g(x) = -\cos(x + \pi)$

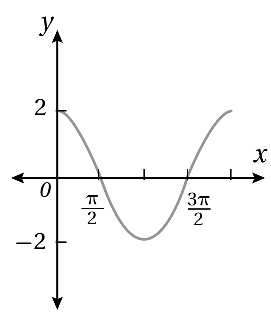
4) $g(x) = 5 - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

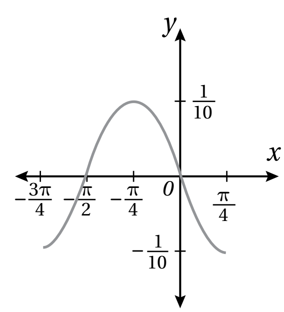
5) $g(x) = -2 - \sin(x - \pi)$

6) $g(x) = -4 \sin \frac{1}{4} x$

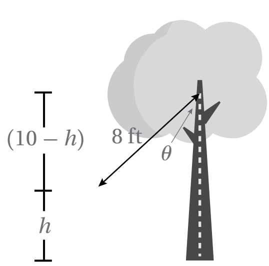
أجد السعة وطول الدورة لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أكتب معادلة في صورة: $y = a \sin b(x-c)$، أو صورة: $y = a \cos b(x-c)$ لتمثيل قاعدة الاقتران:

7)


8)


9)


أرجوحة: يُمكِن تمثيل الارتفاع بالأقدام لأرجوحة فوق سطح الأرض بالاقتران: $h = -8 \cos \theta + 10$، حيث يرتفع مربط الأرجوحة 10 أقدام فوق سطح الأرض، ويبلغ طول حبل الأرجوحة 8 أقدام، وتُمثِّل θ الزاوية التي يصنعها الحبل مع المحور الرأسي:



10) أجد ارتفاع الأرجوحة عندما $\theta = \frac{\pi}{4}$.

11) أُمثِّل الاقتران h بيانيًّا.

أختبر معلوماتي بحلّ التدريبات أوّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

تحليل المقادير الجبرية (الدرس 1)

أُحلِّل كل مقدار جبري ممّا يأتي إلى عوامله الأولية:

1) $3x^2 - 6x$

2) $x^2 - 36$

3) $x^2 + 3x + 2$

4) $x^2 - 5x + 6$

5) $x^2 - x - 2$

6) $2x^2 - 6x + 4$

7) $x^3 - 27$

8) $2x^3 + 128$

9) $16 - x^2$

مثال: أُحلِّل كل مقدار جبري ممّا يأتي إلى عوامله الأولية:

a) $\mathbf{3x^3 - 12x}$

$3x^3 - 12x = 3x(x^2 - 4)$ بإخراج العامل المشترك الأكبر

$= 3x(x-2)(x+2)$ بتحليل الفرق بين مربعين

b) $\mathbf{5x^3 - 5}$

$5x^3 - 5 = 5(x^3 - 1)$ بإخراج العامل المشترك الأكبر

$= 5(x-1)(x^2 + x + 1)$ بتحليل الفرق بين مكعبين

c) $\mathbf{3x^2 - 12x - 15}$

$3x^2 - 12x - 15 = 3(x^2 - 4x - 5)$ بإخراج العامل المشترك الأكبر

$= 3(x-5)(x+1)$ بتحليل العبارة التربيعية

d) $\mathbf{x^3 - 6x^2 + 8x}$

$x^3 - 6x^2 + 8x = x(x^2 - 6x + 8)$ بإخراج العامل المشترك

$= x(x-2)(x-4)$ بتحليل العبارة التربيعية

تبسيط المقادير الجبرية النسبية (الدرس 1)

أكتب كلًّا ممّا يأتي في أبسط صورة:

10 $\frac{2x+2}{2}$

11 $\frac{16x^2+8x}{2x+1}$

12 $\frac{x-2x^2}{8-16x}$

13 $\frac{x^2-36}{x-6}$

14 $\frac{x^2+7x+12}{x+3}$

15 $\frac{9-3x}{x^2-9}$

مثال: أكتب كلًّا ممّا يأتي في أبسط صورة:

a) $\mathbf{\frac{6x+12}{6}}$

$\frac{6x+12}{6} = \frac{6(x+2)}{6}$ بإخراج العدد (6) عاملًا مشتركًا لحدود البسط

$= (x+2)$ بقسمة كلٍّ من البسط والمقام على (6)

b) $\mathbf{\frac{2x^2+2x}{2x}}$

$\frac{2x^2+2x}{2x} = \frac{2x\,(x+1)}{2x}$ بإخراج ($2x$) عاملًا مشتركًا لحدود البسط

$= \frac{\cancel{2x}\,(x+1)}{\cancel{2x}} = x+1$ بقسمة البسط والمقام على ($2x$)

c) $\mathbf{\frac{x-1}{x^3-x^2}}$

$\frac{x-1}{x^3-x^2} = \frac{x-1}{x^2(x-1)}$ بتحليل المقام

$= \frac{\cancel{(x-1)}}{x^2\cancel{(x-1)}} = \frac{1}{x^2}$ بقسمة كلٍّ من البسط والمقام على ($x-1$)

تمثيل اقتران نسبي بيانيًّا يحتوي منحناه فجوة (الدرس 1)

أمثّل كلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

18) $f(x) = \dfrac{3x^4 + 6x^3 + 3x^2}{x^2 + 2x + 1}$

17) $f(x) = \dfrac{-x^6 + x^3}{x^3}$

16) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x + 4}$

مثال: أمثّل الاقتران $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$ بيانيًّا.

أختصر العوامل المشتركة بين البسط والمقام.

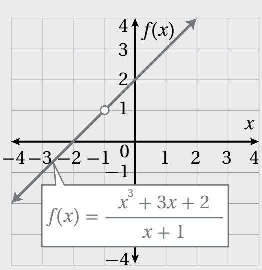
بتحليل البسط

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} = \frac{(x + 2)(x + 1)}{x + 1}$$

باختصار العامل المشترك $(x + 1)$

$$= \frac{(x + 2)\cancel{(x + 1)}}{\cancel{x + 1}} = x + 2$$

إذن، التمثيـل البياني للاقتران $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$ هو نفســه التمثيل البياني للاقتــران $f(x) = x + 2$ مع وجــود فجوة (دائرة صغيرة غيــر مظلّلة) في المنحنى عند $x = -1$ كما يظهر في الشكل المجاور.



تحويل المقادير من الصورة الجذرية إلى الصورة الأسّيّة، وبالعكس (الدرس 2)

أكتب الصورة الأُسّية في صورة جذرية والصورة الجذرية في صورة أُسّيةٍ في كلّ ممّا يأتي:

19) $p^{\frac{1}{6}}$

20) $\sqrt[8]{u}$

21) $9^{\frac{1}{4}}$

22) $\sqrt[5]{-8}$

23) $w^{\frac{8}{3}}$

24) $\sqrt[6]{v^5}$

25) $16^{\frac{3}{4}}$

26) $\sqrt[5]{(-35)^9}$

مثال: أكتب الصورة الأُسّية في صورة جذرية والصورة الجذرية في صورة أُسّية في كلّ ممّا يأتي:

a) $y^{\frac{1}{4}}$

$y^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{y}$ تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

b) $\sqrt[6]{w}$

$\sqrt[6]{w} = w^{\frac{1}{6}}$ تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

c) $8^{\frac{2}{5}}$

$8^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{8^2}$ تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

d) $\sqrt[7]{-20}$

$\sqrt[7]{-20} = (-20)^{\frac{1}{7}}$ تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

استخدام قوانين الأسس لتبسيط عبارات أُسّية (الدرس 2)

أستخدم قوانين الأسس لإيجاد قيمة كلّ ممّا يأتي:

28) $3^5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6$

27) $\frac{4^3 \times 8^4}{4^5 \times 8^2}$

30) $\frac{4^2}{4^5}$

29) $(7-4)^3 \times 3^{-8}$

مثال: أستخدم قوانين الأسس لإيجاد قيمة كلّ ممّا يأتي:

a) $\mathbf{5^{-2}}$

$5^{-2} = \frac{1}{5^2}$ تعريف الأسّ السالب

$= \frac{1}{25}$ تعريف القوى

b) $\mathbf{\frac{6^5 \times 10^3}{6^2 \times 10^6}}$

$\frac{6^5 \times 10^3}{6^2 \times 10^6} = \frac{6^5 \times 6^{-2}}{10^6 \times 10^{-3}}$ تعريف الأسّ السالب

$= \frac{6^3}{10^3}$ قاعدة ضرب القوى

$= \frac{216}{1000} = 0.216$ تعريف القوى

مشتقّة كثيرات الحدود (الدرس 2)

أجد مشتقّة كُلّ من الاقترانات الآتية:

33 $f(x) = x^4 + 8x^2$

32 $f(x) = x^5 - 5x^2 + 6x - 10$

31 $f(x) = 2x^3 + 6$

مثال: أجد مشتقّة الاقتران $f(x) = x^4 - 7x^2$

الاقتران الأصلي	$f(x) = x^4 - 7x^2$
قاعدة مشتقّة مضاعف القوة	$f'(x) = 4x^{4-1} - 7(2x^{2-1})$
بالتبسيط	$= 4x^3 - 14x$

إيجاد ميل منحنى الاقتران باستعمال المشتقّة (الدرس 2)

إذا كان $f(x) = 5x^2 + 25x - 9$، فأستعمل المشتقّة لإيجاد كلّ مما يأتي:

34 ميل منحنى $f(x)$ عندما $x = -2$.

35 قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران صفرًا.

أتذكر

ميل المنحنى عند نقطة واقعة عليه يساوي ميل المماس عند تلك النقطة؛ لذا، فإن ميل المنحنى يختلف من نقطة إلى أخرى عليه.

تقع النقطة $P(-2, b)$ على منحنى الاقتران $g(x) = 3x^3 - x^2 - 7x + 4$:

36 أَجِدُ قيمةَ b.

37 أجد قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران صفرًا.

مثال: إذا كان $f(x) = 3x^2 - 18x + 5$، فأستعمل المشتقّة لإيجاد ميل منحنى $f(x)$ عندما $x = 1$.

الاقتران الأصلي	$f(x) = 3x^2 - 18x + 5$
باشتقاق الاقتران	$f'(x) = 6x - 18$
بتعويض $x = 1$	$f'(1) = 6(1) - 18$
بالتبسيط	$= -12$

إذن، ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 1$ هوَ -12

حلّ المعادلات بمتغيّر واحد (الدرس 3)

أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

40 $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

39 $15x^2 - 30x - 120 = 0$

38 $x^2 + 5x - 24 = 0$

مثال: أحلّ المعادلة $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$

المعادلة الأصلية	$x^3 - 2x^2 - 3x = 0$
بإخراج x عاملًا مشتركًا	$x(x^2 - 2x - 3) = 0$
بالتحليل إلى العوامل	$x(x-3)(x+1) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$x = 0 \quad \text{or} \quad x - 3 = 0 \quad \text{or} \quad x + 1 = 0$
بحلّ المعادلات الناتجة	$x = 0 \qquad x = 3 \qquad x = -1$

- **إيجاد القِيَم العظمى المحلّية والقِيَم الصغرى المحلّية لاقترانات كثيرات الحدود باستعمال المشتقّة** (الدرس 3)

أستعمل المشتقّة لإيجاد القِيَم العظمى المحلّية والقِيَم الصغرى المحلّية لكل من الاقترانات الآتية (إن وُجِدت):

41) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

42) $f(x) = x^2 + 6x - 3$

43) $f(x) = 1 + 5x - x^2$

44) $f(x) = x^3 + 1.5x^2 - 18x$

45) $f(x) = 18x^2 - x^4$

46) $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$

مثال: أســتعمل المشــتقّة لإيجاد القِيَم العظمى المحلّية والقِيَم الصغرى المحلّية للاقتران $f(x) = x^3 - 12x + 4$ (إن وُجِدت).

الخطـوة 1 أجد القِيَم الحرجة؛ أي القِيَم التي ميل المنحنى عندها صفر.

مشتقّة الاقتران	$f'(x) = 3x^2 - 12$
بمساواة المشتقّة بالصفر	$3x^2 - 12 = 0$
بجمع 12 إلى طرفي المعادلة	$3x^2 = 12$
بقسمة طرفي المعادلة على 3	$x^2 = 4$
بأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة	$x = \pm 2$

إذن، توجد نقطتان حرجتان لمنحنى الاقتران عندما $x = -2$ وَ $x = 2$؛ لأن مشــتقّة الاقتران تســاوي صفرًا عند هاتين النقطتين.

الخطـوة 2 لتحديد أيّ النقاط الحرجة يوجد عندها قيمة عظمى أو قيمة صغرى للاقتران، أختبر إشارة ميل المنحنى حول كل منهما، وذلك بتعويض بعض القِيَم القريبة منها.

x	1.9	2	2.1
$f'(x)$	−1.17	0	1.23
إشارة الميل	سالبة		موجبة

x	−2.1	−2	−1.9
$f'(x)$	1.23	0	−1.17
إشارة الميل	موجبة		سالبة

تتغير إشــارة ميل المنحنى حول $x = -2$ من موجبة إلى ســالبة؛ لذا توجد قيمة محلّية عظمى عندما $x = -2$، هي $f(-2) = 20$، وتتغير إشارة ميل المنحنى حول $x = 2$ من سالبة إلى موجبة؛ لذا توجد قيمة محلّية صغرى عندما $x = 2$، هي $f(2) = -12$.

- **إيجاد سرعة جسم وتسارعه باستعمال المشتقّة إذا عُلِم اقتران موقعه** (الدرس 4)

يُمثّل الاقتران $s(t) = t^3 - 6t + 3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرّك في مسار مستقيم، حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية:

47) أجد الاقتران $v(t)$ الذي يُمثّل سرعة الجسم في أيّ لحظة (t ثانية).

48) أجد سرعة الجسم عندما $t = 3$.

49) أجد الزمن t عندما تكون السرعة 6 m/s

50) أجد الاقتران $a(t)$ الذي يُمثّل تسارع الجسم، حيث t الزمن بالثانية.

51) أجد تسارع الجسم عندما $t = 5$.

مثال: يمثّل الاقتران $s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية:

a) أجد سرعة الجسم بعد 3 ثوان من بدء حركته.

السرعة هي مشتقّة اقتران الموقع. أفترض أن اقتران السرعة هو $v(t)$.

إذن، $v(t) = s'(t)$.

المطلوب هو $v(3) = s'(3)$، التي تمثّل السرعة اللحظية عندما $t = 3$.

$s'(t) = 1.8t^2 - 1.5$	مشتقّة اقتران الموقع
$v(t) = s'(t) = 1.8t^2 - 1.5$	تعريف اقتران السرعة
$v(3) = s'(3) = 1.8(3)^2 - 1.5$	بتعويض $t = 3$
$= 14.7$ m/s	بالتبسيط

إذن، سرعة الجسم بعد 3 ثوان من بدء حركته هي 14.7 m/s

b) أجد تسارع الجسم بعد 5 ثوان من بدء حركته.

التسارع هو مشتقّة اقتران السرعة. أفترض أنّ اقتران التسارع هو $a(t)$.

إذن، $a(t) = v'(t)$.

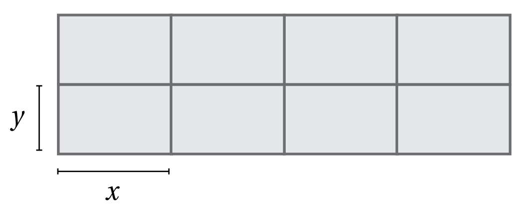
المطلوب هو $a(5) = v'(5)$، التي تمثّل التسارع عندما $t = 5$.

مشتقّة اقتران السرعة	$a(t) = v'(t) = 3.6t$
بتعويض $t = 5$	$a(5) = 3.6(5)$
بالتبسيط	$= 18$

إذن، تسارع الجسم بعد 5 ثوان من بدء حركته هو $18\ \text{m/s}^2$

تطبيقات القِيَم القصوى (الدرس 5)

لدى مزارع 180 m من الشّباك، أراد أن يصنع منها حظائر لأغنامه، طول كل منها x مترًا، وعرضها y مترًا كما في الشكل المجاور:



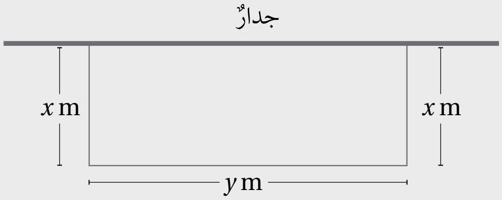
52 أبيّن أنّ العلاقة بين x و y هي $y = 18 - 1.2x$

53 أبيّن أن الاقتران $A(x) = 144x - 9.6x^2$ يمثّل المساحة الكلية للحظائر.

54 أستعمل المشتقّة لإيجاد قيمة x التي تجعل المساحة الكلية للحظائر أكبر ما يمكن.

55 أجد أكبر مساحة كلية ممكنة للحظائر.

مثال: لدى مزارع 32 m من السياج، أراد أن يسيّج به حظيرة مستطيلة، طولها y مترًا، وعرضها x مترًا، بجانب جدار يكون أحد أضلاع هذه الحظيرة:



a) أبيّن أنّ الاقتران $A(x) = x(32-2x)$ يمثّل مساحة الحظيرة.

طول السياج 32 m؛ لذا، فإنّ $x + y + x = 32$

إذن، طول الحظيرة $y = 32-2x$، ومساحتها $x(32-2x)$ مترًا مربعًا.

b) أجد $A'(x)$.

اقتران المساحة $A(x) = x(32-2x)$

بتوزيع الضرب على الطرح $A(x) = 32x-2x^2$

مشتقّة اقتران المساحة $A'(x) = 32-4x$

c) أستعمل المشتقّة لإيجاد قيمة x التي تجعل مساحة الحظيرة أكبر ما يمكن، ثمّ أجد تلك المساحة.

لإيجاد قيمة x، أحلّ المعادلة $A'(x) = 0$:

بمساواة المشتقّة بالصفر $32 - 4x = 0$

بجمع $4x$ لطرفي المعادلة $32 = 4x$

بقسمة طرفي المعادلة على 4 $x = 8$

تتغيّر إشارة ميل المنحنى من موجبة إلى سالبة من يسار إلى يمين $x = 8$؛ لذا توجد قيمة عظمى عندما $x = 8$

x	8
إشارةُ الميلِ	+ + 0 − −

لإيجاد أكبر مساحة ممكنة للحظيرة أعوّض قيمة $x = 8$ بالاقتران الذي يمثّل مساحة الحظيرة.

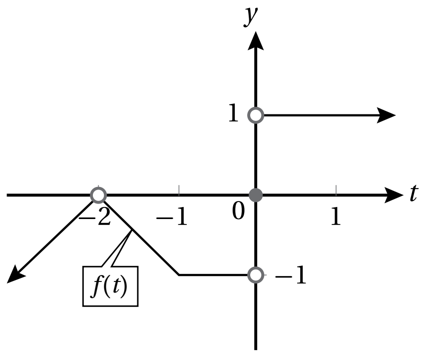
بتعويض $x = 8$ $A(8) = 8(32-2(8))$

بالتبسيط $= 128$

إذن أكبر مساحة للحظيرة $128\ m^2$، وهي تنتج عندما يكون عرض الحظيرة 8 m، وطولها 16 m

النهايات والاتّصال
Limits and Continuity

يُبيّن التمثيل البياني المجاور منحنى الاقتران $f(t)$. أجد كُلًّا من النهايات الآتية (إن وُجِدت):



1) $\lim\limits_{t \to -2} f(t)$ 2) $\lim\limits_{t \to -1} f(t)$ 3) $\lim\limits_{t \to 0} f(t)$

أجد كُلًّا من النهايات الآتية بيانيًّا وعدديًّا:

4) $\lim\limits_{x \to 5} \left(\frac{x^2 - 25}{x - 5}\right)$

5) $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 - x + 2)$

إذا كان $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 2 \\ 6 - x & , x > 2 \end{cases}$ ؛ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

6) أُمثّل $f(x)$ بيانيًّا.

7) أجد كُلًّا من النهايات الآتية من التمثيل البياني للاقتران $f(x)$:

a) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 6} f(x)$

أجد كُلًّا من النهايات الآتية:

8) $\lim\limits_{x \to -7} (2x + 5)$

9) $\lim\limits_{x \to 2} (-x^2 + 5x - 2)$

10) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x + 3}{x + 6}$

11) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{2x - 2}{1 - x}\right)$

12) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\frac{2x - 6}{x + 5}\right)$

13) $\lim\limits_{z \to -4} \sqrt[3]{2z - 8}$

14) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\frac{2x^2 - 18}{x^3 - 27}\right)$

15) $\lim\limits_{x \to 5} \left(\frac{x^2 - 7x + 10}{25 - 5x}\right)$

16) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{3x+1} - 1}{x}\right)$

17) أبحثُ في اتّصال الاقتران $f(x) = \begin{cases} 2 - x & , x < 2 \\ x - 6 & , x \geq 2 \end{cases}$ ، عند $x = 2$.

الاشتقاق
Differentiation

أجد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة x المعطاة إزاء كلٍّ منها باستعمال التعريف العام للمشتقّة:

1) $f(x) = 5x, \quad x = 0$

2) $f(x) = x, \quad x = -3$

3) $f(x) = 6x + 3, \quad x = 2$

4) $f(x) = 5x^2, \quad x = 1$

5) $f(x) = 3x^2 + 4x, \quad x = 1$

6) $f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x = 2$

أجد $\frac{ds}{dt}$ لكُلّ ممّا يأتي:

7) $s = 10\sqrt{t}$

8) $s = \frac{50}{t} + 10$

9) $s = 10t^2 - \frac{10}{t^2}$

إذا كان $y = \sqrt{x}$، فأجد:

10) إحداثيَّي النقطة التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي $\frac{1}{2}$

11) إحداثيّي النقطة التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي 1

12) إذا كان الاقتران $y = \frac{(x+a)^2}{x}$ ، حيث a عدد موجب؛ فأجد إحداثيّي النقطة التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي صفرًا بدلالة a.

الاشتقاق

Differentiation

إذا كان $f(x) = \frac{2x+5}{x}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

13 مشتقّة الاقتران عند النقطة $(10, 2.5)$

14 إحداثيات النقاط التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي -5

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

17 $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x}}, x = 4$

16 $f(x) = \frac{4+x}{x}, x = 8$

15 $f(x) = \sqrt[3]{x}, x = -1$

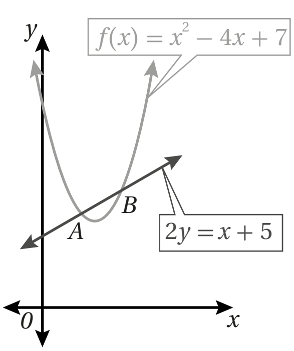
أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

19 $f(x) = 2x^2(6-x), x = 5$

18 $f(x) = 5x^3 + x^2 - 2, x = -1$

20 أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 2x^6 - x^4 - 2$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 4x + 7$، والمستقيم: $2y = x + 5$:



21 أجد إحداثيي كلٍّ من النقطة A والنقطة B.

22 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند كلٍّ من النقطة A والنقطة B.

23 رُسم مماس عند النقطة $P(1, 6)$ الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 5x + 10$. أجد مساحة المثلّث المكوَّن من مماس منحنى الاقتران عند النقطة P والمحورين الإحداثيّين.

القِيَم العظمى والصغرى

Maxima and Minima

أجد النقاط الحرجة (إنْ وُجِدت) لكلّ كثير حدود ممّا يأتي:

1) $f(x) = x^2 - 8x$

2) $f(x) = 3x^2 + 6x + 4$

3) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$

4) $f(x) = 12x - x^3$

5) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 5$

6) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

أجد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية (إن وجدت) لكلّ اقتران ممّا يأتي:

7) $f(x) = 2x^2 - 4x$

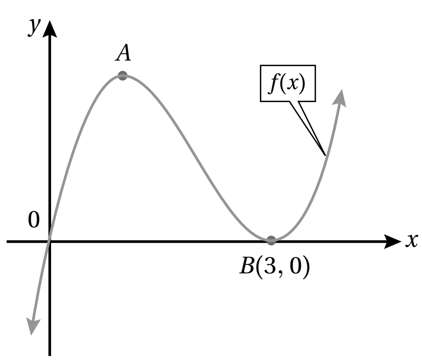
8) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$

9) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$

10) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$

11) إذا كان للاقتران $y = x^3 + kx^2 - 8x + 3$ قيمة عظمة محلية عندما $x = -2$؛ فأجد قيمة الثابت k.

12) يمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$، وتُمثّل A نقطــة عظمى محلّية للاقتران f، وB نقطة صغــرى محلّية له. أجد إحداثيّي النقطة A.



الدرس 4

المشتقّة الثانية وتطبيقاتها

The Second Derivative and its Applications

أجد المشتقّة الثانية لكلّ اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = 5x^3 + 4x$

2 $f(x) = \sqrt[3]{x}$

3 $f(x) = (x-1)(2x+3)$

أجد المشتقّة الثانية لكلّ اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

4 $f(x) = \frac{4}{3x}, x = 2$

5 $f(x) = 1 - 7x^2, x = -3$

6 إذا كان: $f(x) = ax^4 - 3x^2$، وكانت: $f''(2) = 42$، فأجد قيمة a.

إذا كان الاقتران $f(x) = (x-1)^2 (x+2)$؛ فأجيب عمّا يأتي:

7 أجد إحداثيَي كلّ من النقطتين اللتين يقطع عندهما منحنى الاقتران المحور x.

8 أجد النقاط الحرجة للاقتران، ثم أُحدّد نوعها باستعمال اختبار المشتقّة الثانية.

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

9 $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$

10 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$

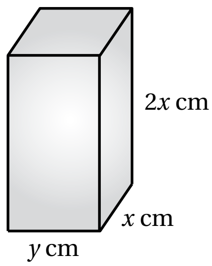
سيّارات سباق: يُمكِن نمذجة موقع سيّارة سباق تتحرَّك في مسار مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = 6t^2 - 2t$، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار:

11 ما سرعة السيّارة بعد 5 ثوانٍ من بَدْء حركتها؟

12 ما تسارع السيّارة بعد 5 ثوانٍ من بَدْء حركتها؟

13 أجد قِيَم t التي تكون عندها السيّارة في حالة سكون لحظي.

تطبيقات القيم القصوى
Optimization Problems



يُبيِّن الشكل المجاور قالبًا يُستعمَل لصنع لَبِنات البناء، وتبلغ مساحة سطحه الكلية $2700\ \text{cm}^2$:

1. أجد الاقتران الذي يُمثِّل حجم القالَب بدلالة x.
2. أجد قيمة x التي تجعل حجم القالَب أكبر ما يُمكِن.

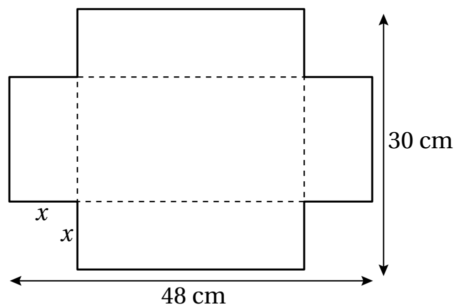
يُمثِّل الاقتران: $s(x) = 150 - 0.5x$ سعر البدلة الرجالية الذي حدَّدته شركة لإنتاج الملابس، حيث x عدد البدلات المَبيعة. ويُمثِّل الاقتران: $C(x) = 4000 + 0.25x^2$ تكلفة إنتاج x بدلة، أجد كلًّا مما يأتي:

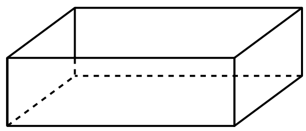
3. اقتران الإيراد.
4. عدد البدلات x التي يكون عندها الإيراد الحدِّي مثلَي التكلفة الحدِّية.
5. اقتران الربح.
6. عدد البدلات اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، ثم أجد أكبر ربح مُمكِن.
7. سعر البدلة الواحدة الذي يُحقِّق أكبر ربح مُمكِن.

8. **زراعة:** أراد مزارع أن يحيط منطقة مستطيلة الشكل مساحتها $216\ \text{m}^2$ من حقله بسياج، وأن يقسمها إلى نصفين بسياج موازٍ لأحد جوانبها. أجد أبعاد المنطقة التي تجعل طول السياج اللازم أقلّ ما يمكن، ثم أجد طوله.

تطبيقات القيم القصوى
Optimization Problems

قطعة ورق مستطيلة الشكل طولها 48 cm، وعرضها 30 cm. قُصّ من جوانبها الأربعة مربّعات متطابقة طول ضلع كل منها x cm كما في الشكل المجاور، ثمّ ثُنيت الورقة لتشكيل علبة مفتوحة من الأعلى.

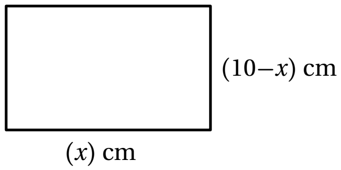




9. أجد الاقتران الذي يُمثّل حجم العلبة بدلالة x.

10. أجد قيمة x التي تجعل حجم العلبة أكبر ما يُمكن.

11. سلك طوله 20 cm. إذا أُريد ثني السلك ليحيط بالمستطيل التالي، فأجد أكبر مساحة مغلقة يُمكِن إحاطة السلك بها.



12. أرادت إحدى الشركات أنْ تصنع خزّانات من الفولاذ الرقيق المُقاوِم للصدأ على شكل متوازي مستطيلات، بحيث يكون كلٌّ منها مفتوحًا من الأعلى، وحجمه 500 m^3، وقاعدته مربعة الشكل. أجد الأبعاد التي تجعل مساحة سطح الخزّان أقل ما يُمكِن.

قاعدة السلسلة
The Chain Rule

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = \sqrt{4x-1}$

2) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3-x^2}}$

3) $f(x) = (3+4x)^{\frac{5}{2}}$

4) $f(x) = (8-x)^{100}$

5) $f(x) = x^2 + (200-x)^2$

6) $f(x) = \frac{1}{(x^2-3)^3}$

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

7) $f(x) = 4x^3 + (x-2)^4\,, x = 2$

8) $f(x) = \sqrt{x^2+8x}\,, x = 8$

إذا كان الاقتران $f(x) = \sqrt{100-x^2}$؛ فأُجيب عمّا يأتي:

9) أجد مشتقّة الاقتران عند النقطة $P(-6, 8)$.

10) أُثبتُ أنّ المستقيم الواصل بين نقطة الأصل والنقطة P عموديٌّ على مماس الاقتران عند النقطة P.

تلوُّث: توصّلت دراسة بيئية إلى نمذجة مقدار التلوُّث في إحدى البحيرات باستعمال الاقتران: $P(t) = (t^{\frac{1}{4}}+3)^3$، حيث t الزمن بالسنوات، علمًا بأنَّ P يقاس بأجزاء من المليون:

11) أجد مُعدَّل تغيُّر مقدار التلوُّث في البحيرة بالنسبة إلى الزمن t.

12) أجد مُعدَّل تغيُّر مقدار التلوُّث في البحيرة بعد 16 عامًا.

إذا كان: $g(-2) = 8, g'(-2) = 4, h(5) = -2, h'(5) = 6$، فأجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي عندما $x = 5$:

13) $f(x) = g(h(x))$

14) $f(x) = 4(h(x))^2$