



إدارة المناهج والكتب المدرسية

الرياضيات

الصف الثاني عشر

للفرعين
الأدبي، والفندقي والسياحي

الرياضيات

الصف الثاني عشر

للفرعين الأدبي، والفندقي والسياحي

٢٠١٩م / ١٤٤٠هـ

ISBN:978-9957-84-782-1



9 789957 847821

الوطنية



إدارة المناهج والكتب المدرسية

الرياضيات

الصف الثاني عشر

للفرعين

الأدبي، والفندقي والسياحي

الناشر

وزارة التربية والتعليم

إدارة المناهج والكتب المدرسية

يسر إدارة المناهج والكتب المدرسية استقبال آرائكم وملاحظاتكم على هذا الكتاب على العناوين الآتية:

هاتف: ٤٦١٧٣٠٤/٥٠٨ فاكس: ٤٦٣٧٥٦٩ ص.ب: ١٩٣٠ الرمز البريدي: ١١١١٨

أو على البريد الإلكتروني: E-mail: Scientific.Division@moe.gov.jo

قررت وزارة التربية والتعليم تدرّس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار مجلس التربية والتعليم رقم ٢٠١٧/٣، تاريخ ١٧/١/٢٠١٧م، بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٧م/٢٠١٨م.

الحقوق جميعها محفوظة لوزارة التربية والتعليم

عمان / الأردن - ص . ب : ١٩٣٠

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية

(٢٠١٧ / ٣ / ١٥٨٠)

ISBN: 978 - 9957 - 84 - 782 - 1

أشرف على تأليف هذا الكتاب كل من:

أ.د. حسن زارع هديب (رئيساً) أ.د. أحمد عبد الله رحيل
أ.د. عبد الله محمد ربابعة د. معاذ محمود الشياب

وقام بتأليفه كل من:

جهاد حسين أبو الركب د. أحمد جميل المساعفة
إسماعيل علي صالح روان يوسف علي
ربي غسان المدني

التحرير العلمي: نئين أحمد جوهر

التحرير اللغوي: نضال أحمد موسى التصميم: هاني سلطي مقطش
التحرير الفني: نداء فؤاد أبوشنب الرسم: فايزة فايز حداد

الإنتاج: سليمان أحمد الخلايلة

دقق الطباعة وراجعها: نئين أحمد جوهر

٢٠١٧م / ١٤٣٨هـ

٢٠١٨-٢٠١٩م

الطبعة الأولى

أعيدت طباعته

الفصل الدراسي الأول

١٠

الوحدة الأولى: النهايات والاتصال

١٢ الفصل الأول: النهايات
١٢ أولاً: مفهوم النهاية
٢١ ثانيًا: نظريات النهايات
٣٣ ثالثًا: نهاية خارج قسمة اقترانين
٤١ رابعًا: نهاية اقتران الجذر النوني
٤٦ الفصل الثاني: الاتصال
٤٦ أولاً: الاتصال عند نقطة
٥٥ ثانيًا: نظريات الاتصال
٦٣ أسئلة الوحدة

٦٦

الوحدة الثانية: التفاضل

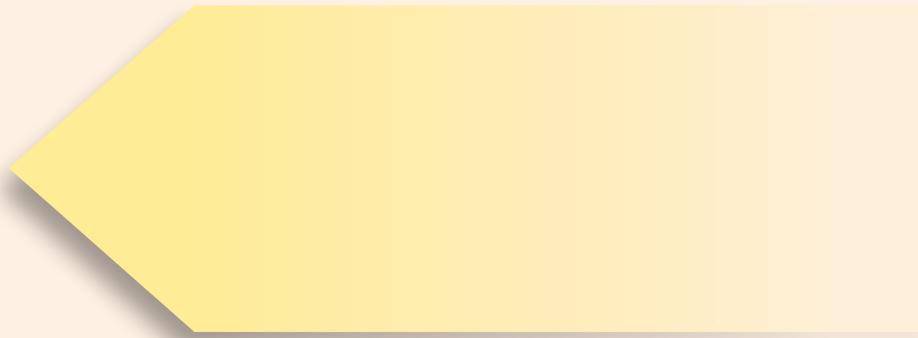
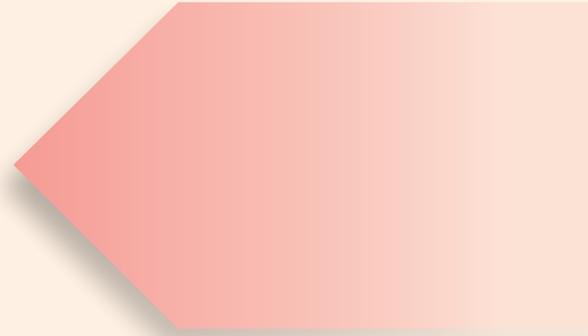
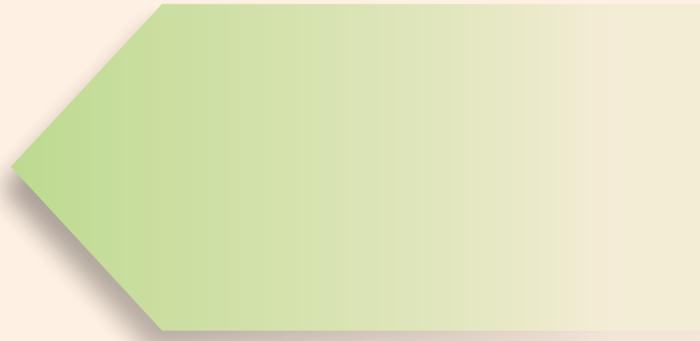
٦٨ الفصل الأول: المشتقة
٦٨ أولاً: معدل التغير
٧٩ ثانيًا: المشتقة الأولى
٨٧ الفصل الثاني: قواعد الاشتقاق والمشتقات العليا
٨٧ أولاً: قواعد الاشتقاق
٩٦ ثانيًا: قاعدة السلسلة
١٠٢ ثالثًا: مشتقات الاقترانات المثلثية
١٠٨ رابعًا: المشتقات العليا
١١٢ أسئلة الوحدة

١١٨ الفصل الأول: التفسير الهندسي والفيزيائي للمشتقة
١١٨ أولاً : التفسير الهندسي
١٢٢ ثانياً: التفسير الفيزيائي
١٢٦ الفصل الثاني: تطبيقات الاشتقاق
١٢٦ أولاً : التزايد والتناقص
١٣٣ ثانياً: القيم القصوى
١٤٢ الفصل الثالث: تطبيقات
١٤٢ أولاً : تطبيقات على القيم القصوى
١٤٩ ثانياً: تطبيقات اقتصادية على التفاضل
١٥٤ أسئلة الوحدة

الفصل الدراسي الثاني

١٦٠ الفصل الأول: التكامل
١٦٠ أولاً : التكامل غير المحدود
١٦٨ ثانياً: التكامل المحدود
١٧٢ ثالثاً: خصائص التكامل المحدود
١٧٨ رابعاً: التكامل بالتعويض
١٨٥ الفصل الثاني: تطبيقات التكامل
١٨٥ أولاً : تطبيقات هندسية
١٨٩ ثانياً: تطبيقات فيزيائية
١٩٣ ثالثاً: المساحة
٢٠١ الفصل الثالث: الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي والأسّي الطبيعي وتطبيقاتهما
٢٠١ أولاً : الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي والأسّي الطبيعي
٢١٠ ثانياً: النمو والاضمحلال
٢١٥ أسئلة الوحدة

٢٢٠	الفصل الأول: طرائق العد
٢٢٠	أولاً: مبدأ العد
٢٢٩	ثانياً: التباديل
٢٣٤	ثالثاً: التوافيق
٢٣٩	الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة
٢٣٩	أولاً: المتغير العشوائي المنفصل وتوزيع ذي الحدين
٢٤٦	ثانياً: العلامة المعيارية
٢٥٢	ثالثاً: التوزيع الطبيعي
٢٦٠	الفصل الثالث: الارتباط والانحدار
٢٦٠	أولاً: الارتباط
٢٧٠	ثانياً: خط الانحدار
٢٧٦	أسئلة الوحدة
٢٧٨	ملحق: جدول التوزيع الطبيعي المعياري
٢٧٩	قائمة المراجع



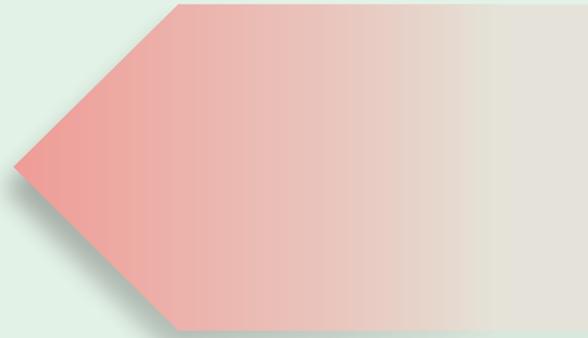
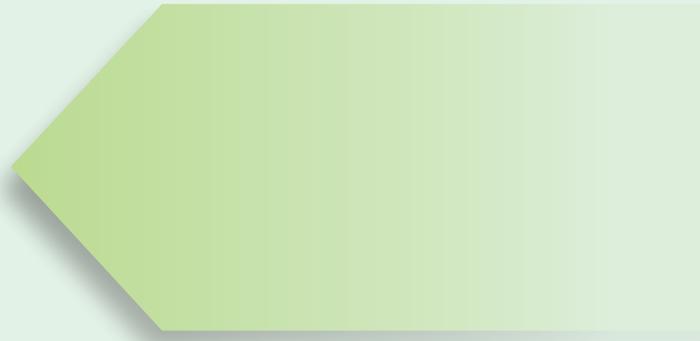
نضع بين أيدي أبنائنا الطلبة وزملائنا المعلمين كتاب الرياضيات للصف الثاني عشر للفرعين الأدبي، والفندقي والسياحي، انسجامًا مع النتاجات العامة والخاصة للمبحث، ومراعاةً لمبادئ ومعايير العمليات والمحتوى العالمية في إعداد المحتوى، مثل: حل المسألة، والتبرير والبرهان، والربط، والتواصل، والتمثيل، والنمذجة، وذلك باستخدام أساليب متنوعة تشمل أسئلة تحدّث، وفكّر وناقش، وحل أسئلة عدة بأكثر من طريقة، لتنمية مهارات التواصل الرياضي، والتفكير الناقد لدى الطلبة، وإكسابهم مرونة التفكير.

روعي في إعداد هذا الكتاب التركيز على عرض المفهوم باستخدام الرسوم التوضيحية، والألوان، والأشكال المختلفة، مثل: تفسير الاتصال عند نقطة هندسيًا.

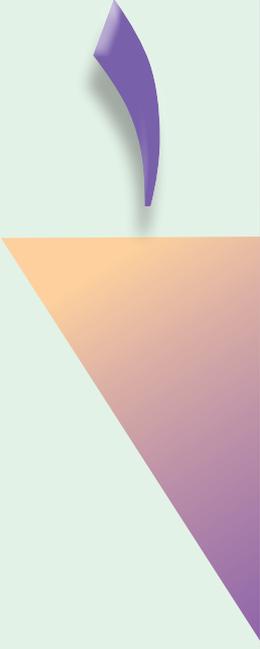
يتكون الكتاب من خمس وحدات موزعة على فصلين دراسيين، حيث يضم الفصل الأول ثلاث وحدات، هي: النهايات والاتصال، والتفاضل، وتطبيقات التفاضل.

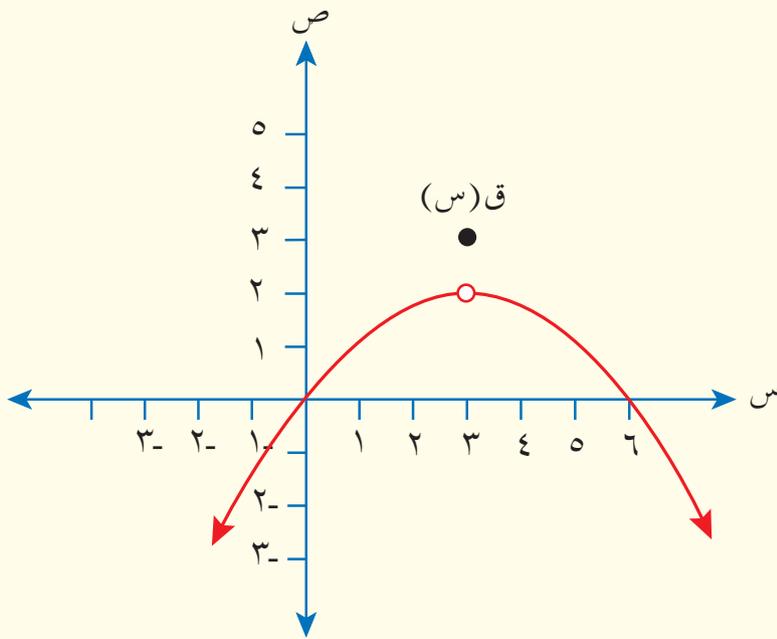
أما الفصل الدراسي الثاني فيضم وحدتي التكامل وتطبيقاته، والإحصاء والاحتمالات.

ونسأل الله العلي العظيم أن نكون قد وفقنا في تقديم هذا الكتاب ليكون نافعًا ومفيدًا.



الفصل الدراسي الأول





يعد التفاضل والتكامل أحد أهم محاور الرياضيات الرئيسة التي تعنى بحل المسائل التطبيقية المتنوعة في المجالات الهندسية والفيزيائية والاقتصادية. أما اللبنة الأساسية لفهم هذا المحور فتتمثل في موضوع النهايات الذي يبحث في سلوك الاقتران عندما يقترب المتغير s من عدد محدد، وموضوع الاتصال الذي يصف منحنى الاقتران، والذي يبين إذا كان يوجد اتصال عند نقطة محددة أم لا، واصفاً شكل عدم الاتصال هندسيًا.

Limits and Continuity

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- تفسير مفهوم النهاية والصيغة المستخدمة في التعبير عن نهاية اقتران عند نقطة.
- حساب نهاية اقتران (كثير حدود، نسبي، متشعب) بيانياً وجبرياً.
- تمييز نهاية اقتران عند نقطة، وقيمه عند هذه النقطة.
- دراسة الاتصال عند نقطة للاقتران كثيرات الحدود، والاقتران المتشعبة، والاقتران النسبية.

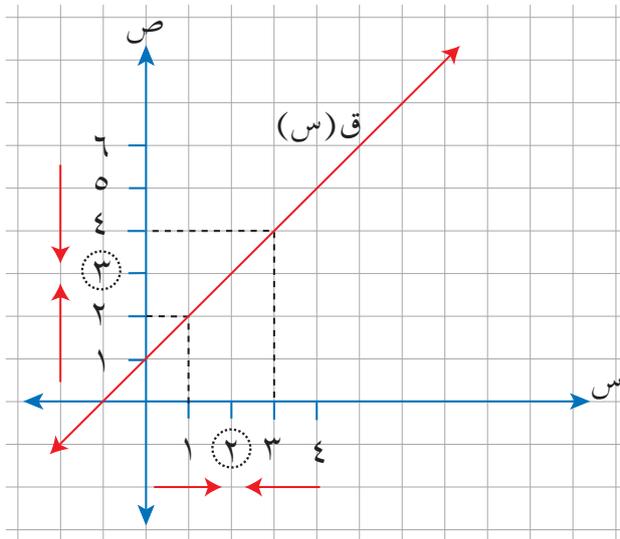
النتائج

- ◀ تفسر مفهوم النهاية.
- ◀ تستخدم الرموز في التعبير عن نهاية اقتران عند نقطة.
- ◀ تحسب نهاية اقتران (كثير حدود، نسبي، متشعب) بيانياً وجبرياً.
- ◀ تميز نهاية اقتران عند نقطة، وقيمته عند هذه النقطة.

Concept of Limit

مفهوم النهاية

أولاً



الشكل (١-١).

اعتماداً على الشكل (١-١) الذي يمثل منحنى الاقتران $ق(س) = س + ١$ ، أجب عن السؤالين الآتيين:

- (١) ما القيمة التي يقترب منها الاقتران $ق$ عندما تقترب $س$ من العدد ٢ من جهة اليمين؟
- (٢) ما القيمة التي يقترب منها الاقتران $ق$ عندما تقترب $س$ من العدد ٢ من جهة اليسار؟

تعرفت في صفوف سابقة كيف تجد صورة عدد تحت تأثير اقتران معين، وستتعرف في هذا الفصل سلوك الاقتران عندما يقترب متغيره من عدد ما، حتى لو لم يكن الاقتران معرفاً عند هذا العدد. إذا أردت دراسة سلوك الاقتران $ق(س) = س + ١$ عندما تقترب $س$ من العدد ٢، فأنشئ جدولاً تحدد فيه قيمًا للمتغير $س$ حول العدد ٢، بحيث يكون بعضها أكبر من ٢، وبعضها الآخر أقل من ٢، ثم احسب قيم $ق(س)$ المناظرة لها كما يأتي:

← ٢ →										
١	١,١	١,٥	١,٩	١,٩٩٩	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١	٢,٥	٣	س
٢	٢,١	٢,٥	٢,٩	٢,٩٩٩	٣,٠٠١	٣,٠١	٣,١	٣,٥	٤	ق(س)
← ٣ →										

لاحظ من الجدول أنه عندما تقترب س من العدد ٢ من جهة اليمين (أكبر من ٢)، فإن ق(س) تقترب من العدد ٣، وأنه عندما تقترب س من العدد ٢ من جهة اليسار (أقل من ٢)، فإن ق(س) تقترب من العدد ٣، انظر الشكل (١-١).

عندما تقترب س من العدد ٢ من جهة اليمين (س < ٢)، فإن ق(س) تقترب من العدد ٣، وبالرموز:

$$\text{نهاق(س)} = ٣$$

$$\text{س} \leftarrow +٢$$

وتقرأ: نهاية الاقتران ق(س) عندما تقترب قيم س من العدد ٢ من جهة اليمين تساوي ٣. وعندما تقترب س من العدد ٢ من جهة اليسار (س > ٢)، فإن ق(س) تقترب من العدد ٣، وبالرموز:

$$\text{نهاق(س)} = ٣$$

$$\text{س} \leftarrow -٢$$

وتقرأ: نهاية الاقتران ق(س) عندما تقترب قيم س من العدد ٢ من جهة اليسار تساوي ٣.

لاحظ في هذا المثال أن:

$$\text{نهاق(س)} \leftarrow +٢ = \text{نهاق(س)} \leftarrow -٢ = ٣$$

أي إن ق(س) تقترب من العدد ٣ كلما اقتربت س من العدد ٢ من كلا الاتجاهين (اليسار، واليمين)، وبالرموز:

$$\text{نهاق(س)} = ٣$$

$$\text{س} \leftarrow ٢$$

تعريف

ليكن ق اقتراناً معرفاً على فترة مفتوحة حول العدد أ. فإذا اقتربت قيم الاقتران ق من العدد ل عندما يقترب المتغير س من العدد أ، فإن ل هي نهاية الاقتران ق عندما تقترب س من العدد أ، وبالرموز:

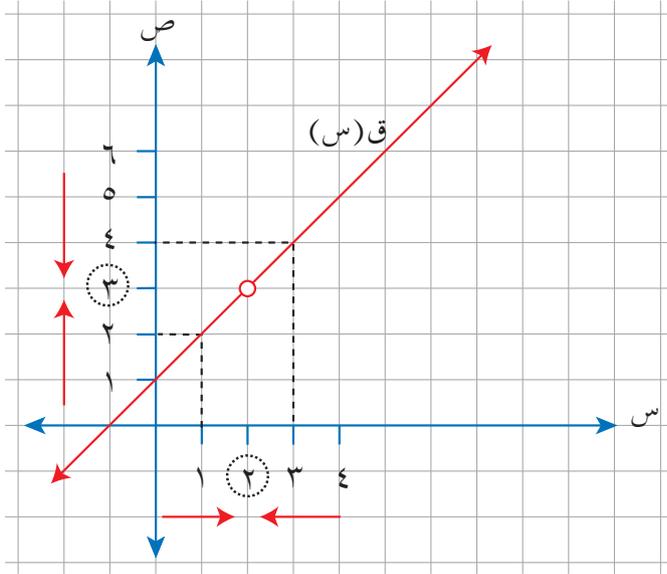
$$\text{نهاق(س)} = ل$$

$$\text{س} \leftarrow أ$$

مثال (١)

اعتمادًا على الشكل (١-٢) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{س^2 - س - ٢}{س - ٢}$ ،

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):



الشكل (١-٢).

(١) ق (٢)

(٢) نها ق(س)
س ← +٢

(٣) نها ق(س)
س ← -٢

(٤) نها ق(س)
س ← ٢

الحل

(١) لاحظ أن مجال الاقتران ق هو ح - {٢} (لماذا؟).

لذا فإن ق(س) غير معرف عندما س = ٢ ، وقد أشير إلى ذلك برسم دائرة صغيرة ضمن

منحنى الاقتران ق عندما س = ٢

(٢) نها ق(س) = ٣
س ← +٢

(٣) نها ق(س) = ٣
س ← -٢

(٤) لاحظ في هذا المثال أن نها ق(س) = نها ق(س) = ٣ ؛ أي إن قيم ق(س)
س ← +٢ س ← -٢

تقترب من العدد ٣ كلما اقتربت قيم س من العدد ٢ من كلا الاتجاهين (اليسار، واليمين)،

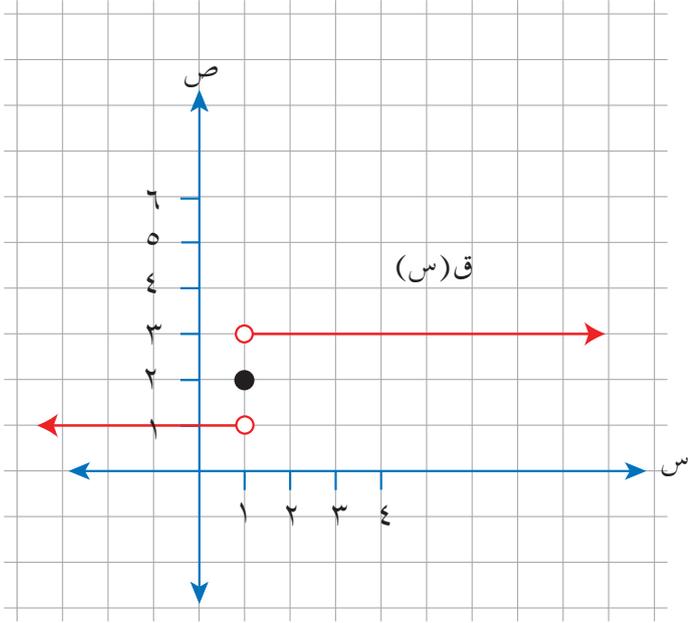
وبالرموز:

نها ق(س) = ٣
س ← ٢

مثال (٢)

اعتمادًا على الشكل (٣-١) الذي يمثل منحنى الاقتران المتشعب

$$\left. \begin{array}{l} 1 > s, \quad 1 \\ 1 = s, \quad 2 \\ 1 < s, \quad 3 \end{array} \right\} = (s) \text{ ق}$$



الشكل (٣-١).

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

(١) ق (١)

(٢) نها ق (س)
س ← -١

(٣) نها ق (س)
س ← +١

(٤) نها ق (س)
س ← ١

الحل

لاحظ أن ق اقتران متشعب عندما $s = 1$ ، ومن الشكل نجد أن:

(١) ق (١) = ٢

(٢) نها ق (س) = ١
س ← -١

(٣) نها ق (س) = ٣
س ← +١

(٤) بما أن نها ق (س) \neq نها ق (س)، فإننا نصف سلوك منحنى الاقتران ق
س ← -١ س ← -١

عندما تقترب قيم س من العدد ١ بالقول إن **النهاية غير موجودة**،

وبالرموز: نها ق (س) غير موجودة.
س ← ١

وهذا يعني أنه لتكون نهـا ق(س) موجودة، لا بد من وجود نهـا ق(س) و نهـا ق(س)،
 $\begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{أ} \\ \text{س} \leftarrow \text{أ} \end{matrix}$

وأن تكون نهـا ق(س) = نهـا ق(س)
 $\begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{أ} \\ \text{س} \leftarrow \text{أ} \end{matrix}$

نهـا ق(س) = نهـا ق(س) = ل إذا فقط إذا كانت نهـا ق(س) = ل
 $\begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{أ} \\ \text{س} \leftarrow \text{أ} \end{matrix}$

أما إذا كانت نهـا ق(س) \neq نهـا ق(س) فإن نهـا ق(س) غير موجودة.
 $\begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{أ} \\ \text{س} \leftarrow \text{أ} \end{matrix}$

تحدث وناقش

وضح لزميلك بالكلمات شرط وجود نهاية اقتران عند عدد محدد.

تدريب ١

اعتمادًا على الشكل (١-٤) الذي يمثل منحنى الاقتران

$$ق(س) = \frac{س^2 - ٩}{س - ٣}$$

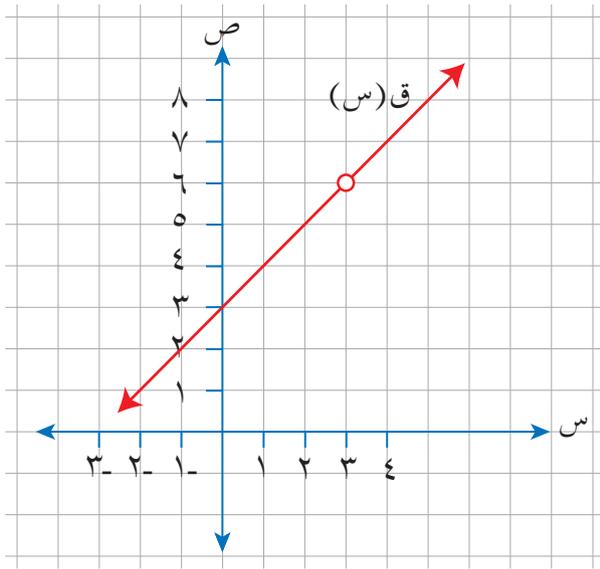
جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

(٢) نهـا ق(س)
 $\begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{س} \\ \text{س} \leftarrow \text{س} \end{matrix}$

(١) ق(٣)

(٤) نهـا ق(س)
 $\begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{س} \\ \text{س} \leftarrow \text{س} \end{matrix}$

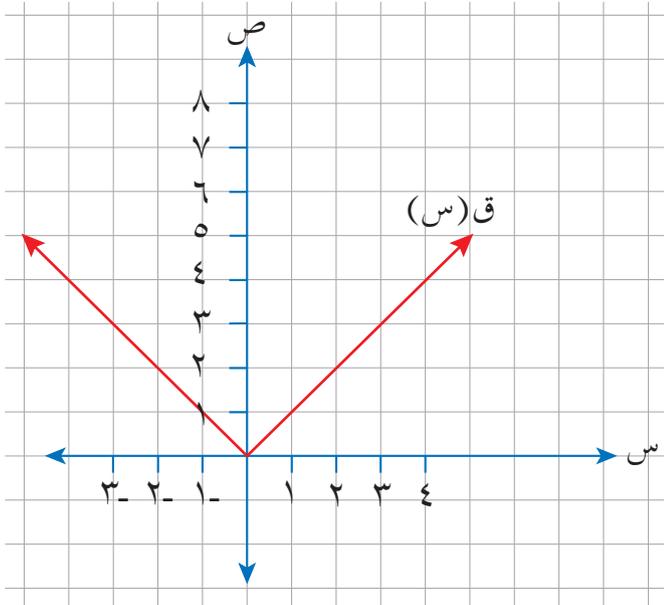
(٣) نهـا ق(س)
 $\begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{س} \\ \text{س} \leftarrow \text{س} \end{matrix}$



الشكل (١-٤).

مثال (٣)

اعتمادًا على الشكل (٥-١) الذي يمثل منحنى الاقتران



الشكل (٥-١).

$$\left. \begin{array}{l} \text{ق(س)} = \text{س} - \text{س} \\ \text{ق(س)} = \text{س} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{س} > 0 \\ \text{س} \leq 0 \end{array}$$

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

(١) ق(٠)

(٢) نهاق(س) ، $\text{س} \leftarrow 2$

(٣) نهاق(س) ، $\text{س} \leftarrow 0$

الحل

نلاحظ من الشكل (٥-١) أن:

(١) ق(٠) = ٠

(٢) نهاق(س) = ٢ ، $\text{س} \leftarrow 2$ ، نهاق(س) = ٢ ، $\text{س} \leftarrow 2$

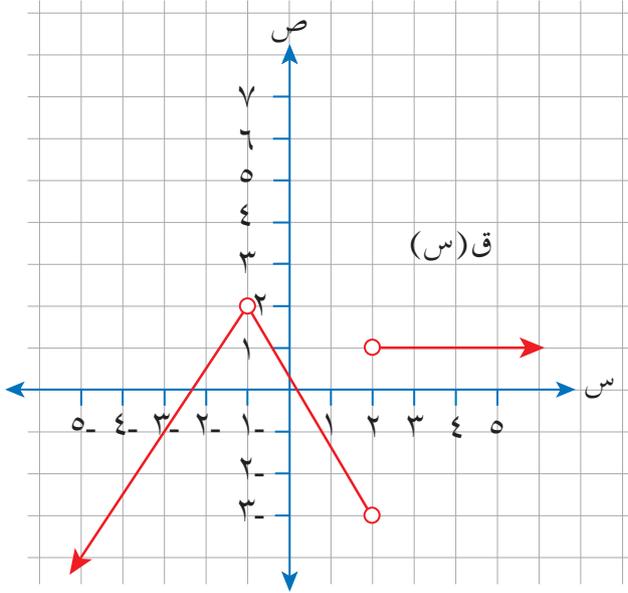
∴ نهاق(س) = ٢ ، $\text{س} \leftarrow 2$

(٣) نهاق(س) = ٠ ، $\text{س} \leftarrow 0$ ، نهاق(س) = ٠ ، $\text{س} \leftarrow 0$

∴ نهاق(س) = ٠ ، $\text{س} \leftarrow 0$

اعتمادًا على الشكل (٦-١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق،

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):



الشكل (٦-١).

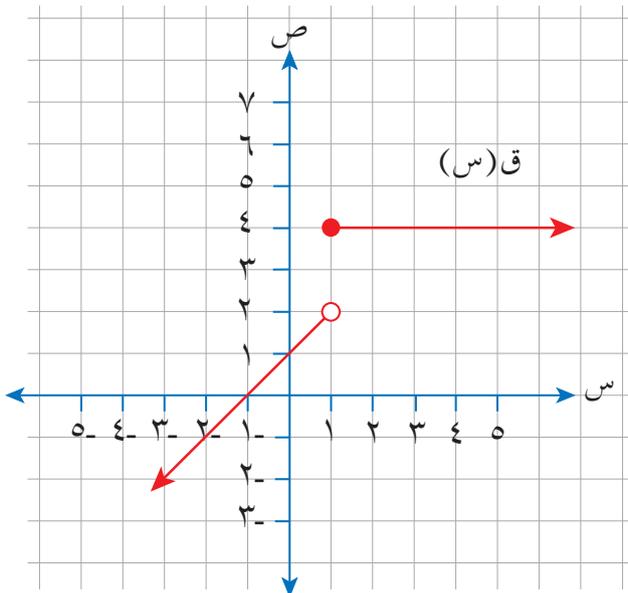
(١) نها ق (س) $s \leftarrow 1$

(٢) نها ق (س) $s \leftarrow 2$

(٣) نها ق (س) $s \leftarrow 3$

مثال (٤)

اعتمادًا على الشكل (٧-١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، جد كلاً مما يأتي:



الشكل (٧-١).

(١) قيمة الثابت أ، حيث نها ق (س) $s \leftarrow 1 =$

(٢) قيمة الثابت ب، حيث

نها ق (س) $s \leftarrow 0 =$

(٣) قيمة الثابت ج، حيث

نها ق (س) غير موجودة. $s \leftarrow ج$

$$(1) \text{ بما أن نهـاق (س) = 1- ، فإن نهـاق (س) = نهـاق (س) = 1- } \begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{أ} \\ \text{س} \leftarrow \text{أ}^+ \end{matrix}$$

يتبين من الشكل (٧-١) أنه عندما تكون ق(س) $\leftarrow 1-$ فإن قيمة س تكون قد اقتربت

من العدد ٢- ، إذن: $2- = \text{أ}$

$$(2) \text{ نهـاق (س) = ٠ } \begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{ب} \end{matrix}$$

يتبين من الشكل (٧-١) أن ق(س) $\leftarrow ٠$ عندما س $\leftarrow 1-$ ، ومنه فإن ب = ١-

$$(3) \text{ نهـاق (س) غير موجودة، إذن: نهـاق (س) } \neq \text{نهـاق (س)} \begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{ج}^- \\ \text{س} \leftarrow \text{ج}^+ \end{matrix}$$

وهذا يتحقق عندما س $\leftarrow 1$ ، إذن: ج = ١

تدريب ٣

اعتمادًا على الشكل (٨-١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق،

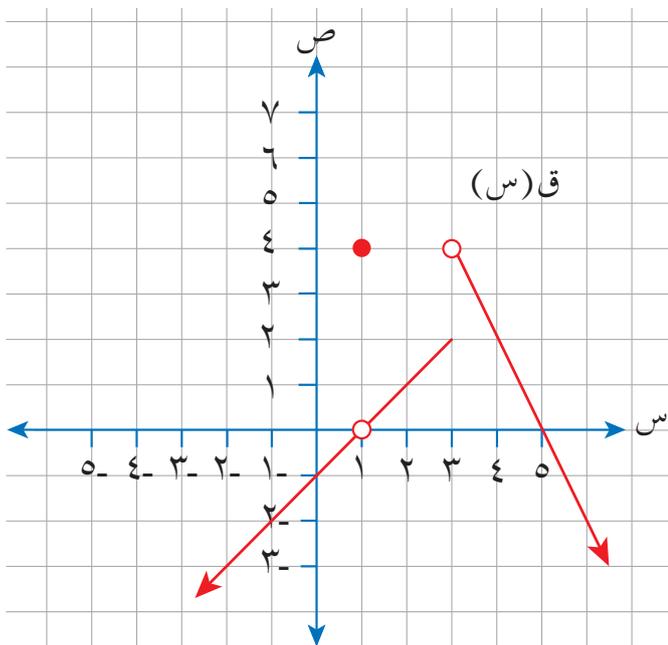
جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

$$(1) \text{ نهـاق (س) } \begin{matrix} \text{س} \leftarrow 2 \end{matrix}$$

$$(2) \text{ الثابت أ، حيث نهـاق (س) = ٠ } \begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{أ} \end{matrix}$$

$$(3) \text{ الثابت ب، حيث نهـاق (س) } \begin{matrix} \text{س} \leftarrow \text{ب} \end{matrix}$$

غير موجودة.



الشكل (٨-١).

الأسئلة

(١) اعتمادًا على الشكل (٩-١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{4-s^2}{2-s}$ ،

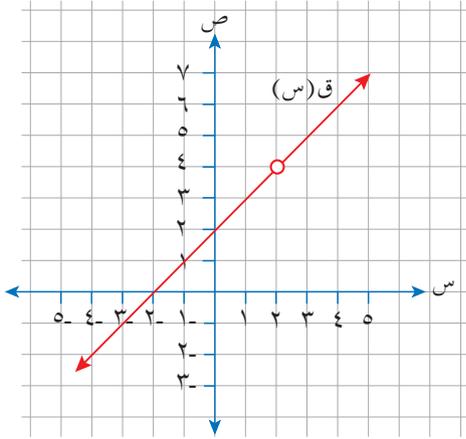
جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) ق(٢)

ب) نهاق(س)
س ← ٢

ج) ق(٣)

د) نهاق(س)
س ← ٣



الشكل (٩-١).

(٢) اعتمادًا على الشكل (١٠-١) الذي يمثل منحنى

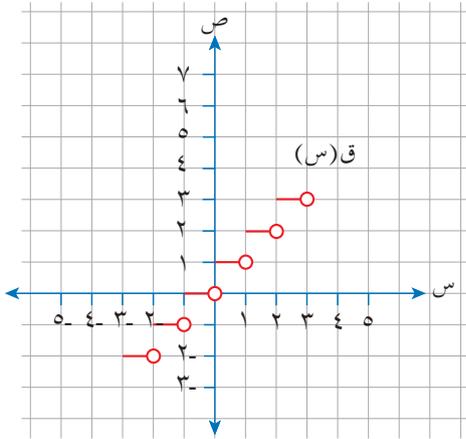
الاقتران ق، جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) نهاق(س)
س ← ٠,٥

ب) نهاق(س)
س ← ٢+

ج) نهاق(س)
س ← -٢

د) نهاق(س)
س ← ٢



الشكل (١٠-١).

(٣) اعتمادًا على الشكل (١١-١) الذي يمثل

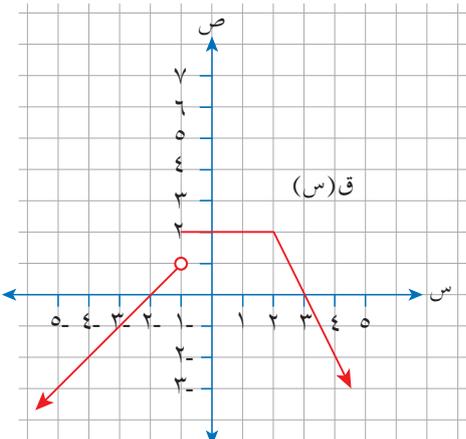
منحنى الاقتران ق، جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) نهاق(س)
س ← ٢

ب) نهاق(س)
س ← ١

ج) قيمة أ، حيث نهاق(س) غير موجودة.
س ← أ

د) قيم ب، حيث نهاق(س) = صفرًا.
س ← ب



الشكل (١١-١).

إذا كان ق، هـ اقترانين معرفين على مجموعة الأعداد الحقيقية ح، وكان ل، م عددين

حقيقيين، حيث:

$$\text{نهاق (س) ل} = \text{نها هـ (س) م،} \\ \text{س} \leftarrow \text{أ} \quad \text{س} \leftarrow \text{أ}$$

$$\text{جد نها (ق (س) + هـ (س))} \\ \text{س} \leftarrow \text{أ}$$

للإجابة عن هذا السؤال، يتعين الاستعانة بنظريات خاصة بالنهايات تسهل إيجاد نهاية اقتران عند نقطة، أو نهاية مجموع اقترانين، أو حاصل ضربهما، أو ناتج قسمتهما عند نقطة، من دون الحاجة إلى تمثيلها بيانيًا.

نشاط

(١) اعتمادًا على الشكل (١-١٢) الذي يمثل منحنى كثير الحدود ق(س) = ٣، أجب عما يأتي:

أ) ما درجة الاقتران ق؟ ما نوعه؟

ب) جد قيمة كل من:

$$\text{نهاق (س) ق} \\ \text{س} \leftarrow ٢$$

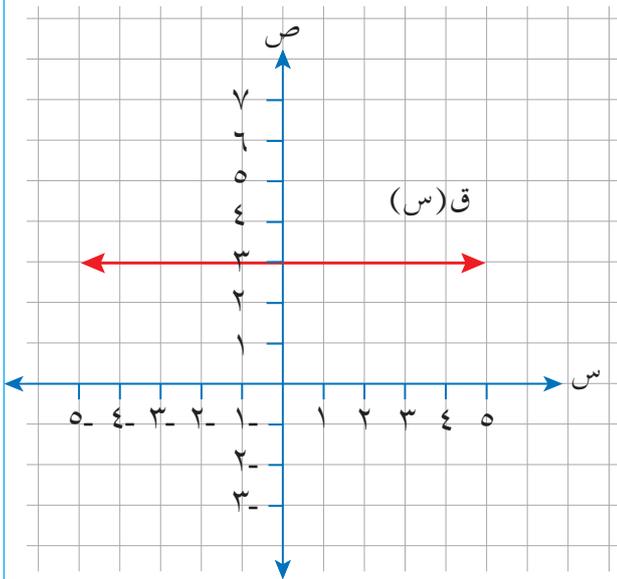
$$\text{نهاق (س) ق} \\ \text{س} \leftarrow ٠$$

$$\text{نهاق (س) ق} \\ \text{س} \leftarrow -٢$$

ج) جد مجموعة قيم الثابت أ، حيث

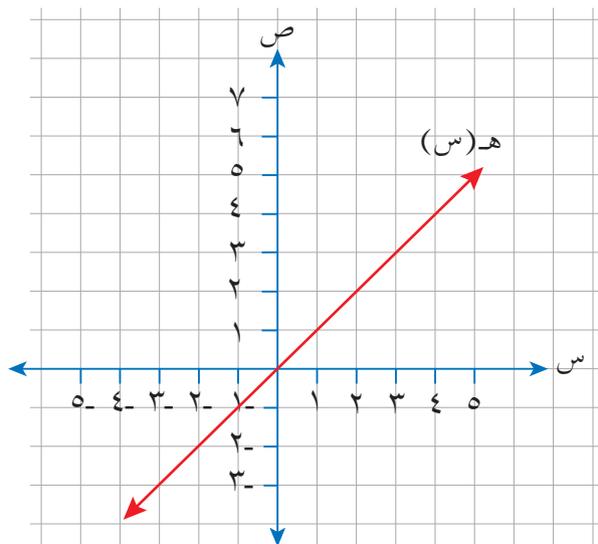
$$\text{نهاق (س) ق} = ٣ \\ \text{س} \leftarrow \text{أ}$$

د) ماذا تلاحظ؟



الشكل (١-١٢).

٢) اعتماداً على الشكل (١-١٣) الذي يمثل منحني الاقتران هـ (س) = س، أجب عن الأسئلة الآتية:



الشكل (١-١٣).

أ) ما درجة الاقتران هـ؟ ما نوعه؟

ب) جد قيمة كل من:

نها هـ (س)
س ← ٢

نها هـ (س)
س ← ٠

نها هـ (س)
س ← ٢

ج) ماذا تلاحظ؟

نظرية (١)

إذا كان أ، ج عددين حقيقيين، وكان:

$$(١) \text{ ق (س) = ج لقيم س جميعها، فإن نها ق (س) = ج } \\ \text{س ← أ}$$

$$\text{أي إن نها ج = ج } \\ \text{س ← أ}$$

$$(٢) \text{ ق (س) = س، فإن نها ق (س) = أ } \\ \text{س ← أ}$$

$$\text{أي إن نها س = أ } \\ \text{س ← أ}$$

تحدث وناقش

عبّر بالكلمات عن النظرية (١).

تساعدك النظرية السابقة على إيجاد نهاية الاقتران الثابت أو الاقتران كثير الحدود من الدرجة الأولى عند عدد معين. ولكن، كيف تجد نهاية مجموع اقترانين، أو نهاية حاصل ضربهما عند عدد ما؟

إذا كانت أ، ل، ك، أعدادًا حقيقية، وكانت نهـاق (س) = ل، نهـاهـ (س) = ك، فإن:

$$(١) \text{ نهـاق (س) + نهـاهـ (س) = نهـاق (س) + نهـاهـ (س) = ل + ك}$$

$$(٢) \text{ نهـاق (س) - نهـاهـ (س) = نهـاق (س) - نهـاهـ (س) = ل - ك}$$

$$(٣) \text{ نهـاق (س) \times نهـاهـ (س) = نهـاق (س) \times نهـاهـ (س) = ل \times ك}$$

مثال (١)

إذا علمت أن نهـاق (س) = ٩، نهـاهـ (س) = -٣، فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

$$(١) \text{ نهـاق (س) + نهـاهـ (س)}$$

$$(٢) \text{ نهـاق (س) \times نهـاهـ (س)}$$

الحل

$$(١) \text{ نهـاق (س) + نهـاهـ (س) = نهـاق (س) + نهـاهـ (س)}$$

$$٩ + (-٣) = ٦$$

$$(٢) \text{ نهـاق (س) \times نهـاهـ (س) = نهـاق (س) \times نهـاهـ (س)}$$

$$٩ \times (-٣) = -٢٧$$

إذا علمت أن نهيا (س - ١) = ١، نهيا (س + ١) = ٣، فجد قيمة كل مما يأتي:

$$(١) \text{ نهيا } (س - ١) \text{ س}$$

$$(٢) \text{ نهيا } ٢ \text{ س}$$

الحل

$$(١) \text{ لاحظ أن } ١ - س = (١ - س) = (١ + س)$$

$$\therefore \text{ نهيا } (س - ١) \text{ س} = \text{نهيا } (س - ١) \text{ س}$$

$$٣ = ٣ \times ١ = \text{نهيا } (س + ١) \text{ س} = \text{نهيا } (س - ١) \text{ س}$$

$$(٢) \text{ لاحظ أن } ٢ \text{ س} = (س - ١) + (س + ١)$$

$$\therefore \text{ نهيا } ٢ \text{ س} = \text{نهيا } ((س - ١) + (س + ١)) \text{ س}$$

$$٤ = ٣ + ١ = \text{نهيا } (س - ١) \text{ س} + \text{نهيا } (س + ١) \text{ س}$$

تعلمت أن نهاية الاقتران الثابت عند عدد ما تساوي قيمة هذا الثابت، وأن نهاية حاصل ضرب اقترانين عند عدد ما تساوي حاصل ضرب نهايتي الاقترانين عند هذا العدد، فكيف تجد نهاية حاصل ضرب ثابت في اقتران عند عدد ما؟

إذا كانت أ، ج، ل أعدادًا حقيقية، وكانت نهـا ق(س) = ل، فإن:

$$\text{نهـا ج ق(س)} = \text{ج} \times \text{نهـا ق(س)} = \text{ج} \times \text{ل}$$

يمكن تعميم الجزأين الأول والثالث من النظرية (٢) على أي عدد من الاقتارات وفق النتيجة الآتية:

إذا كانت نهاية كل من ق_١(س)، ق_٢(س)، ...، ق_١(س) موجودة عند س = أ، فإن:

$$(١) \text{ نهـا ق(س)} = \text{ق(س)} + \text{ق(س)} + \dots + \text{ق(س)}$$

$$= \text{نهـا ق(س)} + \text{نهـا ق(س)} + \dots + \text{نهـا ق(س)}$$

$$(٢) \text{ نهـا ق(س)} = \text{ق(س)} \times \text{ق(س)} \times \dots \times \text{ق(س)}$$

$$= \text{نهـا ق(س)} \times \text{نهـا ق(س)} \times \dots \times \text{نهـا ق(س)}$$

لاحظ من الفرع (٢) للنتيجة (٢) أن:

$$\text{نهـا ق(س)}^n = \underbrace{\text{نهـا ق(س)} \times \text{نهـا ق(س)} \times \dots \times \text{نهـا ق(س)}}_{\text{ن من المرات}} \text{، حيث ن عدد طبيعي.}$$

$$= \underbrace{\text{نهـا ق(س)} \times \text{نهـا ق(س)} \times \dots \times \text{نهـا ق(س)}}_{\text{ن من المرات}}$$

$$= (\text{نهـا ق(س)})^n$$

مثال (٣)

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

$$(1) \text{ نها } \begin{matrix} 3 \\ \leftarrow \\ \text{س} \end{matrix} \quad (2) \text{ نها } \begin{matrix} 3 \\ \leftarrow \\ \text{س} \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ \leftarrow \\ \text{س} \end{matrix} 4 - \begin{matrix} 5 \\ \leftarrow \\ \text{س} \end{matrix} - 7$$

الحل

$$(1) \text{ نها } \begin{matrix} 3 \\ \leftarrow \\ \text{س} \end{matrix} = \begin{matrix} 3 \\ \leftarrow \\ \text{س} \end{matrix} (3) = 27$$

$$(2) \text{ نها } \begin{matrix} 3 \\ \leftarrow \\ \text{س} \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ \leftarrow \\ \text{س} \end{matrix} 4 - \begin{matrix} 5 \\ \leftarrow \\ \text{س} \end{matrix} - \begin{matrix} 7 \\ \leftarrow \\ \text{س} \end{matrix} = \begin{matrix} 3 \\ \leftarrow \\ \text{س} \end{matrix} 4 - \begin{matrix} 5 \\ \leftarrow \\ \text{س} \end{matrix} - \begin{matrix} 7 \\ \leftarrow \\ \text{س} \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 3 \\ \leftarrow \\ \text{س} \end{matrix} (4) - \begin{matrix} 5 \\ \leftarrow \\ \text{س} \end{matrix} - \begin{matrix} 7 \\ \leftarrow \\ \text{س} \end{matrix} =$$

$$7 = 7 - 10 - 16 + 8 =$$

الاقتران الوارد في المثال السابق هو اقتران كثير حدود. ومن النتائج السابقة يمكن صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة ٣

إذا كان الاقتران ق كثير حدود، فإن نها ق (س) = ق (أ)

أي إن نهاية اقتران كثير الحدود عند عدد ما تساوي قيمته عند هذا العدد، وتحسب بالتعويض المباشر.

مثال (٤)

$$\text{جد قيمة نها } \begin{matrix} 3 \\ \leftarrow \\ \text{س} \end{matrix} 3 + 5 + 7$$

الحل

بما أن ق (س) = $\begin{matrix} 3 \\ \leftarrow \\ \text{س} \end{matrix} 3 + 5 + 7$ اقتران كثير حدود، فإن:

$$\text{نها ق (س)} = \text{ق (1)} = \begin{matrix} 3 \\ \leftarrow \\ \text{س} \end{matrix} 3 + 5 + 7 = 10$$

تدريب ١

جد قيمة كل مما يأتي:

$$(1) \text{ نهيا } (س^6 - ٥س^٢ + ٤س + ٩) \text{ س } \leftarrow ١$$

$$(2) \text{ نهيا } (٧س^٢ + ٥س) (س^٢ + س - ١٠) \text{ س } \leftarrow ١$$

$$(3) \text{ نهيا } (س^٢ + ٥س)^٣ \text{ س } \leftarrow ١$$

مثال (٥)

إذا علمت أن نهيا $(س + ١ + (س) ق)$ ، فجد قيمة نهيا $(س) ق$ $\leftarrow ٢$

الحل

نجد نهيا $ق(س)$ أولاً. $\leftarrow ٢$

$$\text{نهيا } (س + ١ + (س) ق) = ٩ \text{ س } \leftarrow ٢$$

$$\text{نهيا } ق(س) + \text{نهيا } س + \text{نهيا } ١ = ٩ \text{ س } \leftarrow ٢$$

$$\text{نهيا } ق(س) + ٢ + ١ = ٩ \text{ س } \leftarrow ٢$$

$$\therefore \text{نهيا } ق(س) = ٩ - ٣ = ٦ \text{ س } \leftarrow ٢$$

$$\text{لذا فإن: نهيا } (س) ق = \text{نهيا } ق(س) = ٦ = ٣٦ \text{ س } \leftarrow ٢$$

تدريب ٢

إذا كانت نهيا $(س + ٣ - ٢س)$ ، فجد قيمة نهيا $٣(س) ق$ $\leftarrow ١$

$$\left. \begin{array}{l} ٥س + ١ ، \quad ٢ > س \\ ٢ \leq س ، \quad ٢س \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

$$(١) \text{ ق(٢)} \quad (٢) \text{ نهاق(س)}$$

$$س \leftarrow ١ \quad س \leftarrow ١$$

$$(٣) \text{ نهاق(س)} \quad (٤) \text{ نهاق(س)}$$

$$س \leftarrow ٣ \quad س \leftarrow ٢$$

الحل

لاحظ أن ق اقتران متشعب، ومنه:

$$(١) \text{ ق(٢)} = ٢(٢) = ٤ \text{ (لماذا؟).}$$

$$(٢) \text{ نهاق(س)} = \text{نهاق(٥س + ١)} = ١ + ١ \times ٥ = ٦$$

$$س \leftarrow ١ \quad س \leftarrow ١$$

$$(٣) \text{ نهاق(س)} = \text{نهاق(٣س)} = ٩$$

$$س \leftarrow ٣ \quad س \leftarrow ٣$$

(٤) لاحظ أن س = ٢ هي القيمة التي يتشعب عندها الاقتران.

$$\text{نهاق(س)} = \text{نهاق(٥س + ١)} = ١ + ٢ \times ٥ = ١١$$

$$س \leftarrow -٢ \quad س \leftarrow -٢$$

$$\text{نهاق(س)} = \text{نهاق(٢س)} = ٤$$

$$س \leftarrow +٢ \quad س \leftarrow +٢$$

بما أن نهاق(س) \neq نهاق(س)، فإن نهاق(س) غير موجودة.

$$س \leftarrow -٢ \quad س \leftarrow +٢ \quad س \leftarrow ٢$$

إذا كان ق اقتراناً متشعباً، وكان الاقتران ق يتشعب عند $s = أ$ ، فإن
 نهاق(س) تكون موجودة إذا كانت نهاق(س) = نهاق(س)
 $s \leftarrow أ^+$ $s \leftarrow أ^-$

تدريب ٣

$$(١) \left. \begin{array}{l} s \geq ٣, \quad s^2 + ١ \\ s < ٣, \quad ٤ - s^2 \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) ق(٢) ب) نهاق(س)
 $s \leftarrow ١$ $s \leftarrow ١$

ج) نهاق(س) د) نهاق(س)
 $s \leftarrow ٤$ $s \leftarrow ٣$

$$(٢) \left. \begin{array}{l} s \in \mathbb{V}, \quad s + ٦ \\ s \notin \mathbb{V}, \quad ١ + s^4 \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

حيث \mathbb{V} = مجموعة الأعداد الصحيحة،

فجد نهاق(س) (إن وجدت).

مثال (٧)

$$\left. \begin{array}{l} s > ٣, \quad s^3 + ١ \\ s = ٣, \quad ٢٠ \\ s < ٣, \quad ١ + s^4 \end{array} \right\} = \text{إذا كان هـ(س)}$$

وكانت نهاق هـ(س) موجودة، فما قيمة الثابت أ؟
 $s \leftarrow ٣$

الحل

بما أن نهـا هـ (س) موجودة، فإن نهـا هـ (س) = نهـا هـ (س)
 $\begin{matrix} \text{س} \leftarrow 3 \\ \text{س} \leftarrow 3 \end{matrix}$

$$\therefore \text{نهـا هـ (س)} = \text{نهـا هـ (أس + 1)} \\ \begin{matrix} \text{س} \leftarrow 3 \\ \text{س} \leftarrow 3 \end{matrix}$$

$$\text{ومنه: } 1 + 3^3 = 1 + 3^أ$$

$$1 + 3^أ = 28$$

$$3^أ = 27$$

$$\therefore 9 = 3^أ$$

تدريب ٤

$$(1) \text{ إذا كان ق(س) = } \left. \begin{matrix} \text{س} - 5, & \text{س} > 1 \\ \text{ب س}^2 + 7, & \text{س} \leq 1 \end{matrix} \right\}$$

وكانت نهـا ق(س) = 16، نهـا ق(س) موجودة، فما قيمة كل من الثابتين: أ، ب؟
 $\begin{matrix} \text{س} \leftarrow 3 \\ \text{س} \leftarrow 1 \end{matrix}$

$$(2) \text{ إذا كان ق(س) = } \left. \begin{matrix} 5\text{س}^3, & \text{س} > 4 \\ 40, & \text{س} \leq 4 \end{matrix} \right\}$$

وكانت نهـا ق(س) موجودة، فما قيمة الثابت أ؟
 $\text{س} \leftarrow 4$

الأسئلة

(١) إذا علمت أن نهـا ق (س) = ٨، نهـا هـ (س) = -٢، فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) نهـا (٤ ق (س) + ٢ هـ (س))
س ← ٣

ب) نهـا (ق (س) - ٢ هـ (س))
س ← ٣

ج) نهـا (ق (س) × هـ (س))
س ← ٣

د) نهـا ٥ ق (س)
س ← ٣

هـ) نهـا (٢ ق (س) + ١)
س ← ٣

و) نهـا ((هـ (س) + ٣) - ٧)
س ← ٣

ز) نهـا (٢ ق (س) + ٣ هـ (س) + ٢ س + ٤)
س ← ٣

(٢) جد قيمة كل مما يأتي:

أ) نهـا (٣ س - ٤ س + ٢ س - ٧)
س ← ٢

ب) نهـا (١ + ٢ س) (١ + ٣ س + ٥ س - ٢)
س ← ١

ج) نهـا (٢ + ٣ س)
س ← ١

(٣) إذا كانت نهـا (٣ ق (س) + ٢ س + ١) = ٢٧، فجد نهـا (ق (س))
س ← ٢

(٤) إذا كانت نهـا (م س + ٥ س + ١) = ٢٥، فما قيمة الثابت م؟
س ← ٣

(٥) إذا كان ق (س) = $\left. \begin{array}{l} ٤ س + ١ ، \quad س > ٠ \\ ٥ س - ٢ ، \quad س \leq ٠ \end{array} \right\}$ ، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) نهـا ق (س) س ← ١

ب) نهـا ق (س) س ← ٢

ج) نهـا ق (س) س ← ٠

$$(6) \left. \begin{array}{l} 1 + s^2, \quad s \neq 3 \\ 8, \quad s = 3 \end{array} \right\} = \text{إذا كان هـ (س)}$$

فجد قيمة كل مما يأتي:

$$\begin{array}{ll} \text{أ) نهاهـ (س)} & \text{ب) نهاهـ (س)} \\ s \leftarrow 5 & s \leftarrow 3 \end{array} \quad \text{ج) هـ (3)}$$

$$(7) \left. \begin{array}{l} 4 + s^2, \quad s > 2 \\ 5s^2 + 2, \quad s \leq 2 \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

وكانت نهاق (س) موجودة، فما قيمة الثابت أ؟
 $s \leftarrow 2$

$$(8) \left. \begin{array}{l} 1 + s^2, \quad s > 2 \\ 5s, \quad 2 \geq s \geq 6 \\ 6 - s^2, \quad s < 6 \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

فجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن وجدت):

$$\begin{array}{ll} \text{أ) نهاق (س)} & \text{ب) نهاق (س)} \\ s \leftarrow 0 & s \leftarrow 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ج) نهاق (س)} & \text{د) نهاق (س)} \\ s \leftarrow 4 & s \leftarrow 6 \end{array}$$

$$(9) \left. \begin{array}{l} 3s - 2, \quad s > 2 \\ 10, \quad s < 2 \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

وكانت نهاق (س) موجودة، فجد قيمة الثابت أ؟
 $s \leftarrow 2$

$$\text{إذا كان ق(س) = } \frac{1 + 2س}{1 + 2س} \text{ ، فما قيمة نها ق(س)؟}$$

لاحظ أن ق هو اقتران نسبي لأنه خارج قسمة اقترانين كثيري حدود، هما: $1 + 2س$ ، $1 + 2س$ ، والنظريات التي درستها سابقاً لم تناقش هذه الحالة؛ لذا فإن نهاية هذا النوع من الاقترانات يمكن إيجادها باستخدام النظرية الآتية:

نظرية

إذا كانت أ، ل، ك أعداداً حقيقية، وكانت نها ق(س) = ل، نها ه(س) = ك، فإن:

$$(1) \text{ نها } \frac{\text{ق(س)}}{\text{ه(س)}} = \frac{\text{نها ق(س)}}{\text{نها ه(س)}} = \frac{\text{ل}}{\text{ك}} \text{ حيث ك } \neq 0 \text{ صفرًا.}$$

$$(2) \text{ نها } \frac{\text{ق(س)}}{\text{ه(س)}} \text{ غير موجودة، إذا كان ل } \neq 0 \text{ صفرًا، ك = صفرًا.}$$

مثال (1)

إذا علمت أن نها ق(س) = 6، نها ه(س) = -2، فجد قيمة كل مما يأتي:

$$(1) \text{ نها } \frac{\text{ق(س)}}{\text{ه(س)}} \quad (2) \text{ نها } \frac{\text{ق(س)} + 3}{2 + \text{ه(س)}}$$

الحل

$$(1) \frac{\text{نهاق (س)}}{\text{س} \leftarrow 1} = \frac{\text{نهاق (س)}}{\text{س} \leftarrow 1} = \frac{6}{2-} = 3-$$

$$(2) \frac{\text{نهاق (س)} + \text{نهاق (س)}}{\text{س} \leftarrow 1} = \frac{\text{نهاق (س)} + \text{نهاق (س)}}{\text{س} \leftarrow 1} = \frac{\text{نهاق (س)} + \text{نهاق (س)}}{\text{س} \leftarrow 1} = \frac{3+}{2+} = \frac{9}{0}$$

$$\frac{9}{0} = \frac{3+6}{2+2-} =$$

∴ النهاية غير موجودة.

مثال (٢)

جد قيمة النهاية في كل مما يأتي (إن وجدت):

$$(1) \frac{\text{نهاق (س)}}{\text{س} \leftarrow 5} = \frac{5-}{15+}$$

$$(2) \frac{\text{نهاق (س)}}{\text{س} \leftarrow 2} = \frac{1+}{3+}$$

$$(3) \frac{\text{نهاق (س)}}{\text{س} \leftarrow 1} = \frac{5}{1-}$$

الحل

$$(1) \frac{\text{نهاق (س)}}{\text{س} \leftarrow 5} = \frac{5-}{15+} = \frac{5-}{15+} = \frac{5-}{15+}$$

$$(2) \frac{\text{نهاق (س)}}{\text{س} \leftarrow 2} = \frac{1+}{3+} = \frac{1+}{3+} = \frac{1+}{3+}$$

(3) عند تعويض س = 1، يتبين أن المقام يصبح مساوياً للصفر، وأن البسط = 5؛ لذا فإن النهاية غير موجودة.

جد قيمة النهاية لكل مما يأتي (إن وجدت):

$$(١) \text{ نها } \frac{٢٥ - ٢س}{٥ + س} \quad \text{س} \leftarrow ١$$

$$(٢) \text{ نها } \frac{٤ - ٢س}{٣ + س} \quad \text{س} \leftarrow ٢$$

$$(٣) \text{ نها } \frac{٣ + س}{٤ - ٢س} \quad \text{س} \leftarrow ٢$$

$$(٤) \text{ نها } \frac{١ - ٢س}{٣ + س} \quad \text{س} \leftarrow ٣$$

في بعض الأحيان يكون ناتج التعويض المباشر بقيمة س في الاقتران النسبي صفرًا لكل من البسط والمقام، ولا تعد هذه القيمة معينة لأنها لا تساوي عددًا بعينه؛ لذا يُكتب الاقتران على صورة مكافئة باستخدام إحدى الطرائق الآتية:

التحليل إلى العوامل، الضرب في مرافق الجذر التربيعي، توحيد المقامات، ثم تُستخدم نظريات النهايات كما في الأمثلة الآتية:

مثال (٣)

$$\text{جد نها } \frac{٥س - ١٠}{٢ - س} \quad \text{س} \leftarrow ٢$$

الحل

ناتج التعويض المباشر لكل من البسط والمقام صفر، وكل منهما كثير حدود؛ لذا نحلل البسط بإخراج ٥س عاملاً مشتركاً.

$$١٠ = \text{نها } \frac{٥س - ١٠}{٢ - س} = \frac{٥س(٢ - س)}{٢ - س} \quad \text{س} \leftarrow ٢$$

لاحظ أنه يمكن اختصار (٢-س)؛ لأنه عندما س تقترب من ٢، س-٢ ≠ صفرًا.

مثال (٤)

جد قيمة كل مما يأتي:

$$(١) \text{ نهـا } \frac{٦ + ٥س + ٢س}{٩ - ٢س} \quad (٢) \text{ نهـا } \frac{٨ - ٢س}{٢ - ٢س}$$

الحل

(١) لاحظ أنه لا يمكن استخدام نظريات النهايات في إيجاد قيمة النهاية في الفرعين (لماذا؟).

$$\frac{(٢+س) \text{ نهـا }}{(٣-س) ٣-٢س} = \frac{(٢+س)(٣+س) \text{ نهـا }}{(٣+س)(٣-س) ٣-٢س} = \frac{٦ + ٥س + ٢س}{٩ - ٢س} \text{ نهـا}$$

$$\frac{١}{٦} = \frac{١-}{٦-} =$$

$$(٢) \text{ نهـا } \frac{٨ - ٢س}{٢ - ٢س} = \frac{(٤ + ٢س + ٢س)(٢ - ٢س) \text{ نهـا }}{٢ - ٢س} \text{ (لماذا؟)}$$

$$١٢ = \frac{(٤ + ٢س + ٢س)(٢ - ٢س) \text{ نهـا }}{٢ - ٢س}$$

تدريب ٢

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

$$(١) \text{ نهـا } \frac{٣س + ٢س}{٣ + س} \quad (٢) \text{ نهـا } \frac{٢س - ٢س}{١٠ - ٥س}$$

$$(٣) \text{ نهـا } \frac{٢٧س + ٤س}{٣ + س} \quad (٤) \text{ نهـا } \frac{٩ + ٦س - ٢س}{٩ - ٢س}$$

مثال (٥)

$$\frac{1 - \sqrt{s}}{1 - s} \text{ جد نها } \leftarrow s$$

الحل

بما أن نها $\frac{1 - \sqrt{s}}{1 - s} = 0$ ، نها $\frac{1 - s}{1 - s} = 0$ ، فإنه لا يمكن استخدام نظريات النهايات.

ولأن مرافق $(1 - \sqrt{s})$ هو $(1 + \sqrt{s})$ ؛

فإنه يُضرب في المقدار: $\frac{(1 + \sqrt{s})}{(1 + \sqrt{s})}$ (لماذا؟).

$$\frac{(1 + \sqrt{s})}{(1 + \sqrt{s})} \times \frac{1 - \sqrt{s}}{1 - s} \text{ نها } \leftarrow s = \frac{1 - \sqrt{s}}{1 - s} \text{ نها } \leftarrow s$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{(1 + \sqrt{s})} \text{ نها } \leftarrow s = \frac{1 - \cancel{s}}{(1 + \sqrt{s})(1 - \cancel{s})} \text{ نها } \leftarrow s =$$

فكر وناقش

حلّ مثال (٥) بطريقة أخرى مستخدماً تحليل المقدار $(1 - s)$ فرقاً بين مربعين.

تدريب ٣

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

$$(1) \text{ نها } \leftarrow s \frac{15 - s^3}{5 - \sqrt{s + 20}}$$

$$(2) \text{ نها } \leftarrow s \frac{2 - \sqrt{s + 2}}{2 - s}$$

مثال (٦)

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{s}}{4 - s^2} \quad \text{جد نها} \quad \begin{matrix} 2 \leftarrow s \\ 2 \leftarrow s \end{matrix}$$

الحل

لا يمكن استخدام نظريات النهايات (لماذا؟).

لاحظ أن البسط يمثل عملية طرح كسور؛ لذا يجب توحيد المقامات في البسط:

$$\frac{\frac{s-2}{s^2}}{4-s^2} \quad \text{نها} \quad \begin{matrix} 2 \leftarrow s \\ 2 \leftarrow s \end{matrix} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{s}}{4-s^2} \quad \text{نها} \quad \begin{matrix} 2 \leftarrow s \\ 2 \leftarrow s \end{matrix}$$

$$\frac{s-2}{(4-s^2)s^2} \quad \text{نها} \quad \begin{matrix} 2 \leftarrow s \\ 2 \leftarrow s \end{matrix} =$$

$$\text{(لماذا (١-؟)).} \quad \frac{\frac{s-2}{s^2}}{(2-s)s^4} \quad \text{نها} \quad \begin{matrix} 2 \leftarrow s \\ 2 \leftarrow s \end{matrix} =$$

$$\frac{1-}{8} = \frac{1-}{s^4} \quad \text{نها} \quad \begin{matrix} 2 \leftarrow s \\ 2 \leftarrow s \end{matrix} =$$

تدريب ٤

$$\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{s+1}}{2-s} \quad \text{جد نها} \quad \begin{matrix} 2 \leftarrow s \\ 2 \leftarrow s \end{matrix}$$

الأسئلة

(١) إذا كانت نهـا ق (س) = ٣، نهـا هـ (س) = ٩، فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

$$\begin{array}{l} \text{أ) نهـا ق (س)} \\ \text{س ← ٢} \end{array} \quad \text{،} \quad \begin{array}{l} \text{ب) نهـا هـ (س)} \\ \text{س ← ٢} \end{array}$$

(٢) جد قيمة النهاية في كل مما يأتي عند النقطة المبينة إزاء كل منها (إن وجدت):

$$\text{أ) ق (س) = } \frac{١ + ٢س}{٨ + س} \text{ ، س ← صفر}$$

$$\text{ب) هـ (س) = } \frac{٢س + ٥س}{١ - س} \text{ ، س ← ١}$$

$$\text{ج) ل (س) = } \frac{٤ - ٣س - ٢س}{١٢ - ٣س} \text{ ، س ← ٤}$$

$$\text{د) م (س) = } \frac{٢٧ - ٢س}{٣س - ٩س} \text{ ، س ← ٣}$$

$$\text{هـ) ك (س) = } \frac{\frac{١}{٥} - \frac{١}{٢ - س}}{١٤ - ٢س} \text{ ، س ← ٧}$$

$$\text{و) د (س) = } \frac{٣ - \sqrt{١ + س}}{٨ - س} \text{ ، س ← ٨}$$

$$\text{ز) و (س) = } \frac{٧ - س}{٢ + \sqrt{٣ - س}} \text{ ، س ← ٧}$$

$$(3) \text{ إذا كان ق(س) = س، فجد نهـا } \frac{\text{ق}^2(س) - \text{ق}(9)}{\text{س} + 3} \text{ س} \leftarrow 3$$

$$(4) \text{ إذا علمت أن نهـا ق(س) = 7-، نهـا هـ(س) = 2، فبيّن أن: } \frac{\text{س} \leftarrow 5}{\text{س} \leftarrow 5}$$

$$\text{نهـا } \frac{\text{ق}^2(س) - \text{ق}^3(س)}{\text{ق}(س) + \text{س} + 7} = 4- \text{ س} \leftarrow 5$$

$$(5) \text{ إذا كان ق(س) = } \frac{1}{\text{س} - 2} \text{، فجد نهـا } \frac{\text{ق}(س + هـ) - \text{ق}(س)}{\text{هـ}} \text{ هـ} \leftarrow 5$$

$$(6) * \text{ جد نهـا } \frac{\text{س}^2 + \text{س} - 2}{\text{س}^2 - 1} \text{ س} \leftarrow 1$$

(* السؤال من أسئلة الاختبارات الدولية.

إذا كانت نهاية $\sqrt[n]{(s)}$ $= 8$ ، فجد نهاية $\sqrt[3]{(s)}$ + s + 2
 $s \rightarrow 1$ $s \rightarrow 1$

يمكن الإجابة عن السؤال السابق باستخدام النظرية الآتية:

نظرية

إذا كان a ، L عددين حقيقيين، وكان n عددًا طبيعيًا، وكانت نهاية $\sqrt[n]{(s)}$ $= L$ ، فإن:

$$\sqrt[n]{L} = \sqrt[n]{\text{نهاية } (s)} = \text{نهاية } \sqrt[n]{(s)}$$

وإذا كان n عددًا زوجيًا فإنه يُشترط أن تكون $L > 0$ صفر.

يمكن القول إن نهاية الجذر النوني لاقتران عند عدد ما تساوي الجذر النوني لنهاية الاقتران عند هذا العدد، وإنه إذا كان n عددًا زوجيًا وجب أن تكون نهاية الاقتران موجبة.

مثال (١)

إذا كان $\sqrt[3]{(s)} = 3$ ، هـ $\sqrt[3]{(s)} = 3 + s$ ، فما قيمة كل مما يأتي:

(١) نهاية $\sqrt[3]{(s)}$ $s \rightarrow 5$

(٢) نهاية $\sqrt[3]{(s)}$ $s \rightarrow 11$

(٣) نهاية $\sqrt[3]{(s)}$ $s \rightarrow 1$

(٤) نهاية $\sqrt[3]{(s)}$ $s \rightarrow 8$

الحل

$$(1) \text{ نهـاق (س) } = \sqrt[3]{\text{نهـا}} = \sqrt[3]{\text{س} + 3} = \sqrt[3]{8} = 2 \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{س} \\ 5 \end{matrix}$$

$$(2) \text{ نهـاق (س) } = \sqrt[3]{\text{نهـا}} = \sqrt[3]{\text{س} + 3} = \sqrt[3]{-8} = -2 \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{س} \\ 11 \end{matrix}$$

$$(3) \text{ نهـاهـد (س) } = \sqrt{\text{نهـا}} = \sqrt{\text{س} + 3} = \sqrt{4} = 2 \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{س} \\ 1 \end{matrix}$$

$$(4) \text{ لاحظ أن } n = 2 \text{ (عدد زوجي)، نهـا } = (\text{س} + 3) = -5 \text{ (قيمة سالبة)} \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{س} \\ 8 \end{matrix}$$

∴ نهـاهـد (س) = نهـا $\sqrt{\text{س} + 3}$ غير موجودة؛ نظرًا إلى عدم وجود جذر تربيعي حقيقي للعدد السالب.

مثال (٢)

إذا كانت نهـاق (س) = 64، فجد قيمة كل مما يأتي:

$$(1) \text{ نهـا } \sqrt{\text{ق (س)}} \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{س} \\ 3 \end{matrix}$$

$$(2) \text{ نهـا } \sqrt[3]{\text{ق (س)}} \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{س} \\ 3 \end{matrix}$$

الحل

$$(1) \text{ نهـا } \sqrt{\text{ق (س)}} = \sqrt[3]{\text{نهـاق (س)}} = \sqrt[3]{64} = 4 \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{س} \\ 3 \end{matrix}$$

$$(2) \text{ نهـا } \sqrt[3]{\text{ق (س)}} = \sqrt[3]{\text{نهـاق (س)}} = \sqrt[3]{64} = 4 \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{س} \\ 3 \end{matrix}$$

تدريب ١

إذا كانت نهـاق (س) = 24، نهـاهـد (س) = 8، فجد قيمة ما يأتي (إن وجدت):

$$\text{نهـا } (\sqrt{\text{ق (س)}} - \text{هـد (س)} + \text{س هـد (س)}) \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{س} \\ 3 \end{matrix}$$

تنص النظرية على أنه إذا كان n عددًا زوجيًا، ونهيا $q(s)$ $<$ صفر، فإن:

نهيا $\sqrt[n]{q(s)}$ تكون موجودة. ولكن، ماذا لو كانت نهيا $q(s) = 0$ ؟

إذا كان $q(s) = 0$ ، فإن نهيا $q(s) = 0$.

لاحظ أن نهيا $\sqrt[n]{s-0} = 0$ (لماذا؟).

في حين نهيا $\sqrt[n]{s-0}$ غير موجودة (لماذا؟).

وبما أن نهيا $\sqrt[n]{s-0} \neq \sqrt[n]{s-0}$ ، فإن نهيا $\sqrt[n]{s-0}$ غير موجودة.

وبوجه عام:

إذا كانت نهيا $q(s) = 0$ صفرًا، وكان n عددًا زوجيًا، فإن:

نهيا $\sqrt[n]{q(s)} = 0$ إذا كان $q(s) < 0$ من جهتي اليمين واليسار عند $(s=0)$ ،

وتكون غير موجودة إذا كان $q(s) > 0$ على إحدى جهتي $(s=0)$ ، أو كليهما.

مثال (٣)

جد قيمة كل نهاية من النهايات الآتية (إن وجدت):

$$(2) \lim_{s \rightarrow -9} \sqrt{s-9}$$

$$(1) \lim_{s \rightarrow +9} \sqrt{s-9}$$

$$(4) \lim_{s \rightarrow 9} \sqrt[4]{(s-9)^2}$$

$$(3) \lim_{s \rightarrow 9} \sqrt{s-9}$$

(١) إذا كان $s \leq 9$ ، فإن $s - 9 < 0$ ، ومنه: $\sqrt{s-9}$ $s \leq 9$ ، ومنه: $\sqrt{s-9}$ $s \leq 9$.

(٢) إذا كان $s \leq -9$ ، فإن $s - 9 > 0$ ، ومنه: $\sqrt{s-9}$ $s \leq -9$ ، ومنه: $\sqrt{s-9}$ $s \leq -9$.

(٣) بما أن $\sqrt{s-9}$ $s \leq -9$ غير موجودة، فإن $\sqrt{s-9}$ $s \leq -9$ غير موجودة.

(٤) لاحظ أن $(s-9)^2 < 0$ عندما تكون $s < 9$ ، وعندما تكون $s > 9$

ومنه: $\sqrt{(s-9)^2}$ $s \leq 9$

تدريب ٢

جد نهاية كل اقتران من الاقترانات الآتية (إن وجدت):

(٢) $\sqrt{s-1}$ $s \leq 1$

(١) $\sqrt{s^2+1}$ $s \leq 4$

(٤) $\sqrt{s-1}$ $s \leq 1$

(٣) $\sqrt{s-1}$ $s \leq -1$

(٦) $\sqrt{s^2}$ $s \leq 0$

(٥) $\sqrt{s-1}$ $s \leq 1$

فكر وناقش

ادّعى خالد أنه إذا كانت \sqrt{s} $s \leq 0$ ، فإن \sqrt{s} $s \leq 0$ تكون دائماً غير

موجودة. ناقش صحة ادّعائه معززاً إجابتك بالأمثلة.

الأسئلة

(١) إذا علمت أن نهـا ق(س) = -٦٤، فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) نهـا $\sqrt[3]{\text{ق(س)}}$ $\leftarrow \text{س}^3$

ب) نهـا $\sqrt{\text{ق(س)}}$ $\leftarrow \text{س}^3$

ج) نهـا $\left(\sqrt[3]{\text{ق(س)}} + \text{س}^2 + ٥\text{س} - ٣ \right)$ $\leftarrow \text{س}^3$

د) نهـا $\left(\sqrt[٥]{\frac{\text{ق(س)}}{٢}} + \text{س} - ٥ \right)$ $\leftarrow \text{س}^3$

(٢) جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) نهـا $\sqrt[٣]{\text{س} - ٣}$ $\leftarrow \text{س}^3$

ب) نهـا $\left(\sqrt[٣]{\text{س} - ٣} + \text{س}^2 - ٤ \right)$ $\leftarrow \text{س}^٥$

ج) نهـا $\sqrt[٣]{٤ - \text{س}^2}$ $\leftarrow \text{س}^2$

د) نهـا $\sqrt[٤]{٤ - \text{س}^2}$ $\leftarrow \text{س}^2$

النتائج

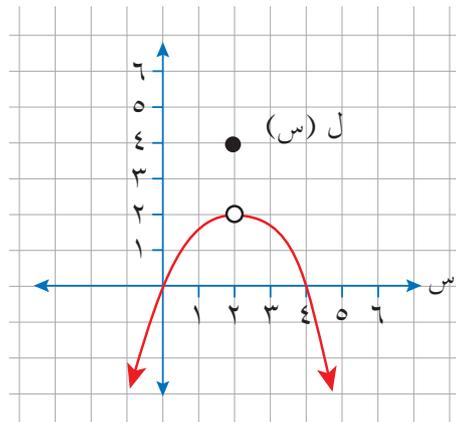
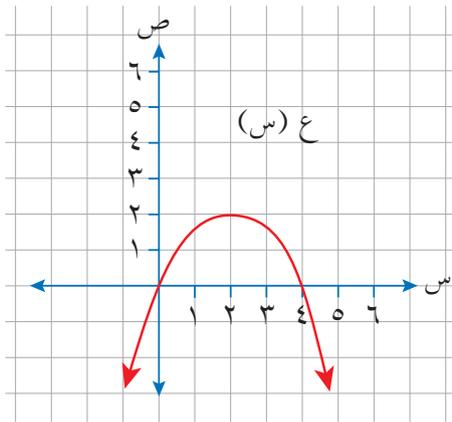
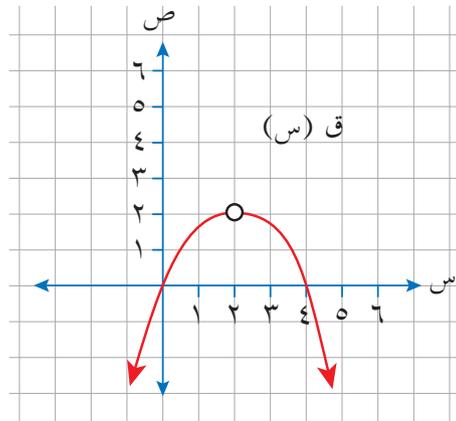
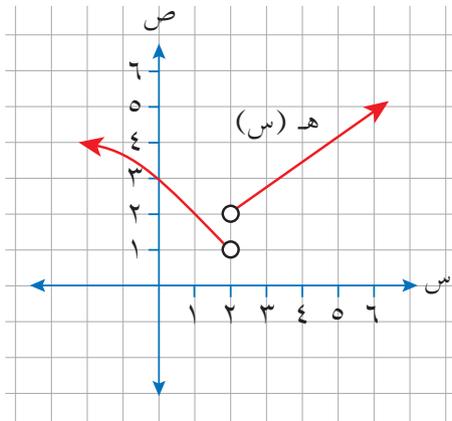
- ◀ تفسر مفهوم الاتصال عند نقطة هندسيًا.
- ◀ تبحث اتصال اقتران كثير حدود، ومنتشعبًا، ونسيبيًا عند نقطة.
- ◀ تطبق نظريات الاتصال في بحث الاتصال عند نقطة لمجموع اقترانين، أو الفرق بينهما، أو حاصل ضربهما.
- ◀ تحدد نقاط عدم الاتصال لاقترانات نسبية.

Continuity at a Point

الاتصال عند نقطة

أولاً

تأمل الشكل (١٤-١)، ثم أجب عن السؤال الذي يليه:



الشكل (١٤-١).

ماذا تلاحظ على منحنيات الاقتران: ق، هـ، ل، م؟

يتبين من الشكل (١٤-١) أن:

- الاقتران ق غير معرف عندما $s = 2$ ، فظهر انقطاع على صورة ثقب في منحنى الاقتران ق عندما $s = 2$
 - نهـا هـ (س) غير موجودة؛ لأن نهـا هـ (س) \neq نهـا هـ (س)، فظهرت قفزة في نهـا هـ (س) $\leftarrow s = 2$ منحنى الاقتران هـ عندما $s = 2$
 - نهـا ل (س) \neq ل (٢)؛ لذا ظهرت فجوة في منحنى الاقتران ل عندما $s = 2$ نهـا ل (س) $\leftarrow s = 2$
 - ع (٢) $= 2$ ، نهـا ع (س) موجودة، نهـا ع (س) $=$ ع (٢)، ولم يظهر انقطاع في ع (٢) $\leftarrow s = 2$ منحنى الاقتران ع؛ لذا يوصف الاقتران ع بأنه متصل عندما $s = 2$
- وَصَف عدم الاتصال في منحنى الاقتران بأنه ثقب، أو قفزة، أو فجوة يمثل التفسير الهندسي لعدم الاتصال في المنحنى عند قيمة س المحددة.

تعريف

يكون الاقتران ق متصلاً عندما $s = أ$ ، إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية:

(١) الاقتران ق معرف عندما $s = أ$ ؛ أي إن ق (أ) عدد حقيقي.

(٢) نهـا ق (س) موجودة.
نهـا ق (س) $\leftarrow أ$

(٣) نهـا ق (س) $=$ ق (أ).
نهـا ق (س) $\leftarrow أ$

أما إذا لم يتحقق شرط أو أكثر من هذه الشروط، فإن الاقتران ق يكون غير متصل عندما $s = أ$.

هل الاقتران كثير الحدود متصل دائماً عندما $s = 2$ ، حيث s عدد حقيقي؟ برّر إجابتك.

مثال (١)

$$\left. \begin{array}{l} s > 2, \quad 1 + s^2 \\ s \leq 2, \quad 5 - s \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما $s = 2$

الحل

الاقتران ق اقتران متشعب عندما $s = 2$

$$(1) \text{ ق معرف عندما } s = 2, \text{ ق(2)} = 5 - 2 \times 5 = 5$$

$$(2) \text{ نهق ق(س)} = \text{نهق(س)} = 1 + s^2 = 1 + 2^2 = 5$$

$$\text{نهق ق(س)} = \text{نهق(س)} = 5 - s = 5 - 2 = 3$$

$$\therefore \text{نهق ق(س)} = 5$$

$$(3) \text{ نهق ق(س)} = \text{ق(2)} = 5$$

بما أن الاقتران ق حقق شروط الاتصال جميعها عندما $s = 2$ ، فإن الاقتران ق متصل عندما

$$s = 2$$

تدريب ١

$$\left. \begin{array}{l} 1 > s, \quad s^2 + 2 \\ 3 > s \geq 1, \quad s^3 \\ s < 3, \quad s^2 - 18 \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

فابحث اتصال الاقتران ق عند كل مما يأتي:

$$(1) \quad s = 0 \quad (2) \quad s = 1 \quad (3) \quad s = 3$$

مثال (٢)

$$\left. \begin{array}{l} 1 - s \neq 3, \quad s + 3 \\ 1 - s = 4, \quad 4 \end{array} \right\} = \text{إذا كان هـ (س)}$$

فابحث اتصال الاقتران هـ عندما $s = 1 -$

الحل

$$(1) \quad \text{هـ معرف عندما } s = 1 - \text{، هـ } (1 -) = 4$$

$$(2) \quad \text{نهـا هـ (س) = نهـا (س + 3) = 3 + 1 - = 2} \quad \begin{array}{l} \text{س} \leftarrow 1 - \\ \text{س} \leftarrow 1 - \end{array}$$

$$(3) \quad \text{نهـا هـ (س) \neq هـ (1 -)} \quad \begin{array}{l} \text{س} \leftarrow -1 \\ \text{س} \leftarrow -1 \end{array}$$

∴ الاقتران هـ غير متصل عندما $s = 1 -$

تدريب ٢

$$\left. \begin{array}{l} 2 \neq s, \quad \frac{s^2 - 2s}{s - 2} \\ 2 = s, \quad 4 \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما $s = 2$

مثال (٣)

$$\left. \begin{array}{l} \text{أ} \text{ س} + ٧ ، \text{ س} \geq ٣ \\ \text{س} + ١ ، \text{ س} < ٣ \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

وكان ق متصلًا عندما $\text{س} = ٣$ ، فجد قيمة الثابت أ.

الحل

بما أن ق متصل عندما $\text{س} = ٣$ (القيمة التي يتشعب عندها الاقتران)، فإن نها ق (س) $\xrightarrow{\text{س} \leftarrow ٣}$

موجودة؛ أي إن:

$$\text{نها ق (س)} = \text{نها ق (س)} \\ \xrightarrow{\text{س} \leftarrow ٣} \quad \xrightarrow{\text{س} \leftarrow ٣}$$

$$\text{نها (أ س} + ٧) = \text{نها (س} + ١) \\ \xrightarrow{\text{س} \leftarrow ٣} \quad \xrightarrow{\text{س} \leftarrow ٣}$$

$$١ + ٣ = ٧ + أ ٣$$

$$٤ = ٧ + أ ٣$$

$$٣ - = أ ٣$$

$$١ - = أ \therefore$$

مثال (٤)

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \neq ٢ ، \text{س}^٣ + ١٠ \\ \text{س} = ٢ ، \text{أ} \text{ س}^٢ \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

وكان ق متصلًا عندما $\text{س} = ٢$ ، فجد قيمة الثابت أ.

الحل

بما أن ق متصل عندما $s = 2$ (القيمة التي يتشعب عندها الاقتران)، فإن

$$\text{نهـا ق (س) = ق (2)} \\ \text{س} \leftarrow 2$$

$$\text{نهـا ق (س) = (10 + 3س)} \\ \text{س} \leftarrow 2$$

$$2^2 = 10 + 3 \cdot 2$$

$$2^2 = 18$$

$$2^2 = 9$$

$$\therefore \text{أ} = 3, -3$$

مثال (٥)

$$\left. \begin{array}{l} 2^2 \text{ أس} + \text{ب} \\ 2 = \text{س} \\ 2^2 < \text{س} \end{array} \right\} \text{إذا كان ق (س) = 8}$$

وكان ق متصلًا عندما $s = 2$ ، فجد قيمة كل من الثابتين: أ، ب.

الحل

بما أن الاقتران ق متصل عندما $s = 2$ ، فإن نهـا ق (س) = ق (2)

$$\therefore \text{نهـا ق (س) = ق (2)} \\ \text{س} \leftarrow -2$$

$$\text{أي إن: } 8 = \text{أ} + \text{ب} \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{وأيضاً نهـا ق (س) = ق (2)} \\ \text{س} \leftarrow +2$$

$$\text{أي إن: } 8 = \text{أ} + 6\text{ب} \dots \dots \dots (2)$$

ولإيجاد قيمة كل من: أ، ب، يمكن استخدام طريقة الحذف والتعويض لحل النظام المكون من المعادلتين: (١) و (٢) الخطيتين. بمتغيرين.

$$٨ = ب + أ٤$$

$$\frac{(٨ = ب٦ + أ٤) -}{٠ = ب٥ -}$$

بالتعويض في المعادلة (١):

$$٠ = ب .:$$

$$٨ = ٠ + أ٤$$

$$٢ = أ .:$$

تدريب ٣

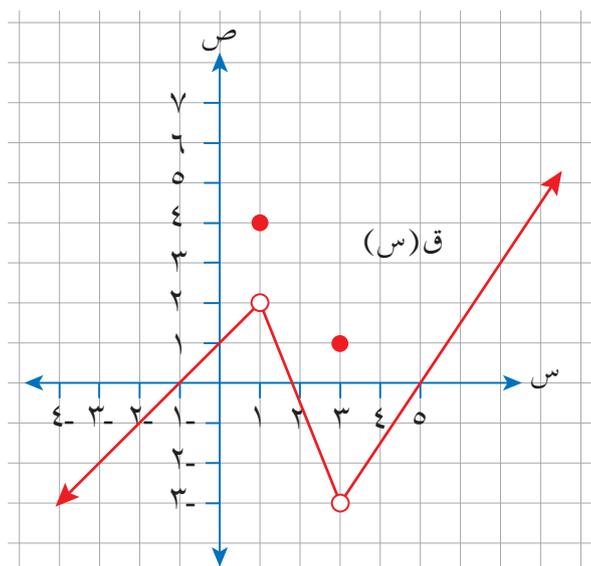
$$(١) \left. \begin{array}{l} ٢ > س ، \quad ٤ + ٣س \\ ٢ \leq س ، \quad ٦ + أس \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

وكان الاقتران ق متصلًا عندما $س = ٢ -$ ، فجد قيمة الثابت أ.

$$(٢) \left. \begin{array}{l} ١ > س ، \quad ٣ + أس \\ ١ = س ، \quad ٧ \\ ١ < س ، \quad س - ب \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

وكان ق متصلًا عندما $س = ١$ ، فجد قيمة كل من الثابتين: أ، ب.

الأسئلة



الشكل (١٥-١).

(١) اعتماداً على الشكل (١٥-١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعروف على مجموعة الأعداد الحقيقية، حدد قيم س التي يكون الاقتران ق عندها غير متصل.

$$(٢) \left. \begin{array}{l} ١ > س ، \\ ١ \leq س ، \end{array} \right\} \begin{array}{l} ١ - س^٢ \\ ٢س \end{array} = (س) \text{ إذا كان ق(س)}$$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما $س = ١$

$$(٣) \left. \begin{array}{l} ١ \neq س ، \\ ١ = س ، \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{٥}{١ + س} \\ ٣ \end{array} = (س) \text{ إذا كان هـ(س)}$$

فابحث اتصال الاقتران هـ عندما $س = ١$

$$(٤) \left. \begin{array}{l} ١ > س ، \\ ١ \geq س ، \\ ١ \leq س ، \end{array} \right\} \begin{array}{l} ٣ + س^٢ \\ ٥ - س \\ ٣ + س^٣ \end{array} = (س) \text{ إذا علمت أن ق(س)}$$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما:

$$(أ) س = ١ \quad (ب) س = -١$$

$$(٥) \left. \begin{array}{l} ٣ \neq س ، \\ ٣ = س ، \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{س - ٣}{٣ - س} \\ ٢ + س م \end{array} = (س) \text{ إذا كان ق(س)}$$

وكان الاقتران ق متصلًا عندما $س = ٣$ ، فجد قيمة الثابت م.

$$(6) \left. \begin{array}{l} \text{أ} + \text{س} \\ 8 \\ \text{ب} + \text{س} + 6 \end{array} \right\} = (\text{س}) \text{ إذا كان هـ}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} > 2 \\ \text{س} = 2 \\ \text{س} < 2 \end{array} \right\}$$

وكان الاقتران هـ متصلًا عندما $\text{س} = 2$ ، فجد قيمة كل من الثابتين: أ، ب.

$$(7) \left. \begin{array}{l} \text{أس} - \text{ب} \\ 4 \\ \text{أس}^3 + \text{ب} + 2 \end{array} \right\} = (\text{س}) \text{ ل إذا كان ل}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} > 1 \\ \text{س} = 1 \\ \text{س} < 1 \end{array} \right\}$$

وكان الاقتران ل متصلًا عندما $\text{س} = 1$ ، فجد قيمة كل من الثابتين: أ، ب.

(8) إذا كان الاقتران ق متصلًا عندما $\text{س} = 2$ ، وكانت نهايتها 2 ق (س) $+ \text{س} = 6$ ، فجد

قيمة ق (2).

إذا كان $ق$ ، $هـ$ اقتراين متصلين عندما $س = أ$:

$$(1) \text{ هل } (ق + هـ) \text{ متصل عندما } س = أ?$$

$$(2) \text{ هل } (ق \times هـ) \text{ متصل عندما } س = أ?$$

$$(3) \text{ هل } \left(\frac{ق}{هـ}\right) \text{ متصل عندما } س = أ، \text{ حيث } هـ (أ) \neq 0?$$

للإجابة عن هذه الأسئلة، يمكنك الاستعانة بالنظرية الآتية:

نظرية

إذا كان الاقترانان $ق$ ، $هـ$ متصلين عندما $س = أ$ ، فإن:

$$(1) \text{ } ق + هـ \text{ متصل عندما } س = أ$$

$$(2) \text{ } ق - هـ \text{ متصل عندما } س = أ$$

$$(3) \text{ } ق \times هـ \text{ متصل عندما } س = أ$$

$$(4) \text{ } \frac{ق}{هـ} \text{ متصل عندما } س = أ، \text{ إذا كان } هـ (أ) \neq 0$$

مثال (1)

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \geq 0, \text{ هـ} \\ \text{س} < 0, \text{ س}^2 \end{array} \right\} = (س) \text{ هـ}، \text{ هـ} = \text{س}^2 + \text{س}^3$$

وكان $ل(س) = (ق \times هـ)$ ، فابحث اتصال الاقتران $ل$ عندما $س = 0$.

الحل

نستخدم نظريات الاتصال:

$$(1) \text{ نبحث اتصال الاقتران } ق \text{ عندما } س = 0$$

ق اقتران كثير حدود متصل لكل قيم $س$ ؛ لذا فهو متصل عندما $س = 0$.

(٢) نبحت اتصال الاقتران ه عندما س = ٠

$$٠ = ٠ \times ٥ = (٠) \text{ ه}$$

$$٠ = ٠ \times ٥ = (٥ \text{ س}) \text{ نهيا } \begin{matrix} \text{س} \leftarrow - \\ \text{س} \leftarrow - \end{matrix}$$

$$٠ = ٢ (٠) = ٢ \text{ س } \text{ نهيا } \begin{matrix} \text{س} \leftarrow + \\ \text{س} \leftarrow + \end{matrix}$$

بما أن نهيا ه (س) = نهيا ه (س)، فإن نهيا ه (س) = صفرًا. $\begin{matrix} \text{س} \leftarrow - \\ \text{س} \leftarrow - \end{matrix}$

وأيضًا نهيا ه (س) = ه (٠) = ٠ $\begin{matrix} \text{س} \leftarrow - \\ \text{س} \leftarrow - \end{matrix}$

∴ ه (س) اقتران متصل عندما س = ٠

(٣) الاقتران ل متصل عندما س = ٠ ؛ لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين عندما س = ٠

فكر وناقش

حلّ المثال (١) بطريقة أخرى.

تدريب ١

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \geq ٣ ، \\ \text{س} < ٣ ، \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{س} - ١ \\ \text{س} - ٥ \end{array} = (٥ \text{ س}) ، \text{ ه} + ٢ = (٥ \text{ س})$$

فابحث اتصال (ق + ه) عندما س = ٣

لاحظ أن نظريات الاتصال تشترط أن يكون كل من الاقترانين متصلًا عند النقطة. فماذا لو

كان أحد الاقترانين أو كلاهما غير متصل عند هذه النقطة؟

للإجابة عن هذا السؤال، نفذ النشاط الآتي:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \geq s, \quad 3- \\ 2 < s, \quad 3 \end{array} \right\} = (s) \text{ هـ}, \quad 4 + s - 2 = (s) \text{ هـ}$$

أ) ابحث اتصال الاقتران ق عندما $s = 2$

ب) ابحث اتصال الاقتران هـ عندما $s = 2$

ج) جد حاصل ضرب الاقترانين ق، هـ مفترضاً أن $m(s) = q(s) \times h(s)$

د) ابحث اتصال الاقتران م عندما $s = 2$

$$\left. \begin{array}{l} 3 \geq s, \quad 8 \\ 3 < s, \quad s \end{array} \right\} = (s) \text{ هـ}, \quad 3 + s + 2 = (s) \text{ هـ}$$

أ) ابحث اتصال الاقتران ق عندما $s = 3$

ب) ابحث اتصال الاقتران هـ عندما $s = 3$

ج) جد ناتج جمع الاقترانين ق، هـ مفترضاً أن $l(s) = q(s) + h(s)$

د) ابحث اتصال الاقتران ل عندما $s = 3$

يتبين من النشاط السابق أنه لا يمكن استخدام نظريات الاتصال إذا كان أحد الاقترانين -على الأقل- غير متصل عندما $s = 0$ ؛ لذا نجري العملية المطلوبة على الاقترانين أولاً، ثم نبحث في شروط الاتصال عندما $s = 0$ للاقتران الناتج.

مثال (٢)

$$\left. \begin{array}{l} s > 5, \quad s^2 \\ s \leq 5, \quad s^3 \end{array} \right\} = (s) \text{ هـ}, \quad 15 + s^2 = (s) \text{ هـ}$$

م) $m(s) = (q - h)(s)$ ، فابحث اتصال الاقتران م عندما $s = 5$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \geq 1, \quad \text{س}^2 + 6 \\ \text{س} < 1, \quad \text{س} - 35 \end{array} \right\} = \text{هـ (س)}, \text{هـ} = \text{س}^2 + 5$$

فابحث اتصال الاقتران م(س) = ق(س) × هـ(س) عندما س = 1 -

تعرفت أن الاقتران النسبي هو ناتج قسمة اقتراني كثيري حدود. وباستخدام الجزء الرابع من نظريات الاتصال يمكن التوصل إلى النتيجة الآتية:

نتيجة

الاقتران النسبي هو اقتران متصل لقيم س جميعها باستثناء أصفار مقامه.

مثال (٣)

جد قيم س (إن وجدت) التي يكون عندها كل اقتران مما يأتي غير متصل:

$$(1) \text{ ق(س) = س}^2 + 5\text{س} + 1$$

$$(2) \text{ هـ(س) = } \frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س} - 3}$$

$$(3) \text{ ل(س) = } \frac{5\text{س}}{\text{س}^2 - 1}$$

الحل

- (1) ق اقتران كثير حدود متصل لقيم س جميعها؛ لذا لا يوجد له نقاط عدم اتصال.
 (2) هـ اقتران نسبي متصل لقيم س جميعها باستثناء أصفار مقامه؛ لذا نجد أصفار مقامه:

$$\text{س} - 3 = 0 \Rightarrow \text{س} = 3$$

∴ هـ غير متصل عندما س = 3

(٣) ل اقتران نسبي:

$$س^٢ = ١ - ٠$$

$$س^٢ = ١ \leftarrow س = ١, ١ -$$

∴ ل غير متصل عندما $س = ١$ ، $س = ١ -$

تدريب ٣

جد قيم س (إن وجدت) التي يكون عندها كل اقتران مما يأتي غير متصل:

$$(١) ق(س) = س^٣ - ٣س + ٨$$

$$(٢) ه(س) = \frac{س - ١}{س^٢ + ٥س + ٦}$$

$$(٣) ل(س) = \frac{س - ٥}{س^٣ - ١}$$

الأسئلة

$$(1) \left. \begin{array}{l} 2 \geq s, \quad 9 + s \\ 2 < s, \quad 1 + s \end{array} \right\} = \text{هـ (س)}, \quad 1 - s + 2s = \text{ق (س)}$$

وكان ل (س) = 2 ق (س) + هـ (س)، فابحث اتصال الاقتران ل عندما $s = 2$

$$(2) \left. \begin{array}{l} s > 0, \quad 4 + s \\ s \leq 0, \quad 3s - 4 \end{array} \right\} = \text{هـ (س)}, \quad 4 + 2s = \text{ق (س)}$$

وكان ل (س) = (ق × هـ) (س)، فابحث اتصال الاقتران ل عندما $s = 0$

$$(3) \left. \begin{array}{l} s > 3, \quad s \\ s = 3, \quad 0 \\ s < 3, \quad -s \end{array} \right\} = \text{هـ (س)}, \quad 9 - 2s = \text{ق (س)}$$

وكان ل (س) = ق (س) × هـ (س)، فبين أن ل (س) متصل عندما $s = 3$

(4) إذا كان (ق + هـ) (س) متصلاً عندما $s = 0$ ، فهل نستنتج أن كلاً من ق، هـ متصل عندما $s = 0$ ؟ برّر إجابتك.

٥) جد قيم س (إن وجدت) التي لا يكون عندها كل اقتران مما يأتي متصلًا:

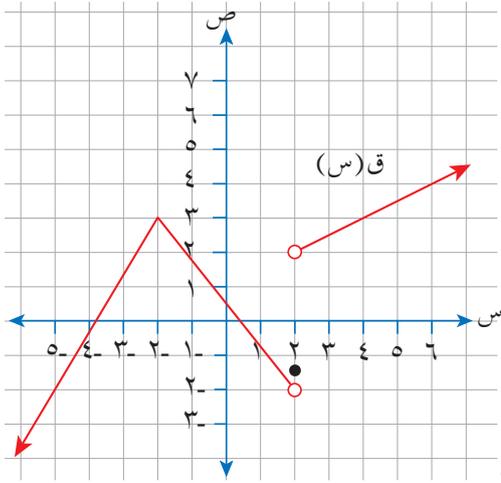
$$\text{أ) ق(س) = س}^2 + ١$$

$$\text{ب) هـ(س) = } \frac{٣ - س}{٦ + س} - ٥$$

$$\text{ج) ل(س) = } \frac{٥}{س} + \frac{٢ + س}{١ - س}^2$$

$$\text{د) م(س) = } \left. \begin{array}{l} ٣ + س^2 \\ ٢ > س \end{array} \right\} , \left. \begin{array}{l} ٦ - س \\ ٢ \leq س \end{array} \right\}$$

أسئلة الوحدة



الشكل (١٦-١).

(١) اعتماداً على الشكل (١٦-١) الذي يمثل منحنى

الاقتران ق، جد قيمة كل مما يأتي:

أ) ق (٢)

ب) نهـا ق (س)
س ← ١

ج) نهـا ق (س)
س ← ٢

د) قيم س التي يكون عندها منحنى الاقتران ق غير متصل

هـ) نهـا ((ق(س))^٢ - س + ٢)
س ← ٠

(٢) إذا كانت نهـا ((ق(س))^٣ + ٢ = ٢٩، نهـا هـ (س) = -٣، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) نهـا ((ق(س) + ٢ + (س) هـ (س) + (س) ← ١
ب) نهـا ((ق(س) × هـ (س) ← ١

(٣) إذا كان ق (س) = $\left. \begin{array}{l} ٢س^٢ + ب \\ ٧ \\ ٢س - ٤ب - ٦ \end{array} \right\}$ ،
س > ١ ،
س = ١ ،
س < ١ ،

وكان الاقتران ق متصلاً عندما س = ١، فجد قيمة كل من الثابتين: أ، ب.

(٤) جد قيمة النهاية (إن وجدت) في كل مما يأتي عند قيم س المبينة إزاء كل منها:

أ) ق (س) = $\frac{١+س}{١+س^٢} + \sqrt{س-٣}$ ، س ← ١

ب) هـ (س) = $\frac{س^٢ - ٥س}{١٠ - س^٢}$ ، س ← ٥

$$\text{ج) ل (س) = } \frac{1 + 2س - 2س^2}{12س - 3س^3} \text{ ، س} \leftarrow 1$$

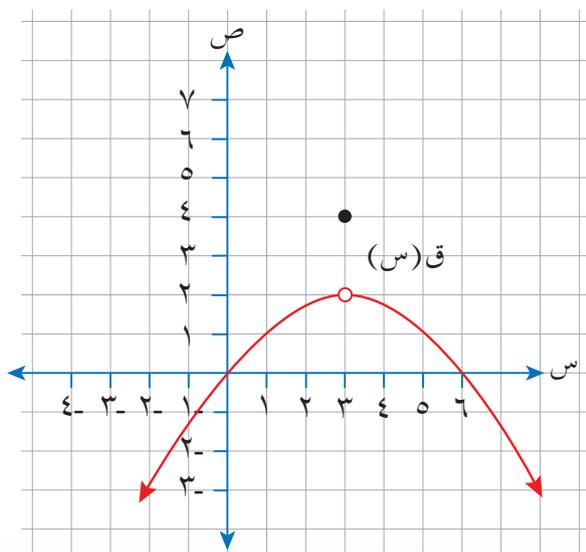
$$\text{د) م (س) = } \frac{27 - 3س^3}{3 - س} \text{ ، س} \leftarrow 3$$

$$\text{هـ) ك (س) = } \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2-س}}{8س^2 - 8} \text{ ، س} \leftarrow 4$$

$$\text{و) د (س) = } \frac{5 - \sqrt{4 + 3س}}{49س^2 - 49} \text{ ، س} \leftarrow 7$$

$$\left. \begin{array}{l} 5س + 4 \text{ ، س} \geq 1 \\ 8س^2 + 1 \text{ ، س} < 1 \end{array} \right\} = \text{هـ (س) ، إذا كان ق (س) = } 3س^3 + 5س$$

وكان ل (س) = (ق + هـ) (س) ، فابحث اتصال الاقتران ل عندما س = 1



الشكل (١٧-١).

٦) اعتماداً على الشكل (١٧-١) الذي يمثل

منحنى الاقتران ق، ابحث اتصال الاقتران ق

عندما س = 3

٧) إذا كان كل من الاقترانين: ق ، هـ متصلًا

عندما س = 5 ، وكان هـ (5) = 4 ،

نهـا $\frac{ق(س) + س}{3هـ(س)}$ = 1 ، فجد ق(5).

٨) إذا كان ق (س) = $\frac{1}{س} + \frac{س-٣}{س٣-٢س}$ ، فما قيم س التي لا يكون عندها الاقتران ق متصلًا؟

٩) يتكون هذا السؤال من خمس فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة بدائل، واحد منها فقط صحيح. ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) إذا كان م عددًا ثابتًا، وكان نهيا $(م س٢ - ٤س + ٥) = ٥$ ، فإن قيمة م هي:

أ) ١ ب) -١ ج) ٤ د) -٤

(٢) نهيا $(س٢ - ٤) = ٣$ تساوي:

أ) -١٢٥ ب) -٢٧ ج) ١٢٥ د) ٢٧

(٣) إذا كان ق (س) = $\frac{س٥ - ٢س}{س٣ - ٢س + ٢}$ ، فإن قيم س التي لا يكون عندها الاقتران ق متصلًا هي:

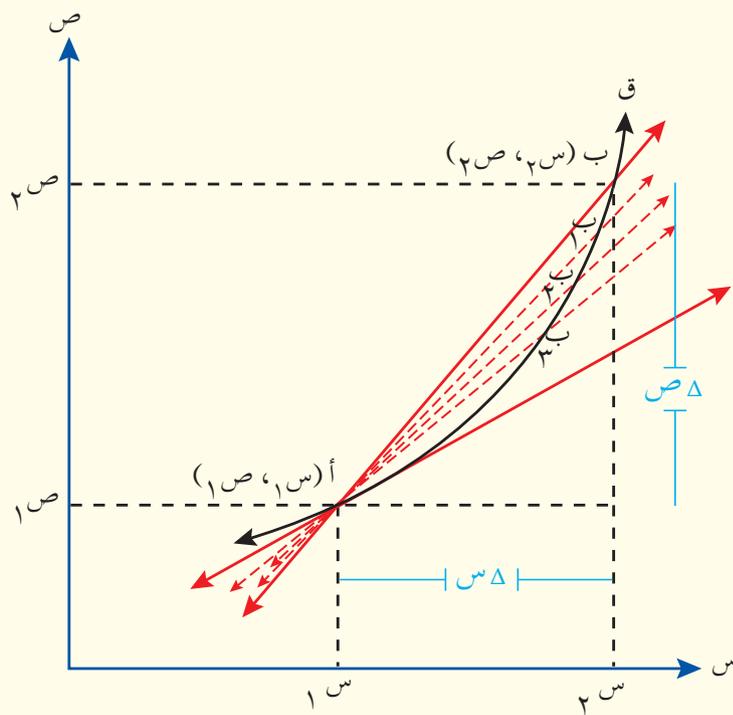
أ) {٠، ٥} ب) {٠، -٥} ج) {١، ٢} د) {-١، -٢}

(٤) إذا كان هـ (س) = $\left. \begin{array}{l} س-١ ، س > ٢ \\ س = ٢ ، س = ٣ \\ س٢ ، س < ٢ \end{array} \right\}$ ، فإن نهيا هـ (س) =

أ) ٣ ب) ٤ ج) ١ د) غير موجودة

(٥) إذا كانت نهيا $(٣ ق (س)) = ٩$ ، فإن قيمة نهيا $(ق (س))$:

أ) ٩ ب) ٨١ ج) ٢٧ د) ٢



نلاحظ في حياتنا وجود مقادير ثابتة وأخرى متغيرة، وقد تعرفت ظواهر متغيرة يؤدي التغير فيها إلى تغير في ظاهرة أخرى تعتمد عليها.

تتناول هذه الوحدة مفهوم معدل التغير هندسيًا وفيزيائيًا، وربطه بمشتقة الاقتران، فضلًا عن قواعد متنوعة في الاشتقاق لإيجاد مشتقات اقترانات مختلفة.

Differentiation

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- تفسير مفهوم معدل التغير هندسيًا وفيزيائيًا.
- تعريف المشتقة الأولى للاقتران.
- إيجاد مشتقة الاقتران باستخدام التعريف وقواعد الاشتقاق.
- استخدام قاعدة السلسلة في إيجاد المشتقة.
- إيجاد مشتقات الاقترانات: s^n ، \sin ، \cos ، \tan ، \cot ، \sec ، \csc .
- إيجاد المشتقات العليا لاقترانات حتى المشتقة الثانية.

النتائج

- ← تتعرف معدل التغير.
- ← تحسب معدل التغير، وتطبقه عند حل المسائل.
- ← تفسر معدل التغير هندسيًا وفيزيائيًا.
- ← تحسب السرعة المتوسطة.
- ← تجد قيمة مشتقة الاقتران الأولى عند نقطة باستخدام تعريف المشتقة.
- ← تجد مشتقة الاقتران الأولى باستخدام تعريف المشتقة.

Rate of Change

معدل التغير

أولاً

في عام ٢٠٠٥ م بلغت أرباح شركة أجهزة كهربائية (٢٠٠٠٠) دينار، وفي عام ٢٠١٢ م حققت الشركة أرباحاً قدرها (٣٤٠٠٠) دينار. ما قيمة التغير في ربح الشركة في أثناء هذه المدة؟ وما معدل التغير السنوي في أرباحها؟

نتعامل في حياتنا اليومية مع ظواهر عدة، منها الثابت مثل: درجة غليان الماء في ظروف معينة، وعدد أيام الأسبوع، ومنها المتغير مثل: درجات الحرارة خلال ساعات النهار، والمسافة المقطوعة، والسرعة والزمن. وتتميز الظواهر المتغيرة بالزيادة أو بالنقصان.

يُعرف **مقدار التغير في س** بأنه الفرق بين قيمتي س عندما تتغير س من s_1 إلى s_2 ويُرمز إليها بالرمز Δs ، وتقرأ: (دلتا س)؛ أي إن:

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

$$\text{ومنه فإن: } s_2 = s_1 + \Delta s$$

مثال (١)

جد Δ س في ما يأتي:

$$(١) \text{ س}_١ = ١ ، \text{ س}_٢ = ٣$$

$$(٢) \text{ س}_١ = ٤,٨ ، \text{ س}_٢ = ١,٧$$

الحل

$$(١) \Delta \text{ س} = \text{س}_٢ - \text{س}_١$$

$$٢ = ١ - ٣ =$$

$$(٢) \Delta \text{ س} = \text{س}_٢ - \text{س}_١$$

$$٣,١ = ٤,٨ - ١,٧ =$$

فكر وناقش

ما دلالة الإشارة في مقدار التغير في س؟

مثال (٢)

إذا كان ق(س) = $٢س + ٥$ ، وتغيرت س من صفر إلى ٣، فما مقدار التغير في س؟

الحل

$$\Delta \text{ س} = \text{س}_٢ - \text{س}_١$$

$$٣ = ٠ - ٣ =$$

يتبين من المثال السابق أنه:

$$\text{إذا كانت س}_١ = \text{صفرًا، فإن ق(س}_١) = \text{ق(٠)} = ٥ + (٠)٢ = ٥،$$

$$\text{وإذا كانت س}_٢ = ٣، فإن ق(س}_٢) = \text{ق(٣)} = ٥ + (٣)٢ = ١١$$

لاحظ أن التغير في s يرافقه تغير في q (س)، وأنه يُرمز إلى التغير في q بالرمز Δq (س)،
ويساوي $q_2 - q_1$ ؛ أي إن:

$$\Delta q = q_2 - q_1$$

إذا رمزنا إلى q بالرمز v ، وإلى المقدار q_1 بالرمز v_1 ، وإلى المقدار q_2 بالرمز v_2 فإن:

$$\Delta q = q_2 - q_1$$

$$\Delta v = v_2 - v_1$$

∴ مقدار التغير في قيمة الاقتران q هو:

$$\Delta q = q_3 - q_0$$

$$= (5 + (3)2) - (5 + (0)2) =$$

$$= 11 - 5 = 6$$

مثال (٣)

إذا كان $v = q$ (س) = $s_2 - s_3$ ، وتغيرت s من $s_1 = 3$ إلى $s_2 = 2$ ، فجد:

(١) مقدار التغير في s .

(٢) مقدار التغير في قيمة الاقتران q (س).

$$(٣) \frac{\Delta v}{\Delta s}$$

الحل

$$(١) \Delta s = s_2 - s_1$$

$$= 2 - 3 = -1$$

(٢) بما أن $q_2 = v_2 = s_2$ ، $q_1 = v_1 = s_1$ ، فإن:

$$\Delta v = v_2 - v_1 = s_2 - s_1$$

$$\begin{aligned}
& \text{ق}(س_1) - \text{ق}(س_2) = \\
& \text{ق}(3) - \text{ق}(2) = \\
& 5 - 6 = 1 = (3 - 2) - (3 - 2) = \\
& 5 = \frac{5 - 1}{1 - 1} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} \quad (3) \\
& \text{تُسمَّى} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} \text{ معدل تغير الاقتران ص} = \text{ق}(س).
\end{aligned}$$

تعريف

معدل تغير الاقتران $\text{ص} = \text{ق}(س)$ حين تتغير $س$ من $س_1$ إلى $س_2$ ، ($س_1 \neq س_2$) هو:

$$\frac{\text{ق}(س_1) - \text{ق}(س_2)}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(س_1) - \text{ق}(س_2)}{س_1 - س_2} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$$

مثال (4)

إذا كان $\text{ق}(س) = \begin{cases} 2س ، & س > 0 \\ 4 ، & س \leq 0 \end{cases}$ ، فجد قيمة معدل التغير في الاقتران $ق$ عندما

تتغير $س$ من $س = 1$ إلى $س = 5$

الحل

$$\begin{aligned}
\frac{\text{ق}(س_1) - \text{ق}(س_2)}{س_1 - س_2} &= \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} \\
\frac{\text{ق}(5) - \text{ق}(1)}{5 - 1} &= \\
1 &= \frac{(2) - 4}{(5) - 1} =
\end{aligned}$$

جد قيمة معدل التغير في الاقتران ق لكل مما يأتي:

(١) ق(س) = $\sqrt{س}$ عندما تتغير س من ٨١ إلى ٣٦

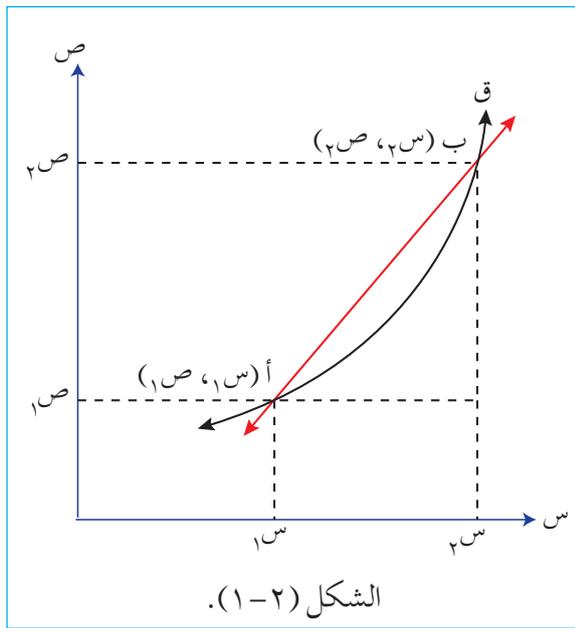
(٢) ق(س) = $\left. \begin{matrix} ٣ \geq س \geq ١ ، ٥ - ٢س \\ ٧ \geq س > ٣ ، ٤ + ٦س \end{matrix} \right\}$ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤

(٣) ق(س) = $٢ - س$ عندما تتغير س من ١ إلى ٦ ، ماذا تلاحظ؟

(٤) ق(س) = $٢س + ١$ عندما تتغير س من ٠ إلى ٣ ، ماذا تلاحظ؟

التفسير الهندسي لمعدل التغير

نشاط



- اعتمادًا على الشكل (١-٢):
- (١) جد معدل تغير الاقتران ق عندما تتغير س من س١ إلى س٢.
 - (٢) احسب ميل المستقيم أ ب.
 - (٣) ماذا تلاحظ؟

المستقيم أ ب يُسمى قاطعًا لمنحنى الاقتران ق، ومنه:

$$\text{ميل القاطع} = \frac{ص٢ - ص١}{س٢ - س١}$$

ميل القاطع المار بالنقطتين: أ (س_١ ، ص_١) ، ب (س_٢ ، ص_٢) يساوي معدل تغير الاقتران عندما تتغير س من س_١ إلى س_٢.

مثال (٥)

إذا كان منحنى الاقتران ق يمر بالنقطتين: أ (-١ ، ٣) ، ب (٢ ، ١٨) ، فجد ميل القاطع المار بالنقطتين: أ ، ب.

الحل

$$v = \frac{(3-) - 18}{(1-) - 2} = \frac{ص_١ - ٢ص_٢}{١س_١ - ٢س_٢} = \text{ميل القاطع}$$

تدريب ٢

إذا كان ق (س) = ٨س^٢ ، فجد ميل القاطع المار بالنقطتين: (٠ ، ق(٠)) ، (٣ ، ق(٣)).

مثال (٦)

إذا كان منحنى الاقتران ق يمر بالنقطتين: أ (٣ ، ٧) ، ب (-١ ، ل) ، وكان ميل القاطع $\overleftrightarrow{أب}$ يساوي (-٣) ، فجد قيمة ل.

الحل

$$\text{ميل القاطع} = \frac{ص_١ - ٢ص_٢}{١س_١ - ٢س_٢}$$

$$\frac{٧ - ل}{٣ - ١ -} = ٣ -$$

$$٧ - ل = ١٢$$

$$\text{إذن: } ل = ١٩$$

التفسير الفيزيائي لمعدل التغير

إذا تحرك جسيم على خط مستقيم بحيث كان موقعه في اللحظة n مُعرَّفًا بالقاعدة $l = f(n)$ ، وتغيرت n من n_1 إلى n_2 ، فإن موقع الجسيم يتغير من الموقع $l_1 = f(n_1)$ إلى الموقع $l_2 = f(n_2)$ ، ويكون تغير المسافة هو Δl ، انظر الشكل (٢-٢).



الشكل (٢-٢).

إذا قسمنا التغير في المسافة (Δl) على مقدار التغير في الزمن (Δn)، فإننا نحصل على **السرعة المتوسطة** \bar{v} للجسيم في الفترة الزمنية $[n_1, n_2]$ ، ومنه:

$$\bar{v} = \frac{\Delta l}{\Delta n} = \frac{f(n_2) - f(n_1)}{n_2 - n_1}$$

مثال (٧)

يتحرك جسيم حسب العلاقة $f(n) = n^2 + 3$ ، حيث n الزمن بالثواني، $f(n)$ المسافة بالأمتار. احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية $[1, 2]$ ثانية.

الحل

$n_1 = 1$ ثانية، $n_2 = 2$ ثانية.

السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية $[1, 2]$ ثانية تساوي:

$$\bar{v} = \frac{f(n_2) - f(n_1)}{n_2 - n_1}$$

$$= \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$$

$$\frac{(3+^2(1)) - (3+^2(2))}{1-2} =$$

$$3 \text{ م/ث} = \frac{4-7}{1} =$$

مثال (٨)

إذا كان معدل تغير الاقتران ق في الفترة $[-3, 1]$ يساوي ٢، وكان هـ $(س) = ق(س) - ٢$ ، فجد معدل تغير الاقتران هـ في الفترة $[-3, 1]$.

الحل

$$س_١ = -3، س_٢ = 1$$

$$\frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} = \text{معدل تغير الاقتران ق(س)}$$

$$\frac{ق(3-) - ق(1)}{(3-) - (1)} = 2$$

$$\frac{ق(3-) - ق(1)}{4} = 2$$

$$\frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١} = \text{معدل تغير الاقتران هـ(س)}$$

$$\frac{هـ(3-) - هـ(1)}{(3-) - (1)} =$$

$$\frac{(ق(3-) - (3-)) - (ق(1) - (1))}{4} =$$

$$\frac{ق(1) - (1) - 1 + (3-)}{4} =$$

$$\frac{9 + 1 -}{4} + \frac{ق(1) - ق(3-)}{4} =$$

$$\frac{8}{4} + 2 =$$

$$4 = 2 + 2 =$$

تدريب ٣

إذا كان معدل التغير في الاقتران ق في الفترة [٢، ١-] يساوي ٣-، وكان هـ (س) = ٢ق(س) + ٥س، فجد معدل التغير في الاقتران هـ في الفترة [٢، ١-].

تدريب ٤

حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

الأسئلة

(١) إذا كان $ق(س) = ٣س - ٢$ ، وتغيرت $س$ من ١ إلى ٤ ، فجد:
 أ) مقدار التغير في $س$.

ب) معدل تغير الاقتران $ق(س)$.

$$(٢) \left. \begin{array}{l} ٣ \geq س \geq ٠, \quad ٢ - ٢س \\ ٧ \geq س > ٣, \quad ١ + ٢س \end{array} \right\} = \text{إذا كان } ق(س)$$

فجد معدل تغير الاقتران $ق$ عندما تتغير $س$ من ١ إلى ٥ .

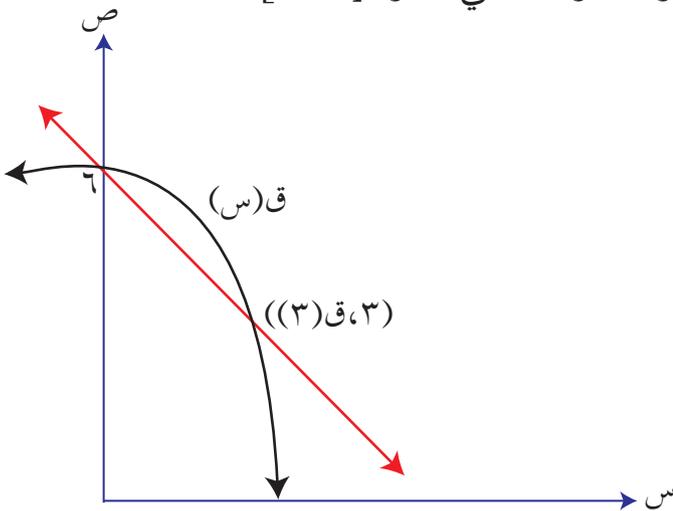
(٣) ما قيمة تغير الاقتران $ص = ٣س$ عندما تتغير $س$ من $س_١ = ٢$ بمقدار $\Delta س = ١$ ؟

$$(٤) \left. \begin{array}{l} ٣ \geq س \geq ١, \quad ٢س \\ ٥ \geq س > ٣, \quad ٥س \end{array} \right\} = \text{إذا كان } ق(س)$$

وكان معدل تغير الاقتران $ق$ عندما تتغير $س$ من ٢ إلى ٥ يساوي ٤ ، فجد قيمة الثابت $أ$.

(٥) إذا كان معدل التغير للاقتران $ق$ في الفترة $[١, ٣]$ يساوي ٤ ، وكان

هـ $ق(س) = ق(س) - س$ ، فجد معدل التغير للاقتران هـ في الفترة $[١, ٣]$.



الشكل (٢-٣).

(٦) إذا كان ميل القاطع لمنحنى الاقتران $ق$ في

الشكل (٢-٣) يساوي $(١-)$ ، فجد

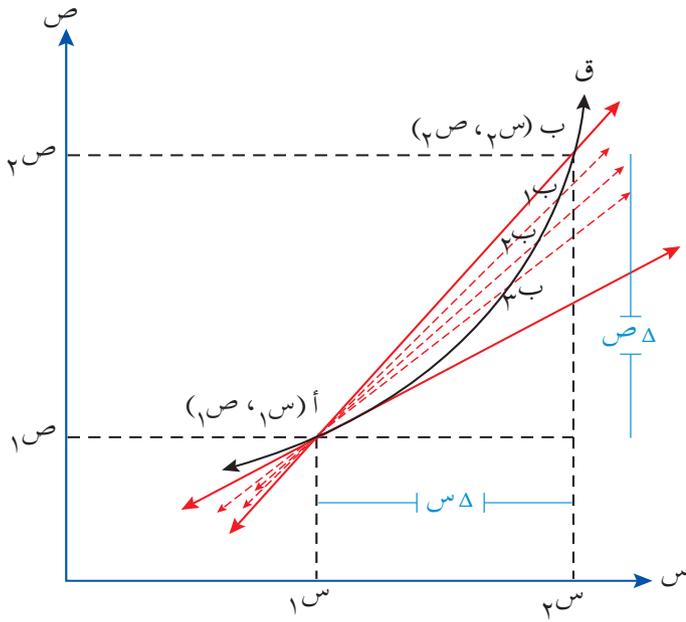
قيمة $ق(٣)$.

- (٧) إذا كان ق(س) = s^3 ، فجد ميل القاطع المار بالنقطتين: (٠، ق(٠))، (٢، ق(٢)).
- (٨) مكعب معدني تعرض للحرارة بحيث تغير طول ضلعه من (١) سم إلى (٣) سم. جد مقدار التغير في حجم هذا المكعب.
- (٩) إذا كانت المسافة التي يقطعها جسيم في أثناء سقوطه رأسياً إلى أسفل تعطى بالعلاقة $f(n) = 10n - 5n^2$ ، حيث f المسافة المقطوعة بالأمتار، n الزمن بالثواني، فاحسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [١، ٣].

تعرفت سابقًا معدل تغير الاقتران ق، وستتعرف الآن أن نهاية معدل تغير الاقتران ق المعروف

على الفترة [أ، ب] تُسمى **المشتقة الأولى للاقتران**:

ص = ق(س)، ويُرمز إليها بالرمز ق(س).



الشكل (٢-٤).

الشكل (٢-٤) يمثل منحنى الاقتران ق،

والنقطتان: أ (١س، ١ص)، ب (٢س، ٢ص)

واقعتان على منحنى ق(س).

إذا حُرِّكت النقطة ب على منحنى

الاقتران ق مقتربة من النقطة أ لتأخذ

الأوضاع ب_١، ب_٢، ... فإن القاطع أ ب

يأخذ الأوضاع أ ب_١، أ ب_٢، ... مقتربًا

من وضع المماس للمنحنى عند النقطة أ.

أي إن ميل المماس عند النقطة أ (١س، ١ص) = نهـا ميل القاطع أ ب

$$= \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \text{ق}'(١س)$$

تعلمت سابقًا أن السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية من ن_١ إلى ن_١ + Δن لجسيم يتحرك على خط

مستقيم وفق العلاقة ل = ف(ن) هي ع̄، وتساوي:

$$\bar{c} = \frac{ف(ن) - ف(ن + \Delta ن)}{\Delta ن} = \frac{\Delta ل}{\Delta ن}$$

وأنه عندما $\Delta n \leftarrow 0$ ، فإن نهياً $\frac{\Delta l}{\Delta n}$ (في حال وجودها) تُسمى السرعة اللحظية للجسيم، وهي المشتقة الأولى لاقتران المسافة بالنسبة إلى الزمن (ع = ف(ن)).

تعريف

المشتقة الأولى للاقتران ق:

المشتقة الأولى للاقتران ص = ق(س) المعرف على الفترة [أ، ب] هي اقتران آخر نرمز إليه بالرمز ق(س)، ويُقرأ (ق فتحة ل س)، حيث:

$$\text{ق(س)} = \text{نهياً} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \text{نهياً} \frac{\text{ق(س} + \Delta \text{س)} - \text{ق(س)}}{\Delta \text{س}} \text{؛ شريطة وجود النهاية.}$$

أما إذا رمزنا إلى المقدار Δ س بالرمز ه فإن تعريف المشتقة الأولى هو:

$$\text{ق(س)} = \text{نهياً} \frac{\text{ق(س} + \text{ه)} - \text{ق(س)}}{\text{ه}} \text{،}$$

من رموز المشتقة الأولى ق(س)، $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، ص.

مثال (١)

جد المشتقة الأولى للاقتران ق، حيث ق(س) = $2س + 1$ باستخدام التعريف.

الحل

$$\text{ق(س)} = \text{نهياً} \frac{\text{ق(س} + \Delta \text{س)} - \text{ق(س)}}{\Delta \text{س}}$$

$$= \text{نهياً} \frac{(1 + 2(س + \Delta \text{س})) - (1 + 2س)}{\Delta \text{س}}$$

$$= \frac{2س + \Delta 2س + 1 - 2س - 1}{\Delta س} \text{ نهيا } \leftarrow \Delta س$$

$$= \frac{2س + \Delta 2س}{\Delta س} \text{ نهيا } \leftarrow \Delta س = 2$$

تعريف

المشتقة الأولى للاقتران ق عندما $س = س_1$ ، حيث $س_1 \in \text{مجال ق}$ ، هي:

$$\text{ق}(س_1) = \frac{\Delta ص}{\Delta س} \text{ نهيا } \leftarrow \Delta س = \frac{\text{ق}(س_1 + ه) - \text{ق}(س_1)}{ه} \text{ نهيا } \leftarrow ه$$

مثال (٢)

إذا كان ق(س) = $5س - 6$ ، فجد ق'(٢) باستخدام التعريف.

الحل

$$\text{ق}'(2) = \frac{\text{ق}(2 + ه) - \text{ق}(2)}{ه} \text{ نهيا } \leftarrow ه$$

$$= \frac{(2 \times 5 - 6) - ((2 + ه)5 - 6)}{ه} \text{ نهيا } \leftarrow ه$$

$$= \frac{10 + 6 - 5ه - 10 - 6}{ه} \text{ نهيا } \leftarrow ه$$

$$= \frac{-5ه}{ه} \text{ نهيا } \leftarrow ه = -5$$

تدريب ١

إذا كان ق(س) = ٣ + ٤س ، فجد ق(٢) باستخدام التعريف.

بوضع $ع = س + هـ$ ، يمكن التعبير عن المشتقة الأولى باستخدام التعريف حسب العلاقة الآتية:

$$ق(س) = \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} \cdot \frac{هـ}{ع - س}$$

مثال (٣)

إذا كان ق(س) = ٢س^٢ ، فجد ق(س) باستخدام التعريف.

الحل

$$ق(س) = \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} \cdot \frac{هـ}{ع - س}$$

$$= \frac{٢ع^٢ - ٢س^٢}{ع - س} \cdot \frac{هـ}{ع - س}$$

$$= \frac{٢(ع - س)(ع + س)}{ع - س} \cdot \frac{هـ}{ع - س}$$

$$= \frac{٢(ع + س)هـ}{ع - س}$$

∴ ق(س) = ٢س.

تدريب ٢

إذا كان ق(س) = ٤س^٢ - ٣ ، فجد ق(٣) باستخدام التعريف.

إذا كان ق(س) = س^٣ ، فجد ق(س) باستخدام التعريف.

مثال (٤)

إذا كان ق(س) = √س ، فجد ق(س) باستخدام التعريف.

الحل

$$\text{ق(س)} = \frac{\text{ق(ع) - ق(س)}}{\text{ع - س}} \text{ نهـا}$$

$$= \frac{\sqrt{\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}} \text{ نهـا}$$

$$= \frac{\sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}}} \times \frac{\sqrt{\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}} \text{ نهـا} \text{ ، لماذا؟}$$

$$= \frac{\cancel{\text{ع}} - \cancel{\text{س}}}{(\sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}})(\cancel{\text{ع}} - \cancel{\text{س}})} \text{ نهـا}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}}} \text{ نهـا}$$

يمكن حل المثال (٤) بطريقة أخرى، وذلك بتحليل ع - س بوصفها فرقاً بين مربعين:

$$\text{ق(س)} = \frac{\text{ق(ع) - ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}} \text{ نهـا}$$

$$\frac{\overline{ص} - \overline{ع}}{(\overline{ص} + \overline{ع})(\overline{ص} - \overline{ع})} = \frac{\overline{ص} - \overline{ع}}{\overline{ص} - \overline{ع}} \text{ نهيا } = \overline{ص} \leftarrow \overline{ع}$$

$$\frac{1}{\overline{ص}^2} = \frac{1}{(\overline{ص} + \overline{ع})} \text{ نهيا } = \overline{ع} \leftarrow \overline{ص}$$

مثال (٥)

إذا كان ق(س) = $\sqrt{3 - 2س}$ ، فجد ق(٤) باستخدام تعريف المشتقة.

الحل

$$\frac{\text{ق}(س_1) - \text{ق}(س_0)}{س_1 - س_0} = \frac{\text{ق}(س_1) - \text{ق}(س_0)}{س_1 - س_0} \text{ نهيا } = \overline{ص} \leftarrow \overline{ع}$$

$$\frac{\text{ق}(٤) - \text{ق}(٣)}{٤ - ٣} = \frac{\text{ق}(٤) - \text{ق}(٣)}{٤ - ٣} \text{ نهيا } = \overline{ص} \leftarrow \overline{ع}$$

$$\frac{\sqrt{3 - 4 \times 2} - \sqrt{3 - (٣ + ٤) \times 2}}{٤ - ٣} \text{ نهيا } = \overline{ص} \leftarrow \overline{ع}$$

$$\frac{\sqrt{٥} + \sqrt{٥ - ٢ + ٥}}{\sqrt{٥} + \sqrt{٥ - ٢ + ٥}} \times \frac{\sqrt{٥} - \sqrt{٥ - ٢ + ٥}}{\sqrt{٥} - \sqrt{٥ - ٢ + ٥}} \text{ نهيا } = \overline{ص} \leftarrow \overline{ع}$$

$$\frac{٥ - ٥ + ٢}{(\sqrt{٥} + \sqrt{٥ - ٢ + ٥})} \text{ نهيا } = \overline{ص} \leftarrow \overline{ع}$$

$$\frac{1}{\sqrt{٥}} = \frac{2}{\sqrt{٥}^2} = \frac{2}{(\sqrt{٥} + \sqrt{٥ - ٢ + ٥})} \text{ نهيا } = \overline{ص} \leftarrow \overline{ع}$$

إذا كان ق(س) = $\sqrt{2س}$ ، س > ٠ ، فجد ق(س) باستخدام تعريف المشتقة، ثم جد ق(٨).

مثال (٦)

إذا كان ق(س) = $\frac{٣}{س}$ ، س ≠ صفرًا، فجد ق(س) باستخدام تعريف المشتقة، ثم جد ق(٣).

الحل

$$\begin{aligned} \text{ق(س)} &= \frac{\text{نها}}{\text{ع} \leftarrow \text{س}} = \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}} \\ &= \frac{\text{نها}}{\text{ع} \leftarrow \text{س}} = \frac{\frac{٣}{س} - \frac{٣}{ع}}{\text{ع} - \text{س}} \\ &= \frac{\text{نها}}{\text{ع} \leftarrow \text{س}} = \frac{١}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}} \times \frac{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}^{\cancel{1-}}}{\text{ع} \text{ س}} \\ &= \frac{\text{نها}}{\text{ع} \leftarrow \text{س}} = \frac{٣-}{\text{س}^٢} = \frac{٣-}{\text{ع} \text{ س}} \\ \text{ومنه: ق(٣)} &= \frac{٣}{٩} - = \frac{١}{٣} - \end{aligned}$$

إذا كان ق(س) = $\frac{١}{٣-س}$ ، س ≠ $\frac{١}{٣}$ ، فجد ق(س) باستخدام التعريف، ثم جد ق($\frac{١}{٣}$).

الأسئلة

(١) إذا كان $v = c(s)$ ، وكان مقدار تغير الاقتران $q(s)$ هو s^2 هـ - $2s$ هـ^٢، فجد $q(s)$.

(٢) إذا كان $v = c(s)$ ، وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران q عندما تتغير s من s_1 إلى s_2 هو $\Delta v = 4s_2 - 2s_1$ ، فجد قيمة $q(s)$.

(٣) باستخدام تعريف المشتقة، جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

أ) $q(s) = 6$ ب) $q(s) = 5 - 4s$

ج) $v = s^2 - 2s$ د) $q(s) = \sqrt{3 + 4s}$

هـ) $q(s) = \frac{1}{s^2}$ و) $v = \frac{2}{3 + s^2}$

(٤) استخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة في حساب مشتقة كل مما يأتي عند قيمة s المبينة إزاء كل منها:

أ) $q(s) = 3s + 6$ ، $s = 2$

ب) $v = s - 1$ ، $s = 4$

ج) $v = 2s^3 - 5s + 4$ ، $s = 0$

د) $v = \sqrt{3 - 2s}$ ، $s = 2$

هـ) $v = \frac{2}{1 - s}$ ، $s = 4$

و) $q(s) = \frac{5}{s^3 + 4}$ ، $s = 1$

النتائج

- ◀ تطبق قواعد الاشتقاق عند إيجاد مشتقات اقترانات معطاة.
- ◀ تستخدم قاعدة السلسلة في إيجاد المشتقة.
- ◀ تحسب مشتقة الاقترانات الآتية: جاس، جتاس، ظاس.
- ◀ تجد المشتقات العليا لاقترانات معطاة حتى المشتقة الثانية.

Differentiation Rules

قواعد الاشتقاق

أولاً

إذا كان $ق(س) = س^2(س - 3)$ ، فجد $ق'(س)$.

إن إيجاد مشتقة هذا الاقتران باستخدام تعريف المشتقة يجعل التعامل مع الأسس الكبيرة أمراً صعباً؛ لذا ستتعرف في هذا الدرس بعض القواعد التي تسهل عملية الاشتقاق.

نشاط

املاً الفراغ في الجدول الآتي اعتماداً على تعريف المشتقة:

مشتقة الاقتران	الاقتران	مشتقة الاقتران	الاقتران
-----	هـ $(س) = س$	-----	ق $(س) = 5$
-----	هـ $(س) = س^2$	-----	ق $(س) = 4 - س$
-----	هـ $(س) = س^3$	-----	ق $(س) = 5, 0$
	ماذا تلاحظ؟		ماذا تلاحظ؟

القاعدة (١)

- (١) إذا كان ق(س) = جـ ، حيث جـ عدد ثابت، فإن ق(س) = صفرًا.
 (٢) إذا كان ق(س) = س^ن، فإن ق(س) = ن س^{ن-١}، ن > ٠.
 (٣) إذا كان ق(س) = أ × م(س)، حيث م اقتران قابل للاشتقاق، أ عدد ثابت، فإن:
 ق(س) = أ × م(س).

مثال (١)

جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

- (١) ق(س) = ٣-
 (٢) ص = س^٢
 (٣) هـ(س) = ٢ س^{-٥}
 (٤) ص = $\sqrt[٣]{٢س}$
 (٥) ل(س) = $\sqrt[٣]{٣س}$
 (٦) ص = $\frac{١}{س^٢}$

الحل

- (١) ق(س) = صفرًا.
 (٢) $\frac{دص}{دس} = ٣س^{-٣} = ١-٣س^{-٣}$
 (٣) هـ(س) = ٢(٥-) س^{-٥} = ١٠- س^{-٦} = $\frac{١٠-}{س^٦}$
 (٤) ص = $\frac{١}{س^٣}$
 $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{س^٣} = ١-٣س^{-٤} = \frac{١}{س^٣} = \frac{٢-}{س^٤}$
 (٥) ل(س) = $\sqrt[٣]{٣س}$
 ل(س) = $\frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}} = ١-\frac{٣}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} = \frac{٣}{٢} س^{-\frac{١}{٢}}$

$$(٦) \text{ ص} = \text{س}^{-٢}$$

$$\frac{\text{ص}^{-٢}}{\text{س}^{-٣}} = \frac{\text{ص}^{-٢} \cdot \text{س}^٣}{\text{س}^{-٣} \cdot \text{س}^٣} = \frac{\text{ص}^{-٢} \cdot \text{س}^٣}{\text{س}^٠} = \frac{\text{ص}^{-٢} \cdot \text{س}^٣}{١}$$

تدريب ١

جد المشتقة الأولى لكل من الاقترانات الآتية:

$$(١) \text{ ق (س)} = \text{س}^{-\frac{٢}{٣}} \quad (٢) \text{ ص} = \sqrt[٧]{\text{س}}$$

$$(٣) \text{ ص} = \frac{٥}{٣} \text{ س}^{-٦} \quad (٤) \text{ ص} = \text{س}$$

القاعدة (٢): مشتقة مجموع اقترانين، والفرق بين اقترانين.

إذا كان كل من: ق، هـ اقتراناً قابلاً للاشتقاق، وكان:

$$(١) \text{ ل (س)} = \text{ق (س)} + \text{هـ (س)}, \text{ فإن ل (س)} = \text{ق (س)} + \text{هـ (س)}.$$

$$(٢) \text{ ع (س)} = \text{ق (س)} - \text{هـ (س)}, \text{ فإن ع (س)} = \text{ق (س)} - \text{هـ (س)}.$$

مثال (٢)

جد المشتقة الأولى لكل من يأتي:

$$(١) \text{ ق (س)} = ٥ \text{ س}^{-٤} - ٢ \text{ س}^{-٣} + ٢ \quad (٢) \text{ ص} = \text{س}^{-٣} - ٢ \text{ س}^٢ \quad (٣) \text{ هـ (س)} = \sqrt[٧]{\text{س}} + \text{س}^٢$$

الحل

$$(١) \text{ ق (س)} = ٥ \text{ س}^{-٤} - ٢ \text{ س}^{-٣} + ٢$$

$$(٢) \text{ ص} = \text{س}^{-٣} - ٢ \text{ س}^٢ = \frac{\text{ص}^{-٣}}{\text{س}^٣} - \frac{٢ \text{ ص}^٢}{\text{س}^٢}$$

$$(٣) \text{ هـ (س)} = \sqrt[٧]{\text{س}} + \text{س}^٢$$

$$\text{هـ (س)} = \frac{١}{\sqrt[٧]{\text{س}}} + \text{س}^٢ = \frac{١}{\text{س}^{\frac{١}{٧}}} + \text{س}^٢ = \frac{١}{٧} \text{ س}^{-\frac{١}{٧}} + ٢ \text{ س}^٢$$

مثال (٣)

إذا كان ق(س) = ٥س^٣ - ٤س^٢ - ١، فجد ق'(٢).

الحل

الاشتقاق أولاً، ثم التعويض في القاعدة، ثم تطبيق أولويات العمليات الحسابية:

$$ق'(س) = ١٥س^٢ - ٨س$$

$$ق'(٢) = (٢-)'١٥ - (٢-)'٨$$

$$٧٦ = ١٦ + ٦٠ = ١٦ + ٤ \times ١٥ =$$

تدريب ٢

جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

$$(١) \text{ ص} = ٢س - \frac{٢}{س}$$

$$(٢) \text{ ق(س)} = ٤س^٣ - ٥ + \frac{١}{س}$$

القاعدة (٣): مشتقة حاصل ضرب اقترانين.

إذا كان كل من: ق، هـ اقتراناً قابلاً للاشتقاق، وكان ص = ق(س) × هـ(س)، فإن:

$$\frac{دص}{دس} = ق(س) \times هـ'(س) + هـ(س) \times ق'(س); \text{ أي إن:}$$

مشتقة حاصل ضرب اقترانين =

الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول.

بالرجوع إلى المسألة الواردة في بداية الدرس، حيث:

$$ق(س) = ٥س^٣ - ٤س^٢ - ١، فإن:$$

ق'(س) = الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول.

$$= ١٥س^٢ \times (٣ - ٤س) + ٢ \times ٥س$$

$$= ١٥س^٢ - ٤٠س + ١٠س = ١٥س^٢ - ٣٠س.$$

فكر وناقش

حلّ المسألة السابقة بطريقة أخرى.

مثال (٤)

جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

$$(١) \text{ ص} = (٣ - ٢س) (٣س + ٥) \text{ عندما } س = ٥ \text{ صفرًا.}$$

$$(٢) \text{ ص} = ٣س - (٥ - ٣س).$$

الحل

$$(١) \frac{دص}{دس} = \text{الاقتران الأول} \times \text{مشتقة الاقتران الثاني} + \text{الاقتران الثاني} \times \text{مشتقة الاقتران الأول.}$$

$$٢ \times (٥ + ٣س) + ٣س \times (٣ - ٢س) =$$

$$١٠ = ١٠ + ٠ = ٢ \times ٥ + ٠ \times ٣ - = \left| \frac{دص}{دس} \right|_{س=٥}$$

$$(٢) \frac{دص}{دس} = ٣س - (٥ - ٣س) + ٣س \times ٣ - =$$

$$\frac{١٥}{س} = ٣س - ١٥ + (٣س - ١) + ٣س =$$

فكر وناقش

(١) حلّ المثال (٤) من دون استخدام قاعدة مشتقة ضرب اقترانين.

(٢) ادّعت نور أن المشتقة الأولى للاقتران ق(س) = ٣س (٣س + ٥) هي:

ق(س) = ٢س (٩س). ناقش صحة ادّعائها.

جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

$$(١) \text{ ص } = (٣ + ٥س) \times (٧ + ٢س٣)$$

$$(٢) \text{ ق(س) } = (٥ - ٣س) \times (١ + ٢س٤) \text{ عندما س } = ١$$

$$(٣) \text{ ص } = (١ - ٢س) \times (٤ - ٢س٣)$$

القاعدة (٤): مشتقة خارج قسمة اقرانين.

إذا كان كل من: ق، هـ اقراناً قابلاً للاشتقاق، وكان ص = $\frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$ ، هـ(س) $\neq ٠$ ،

$$\text{فإن } \frac{\text{ص}}{\text{ق(س)}} = \frac{\text{هـ(س)} \times \text{ق'(س)} - \text{ق(س)} \times \text{هـ'(س)}}{(\text{هـ(س)})^2} ; \text{ أي إن}$$

$$\text{مشتقة قسمة اقرانين} = \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال (٥)

$$\text{إذا كانت ص} = \frac{١ - ٣س}{٦ + س٢} \text{، فجد } \frac{\text{ص}}{\text{ق(س)}}$$

الحل

$$\frac{\text{ص}}{\text{ق(س)}} = \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

$$= \frac{٢ \times (١ - ٣س) - (١ - ٣س) \times (٦ + س٢)}{(٦ + س٢)^2}$$

$$= \frac{٢ + ٣س٤ - ٦ - ٣س٢ - ٦س - ٢س٣}{(٦ + س٢)^2} = \frac{٢ + ٣س٤ - ٦س - ٢س٣ - ٤}{(٦ + س٢)^2}$$

نشاط

أكمل الفراغ في الجدول الآتي باستخدام قاعدة قسمة اقترانين:

الاقتران	مشتقة الاقتران
ق(س) = $\frac{3}{س}$	_____
ق(س) = $\frac{2-}{1+س^2}$	_____
ق(س) = $\frac{1}{س^5 - 1}$	_____

ماذا تلاحظ؟

نتيجة

إذا كان ق(س) = $\frac{ج}{هـ(س)}$ ، حيث هـ(س) $\neq 0$ ، ج عدد ثابت، وكان هـ(س) قابلاً

للاشتقاق، فإن ق'(س) = $\frac{-ج \times هـ'(س)}{هـ(س)^2}$.

مثال (٦)

جد $\frac{دص}{دس}$ في كل مما يأتي:

$$\frac{٧ + ٢س^٣}{٢} = ص (٢)$$

$$\frac{٥-}{٣ + س^٢} = ص (١)$$

الحل

$$\frac{١٠}{٢(٣ + س^٢)} = \frac{٢ \times (٥-) -}{٢(٣ + س^٢)} = \frac{دص}{دس} (١)$$

$$\frac{٣}{٢} = \frac{٦س}{٢} = \frac{دص}{دس} (٢)$$

تدريب ٤

جد $\frac{دص}{دس}$ في كل مما يأتي:

$$\frac{٨ - ٣س}{٢ - س} = \text{ص (٢)}$$

$$\frac{٥ + س٢}{س - ٣} = \text{ص (١)}$$

$$\frac{١١}{٦ + ٣س} = \text{ص (٤)}$$

$$\frac{س٣ - ١}{٢} = \text{ص (٣)}$$

فكر وناقش

جد $\frac{دص}{دس}$ للاقتران في الفرع (٢) من التدريب (٤) السابق بأكثر من طريقة.

تدريب ٥

حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

الأسئلة

(١) جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

$$\text{أ) ق (س) = } 6 - 2س^3 \quad \text{ب) ق (س) = } \frac{3}{س}$$

$$\text{ج) هـ (س) = } 2س^{-٥} + \sqrt[3]{س} + س \quad \text{د) ص = } (س^2 - 3س)(س^5 - 4)$$

$$\text{هـ) ص = } \frac{1 + س^2}{3 - 2س} \quad \text{و) ق (س) = } \frac{س}{س^2 - 4}$$

$$\text{ز) ق (س) = } (س^3 + 3س)(س^5 - 2)$$

(٢) جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي عند قيم س المبينة إزاء كل منها:

$$\text{أ) ص = } 5س^3 - 2س^2 + 1 \quad \text{، عندما س = } 3$$

$$\text{ب) ص = } 3س + \sqrt[3]{س} \quad \text{، عندما س = } 1$$

$$\text{ج) ص = } \frac{3-}{س-2} \quad \text{، عندما س = } 2$$

$$\text{د) ق (س) = } \frac{س^2}{س^4 - 5} \quad \text{، عندما س = } 1$$

$$\text{هـ) ق (س) = } (4 - 6س^2)(1 + 2س) \quad \text{، عندما س = } 2$$

$$\text{و) ق (س) = } 2س + (3 - 2س) \times \frac{2}{س} \quad \text{، عندما س = } 1$$

(٣) إذا علمت أن ق (س) = $\sqrt[3]{س}$ ، فجد قيمة نهـا $\frac{ق(1+هـ) - ق(1)}{هـ}$.

(٤) إذا كان ق (١) = ٤ ، ق (١) = ٢- ، هـ (١) = ٢- ، هـ (١) = ١ فجد:

$$\text{أ) (ق} \times \text{هـ) (١) \quad \text{ب) ((ق} \times \text{هـ) (١)) \quad \text{ج) (} \frac{ق}{هـ} \text{) (١)}$$

$$\text{د) (} \frac{3}{هـ} \text{) (١) \quad \text{هـ) (ق} + \text{هـ) (١) \quad \text{و) (3ق - 2هـ) (١)}$$

إذا كان $ق(س) = (س^٣ + ٥)^\circ$ ، فجد $ق'(س)$.

لا يمكن إيجاد مشتقة الاقتران $ق(س) = (س^٣ + ٥)^\circ$ باستخدام قواعد الاشتقاق التي تعلمتها في هذا الفصل ؛ لذا يجب استعمال **قاعدة السلسلة** لإيجاد مشتقة هذا الاقتران.

مثال (١)

إذا كان $ص = ٢ع^٢ + ٣$ ، $ع = س^٣ - ١$ ، فجد $\frac{دص}{دس}$.

الحل

$$ع = س^٣ - ١ ، ومنه: ص = ٢(س^٣ - ١) + ٣$$

$$ص = ٢(س^٣ - ١) + ٣ = ٢س^٣ - ٢ + ٣ = ٢س^٣ + ١$$

$$ص = ٢س^٣ + ٤ - ١ = ٢س^٣ + ٣$$

$$\frac{دص}{دس} = ٢س^٢ - ٠ = ٢س^٢$$

لاحظ أن الاقتران $ص$ مكتوب بدلالة المتغير $ع$ ، وأن المتغير $ع$ مكتوب بدلالة المتغير $س$.

يمكن إيجاد $\frac{دص}{دس}$ باتباع الخطوات الآتية:

$$(١) \text{ إيجاد } \frac{دص}{دع}$$

$$(٢) \text{ إيجاد } \frac{دع}{دس}$$

$$(٣) \text{ إيجاد } \frac{دص}{دس} \times \frac{دع}{دع}$$

(٤) تعويض قيمة $ع$ بدلالة $س$.

القاعدة (١): قاعدة السلسلة.

إذا كان $v = c(e)$ ، $e = h(s)$ ، v قابلاً للاشتقاق بالنسبة إلى e ، e قابلاً للاشتقاق بالنسبة إلى s ، فإن:

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{de} \times \frac{de}{ds}$$

مثال (٢)

(١) إذا كان $v = m^3 + 2m - 5$ ، $m = 3s + 7$ ، فجد $\frac{dv}{ds}$.

(٢) إذا كان $v = e^3 + 1$ ، $e = 5s - 2$ ، فجد $\frac{dv}{ds}$ عندما $s = 1$.

الحل

$$(١) \quad \frac{dv}{ds} = m^3 + 2m - 5$$

$$3 = \frac{dm}{ds}$$

$$\frac{dv}{ds} \times \frac{dm}{ds} = \frac{dv}{dm}$$

$$3 \times (m^3 + 2m - 5) =$$

$$9m^3 + 6m - 15 =$$

$$9(3s + 7)^3 + 6(3s + 7) - 15$$

$$(٢) \quad \frac{dv}{de} = 3e^2$$

$$5 = \frac{de}{ds}$$

$$\frac{dv}{ds} \times \frac{de}{ds} = \frac{dv}{de}$$

$$\begin{aligned}
& 5 \times 2^3 = \\
& 10 = 2^3 \\
& 10 = (2-5) \times 2 \\
& 135 = 9 \times 10 = (2-5) \times 10 = \left| \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \right|_{\text{س}=1}
\end{aligned}$$

تدريب ١

إذا كان $\text{ص} = 2^3 + 3$ ، $\text{ع} = 2 - 3$ ، فجد $\left| \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \right|_{\text{س}=1}$.

مثال (٣)

إذا كان $\text{ص} = (5 - 2^3)$ ، فجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$.

الحل

افرض أن $\text{ع} = 5 - 2^3$ ، ومنه: $\text{ص} = 2^3 - 5$.

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = 2^3 - 5 ، \quad \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = 2^3 - 5$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$2^3 - 5 \times 2^3 =$$

$$= 6 - 5 = 1$$

$$= 6 - 5 = 1$$

القاعدة (٢)

إذا كان $\text{ص} = (س)^n$ ، $\text{ع} = س - ١$ ، فجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$.

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (س)^{n-1} \times (س - ١)$$

مثال (٤)

جد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يأتي:

$$(١) \text{ ص } = (٥ - س)^٢ \quad (٢) \text{ ص } = (٢ - س)^٢ \text{ عندما } س = ١$$

الحل

$$(١) \frac{دص}{دس} = \frac{٣(٥ - س)^٢ \times ٢ - س}{دس}$$

$$= \frac{٦ - س(٥ - س)^٢}{دس}$$

$$(٢) \frac{دص}{دس} = \frac{٣(٢ - س)^٢ \times ٢}{دس}$$

$$= \frac{٦(٢ - س)^٢}{دس}$$

$$= \frac{٦(٢ - ٢ - ١)^٢}{دس} \quad \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{س} = ١ \end{array}$$

$$= \frac{٦ \times (-١)^٢}{دس} = \frac{٦}{١} = ٦$$

تدريب ٢

إذا كان $ص = (س^٢ + ٤س + ٥)^٢$ ، فجد $\frac{دص}{دس}$.

مثال (٥)

جد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يأتي:

$$(١) \text{ ص } = \sqrt{١ + س^٣} ، \text{ س } < ١ \quad (٢) \text{ ص } = \sqrt{٣ + س^٢}$$

الحل

$$(١) \text{ ص } = (١ + س^٣)^{\frac{١}{٢}}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢} (١ + س^٣)^{\frac{١}{٢} - ١} \times ٣س^٢$$

$$\frac{2s^3}{\frac{1}{2}(1+2s)^2} =$$

$$(2) \text{ ص} = \frac{1}{3}(3+2s)^3$$

$$2s \times \frac{2-}{3}(3+2s)^{\frac{1}{3}} = \frac{2s}{3}$$

$$\frac{2s}{\frac{2}{3}(3+2s)^3} =$$

القاعدة (٣): مشتقة اقتران الجذر التربيعي.

إذا كان $q(s) = \sqrt{h(s)}$ ، $h(s) > 0$ ، h اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن:

$$q'(s) = \frac{h'(s)}{2\sqrt{h(s)}} = \frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{2 \times \text{الجذر نفسه}}$$

تدريب ٣

(١) إذا كان $v = \sqrt{3+s-2s^2}$ ، فجد $\frac{dv}{ds}$.

(٢) إذا كان $v = \sqrt[3]{2-s}$ ، فجد $\frac{dv}{ds}$.

تدريب ٤

حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

الأسئلة

(١) جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

أ) $v = \sqrt{1 + e}$ ، $e = 4s^3 - 9$

ب) $v = l^3$ ، $l = 8s$ عندما $s = \frac{1}{4}$

(٢) جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

أ) $v = \sqrt{1 + 2s^2}$

ب) $q(s) = (3 + s^2)^3$

ج) $m(s) = (4s + 1)^2$

د) $q(s) = s^{-4}(5 - 5s^3)$

هـ) $v = (s + 7s^2)(9 - 5s^4)$

(٣) جد v لكل مما يأتي عند قيمة s المبينة إزاء كل منها:

أ) $v = \sqrt{5 + 3s^2}$ ، $s = 0$

ب) $v = 5 - (3s^3 - 1)^2$ ، $s = -1$

ج) $v = (3 - s^2)(4s^3 - 2)$ ، $s = 1$

د) $v = m^2 + 3m - 2$ ، $m = 4s^2$ ، $s = 2$

إذا كان $ق(س) = ظا(س^2 + ٥)$ ، فجد $ق'(س)$.

لإيجاد مشتقة اقتران مثل الاقتران $ق(س) = جا(س^2 + ٥)$ ، يجب استخدام قواعد خاصة بمشتقة الاقترانات المثلثية؛ لذا ستتعرف في هذا الدرس بعض هذه القواعد.

القاعدة (١): مشتقة الاقترانات المثلثية.

- (١) إذا كان $ق(س) = جاس$ ، فإن $ق'(س) = جتاس$.
- (٢) إذا كان $ق(س) = جتاس$ ، فإن $ق'(س) = -جاس$.
- (٣) إذا كان $ق(س) = ظاس$ ، فإن $ق'(س) = قأس$.

تعلمت سابقاً أن: $ظاس = \frac{جاس}{جتاس}$ ، $قاس = \frac{١}{جتاس}$.

مثال (١)

إذا كان $ص = ٢ظاس - جتاس$ ، فجد $\frac{دص}{دس}$.

الحل

$$\frac{دص}{دس} = ٢ قأس - (-جاس)$$

$$= ٢ قأس + جاس.$$

مثال (٢)

جد $\frac{ص}{دس}$ لكل مما يأتي:

$$(١) \text{ ص} = ٢س + \frac{\text{ظاس}}{٢} - ٤ \text{ جاس}.$$

$$(٢) \text{ ص} = ٣ \text{ جاس} + ٥ \text{ جتاس} - ٢ \text{ ظاس}.$$

الحل

$$(١) \frac{ص}{دس} = ٢ + \frac{١}{٢} \text{ قأس} - ٤ \text{ جتاس}.$$

$$(٢) \frac{ص}{دس} = ٣ \text{ جتاس} + ٥ (- \text{جاس}) - ٢ \text{ قأس}.$$

$$= ٣ \text{ جتاس} - ٥ \text{ جاس} - ٢ \text{ قأس}.$$

تدريب ١

جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

$$(١) \text{ ص} = \frac{٢}{\text{جتاس}} + \text{ظاس} + ٢س.$$

$$(٢) \text{ ص} = \text{جتاس} \text{ ظاس}.$$

$$(٣) \text{ ص} = \text{جاس} \text{ جتاس}.$$

$$(٤) \text{ ص} = س^٢ \text{ ظاس}.$$

تعلمت سابقاً قاعدة السلسلة التي تُستخدم في إيجاد مشتقة بعض الاقترانات. ولكن، إذا كانت الزاوية في الاقتران المثلثي تمثل اقتراناً كما في المثال (٣)، فكيف يمكنك استخدام قاعدة السلسلة في إيجاد مشتقة هذا الاقتران؟

إذا كان $\text{ص} = \text{جا}(٥س^٢ + ١)$ ، فجد $\frac{\text{ص}}{\text{كس}}$.

الحل

افرض أن $\text{ع} = ٥س^٢ + ١$ ، ومنه: $\text{ص} = \text{جا ع}$.

$$\frac{\text{ص}}{\text{ع}} = \text{جتا ع} ، \frac{\text{كع}}{\text{كس}} = ١٠$$

$$\frac{\text{كع}}{\text{كس}} \times \frac{\text{ص}}{\text{ع}} = \frac{\text{ص}}{\text{كس}}$$

$$= ١٠ \times \text{جتا ع}$$

$$= ١٠ \text{ جتا}(٥س^٢ + ١)$$

يمكن حل المثال السابق باتباع القاعدة الآتية:

القاعدة (٢).

(١) إذا كان $\text{ص} = \text{جا}(هـ س)$ ، هـ اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، فإن:

$$\frac{\text{كص}}{\text{كس}} = هـ (س) \text{جتا}(هـ س)$$

(٢) إذا كان $\text{ص} = \text{جتا}(هـ س)$ ، هـ اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، فإن:

$$\frac{\text{كص}}{\text{كس}} = - هـ (س) \text{جا}(هـ س)$$

(٣) إذا كان $\text{ص} = \text{ظا}(هـ س)$ ، هـ اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، فإن:

$$\frac{\text{كص}}{\text{كس}} = هـ (س) \text{قا}^٢(هـ س)$$

مثال (٤)

جد ق(س) لكل مما يأتي:

$$(١) \text{ ق(س) = ظا(س}^٢ + ٥س + ١). \quad (٢) \text{ ق(س) = جا}^٢س.$$

الحل

$$(١) \text{ ق(س) = قا(س}^٢ + ٥س + ١) \times (٥ + ٢س)$$

$$= (٥ + ٢س) \text{ قا(س}^٢ + ٥س + ١).$$

$$(٢) \text{ ق(س) = (جا}^٢س)$$

$$\text{ق(س) = } ٤ \text{ (جا}^٢س) \times ٢ \text{ جتا}^٢س$$

$$= ٨ \text{ جتا}^٢س \text{ جا}^٢س.$$

تدريب ٢

جد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يأتي:

$$(١) \text{ ص = ظا}^٣س.$$

$$(٢) \text{ ص = } ٢ \text{ جتا}^٤س + \text{جا}^٢س - \text{ظا(س} + ١).$$

مثال (٥)

جد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يأتي:

$$(١) \text{ ص = س ظا(س}^٢ + ١).$$

$$(٢) \text{ ص = س}^٢ \text{ جا(س} - ٣).$$

الحل

تُطبَّق قاعدة مشتقة ضرب اقترانين:

$$(1) \quad \frac{دص}{دس} = س \times قأ (س^2 + 1) + ظا (س^2 + 1) \times 1$$

$$= س^2 قأ (س^2 + 1) + ظا (س^2 + 1).$$

$$(2) \quad \frac{دص}{دس} = س^2 \times جتا (س^2 - 3) + س^2 - \times (س^2 - 3) جا (س^2 - 3) (لماذا؟)$$

$$= س^2 - 3 جتا (س^2 - 3) + س^2 جا (س^2 - 3).$$

تدريب 3

حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

فكر وناقش

اشتقت ربي الاقتران ق(س) = ظأ (س + 5) على النحو الآتي:

ق(س) = 3 ظأ (س + 5) قأ (س + 5). ناقش صحة إجابة ربي.

الأسئلة

جد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يأتي:

أ) $ص = س^2 جاس$.

ب) $ص = \frac{جاس}{جتاس + ١}$.

ج) $ص = س^٥ جتاس - ظاس$.

د) $ص = س ظاس + (س^٢ + ١)^٢$.

هـ) $ص = (س) ظا^٣ س + جتاس$.

و) $ص = (جتاس^٢)^٦$.

ز) $ص = جا(س^٣ + ٥)$.

ح) $ص = س^٣ جا٤ س - جتا^٢ س - ظا^٢ س^٢$.

ط) $ص = (جاس - جتاس)^{-٢}$.

ي) $ص = جا^٢ س (١ - جتاس)$.

ك) $ص = (س جاس)^٣ ظاس$.

إذا كان $ق(س) = س^٢$ جاس ، فجد $ق'(س)$.

إذا كان $ص = ق(س)$ قابلاً للاشتقاق بالنسبة إلى $س$ ، فإن $\frac{دص}{دس} = ص' = ق'(س)$ تُسمى **المشتقة الأولى للاقتان** $ق$ بالنسبة إلى $س$.

لاحظ أن $ق'(س)$ هو اقتان يعتمد على المتغير $س$ ؛ لذا فقد يكون قابلاً للاشتقاق في $س$ ، وعندئذٍ فإن مشتقة المشتقة الأولى للاقتان $ص' = ق'(س)$ تُسمى **المشتقة الثانية للاقتان** $ق(س)$ ، ويُرمز إليها بالرمز: $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ ، أو: $ص''$ ، أو: $ق''(س)$.

ويُرمز إلى قيمة المشتقة الثانية عندما $س = أ$ بالرمز: $\left. \frac{د^٢ص}{دس^٢} \right|_{س=أ}$ = $ص''|_{س=أ}$ = $ق''(أ)$.

وبصورة مشابهة، نرمز إلى **المشتقة الثالثة** بالرمز: $\left(\frac{د^٣ص}{دس^٣} = ص''' = ق'''(س) \right)$.

وكذا المشتقة الرابعة، وحتى المشتقة النونية، وسنركز في هذا الفصل فقط على إيجاد المشتقة الثانية.

مثال (١)

إذا كان $ق(س) = ٣ - س + ٥س^٢ - ٧س^٣$ ، فجد $ق'(س)$.

الحل

$$ق'(س) = -١ + ١٠س - ٢١س^٢.$$

$$ق'(س) = ٤٢ - ١٠س.$$

مثال (٢)

جد المشتقة الثانية لكل مما يأتي:

$$(٢) ص = س جاس + ٢ جتاس$$

$$(١) ق(س) = ٦س^٤ - ٢س + ١ عندما س = -٢$$

الحل

$$(1) \text{ ق}^2(س) = 2س^2 - 2$$

$$\text{ق}^2(س) = 72س^2$$

$$\text{ق}^2(2-) = 72(2-) = 288 = 4 \times 72$$

$$(2) \text{ ص} = (س \times \text{جتاس} + \text{جاس}) + 2(-\text{جاس})$$

$$= س \text{جتاس} + \text{جاس} - 2\text{جاس}$$

$$= س \text{جتاس} - \text{جاس}$$

$$\text{ص} = (س \times (-\text{جاس}) + \text{جتاس}) - \text{جتاس}$$

$$= -س \text{جاس} + \text{جتاس} - \text{جتاس}$$

$$= -س \text{جاس}.$$

تدريب ١

جد $\frac{\text{ص}^2}{\text{س}^2}$ لكل مما يأتي:

$$(1) \text{ ص} = 2س^2 + \text{جتاس} \quad (2) \text{ ص} = \sqrt{\text{س}}, \text{ حيث } \text{س} < 0. \quad (3) \text{ ص} = \frac{5}{\text{س}}, \text{ عندما } \text{س} = 5$$

مثال (٣)

إذا كان ق(س) = $\frac{س^3}{3} + \frac{س^2}{2} - 7س + 7$ ، فجد:

(1) أصفار المشتقة الأولى. (2) أصفار المشتقة الثانية.

الحل

$$(1) \text{ ق}^2(س) = 2س^2 + س - 2$$

$$\text{ق}^2(س) = 0$$

$$س^2 + س - 2 = 0$$

$$(س + ٢)(س - ١) = ٠ \leftarrow س = -٢ ، س = ١$$

∴ أصفار المشتقة الأولى {١، -٢}.

$$(٢) ق(س) = س٢ + ١$$

$$ق(س) = ٠$$

$$٠ = ١ + س٢$$

$$س٢ = -١ ، ومنه: س = \frac{١-}{٢}$$

∴ أصفار المشتقة الثانية $\left\{\frac{١-}{٢}\right\}$.

مثال (٤)

إذا كان ق(س) = أس^٢ - ب س^٣ + ٣، وكان ق(١) = ٧، ق(٠) = ١٠، فجد قيم الثابتين: أ، ب.

الحل

$$ق(س) = أس٢ - ب س٣$$

$$ق(١) = ٧$$

$$٧ = ١٢ - ٣ب \dots\dots\dots (١)$$

$$ق(س) = أس٢ - ٦ب س$$

$$ق(٠) = ١٠$$

$$١٠ = ٥أ ، ومنه: أ = ٢$$

بالرجوع إلى المعادلة (١): $٧ = ١٢ - ٥ \times ٢ - ٣ب$

$$٧ = ١٠ - ٣ب$$

$$٣- = ٣ب ، ومنه: ب = ١$$

تدريب ٢

إذا كان ق(س) = أس^٣ - ١٢س^٢، فجد قيمة (قيم) الثابت أ التي تجعل ق(١) = صفرًا.

الأسئلة

(١) جد المشتقة الثانية للاقتارات الآتية:

أ (ق(س) = (٢س٤ - ٥) (٨ - ٥س))

ب (ص = س٣ (١ - ٢س) ، عندما س = ١)

ج (هـ (س) = ٢جتاس)

د (ق(س) = س٢ (س - ١) ، عندما س = ٢)

هـ (ق(س) = ٢جا س جتاس .)

و (ق(س) = $\frac{٢}{٤س - ١}$ ، عندما س = ٠)

ز (ق(س) = جا(٢س - ١))

(٢) إذا كان ق(س) = ٣أس٣ - ٢ب س + ١ ، وكان ق(٠) = ٤ ، ق(١) = ٣٦ ، فجد قيم أ ، ب .

(٣) إذا كان ق(س) = ٣أس٣ - ٢ب س - ٣ ، وكان ق(١) = ٢١ ، ق(٢) = ١٠٢ ، فجد قيم أ ، ب .

(٤) إذا كان ق(س) = جتا٢س ، فجد ق(س) + ٦ ق(س) .

(٥) حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس .

أسئلة الوحدة

(١) إذا كان $ق(س) = \frac{1}{س}$ ، وتغيرت $س$ من $س_1 = ١$ إلى $س_2 = ٢$ ، فجد:

أ) مقدار التغير في الاقتران $ق$.

ب) معدل التغير في الاقتران $ق$.

(٢) إذا كان $ق(س) = \frac{أ}{س+٢}$ ، وكان معدل تغير الاقتران $ق$ يساوي (-١) عندما تتغير $س$ من

صفر إلى ٣ ، فجد قيمة الثابت $أ$.

(٣) يتحرك جسيم حسب العلاقة $ف(ن) = ٢ن + ٤ن$. احسب السرعة المتوسطة للجسيم في

الفترة الزمنية $[١، ٥]$.

(٤) إذا كان $ص = ق(س)$ ، وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران $ق$ عندما تتغير $س$ من $(س)$ إلى

$(س+هـ)$ هو: $\Delta ص = ٥س^٢هـ + ٨سهـ + ٥هـ - ٣هـ$ ، فجد $ق(٢)$.

(٥) *اعتمادًا على الشكل (٢-٥) الذي يمثل منحنى

الاقتران $ق$ ، جد كلاً مما يأتي:

أ) قيم $س$ التي تجعل الاقتران $ق$ غير متصل.

ب) معدل التغير للاقتران $ق$ في الفترة $[٢، ٤]$.

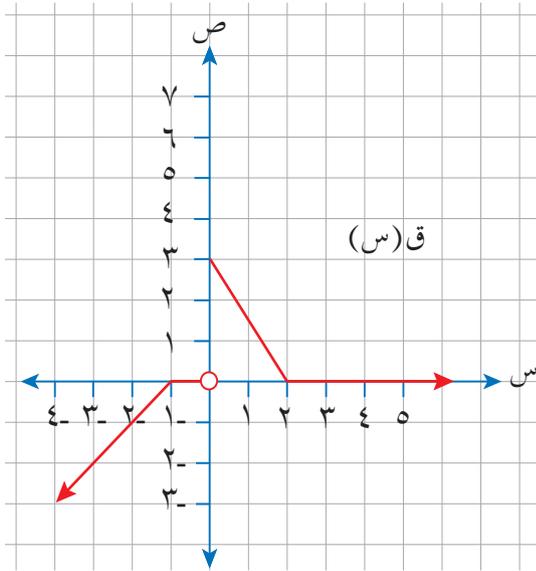
(٦) جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي باستخدام تعريف

المشتقة:

أ) $ق(س) = ٥س - ٣$

ب) $هـ(س) = ٢س^٢ + ١$

ج) $ل(س) = \frac{١}{س+٢}$ ، حيث $س \neq -٢$



الشكل (٢-٥).

(* السؤال من أسئلة الاختبارات الدولية).

$$\begin{aligned} \text{د) م (س)} &= \sqrt{2س + 4} ، \text{ حيث } س \leq 2 - \\ \text{هـ) ق (س)} &= س - 4 ، \text{ عندما } س = 3 \\ \text{و) ق (س)} &= \sqrt{2س - 3} ، \text{ حيث } س \leq \frac{3}{2} ، \text{ عندما } س = 2 \end{aligned}$$

(٧) جد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يأتي:

$$\text{أ) } ص = \sqrt{2س + 5}$$

$$\text{ب) } ص = \sqrt{1 + ع} ، ع = 2س - 1 ، \text{ حيث } ع \leq 1 -$$

$$\text{ج) } ص = س^2 \text{ جا } 3س$$

$$\text{د) } ص = \frac{8}{3س - 2} - \text{جا } 2س$$

$$\text{هـ) } ص = 3م^2 - 2م + 1 ، م = 2س + 3 ، \text{ عندما } س = 0$$

$$\text{و) } ص = \sqrt{3 + 4جتاس}$$

(٨) جد ق (س) لكل مما يأتي:

$$\text{أ) } ق (س) = (س + 2)(3 - 4س)$$

$$\text{ب) } ق (س) = (2س - 1)^\circ$$

$$\text{ج) } ق (س) = 2سجتاس + س^3 - 5$$

$$(٩) \text{ إذا كان ق (س) } = (5س - 1)^2 ، \text{ فجد نهـا } \frac{ق(هـ + 1) - ق(١)}{هـ} .$$

$$(١٠) \text{ إذا كان ق (س) } = س^4 - 2س + 1 ، \text{ فجد قيمة الثابت أ التي تجعل ق (١) = صفرًا.}$$

$$(١١) \text{ إذا كان ق (س) } = (س - 1)^2 ، \text{ فجد قيمة (قيم) الثابت أ التي تجعل ق (٠) = ٤٨}$$

١٢) إذا كان ق(س) = (٢س - ١)³، وكان ق(س) = ٤، فجد قيمة س١

١٣) إذا كان هـ اقتراناً قابلاً للاشتقاق عندما س = ٢-، هـ (٢-) = ١، هـ (٢-) = ٢، فجد ق(٢-) في كل مما يأتي:

أ) ق(س) = $\sqrt{٦ + س} \times هـ(س)$.

ب) ق(س) = هـ(س) - $\frac{هـ(س)}{س}$.

١٤) يتكون هذا السؤال من تسع فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة بدائل، واحد منها فقط صحيح. ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) إذا علمت أن ق(س) = ٤ - ٣س، وتغيرت قيمة س من ٣ إلى ٥، فإن Δ س هي:

- أ) ٦- ب) ٢- ج) ٢ د) ٣

(٢) إذا كان ص = ق(س) = ٢س²، وتغيرت قيمة س من س١ = ٢ إلى س٢ = ٤، فإن مقدار التغير في ص يساوي:

- أ) ١٢- ب) ٢ ج) ٦ د) ١٢

(٣) إذا كان ق(س) = ٣س، فإن نهـا $\frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$ تساوي:

- أ) - جتا٣س ب) ٣ جتا٣س ج) ٣ جتا٣س د) جتا٣س

(٤) إذا كان ق(س) = $\frac{٣}{س}$ ، فإن ق(٣) تساوي:

- أ) ١- ب) $\frac{١-}{٣}$ ج) $\frac{١-}{٩}$ د) ١

(٥) إذا كان ق (س) = $س^٢ + ٨$ ، فإن نهـا $\frac{ق(٢) - (٢+هـ)}{هـ}$ تساوي: ←هـ

أ (١٢) ب (٨) ج (١٦) د (٢٠)

(٦) إذا كان ق (س) = $س^٢$ ، وكان ج عددًا ثابتًا، فإن ق (س) تساوي:

أ (٢ ج س) ب (٢ ج) ج (ج) د (٢ س)

(٧) إذا كان ق (س) = $س^٣$ ، فإن ميل القاطع المار بالنقطتين: $(٣، ١-)$ ، $(٢، ١٢)$ يساوي:

أ ($\frac{١-}{٣}$) ب (٣) ج (٣-) د ($\frac{١}{٣}$)

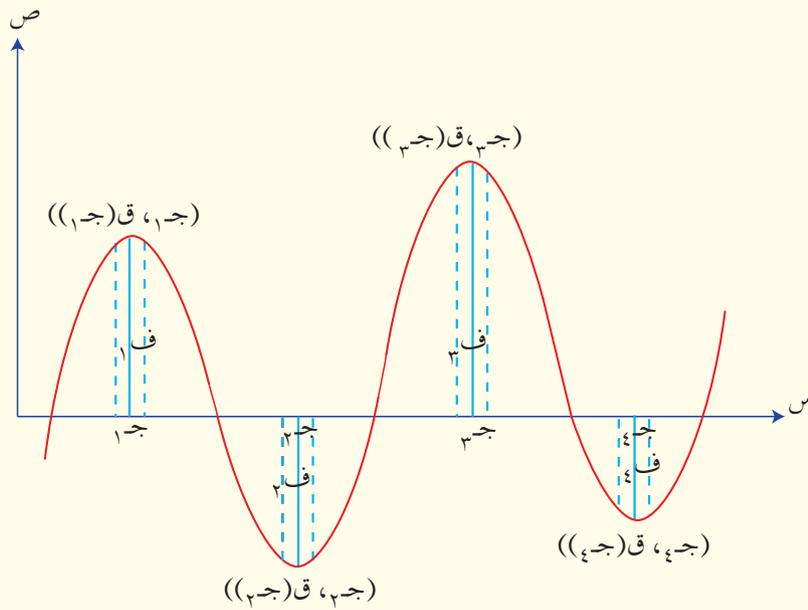
(٨) إذا كان ق (١) = ٢، هـ (١) = ٣، ق (١) = ٢-، هـ (١) = ١، فإن ق (هـ) (١)

يساوي:

أ (٨) ب (٤) ج (٨-) د (٤-)

(٩) إذا كان هـ (س) = $س^٢ \times ق(س)$ ، ق (٣) = ٦، ق (٣) = ٥، فإن هـ (٣) تساوي:

أ (٨١) ب (١١) ج (٤٥) د (٣٦)



بعد أن تعرفت المشتقة وقواعد الاشتقاق في الوحدة السابقة، ستتعرف الآن كيف تستخدم المشتقة في حل مسائل متنوعة تتعلق ببعض التطبيقات الفيزيائية، والهندسية، والاقتصادية. وستتعرف أيضاً كيف يمكن إيجاد تزايد منحنى الاقتران وتناقصه اعتماداً على مشتقة الاقتران الأولى، وتحديد قيم الاقتران القصوى (العظمى، الصغرى)، وحل مسائل عملية تتعلق بالقيم القصوى.

Applications of Differentiation

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- اكتساب مهارة إيجاد الميل ومعادلة المماس لمنحنى الاقتران.
- حل مسائل تطبيقية على المسافة ، والسرعة ، والتسارع ، مُبرِّراً الحل.
- تحديد فترات التزايد والتناقص باستخدام اختبار المشتقة الأولى.
- تحديد القيم القصوى باستخدام اختبار المشتقة الأولى ، واختبار المشتقة الثانية.
- حل مسائل تطبيقية على القيم القصوى.

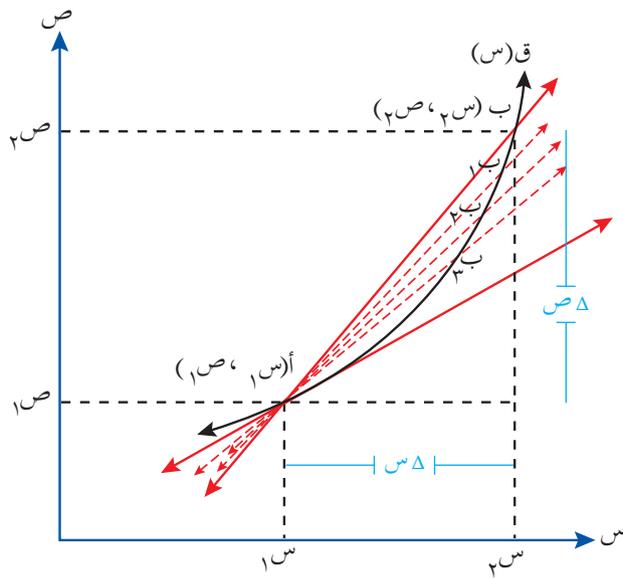
النتائج

- ☞ تفسر المشتقة الأولى هندسيًا.
- ☞ توظف تفسير المشتقة الهندسي في حل مسائل تتضمن إيجاد معادلة المماس.
- ☞ تفسر المشتقتين: الأولى والثانية فيزيائيًا.
- ☞ توظف تفسير المشتقة الفيزيائي في حل مسائل عملية.

Geometric Interpretation

التفسير الهندسي

أولاً



الشكل (١-٣).

يمثل الشكل (١-٣) منحنى الاقتران ق، والنقطتين: أ(س_١، ص_١)، ب(س_٢، ص_٢) الواقعتين على منحنى ق. اعتمد ذلك في الإجابة عما يأتي:

- (١) ما ميل القاطع أ ب؟
- (٢) ابدأ بتحريك النقطة ب باتجاه أ. ماذا تلاحظ على القاطع الناتج؟

إن تحريك النقطة ب على منحنى الاقتران ق(س) مقربةً من النقطة أ لتأخذ الأوضاع ب_١، ب_٢، ... يجعل القاطع أ ب يأخذ الأوضاع أ ب_١، أ ب_٢، ... مقربةً من وضع المماس للمنحنى عند النقطة (أ)، وما إن تنطبق (ب) على (أ) حتى ينطبق القاطع أ ب على مماس المنحنى عند النقطة أ.

أي إن ميل المماس عند النقطة أ(س_١، ص_١) = نهاية ميل القاطع أ ب عندما تقترب النقطة ب من النقطة أ.

∴ ميل المماس عند النقطة أ(س_١، ص_١) = نهاية معدل التغير للمنحنى عند هذه النقطة، ويساوي ق(س_١)، ويُسمّى أيضًا ميل المنحنى عند النقطة أ.

مثال (١)

إذا كان ص = ق(س) = س^٣ - ٦س + ٥، فجد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ٢ -

الحل

$$ق(س) = س^3 - 6س + 5$$

ميل المماس عندما س = ٢ - يساوي ق(٢ -)

$$\therefore ق(٢ -) = (٢ -)^3 - 6(٢ -) + 5 = ٦$$

تدريب ١

إذا كان ق(س) = س^٣ - ٢س، فجد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (٢، ٢ -).

مثال (٢)

إذا كان ق(س) = (س^٢ + ١)(٣س - ٤)، فجد معادلة المماس عندما س = ٢

الحل

$$ميل المماس = ق(٢)$$

$$ق(س) = (س^2 + 1)(3س - 4)$$

$$ق(٢) = (٢)(٥) + (٣)(٢) = ١٩$$

∴ ميل المماس = ١٩

لايجاد معادلة المماس، يجب إيجاد النقطة (٢، ق(٢)).

$$ق(٢) = (٢)(٥) = ١٠$$

∴ نقطة التماس (٢، ١٠).

معادلة المماس هي: $ص - ص_١ = م(س - س_١)$ ، حيث النقطة (س_١، ص_١) هي نقطة التماس،
 $م = ق(س_١)$.

ومنه، معادلة المماس هي: $ص - ١٠ = ١٩(س - ٢)$.

$$∴ ص = ١٩س - ٢٨$$

تدريب ٢

إذا كان ق(س) = (س^٢ + ١)، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ١

مثال (٣)

إذا كان ق(س) = أس^٢ + ٢س + ٥، حيث أ عدد ثابت، وكان ميل المماس عندما س = ٢ يساوي ١٨، فما قيمة الثابت أ؟

الحل

$$\text{ميل المماس} = ق'(٢)$$

$$ق'(س) = ٢أس + ٢$$

$$ق'(٢) = ٢أ(٢) + ٢$$

$$١٨ = ٤أ + ٢$$

$$\text{ومنه: } ٤ = أ$$

الأسئلة

(١) جد معادلة المماس لكل من المنحنيات الآتية عند قيم s المبينة إزاء كل منها:

أ) $q(s) = s^3 + 5$ ، $s = 2$

ب) $q(s) = s^3 + 2s - 1$ ، $s = 1$

ج) $q(s) = (s^2 - 4)(s + 1)$ ، $s = \text{صفرًا}$

(٢) إذا كان $q(s) = \frac{s^2 + 2}{s + 1}$ ، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران q عندما $s = 1$

(٣) إذا كان $q(s) = s^2 + 4s - 3$ ، حيث s عدد ثابت، وكان ميل المنحنى عندما $s = 3$ يساوي 22 ، فجد قيمة الثابت s .

(٤) إذا كان $q(s) = s^5 + 4s^2$ ، فجد ميل المنحنى للاقتران q عندما $s = 1$

(٥) إذا كان $q(s) = (s^3 - 2)^2$ ، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران q عند النقطة $(-1, q(-1))$.

إذا تحركت سيارة، وكان موقعها في اللحظة n مُعرَّفًا بالاقتران: $f(n) = 3n^2 - 4n + 6$ ، حيث f المسافة التي تقطعها السيارة بالأمتار، n الزمن بالثواني، فجد سرعة السيارة بعد مرور ٤ ثوانٍ من بدء الحركة.

تعلمت في الوحدة الثانية كيف تجد السرعة المتوسطة لجسيم في فترة زمنية، مثل: $[n_1, n_2]$. ولكن، كيف يمكنك حساب سرعة هذا الجسيم عند لحظة ما خلال هذه الفترة؟ تُعرف هذه السرعة باسم **السرعة اللحظية (السرعة)**.

تعريف

إذا تحرك جسيم، وتحدد موقعه في اللحظة n بالعلاقة $f(n)$ ، فإن السرعة اللحظية (السرعة) في اللحظة n هي $f'(n)$ ، حيث $f'(n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(n+h) - f(n)}{h}$.

مثال (١)

إذا تحرك جسيم بحيث كان بُعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد n ثانية من بدء حركته معطى بالعلاقة: $f(n) = 3n^3 + 2n^2 + 5$ ، فاحسب سرعة الجسيم بعد مرور ٣ ثوانٍ.

الحل

$$f(n) = 3n^3 + 2n^2 + 5$$

$$\therefore \text{السرعة } f'(n) = 9n^2 + 4n$$

ولهذا فإن السرعة بعد مرور ٣ ثوانٍ $f'(3) = 9(3)^2 + 4(3) = 81 + 12 = 93$ م/ث.

إذا تحرك جسيم بحيث كان بُعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد n ثانية معطى بالعلاقة:
 $f(n) = 3n^2 - 2n + 2$ ، فاحسب سرعة الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.
 من التطبيقات الفيزيائية على المشتقة الثانية التسارع اللحظي.

تعريف

إذا تحرك جسيم وفق العلاقة: $l = f(n)$ ، حيث f المسافة التي يقطعها الجسيم، فإن التسارع اللحظي للجسيم (التسارع) في اللحظة n هو $t(n) = \dot{f}(n) = \dot{f}(n)$.

مثال (٢)

يتحرك جسيم وفق العلاقة: $f(n) = 2n^2 + 1$ ، حيث f المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار، n الزمن بالثواني. جد تسارع الجسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة.

الحل

$$\begin{aligned} \text{المسافة } f(n) &= 2n^2 + 1 \\ \text{السرعة } \dot{f}(n) &= \dot{f}(n) = 4n \\ \dot{f}(n) &= 4n = 4(2) = 8 \\ \text{التسارع } t(n) &= \dot{t}(n) = \dot{f}(n) = 4 \\ \text{ولهذا فإن التسارع بعد مرور ثانية واحدة يساوي:} \\ t(1) &= 4 = (4)(1) + (3)(8) = 24 + 32 = 56 \text{ م/ث}^2. \end{aligned}$$

يتحرك جسيم وفق العلاقة: $f(n) = 2n^3 + 4n^2 + 6$ ، حيث f المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار، n الزمن بالثواني. جد تسارع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

إذا كانت ف(ن) = $ن^3 - ٩ن^٢ + ١٥ن$ هي المسافة التي يقطعها جسيم، حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني، فاحسب تسارع الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها سرعته.

الحل

بما أن المسافة ف(ن) = $ن^3 - ٩ن^٢ + ١٥ن$ ، فإن السرعة تساوي:

$$ع(ن) = ف'(ن) = ٣ن^٢ - ١٨ن + ١٥$$

عندما تنعدم السرعة، فإن: $ع(ن) = ٠$

$$٠ = ٣ن^٢ - ١٨ن + ١٥$$

$$٠ = ٣ن - ١٨ + ٥$$

$$٠ = (٣ن - ١٣)$$

$$١٣ = ٣ن، ٥ = ن$$

التسارع ت(ن) = $ع'(ن) = ٦ن - ١٨$ ، حيث نجد قيمة التسارع عندما $ن = ٥$:

$$ت(٥) = (٥)٦ - ١٨ = ٣٠ - ١٨ = ١٢ م/ث^٢.$$

ونجد قيمة التسارع عندما $ن = ١$:

$$ت(١) = (١)٦ - ١٨ = ٦ - ١٨ = -١٢ م/ث^٢.$$

فكر وناقش

ما دلالة إشارة التسارع السالبة في المثال (٣)؟

تدريب ٣

يتحرك جسيم وفقاً للعلاقة: ف(ن) = $٢ن^٣ - ٣ن^٢ + ٢$. احسب سرعة الجسيم عندما ينعدم تسارعه.

الأسئلة

- (١) إذا كانت $f(n) = n^3 + 3n^2$ هي المسافة التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد n ثانية، فجد:
أ) السرعة بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.
ب) التسارع عندما تكون السرعة 9 م/ث .
- (٢) تحرك جسيم بحيث كان بُعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد n ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة: $f(n) = 2n^2$. إذا كانت سرعته المتوسطة في الفترة الزمنية $[0, a]$ تساوي سرعته اللحظية بعد مرور 3 ثوانٍ، فجد قيمة a .
- (٣) إذا كان $f(n) = (2n - 2)^3 + 4$ يمثل المسافة التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد n ثانية، فجد السرعة المقطوعة بعد مرور 4 ثوانٍ من بدء الحركة.
- (٤) إذا مثل الاقتران $f(n)$ المسافة التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد n ثانية من بدء حركته، وكان $f(n) = n^3 - n^2 + 5$ ، فما سرعة هذا الجسيم عندما يكون تسارعه 4 م/ث^2 ؟
- (٥) حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

تطبيقات الاشتقاق

Applications on Derivatives

الفصل الثاني

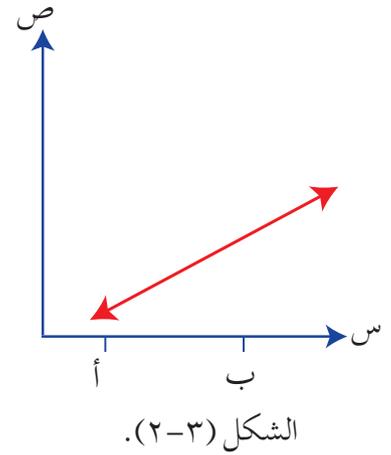
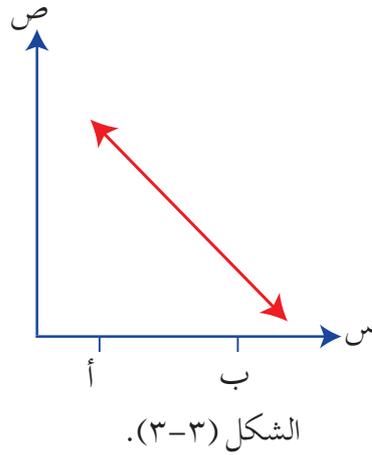
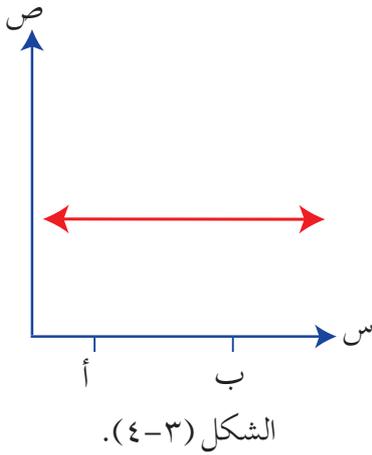
النتائج

- تجد مجالات التزايد والتناقص للاقتران باستخدام المشتقة الأولى.
- تستخدم اختبار المشتقة الأولى في تحديد القيم القصوى.
- تستخدم اختبار المشتقة الثانية في تحديد القيم القصوى.

Increasing and Decreasing

التزايد والتناقص

أولاً



ما طبيعة علاقة المتغير v بالمتغير s في كل من الأشكال السابقة؟

لاحظ من الشكل (٢-٣) أنه كلما زادت قيمة s زادت قيمة v ، وكان الاقتران **متزايداً** في الفترة $[a, b]$.

أما في الشكل (٣-٣) فكلما زادت قيمة s قلت قيمة v ، وكان الاقتران **متناقصاً** في الفترة $[a, b]$.

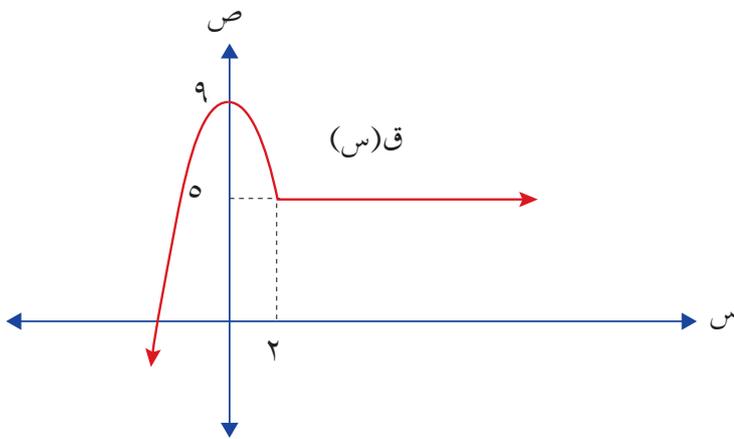
وأما في الشكل (٤-٣) فمهما تغيرت قيمة s فإن قيمة v تبقى ثابتة، ويكون الاقتران في هذه الحالة **ثابتاً** في الفترة $[a, b]$.

إذا كان الاقتران q مُعرِّفًا على الفترة $[a, b]$ ، وكان $s_1, s_2 \in [a, b]$ ، فإن:

- (١) الاقتران q يكون متزايدًا في الفترة $[a, b]$ إذا كان $q(s_1) < q(s_2)$ عندما $s_1 < s_2$.
- (٢) الاقتران q يكون متناقصًا في الفترة $[a, b]$ إذا كان $q(s_1) > q(s_2)$ عندما $s_1 < s_2$.
- (٣) الاقتران q يكون ثابتًا في الفترة $[a, b]$ إذا كان $q(s_1) = q(s_2)$ لقيم s_1, s_2 جميعها.

مثال (١)

الشكل (٣-٥) يمثل منحنى الاقتران q المعروف على ح. جد فترات التزايد والتناقص والثبات لمنحنى الاقتران q .

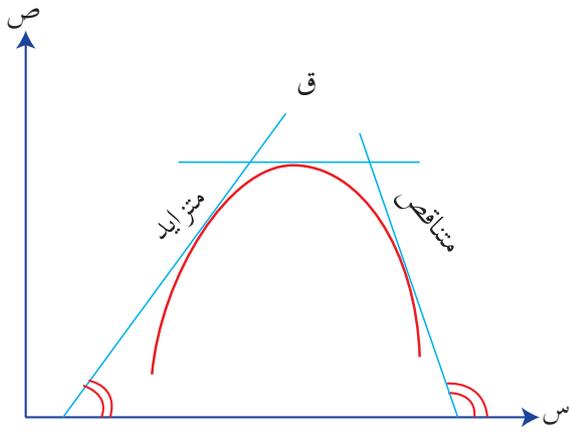


الشكل (٣-٥).

$$q(s) = \begin{cases} 9 - s^2, & s \geq 2 \\ 5, & s < 2 \end{cases}$$

الحل

يتبين من الشكل (٣-٥) أن قيم v تزداد كلما زادت قيم s على الفترة $(-\infty, 0]$ ، وهذا يعني أن منحنى الاقتران q يكون متزايدًا في الفترة $(-\infty, 0]$. يتبين من الشكل أيضًا أنه كلما زادت قيم s تناقصت قيم v ضمن الفترة $[0, 2]$ ، وهذا يعني أن الاقتران q يكون متناقصًا في الفترة $[0, 2]$. يشير الشكل نفسه إلى أنه كلما زادت قيم s في الفترة $[2, \infty)$ بقيت قيم v كما هي، فيكون الاقتران q ثابتًا في الفترة $[2, \infty)$.



الشكل (٦ - ٣).

لمعرفة علاقة فترات التزايد والتناقص بإشارة المشتقة الأولى، انظر الشكل (٦-٣) الذي يمثل منحنى الاقتران ق.

يبين الشكل (٦-٣) أنه إذا كان الاقتران ق متزايداً فإن مشتقته تكون موجبة؛ لأن المماس يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. وبما أن ميل المماس يساوي ظل هذه الزاوية، وظل الزاوية

الحادة أكبر من صفر، ومشتقة الاقتران تساوي ميل المماس، فإن هذه المشتقة تكون موجبة.

أما إذا كان الاقتران ق متناقصاً فإن مشتقته تكون سالبة؛ لأن المماس يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. وبما أن ميل المماس يساوي ظل الزاوية المنفرجة وهو أقل من صفر (سالب)، ومشتقة الاقتران تساوي ميل المماس، فإن هذه المشتقة تكون سالبة.

وأما إذا كان المماس موازياً لمحور السينات فإن ميل المماس يساوي صفرًا.

بناءً على ذلك، يمكن استنتاج النظرية الآتية:

نظرية

- إذا كان ق اقتراناً متصلًا على الفترة [أ، ب]، وقابلًا للاشتقاق على الفترة (أ، ب)، فإن:
- (١) ق يكون متزايداً في الفترة [أ، ب] إذا كانت ق(س) < صفر لجميع قيم س ∈ (أ، ب).
 - (٢) ق يكون متناقصاً في الفترة [أ، ب] إذا كان ق(س) > صفر لجميع قيم س ∈ (أ، ب).
 - (٣) ق يكون ثابتاً في الفترة [أ، ب] إذا كان ق(س) = صفرًا لجميع قيم س ∈ (أ، ب).

لإيجاد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق باستخدام اختبار المشتقة الأولى، يجب عمل الآتي:

(١) إيجاد المشتقة الأولى ق (س) للاقتران ق.

(٢) إيجاد أصفار المشتقة الأولى بوضع ق (س) = صفرًا، وإيجاد قيم س.

(٣) البحث في إشارة المشتقة الأولى حول أصفار هذه المشتقة.

(٤) تحديد الفترات التي تكون عندها المشتقة الأولى ق (س) < صفر (أي موجبة)، فتكون هي

فترات التزايد، وكذا تحديد الفترات التي تكون عندها ق (س) > صفر (أي سالبة)، فتكون

هي فترات التناقص.

لاحظ أنه لمعرفة إشارة ق (س) على فترة معينة، فإننا نختار أي قيمة داخل الفترة، ونجد إشارة

المشتقة عند هذه القيمة، فتكون الإشارة هي إشارة المشتقة على هذه الفترة.

مثال (٢)

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق (س) = $3 + 4s + 2s^2$

الحل

$$ق(س) = 3 + 4s + 2s^2$$

$$2s^2 + 4s + 3 = 0 \text{ صفرًا.}$$

$$\text{ومنه: } s = -2$$

ابحث في إشارة ق (س).

عندما تكون $s > -2$ اختر أي قيمة داخل الفترة مثل $s = -3$ ،

$$\text{فتكون } ق(-3) = (-3)^2 + 4(-3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 0 > \text{ صفر.}$$

وعندما تكون $s < -2$ اختر قيمة مثل الصفر:

$$\text{فتكون } ق(0) = (0)^2 + 4(0) + 3 = 3 < \text{ صفر.}$$

الإشارة سالبة

الإشارة موجبة

ق(س)	
إشارة ق(س)	- - - - - صفر + + + + +
س	$\infty - \quad \quad \quad -2 \quad \quad \quad \infty$

اعتمادًا على جدول الإشارات، واختبار المشتقة الأولى، فإن الاقتران q يكون متناقصًا في الفترة $(-\infty, 2-]$ ، و متزايدًا في الفترة $[2, \infty)$.

مثال (٣)

إذا كان $q(s) = 48s - s^3$ ، فجد فترات التزايد والتناقص لهذا الاقتران.

الحل

$$q'(s) = 48 - 3s^2$$

$$0 = 48 - 3s^2$$

$$\text{ومنه } s^2 = 16$$

$$s = 4, -4$$

ابحث في إشارة $q'(s)$.

عندما تكون $s > 4$ اختر قيمة مثل $s = 5$

$$\text{إذن: } q'(5) = 48 - 3(5)^2 = 48 - 75 = -27$$

وعندما تكون $s < 4$ اختر قيمة مثل $s = 1$:

$$q'(1) = 48 - 3(1)^2 = 48 - 3 = 45$$

وعندما تكون $s < -4$ اختر قيمة مثل $s = -5$:

$$q'(-5) = 48 - 3(-5)^2 = 48 - 75 = -27$$

الإشارة سالبة

الإشارة موجبة

الإشارة سالبة

$q'(s)$	
$q'(s)$	----- صفر + + + + + صفر -----
s	$-\infty$ -4 4 ∞

وبذلك يكون الاقتران q متناقصًا في الفترتين: $(-\infty, -4]$ ، $[4, \infty)$ ، و متزايدًا في الفترة $[-4, 4]$.

جد فترات التزايد والتناقص لكل اقتران مما يأتي:

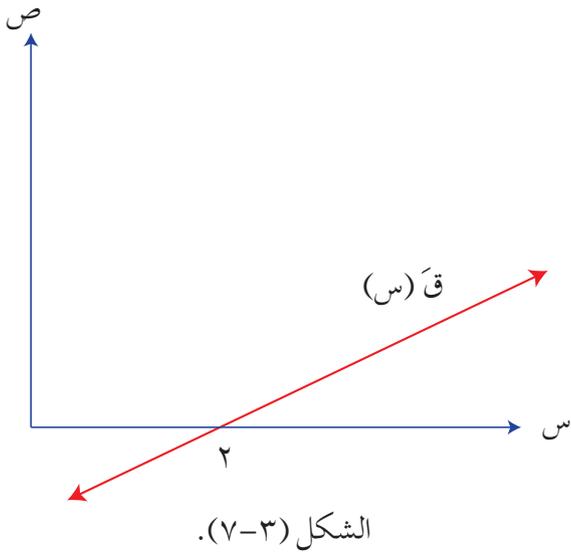
(١) هـ $(س) = ٧ + س$.
 (٢) ق $(س) = (٢س - ٤)$.

مثال (٤)

اعتماداً على الشكل (٣-٧) الذي يمثل منحنى ق (س) المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية ح،
 جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق.

الحل

لإيجاد فترات التزايد والتناقص لمنحنى ق:



(١) يجب البحث في إشارة المشتقة الأولى، ما يعني تحديد أصفار المشتقة الأولى (أي نقاط التقاطع مع محور السينات)، وهي في هذا المثال $(س = ٢)$.

(٢) يجب البحث في إشارة اقتران المشتقة الأولى ق (س) قبل العدد (٢) وبعده.

ق (س)	↘ ↗
إشارة ق (س)	- - - - - صفر + + + + +
قيم س	∞ - ٢ ∞

وعليه، يكون الاقتران ق متناقصاً على الفترة $(-∞، ٢]$ ، و متزايداً على الفترة $[٢، ∞)$.

فكر وناقش

فسّر كيف حصلت على جدول الإشارات من الرسم البياني في المثال (٣)، مناقشاً إجابتك مع زملائك. ما قيمة ق (٢)؟

الأسئلة

(١) جد فترات التزايد والتناقص لكل مما يأتي:

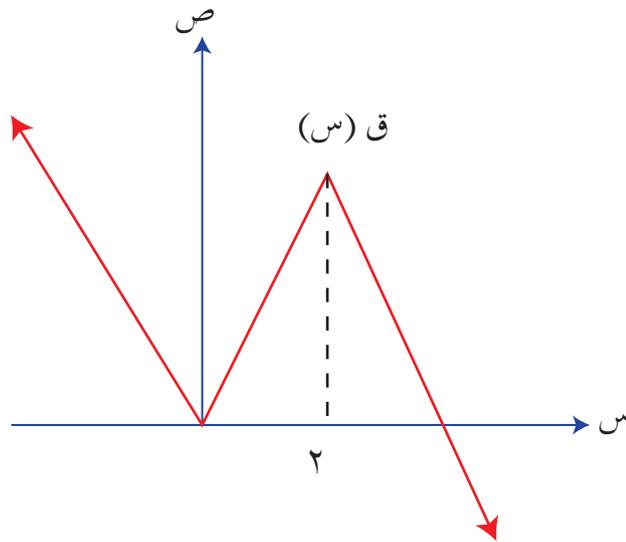
أ) $ق(س) = ٣ - ٤س$

ب) $ق(س) = ٨س - ٢س^٢$

ج) $ق(س) = ٢ + ٦س^٢ - ٤س^٣$

د) $ق(س) = (س + ٢)(س + ٣)$

(٢) اعتماداً على الشكل (٣-٨) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعروف على مجموعة الأعداد الحقيقية ح، جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق.



الشكل (٣-٨).

(٣) بيّن أن الاقتران $ق(س) = ٣س^٢ + ٢س + ٥$ يكون متزايداً لقيم س جميعها.

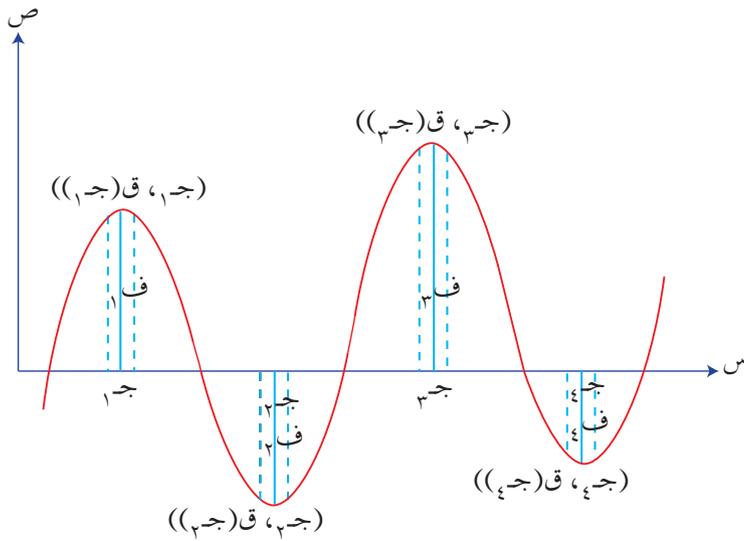
(١) ما المقصود بالقيمة القصوى؟

(٢) ما سلوك الاقتران حول القيمة القصوى؟

(٣) ما سلوك المشتقة حول القيمة القصوى؟

(٤) ما قيمة المشتقة عند القيم القصوى؟

ستتعرف في هذا الدرس مفهوم **القيم القصوى**؛ سواء أكانت **عظمى محلية**، أم **صغرى محلية**. وستتعرف أيضًا كيفية إيجاد هذه القيم، وإذا كان يمكن استخدام المشتقات في إيجادها. يمثل الشكل (٣-٩) منحنى الاقتران $v = f(s)$ ، وتُسمى النقط (ج_١)، ق (ج_١)، ((ج_٢)، ق (ج_٢))، ((ج_٣)، ق (ج_٣))، ((ج_٤)، ق (ج_٤))، التي يتغير عندها الاقتران من حالة التزايد إلى التناقص أو العكس **النقط الحرجة**، ويكون عندها المماس أفقيًا؛ أي $f'(s) = 0$.



الشكل (٣-٩).

لاحظ أن قيمة الاقتران عند القيمة

الحرجة $s = ج_١$ ، والقيمة $s = ج_٣$ هي أكبر من أي قيمة له عند النقط التي تسبق هذه النقطة أو تليها في الفترة $ف_١$ (فترة جزئية صغيرة جدًا تحوي $ج_١$)، والفترة $ف_٢$ (فترة جزئية صغيرة جدًا تحوي $ج_٢$)، وتُسمى القيم $ق(ج_١)$ ، $ق(ج_٢)$ **قيم الاقتران العظمى المحلية**.

أما عند القيمة الحرجة $s = ج_٣$ ،

والقيمة $s = ج_٤$ فتكون قيمة الاقتران أصغر من أي قيمة له عند النقط التي تسبق هذه النقطة أو تليها في الفترة $ف_٣$ (فترة جزئية صغيرة جدًا تحوي $ج_٣$)، والفترة $ف_٤$ (فترة جزئية صغيرة جدًا تحوي $ج_٤$)، وتُسمى القيم $ق(ج_٣)$ ، $ق(ج_٤)$ **قيم الاقتران الصغرى المحلية**.

تعريف

يُطلق على الأعداد جـ الواقعة في مجال الاقتران ق، التي يكون عندها ق(ج) = صفرًا أو ق(ج) غير موجودة، اسم الأعداد الحرجة للاقتران ق، وتُسمى النقط (ج، ق(ج)) الواقعة على منحنى الاقتران ق نقطًا حرجةً.

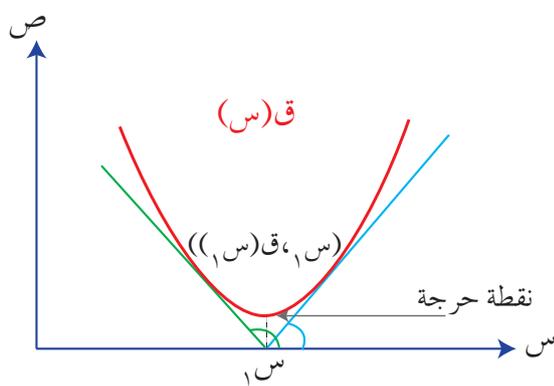
يقتصر الحديث في هذا الفصل على الأعداد الحرجة جـ التي يكون عندها ق(ج) = صفرًا.

تعريف

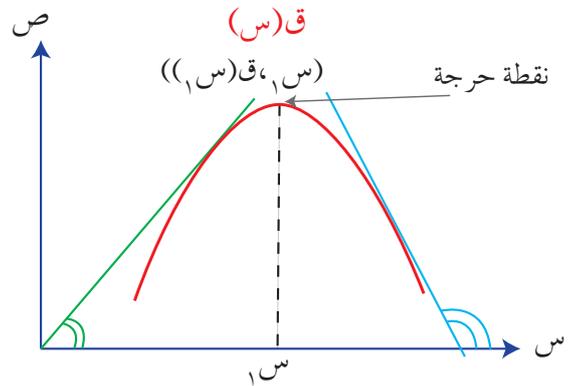
(١) يكون للاقتران ص = ق(س) قيمة عظمى محلية عندما س = جـ من مجاله إذا أمكن إيجاد فترة مفتوحة ف (فترة جزئية صغيرة جدًا تحوي العدد جـ)، حيث إن ق(ج) < ق(س) لقيم س جميعها في الفترة ف.

(٢) يكون للاقتران ص = ق(س) قيمة صغرى محلية عندما س = جـ من مجاله إذا أمكن إيجاد فترة مفتوحة ف (فترة جزئية صغيرة جدًا تحوي العدد جـ)، حيث ق(ج) > ق(س) لقيم س جميعها في الفترة ف.

لاحظ أنه حتى يكون لمنحنى الاقتران ق قيمة عظمى محلية عند نقطة ما، فإن قيمة ق(س) تزداد حتى تصل س إلى **قيمة حرجة**، ثم تنقص بعدها مباشرة؛ أي تكون ق(س) < صفر قبل القيمة الحرجة، ثم تصبح ق(س) > صفر بعد النقطة الحرجة، وهذا يعني أن ميل المماس قبل النقطة الحرجة التي عندها قيمة عظمى محلية يكون موجبًا، ثم يصبح سالبًا بعد هذه النقطة، انظر الشكل (٣-١٠).



الشكل (٣-١١).



الشكل (٣-١٠).

أما إذا كان لمنحنى الاقتران قيمة صغرى محلية عند نقطة ما فإن قيمة ق (س) تتناقص حتى تصل إلى قيمة حرجة، ثم تتزايد بعدها مباشرة؛ أي تكون ق(س) > 0 قبل القيمة الحرجة، ثم تصبح ق(س) < 0 بعد القيمة الحرجة، وهذا يعني أن ميل المماس قبل القيمة الحرجة التي عندها قيمة صغرى محلية يكون سالبًا، ثم يصبح موجبًا بعد هذه القيمة، انظر الشكل (٣-١١).

يُذكر أن النقطة التي تتغير حولها إشارة المشتقة الأولى ق(س) تُسمى **نقطة حرجة** للاقتران ق، وأن القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية للاقتران تُسمى **قيمًا قصوى**. وبوجه عام، يمكن اعتماد النظرية الآتية لإيجاد القيم القصوى باستخدام المشتقة الأولى:

اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى

افرض أن (ج، ق(ج)) نقطة حرجة للاقتران ق المتصل عند ج، إذا وجد العدد الموجب د، بحيث إذا كانت:

(١) ق(س) < 0 لكل س \in (ج - د، ج)، ق(س) > 0 لكل س \in (ج، ج + د)، فإن ق(ج) تكون قيمة عظمى محلية للاقتران ق.

(٢) ق(س) > 0 لكل س \in (ج - د، ج)، ق(س) < 0 لكل س \in (ج، ج + د)، فإن ق(ج) تكون قيمة صغرى محلية للاقتران ق.

(٣) إشارة ق لا تتغير حول النقطة (ج، ق(ج))، فإن ق(ج) لا تمثل قيمة قصوى للاقتران.

لإيجاد القيم القصوى للاقتران ص = ق(س)، يجب عمل الآتي:

(١) إيجاد المشتقة الأولى للاقتران ق.

(٢) مساواة المشتقة الأولى بالصفر، ثم حل المعادلة الناتجة.

(٣) دراسة إشارة المشتقة الأولى ق(س) حول أصفارها.

فإذا تغيرت إشارة المشتقة الأولى من موجبة إلى سالبة حول نقطة معينة فإن هذه النقطة تمثل قيمة عظمى محلية للاقتران ق. أما إذا تغيرت إشارة المشتقة الأولى من سالبة إلى موجبة حول نقطة معينة فإن هذه النقطة تمثل قيمة صغرى محلية للاقتران ق.

مثال (١)

جد النقط الحرجة والقيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران

$$ق(س) = س^2 - ٤س + ٣$$

الحل

$$ق'(س) = ٢س - ٤$$

$$٠ = ق'(س)$$

$$٠ = ٢س - ٤$$

∴ $س = ٢$ ، وعليه توجد قيمة حرجة عندما $س = ٢$

ق(س)	
إشارة ق'(س)	- - - - - صفر + + + + +
قيم س	$∞ - \quad \quad \quad ٢ \quad \quad \quad ∞$

يتبين من جدول الإشارات أن للاقتران قيمة صغرى محلية عندما $س = ٢$ ، وأن قيمتها

$$ق(٢) = (٢)^2 - ٤(٢) + ٣ = ٣ - ٨ + ٣ = ١ -$$

∴ النقطه الحرجة هي $(٢, ١ -)$ ، والقيمة الصغرى المحلية = $ق(٢) = ١ -$

فكر وناقش

حلّ المثال السابق بطريقة أخرى.

١ تدريب

جد النقط والأعداد الحرجة والقيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران

$$ق(س) = س^2 - ٢س + ١$$

مثال (٢)

جد النقط والأعداد الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران

$$ق(س) = ٥ + ١٢س - ٢س^٢ - ٣س^٣$$

الحل

$$ق(س) = ١٢س - ٢س^٢ - ٣س^٣$$

$$ق(س) = ٠، ومنه:$$

$$٠ = ١٢س - ٢س^٢ - ٣س^٣$$

$$٠ = ٢ - س - س^٢$$

$$(س - ٢)(س + ١) = ٠، ومنه:$$

$$س - ٢ = ٠، صفر، س = ٢$$

$$س + ١ = ٠، صفر، س = -١$$

∴ توجد أعداد حرجة عندما $س = ٢$ ، $س = -١$.

أما النقط الحرجة فهي: $(٢، ق(٢)) = (٢، ١٥-)$ ، $(-١، ق(-١)) = (-١، ١٢)$.

ق(س)	↗ ↘ ↗	
إشارة ق(س)	+++++ صفر	----- صفر +++++
قيم س	∞- ١-	٢ ∞

يتبين من جدول الإشارات أن للاقتران ق قيمة عظمى محلية عندما $س = ١-$ (لماذا؟)، هي

$$ق(-١) = ١٢$$

يوجد أيضاً قيمة صغرى محلية للاقتران ق عندما $س = ٢$ (لماذا؟)، هي $ق(٢) = ١٥-$

إذا كان $Q(S) = 2S - 12$ ، فجد كلاً مما يأتي:

(١) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران Q .

(٢) قيم S الحرجة للاقتران Q .

(٣) القيم القصوى للاقتران Q ، مُحدِّداً نوعها.

يمكن تحديد القيم القصوى للاقتران عن طريق اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى.

اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى

إذا كان Q اقتراناً متصلًا على الفترة $[A, B]$ ، وكان $Q(S)$ ، $Q'(S)$ معرفين على الفترة (A, B) ،

وكان $J \in (A, B)$ ، حيث $Q'(J) = 0$ (أي إن J ، $Q'(J)$ نقطة حرجة)، وكان:

(١) $Q'(J) < 0$ صفرًا، فإن $Q'(J)$ هي قيمة صغرى محلية للاقتران Q .

(٢) $Q'(J) > 0$ صفرًا، فإن $Q'(J)$ هي قيمة عظمى محلية للاقتران Q .

(٣) $Q'(J) = 0$ صفرًا، فإن الاختبار يفشل، فيستخدم اختبار المشتقة الأولى.

لاحظ أن اختبار المشتقة الأولى استُخدم في إيجاد القيم القصوى للاقتران

$Q(S) = 2S^3 - 3S^2 - 12S + 5$ الوارد ذكره في المثال (٢)، وأنه يمكن إيجاد هذه القيم

أيضًا باستخدام اختبار المشتقة الثانية.

$$Q(S) = 2S^3 - 3S^2 - 12S + 5$$

$$Q'(S) = 6S^2 - 6S - 12$$

$$6S^2 - 6S - 12 = 0$$

$$S^2 - S - 2 = 0$$

$$S(S - 2) = 0$$

$$S = 2، \text{ ومنه: } S = 2$$

$$S = 1، \text{ ومنه: } S = -1$$

∴ يوجد أعداد حرجة للاقتران ق عندما $s = 2$ ، $s = -1$

$$ق(س) = 12 - 6$$

$$ق(2) = (2)12 = 6 - 18 < 0$$

∴ توجد قيمة صغرى محلية للاقتران ق عندما $s = 2$ ، هي $ق(2) = 15$

$$ق(-1) = (-1)12 = 6 - 18 > 0$$

∴ توجد قيمة عظمى محلية للاقتران ق عندما $s = -1$ ، هي $ق(-1) = 12$

مثال (٣)

باستخدام اختبار المشتقة الثانية، جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران ق، حيث

$$ق(س) = س^3 - 3س^2 - 2س + 2$$

الحل

$$ق(س) = س^3 - 3س^2 - 2س + 2$$

$$ق(س) = صفرًا، ومنه:$$

$$س^3 - 3س^2 - 2س = صفرًا.$$

$$س^2 - 2س - 8 = 0$$

$$0 = (س - 4)(س + 2)$$

$$س - 4 = 0، ومنه: س = 4$$

$$س + 2 = 0، ومنه: س = -2$$

∴ يوجد أعداد حرجة للاقتران ق عندما $s = 4$ ، $s = -2$

$$ق(س) = 6 - 6$$

$$ق(4) = (4)6 = 6 - 18 < صفر.$$

∴ توجد قيمة صغرى محلية للاقتران ق عندما $s = 4$ ، هي $ق(4) = -78$

$$ق(-2) = (-2)6 = 6 - 18 > صفر.$$

∴ توجد قيمة عظمى محلية للاقتران ق عندما $s = -2$ ، هي $ق(-2) = 30$

باستخدام اختبار المشتقة الثانية، جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران

$$ق(س) = س^3 - ٣س^2 + ٢$$

مثال (٤)

جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران ق(س) = (س - ١)٤.

الحل

لإيجاد القيم القصوى المحلية لهذا الاقتران، استخدم اختبار المشتقة الثانية:

$$ق'(س) = ٤(س - ١)^3$$

$$٠ = ٤(س - ١)^3$$

$$\therefore س = ١$$

$$ق''(س) = ١٢(س - ١)^2$$

عوّض قيمة س = ١ في قاعدة الاقتران ق'':

$$ق''(١) = ١٢(١ - ١)^2 = ٠$$

فشل الاختبار، وهذا يُحتم استخدام اختبار المشتقة الأولى.

ق(س)	
إشارة ق'(س)	----- صفر + + + + +
س	١

∴ توجد قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س) عندما س = ١، هي ق(١) = ٠.

الأسئلة

(١) جد القيم القصوى (العظمى والصغرى) المحلية (إن وجدت) لكل مما يأتي:

أ) $ق(س) = س^3 - ٣س + ١$

ب) $ل(س) = س^4 - ٣س^٢ + ٢$

ج) $هـ(س) = س^٣ + ٤$

د) $ك(س) = س^٣ - ٢س^٢ - ٤س + ٨$

(٢) جد القيم القصوى (العظمى والصغرى) المحلية (إن وجدت) لكل مما يأتي باستخدام اختبار المشتقة الثانية:

أ) $ق(س) = س^٢ - ٨$

ب) $ق(س) = س^٢ + ٤$

ج) $ق(س) = س^٢ - ٦س$

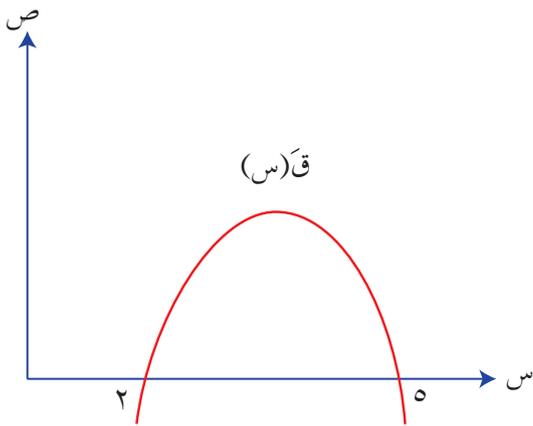
(٣) اعتمادًا على الشكل (٣-١٢) الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتزان ق،

حيث $ق(٢) = ق(٥) = ٥$ صفرًا، جد كلاً مما يأتي:

أ) قيم س الحرجة للاقتزان ق.

ب) فترات التزايد والتناقص للاقتزان ق.

ج) نقط القيم القصوى المحلية للاقتزان ق مُحدِّدًا نوعها.



الشكل (٣-١٢).

(٤) إذا كان للاقتزان ق $ق(س) = س^٣ - ٣س + ٤$ قيمة حرجة عندما $س = ٢$ ، فجد قيمة الثابت أ.

النتائج

- تحل مسائل تطبيقية على القيم القصوى.
- تحل مسائل اقتصادية تتعلق بالقيم القصوى.

Applications of Extreme Values

تطبيقات على القيم القصوى

أولاً

ناقش أيمن زميله سعيداً في طريقة حل المسألة الآتية:
ما العددان الموجبان اللذان مجموعهما (٢٠)، ومجموع مربعيهما أقل ما يمكن؟

كيف يمكن حل هذه المسألة؟ وهل للقيم القصوى أثر في ذلك؟ للإجابة، انظر المثال (١).

مثال (١)

ما العددان الموجبان اللذان مجموعهما (٦٤)، وحاصل ضربيهما أكبر ما يمكن؟

الحل

مجموع العددين الموجبين = ٦٤

افرض أن العدد الأول هو س.

افرض أن العدد الثاني هو ص.

س + ص = ٦٤، ومنه:

ص = ٦٤ - س.

إذا كان حاصل ضربيهما ح، فإن:

ح = س × ص .

بما أن المطلوب هو إيجاد أكبر قيمة لحاصل ضرب العددين س، ص، فإن ذلك يكافئ إيجاد القيمة العظمى للاقتران ح . ولعمل ذلك، يجب جعل الاقتران ح بدلالة متغير واحد:

$$ح(س) = (س - ٦٤) \times س$$

$$ح(س) = ٦٤س - س^٢$$

$$ح(س) = ٦٤ - ٢س$$

$$ح(س) = ٠، ومنه:$$

$$٠ = ٦٤ - ٢س$$

$$\therefore س = ٣٢$$

للتحقق من أن $س = ٣٢$ تجعل حاصل الضرب قيمة عظمى، يجب إيجاد $ح(٣٢)$ ، ومنه:

$$ح(س) = ٢ -$$

$$ح(٣٢) = ٢ - > ٠$$

أي إن للاقتران ح قيمة عظمى عندما تكون $س = ٣٢$ ، ويكون حاصل الضرب أكبر ما يمكن عندما يكون العدد الأول $= ٣٢$ ، و العدد الثاني $= ٦٤ - ٣٢ = ٣٢$ استخدم اختبار المشتقة الأولى لتحديد نوع القيم القصوى.

تحدث وناقش

اقترح طريقة أخرى لحل المثال السابق.

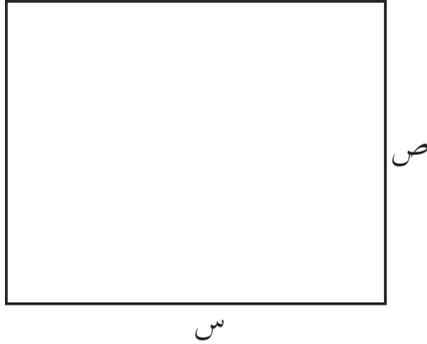
١ تدريب

حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

قطعة أرض مستطيلة الشكل، محيطها ٦٠٠ م. ما بُعدا قطعة الأرض اللذان يجعلان مساحتها أكبر ما يمكن؟

الحل

افرض أن بُعدي قطعة الأرض هما س، ص، انظر الشكل (٣-١٣).



الشكل (٣-١٣).

$$\text{محيط قطعة الأرض} = 600 \text{ م}$$

$$\text{المساحة (م)} = \text{الطول} \times \text{العرض}$$

$$م = س \times ص$$

$$\text{المحيط} = 2 \times \text{الطول} + 2 \times \text{العرض}$$

$$600 = 2س + 2ص$$

$$ص = 300 - س$$

$$م = س \times ص، \text{ ومنه:}$$

$$م = س \times (300 - س)$$

$$م = 300س - س^2$$

$$\dot{م} = 300 - 2س$$

$$\dot{م} = \text{صفرًا، ومنه:}$$

$$0 = 300 - 2س$$

$$\therefore س = 150$$

للتحقق من وجود قيمة عظمى للاقتران م عند س = 150، استخدم اختبار المشتقة الثانية:

$$\ddot{م} = (س) - 2$$

$$\therefore \ddot{م} (150) = (150) - 2 > \text{صفر.}$$

∴ المساحة أكبر ما يمكن (قيمة عظمى) عندما س = 150 متراً.

$$ص = 300 - س، ص = 150 \text{ متراً.}$$

يملك مُزارع قطعة أرض تقع على ضفة نهر مستقيم. فإذا اشترى المزارع ٣٠٠ متر من الأسلاك الشائكة، فما أبعاد أكبر مساحة مستطيلة من قطعة الأرض يمكن تسييجها بها من دون تسييج البُعد الواقع على ضفة النهر؟

مثال (٣)

صندوق على شكل متوازي مستطيلات، قاعدته مربعة الشكل، ومجموع أبعاده الثلاثة ١٢٠ سم. جد أبعاده التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن.

الحل

افرض أن أبعاد الصندوق هي: س، س، س، ص (لماذا؟)، انظر الشكل (٣-١٤).

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

$$ح = س \times س \times ص$$

$$ح = س^2 ص$$

$$\text{لكن، } ١٢٠ = ص + س + س \leftarrow ١٢٠ = ص + ٢س$$

$$\text{ومنه: } ص = ١٢٠ - ٢س$$

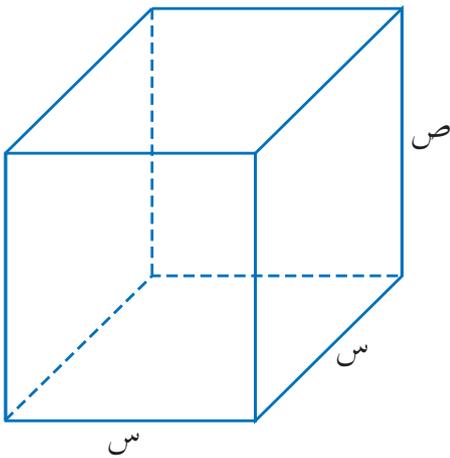
$$ح (س) = (س)^2 (١٢٠ - ٢س)$$

$$ح (س) = ١٢٠س^2 - ٢س^3$$

$$٠ = ح (س) = ١٢٠س^2 - ٢س^3$$

$$\therefore ٠ = ٢س(٦٠ - س)$$

$$\text{ومنه: } ٠ = س، \text{ أو: } ٦٠ = س$$



الشكل (٣-١٤).

للتحقق من القيمة العظمى، يجب إيجاد:

$$\text{ح} (س) = 240 - 12س$$

$$\text{ح} (0) = 240 > 0$$

∴ توجد قيمة صغرى محلية عندما $س = 0$ ، لذلك تُرفض (لماذا؟).

$$\text{ح} (40) = 240 - 12(40)$$

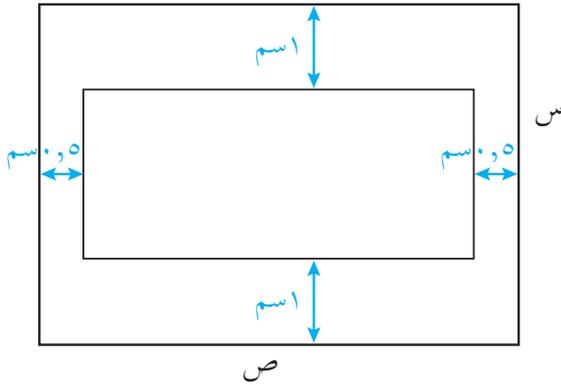
$$240 - 480 = -240 < 0$$

∴ توجد قيمة عظمى عندما $س = 40$.

عندما $س = 40$ ، فإن $ص = 120 - 2(40) = 40$.

∴ أبعاد الصندوق هي: الطول = 40 سم، العرض = 40 سم، الارتفاع = 40 سم.

مثال (٤)



الشكل (٣-١٥).

صحيفة ورقية مستطيلة الشكل، مساحتها 50×50 سم^٢، يراد طباعة إعلان عليها. إذا كان عرض كل هامش في رأس الورقة وأسفلها 1 سم، وفي كل جانب $0,5$ سم، فجد بُعدي الورقة اللذين يجعلان المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن.

الحل

افرض أن بُعدي الورقة هما $س$ ، $ص$ ، والمساحة المطبوعة هي $م$.

المعطيات: مساحة الصحيفة 50×50 سم^٢.

المطلوب: إيجاد بُعدي الورقة حتى تكون مساحة الطباعة أكبر ما يمكن.

لحساب ذلك، جد مساحة منطقة الطباعة م = (س - ٢) (ص - ١)، لاحظ الشكل (٣-١٥)، ولكن:

$$٥٠ = ٥٠ \times ص، ومنه: ص = \frac{٥٠}{س}$$

$$م(س) = (س - ٢) \left(١ - \frac{٥٠}{س}\right)$$

$$م(س) = ٥٠ - س + \frac{١٠٠}{س} - ٢$$

$$م'(س) = ١ - \frac{١٠٠}{س^2}$$

$$١٠٠ = ١٠٠ = س^2، ومنه: س = ١٠$$

∴ س = ١٠، أو: س = -١٠، لذلك تُهمل (لماذا؟).

للتحقق من أن للاقتران قيمة عظمى عندما س = ١٠ سم، استخدم اختبار المشتقة الثانية:

$$م''(س) = \frac{٢٠٠}{س^3}$$

$$م''(١٠) = \frac{٢٠٠}{١٠٠٠} > \text{صفر}$$

∴ توجد قيمة عظمى عندما س = ١٠

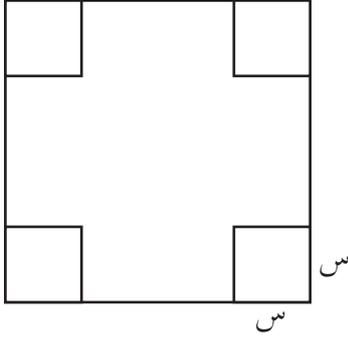
$$\text{لايجاد قيمة ص} = \frac{٥٠}{س}$$

$$ص = ٥$$

∴ بُعِدَا الورقة اللذان يجعلان المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن هما: ١٠ سم، ٥ سم.

الأسئلة

- (١) ما العددان الصحيحان الموجبان اللذان مجموعهما ٦٠، وحاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن؟
- (٢) صحيفة ورقية مستطيلة الشكل، مساحتها ٣٢ سم^٢، يراد طباعة إعلان عليها. إذا كان عرض كل هامش في رأس الورقة وأسفلها ١ سم، وفي كل جانب ٥,٥ سم، فجد بُعدي الورقة اللذين يجعلان المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن.
- (٣) أراد إبراهيم أن يفتح نافذة مستطيلة في جدار إحدى غرف منزله، بحيث يكون محيط النافذة ٦ م. جد بُعدي النافذة اللذين يسمحان لأكبر كمية ممكنة من الضوء بدخول الغرفة.



- (٤) كرتونة مربعة الشكل طول ضلعها ١٢ سم، إذا قُصَّ من جوانبها الأربعة (٤) مربعات متساوية طول ضلعها س، ثم رُفِعت الجوانب، وأصبحت على صورة علبة مفتوحة من أعلى، فجد قيمة س التي تجعل حجم العلبة أكبر ما يمكن.

- (٥) إذا كان مجموع ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية يساوي ٤٠ سم، فجد أكبر مساحة ممكنة للمثلث.

- (٦) يراد تصميم بركة قاعدتها مستطيلة الشكل، ومساحتها ٣٦ م^٢، ثم إحاطتها بممر خارجي منتظم عرضه متران. جد أبعاد البركة المراد تصميمها بحيث تكون المساحة الكلية للبركة والممر أقل ما يمكن.

ينتج مصنع للثلاجات س ثلاجة شهريًا. فإذا كانت تكلفة إنتاجها تعطى بالعلاقة:
ك(س) = $36000 + 4س + 2س^2$ ، وكان سعر الثلاجة الواحدة ٥٠٠ دينار، فجد عدد الثلاجات
التي يجب أن يبيعها المصنع شهريًا لتحقيق أكبر ربح ممكن.

يُستخدَم علم التفاضل أيضًا في الكثير من المسائل الاقتصادية التي تُحتم على الشركات أو
المصانع اتخاذ بعض القرارات المتعلقة بإنتاج عدد مناسب من السلع للحصول على أكبر ربح
ممكن، أو أقل تكلفة. فمثلًا إذا كانت تكلفة س من وحدات سلعة معينة ينتجها مصنع ما تعطى
بالاقتران ك(س) = $س^2 + ٥س + ١٢٠٠$ ، فإن ك(س) يُسمى **الاقتران التكلفة الكلية**، وهو يعتمد
على المقدار الثابت (١٢٠٠)، والمقدار المتغير ($س^2 + ٥س$) الذي يتغير وفق عدد الوحدات المنتجة
س. وتُسمى المشتقة الأولى للاقتران ك(س) **التكلفة الحدية**؛ أي إن ك'(س) = معدل تغير التكلفة
بالنسبة إلى عدد الوحدات المنتجة، علمًا بأن التكلفة الحدية لا تتأثر بالمقدار الثابت لأن مشتقته
صفر. لحساب التكلفة الحدية لـ (٢٠) وحدة، يتعين أولاً إيجاد التكلفة الحدية.

$$ك'(س) = ٢س + ٥$$

$$ك'(٢٠) = (٢٠)٢ + ٥ = ٤٥ \text{ دينارًا.}$$

وبطريقة مشابهة، إذا كان **الإيراد الكلي** الناتج من بيع س من هذه الوحدات يعطى بالاقتران
د(س) فإن د'(س) تُسمى **الإيراد الحدي** (معدل التغير في الإيراد) بالنسبة إلى عدد الوحدات المباعة،
وإذا كان **الربح** يعطى بالاقتران ر(س) فإن ر'(س) تُسمى **الربح الحدي** (معدل التغير في الربح)
بالنسبة إلى عدد الوحدات المباعة.

$$\text{الربح} = \text{الإيراد الكلي} - \text{التكلفة الكلية}$$

$$ر(س) = د(س) - ك(س)$$

$$\therefore ر'(س) = د'(س) - ك'(س)$$

أي إن **الربح الحدي** = **الإيراد الحدي** - **التكلفة الحدية**.

لاحظ أنه إذا كان $R(s) = 0$ فإن $D(s) = K(s)$ ، ومن ذلك نجد أن الربح يكون أكبر ما يمكن عندما تكون التكلفة الحدية مساوية للإيراد الحدي.

تعريف

إذا كان s هو عدد الوحدات المنتجة من سلعة معينة ضمن فترة محددة في مصنع ما فإن:

$$K(s) = \text{اقتران التكلفة الكلية.}$$

$$K'(s) = \text{التكلفة الحدية.}$$

$$D(s) = \text{اقتران الإيراد الكلي} = \text{التكلفة الكلية} + \text{الربح}$$

$$= K(s) + R(s).$$

$$D'(s) = \text{الإيراد الحدي.}$$

$$R'(s) = \text{اقتران الربح} = \text{الإيراد الكلي} - \text{التكلفة الكلية}$$

$$= D'(s) - K'(s).$$

$$R(s) = \text{الربح الحدي} = \text{الإيراد الحدي} - \text{التكلفة الحدية}$$

$$= D(s) - K(s).$$

مثال (١)

لاحظت إحدى الشركات التي تصنع ألعاب الأطفال أن التكلفة الكلية لإنتاج s لعبة هي

$$K(s) = 300 - 0.2s + 0.001s^2 \text{ دينار، وأن الربح الناتج من بيع } s \text{ لعبة هو}$$

$$R(s) = 0.4s \text{ دينار. جد كلاً مما يأتي:}$$

(١) اقتران التكلفة الحدية.

(٢) عدد اللعب اللازم إنتاجها حتى تكون التكلفة أقل ما يمكن.

(٣) الإيراد الحدي الناتج من بيع (١٠٠٠) لعبة.

الحل

$$(1) \text{ التكلفة الحدية} = ك(س) = -0,2 + 0,002س.$$

$$(2) \text{ تكون التكلفة أقل ما يمكن عندما } ك(س) = \text{صفرًا.}$$

$$0 = -0,2 + 0,002س$$

$$100 = س$$

$$\text{وبما أن } ك(س) = 0,002 = \text{صفر، فإن } ك(100) < 0.$$

∴ للاقتران ك قيمة صغرى عندما $س = 100$ ؛ لذا فإن التكلفة تكون أقل ما يمكن عندما

$$س = 100 \text{ لعبة.}$$

$$(3) \text{ الإيراد الكلي} = ك(س) + ر(س)$$

$$د(س) = 300 - 0,2س + 0,001س^2 + 0,4س$$

$$د(س) = 300 + 0,2س + 0,001س^2$$

$$\text{الإيراد الحدي} = د'(س) = 0,2 + 0,002س$$

$$د'(100) = (0,2 + 0,002 \times 100) = 0,2 + 0,2 = 0,4 \text{ دينار.}$$

تدريب ١

إذا كان اقتران الإيراد الكلي لأحد المبيعات هو $د(س) = 50س + 2س^2$ دينار، واقتران التكلفة الكلية $ك(س) = 30س + 4س^2 + 200$ دينار، حيث $س$ عدد الوحدات المباعة، فجد قيمة $س$ التي تجعل الربح أكبر ما يمكن.

مثال (٢)

وجد مصنع لإنتاج الأجهزة الإلكترونية أن التكلفة الكلية بالدينار لإنتاج $س$ من الأجهزة أسبوعيًا تعطى بالاقتران $ك(س) = 5000 + 60س + 0,002س^2$. إذا بيع الجهاز الواحد بمبلغ 80 دينارًا، فما عدد الوحدات التي يجب إنتاجها وبيعها أسبوعيًا لتحقيق أكبر ربح ممكن؟

الحل

عدد الأجهزة = س.

الإيراد الكلي الناتج من بيع الأجهزة = عدد الأجهزة × سعر الجهاز

$$د (س) = ٨٠ \times س$$

$$د (س) = ٨٠ س$$

الربح = الإيراد - التكاليف

$$ر (س) = ٨٠ س - (٥٠٠٠ + ٦٠ س + ٠,٠٠٢ س^٢)$$

$$ر (س) = ٨٠ س - ٦٠ س - ٠,٠٠٤ س$$

$$ر (س) = ٢٠ س - ٠,٠٠٤ س$$

لايجاد أكبر ربح ممكن:

$$ر (س) = ٠, \text{ ومنه:}$$

$$٠ = ٢٠ س - ٠,٠٠٤ س$$

$$س = ٥٠٠٠ \text{ جهاز.}$$

$$\text{وبما أن } ر (س) = ٠,٠٠٤ س - ٢٠ س,$$

$$\text{وأن } ر (٥٠٠٠) = ٠,٠٠٤ س - ٢٠ س > \text{ صفر}$$

فإن للربح قيمة عظمى عندما س = ٥٠٠٠ جهاز.

تدريب ٢

وجد مصنع لإنتاج أجهزة إلكترونية أن التكلفة الكلية بالدينار لإنتاج س من الأجهزة أسبوعيًا تعطى بالاقتران ك(س) = ٥٠ س + ٣٠٠. إذا بيع الجهاز الواحد بمبلغ (٢٠٠ - س) دينار، فجد قيمة س التي تجعل الربح الأسبوعي أكبر ما يمكن.

الأسئلة

(١) إذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو $D(s) = 80s + 2s^2$ دينار، واقتران التكلفة الكلية هو $K(s) = 40 + 160s$ دينار، حيث s عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما، فجد الربح الحدي.

(٢) ينتج مصنع للحواسيب s جهاز أسبوعيًا. فإذا كانت تكلفة الإنتاج الكلي الأسبوعي بالدينار تعطى بالعلاقة $K(s) = 3000 + 50s + 2s^2$ ، وكان سعر الجهاز الواحد 250 دينارًا، فما عدد الأجهزة التي يجب أن يبيعها المصنع أسبوعيًا لتحقيق أكبر ربح ممكن؟

(٣) إذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو $D(s) = 60s - 2s^2$ دينار، واقتران التكلفة الكلية هو $K(s) = 20 + 8s$ دينار، حيث s عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما، فجد الربح الحدي.

(٤) إذا كان $D(s) = 16s - 2s^2$ دينار، $K(s) = 2s^2 - 8s + 15$ دينار، هما إيراد s من وحدات سلعة معينة وتكلفتها، فجد قيمة s التي تجعل الربح أكبر ما يمكن.

(٥) حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

(٦) يبيع أحد المصانع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بمبلغ 90 دينارًا. فإذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج s وحدة من هذه السلعة أسبوعيًا تعطى بالعلاقة:
 $K(s) = 2s^2 + 70s + 100$ دينار، فجد الربح الحدي.

أسئلة الوحدة

- (١) يتحرك جسيم وفق العلاقة: $F(n) = 2n^2 - 12n + 3$ ، حيث F المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار، n الزمن بالثواني. جد تسارع الجسيم عندما تساوي سرعته 42 م/ث.
- (٢) يتحرك جسيم وفق العلاقة: $F(n) = m(1 - n)^2$ ، حيث F المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار، n الزمن بالثواني. إذا كانت سرعة الجسيم المقطوعة بعد 4 ثوانٍ تساوي 12 م/ث، فجد قيمة الثابت m .
- (٣) قطعة أرض يراد تسييج جزء مستطيل منها بحيث تبلغ مساحته 3750 م². إذا كانت تكلفة المتر الطولي الواحد من جانبيين متوازيين ثلاثة دنانير، ومن الجانبين الآخرين دينارين، فجد أبعاد قطعة الأرض التي يمكن تسييجها لتحقيق أقل كلفة ممكنة.
- (٤) إذا كان $Q(s) = s^2(6 - s)$ ، فجد:
- أ) فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران Q .
- ب) القيم العظمى والصغرى للاقتران Q (إن وجدت).
- (٥) يبيع أحد المصانع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بمبلغ 100 دينار، فإذا كانت التكلفة الكلية بالدنانير لإنتاج s وحدة من هذه السلعة أسبوعيًا تعطى بالعلاقة:
- ك(س) = $300s^2 + 40s + 70$ دينارًا، فجد الربح الحدي.
- (٦) لكل من الاقترانين الآتيين، جد القيم العظمى والصغرى (إن وجدت) باستخدام اختبار المشتقة الثانية:
- أ) $Q(s) = 2s^3 - 3s^2 - 12s + 5$
- ب) $Q(s) = 3s^2 - 3s + 7$
- (٧) إذا كان $Q(s) = s(3 - s)^2$ ، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران Q عندما $s = 1$
- (٨) ما العددان الموجبان اللذان مجموعهما 50 ، وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن؟
- (٩) إذا كان ك(س) = $40 + 3s^2$ دينار اقتران التكلفة الكلية لإنتاج s قطعة من سلعة ما، فجد التكلفة الحدية لإنتاج 20 قطعة من هذه السلعة.

١٠) إذا كان $ق(س) = (س - ٤)^٣$ ، فجد قيمة $س$ التي تجعل $ق(س) = ٣٦$

١١) يتكون هذا السؤال من ست فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة بدائل، واحد منها فقط صحيح. ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) إذا كان للاقتران $ق(س) = أس^٢ - ١٢س + ١$ قيمة حرجة عندما $س = ٣$ ، فإن قيمة $أ$ تساوي:

أ) ٢ ب) ٦ ج) ١٢ د) ٢-

(٢) إذا كان ميل المماس للاقتران $ص = (س - ٢)^٤$ عند النقطة $(س_١, ص_١)$ يساوي (٤)، فإن قيمة $س_١$ تساوي:

أ) ٣- ب) ٢- ج) ٢ د) ٣

(٣) إذا كان $ق(س) = س^٢ - ٤س$ ، فإن للاقتران $ق$ قيمة صغرى عندما $س$ تساوي:

أ) صفرًا ب) ٢ ج) ٤- د) ٤

(٤) فترة التزايد للاقتران $ق(س) = س^٢ - ٢س - ٢$ هي:

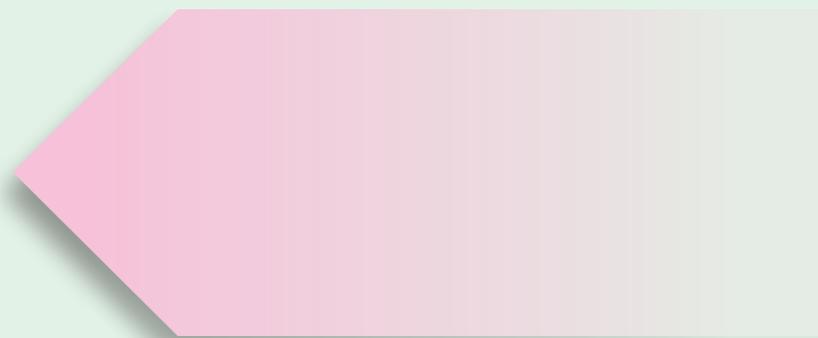
أ) $[٢, ٣]$ ب) $[٠, ١]$ ج) $[١, \infty)$ د) $(-\infty, ١]$

(٥) يتحرك جسيم وفق العلاقة: $ف(ن) = ٦ن^٢ - ٣ن$ ، حيث $ف$ المسافة بالأمتار التي يقطعها الجسيم في زمن قدره $ن$ ثانية. المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار حتى يصبح تسارعه صفرًا هي:

أ) ١٢ ب) ١٦ ج) ٢٤ د) ٣٢

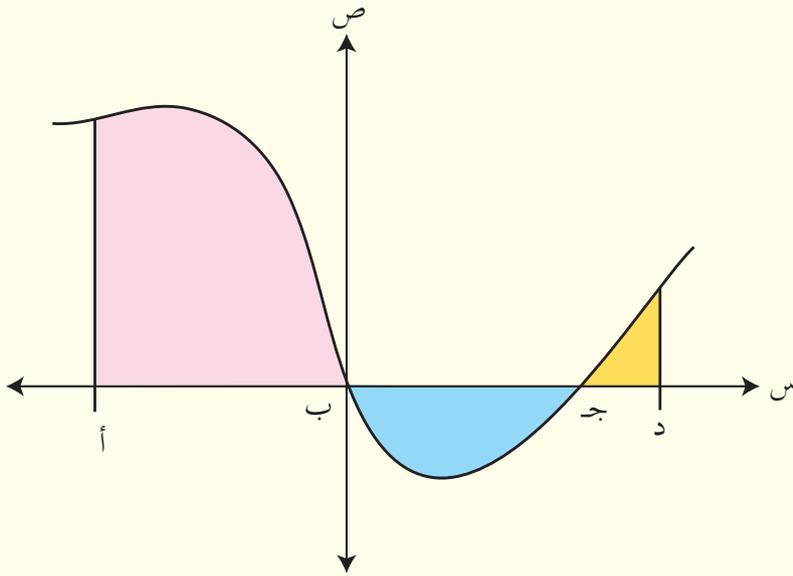
(٦) إذا كان للاقتران $ق(س) = أس^٣ - ٣س^٢$ قيمة صغرى محلية عند $س = ١$ ، فإن قيمة الثابت $أ$ تساوي:

أ) ٢ ب) ٢- ج) ٣- د) ٣



الفصل الدراسي الثاني





يُعدُّ التكامل أحد أهم الموضوعات في الرياضيات؛ لِمَا له من أهمية كبيرة في كثير من التطبيقات العملية، ولا سيما الاقتصادية، والهندسية، والعلمية، والاجتماعية، والإنسانية. وقد بدأ دراسته دراسة عميقة في نهاية القرن السابع عشر الميلادي كوكبة من علماء الرياضيات والفيزياء، مثل الإنجليزي إسحاق نيوتن (١٦٤٢م - ١٧٢٧م)، والألماني جوتفرد ليبنتز (١٦٤٦م - ١٧١٦م) اللذين يُعزى إليهما الفضل في اكتشاف علم التكامل، الذي توالى الدراسات المتعلقة به، واستمر التطور في تطبيقاته في جميع المجالات الحياتية والعلوم المختلفة.

تأتي دراسة التكامل في هذه الوحدة استكمالاً لدراستنا موضوع التفاضل؛ فالتفاضل والتكامل علمان متلازمان يتمم أحدهما الآخر.

Integration and its Applications

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- استخدام قواعد التكامل في حساب تكاملات الاقترانات كثيرات الحدود، والمثلثية (جاس، جتاس، قأس)، والأسية الطبيعية.
- استخدام الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي في التكامل.
- تعرف التكامل المحدود، واستخدام خصائصه.
- استخدام طريقة التكامل بالتعويض في حساب تكاملات اقترانات محددة.
- استخدام التكامل في حل مسائل تتعلق بحركة جسيم على خط مستقيم، وتتضمن:
 - حساب المسافة إذا أعطيت نقطة البداية والسرعة بوصفها اقتراناً في الزمن.
 - حساب السرعة والمسافة ضمن معطيات معينة.
- نمذجة مسائل النمو والاضمحلال وحلها.
- استخدام التكامل في إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ومحور السينات.
- حساب مشتقة كل من الاقترانين: اللوغاريتمي الطبيعي، والأسّي الطبيعي.

النتائج

- ◀ تتعرف مفهوم التكامل غير المحدود وعلاقته بالتفاضل.
- ◀ تجد التكامل غير المحدود لاقترانات معينة.
- ◀ تتعرف التكامل المحدود.
- ◀ تجد التكامل المحدود لاقترانات معينة.
- ◀ تستنتج خصائص التكامل المحدود.
- ◀ تجد تكامل اقترانات معينة باستخدام التكامل بالتعويض.

Indefinite Integral

التكامل غير المحدود

أولاً

جد قاعدة الاقتران ق الذي تعطى مشتقته بالقاعدة ق(س) = $3س^2 - 6س + 5$ ،

علمًا بأن ق(0) = 7

للإجابة عن هذا السؤال، سنستخدم قواعد الاشتقاق التي درستها في الوحدة الثانية. تعلم أن $ق(س) = 3س^2$ ، وأن $ق'(س) = 6س$ ، وأن $ق'(س) = 5$ ، ولهذا فإن مشتقة المقدار $(3س^2 - 6س + 5)$ تعطي القاعدة المطلوبة، وهي $(3س^2 - 6س + 5)$. ولكن، هل المقدار $(3س^2 - 6س + 5)$ هو الوحيد الذي مشتقته $(3س^2 - 6س + 5)$ ؟ تعلمت من قواعد الاشتقاق أن مشتقة الثابت تساوي صفرًا، لذلك:

$$ق(س) = 3س^2 - 6س + 5 + ج$$

وكذلك $ق(س) = 3س^2 - 6س + 5 + ج$ ، حيث ج ثابت عددي. أي إنه يوجد عدد لا نهائي من الاقترانات مشتقة كل منها تساوي $(3س^2 - 6س + 5)$ ، ويمكن التعبير عن ذلك بالصيغة العامة الآتية:

ق(س) = $3س^2 - 6س + 5 + ج$ ، حيث ج ثابت.

يُطلق على الاقتران ق(س) = س^٣ - ٢س^٢ + ٥س + ج اسم **التكامل غير المحدود** للاقتران

$$ق(س) = س^٣ - ٢س^٢ + ٥س + ٥$$

ويُعبر عن التكامل غير المحدود للاقتران ق(س) بالنسبة إلى المتغير س بالصورة:

$$\int ق(س) دس.$$

يمكن القول إن عملية التكامل هي عملية عكسية للتفاضل (للاقترانات المتصلة).

تعريف

إذا كان ق اقتراناً متصلًا، فإن:

$$(١) \int ق(س) دس = ق(س) + ج \quad (ج ثابت التكامل).$$

$$(٢) \text{ مشتقة (التكامل غير المحدود للاقتران ق(س)) = ق(س).}$$

مثال (١)

$$\int (٤س^٢ - ٣س) دس، فجد \frac{دص}{دس} \text{ عندما } س = ٢$$

الحل

$$ص = \int (٤س^٢ - ٣س) دس$$

باشتقاق الطرفين:

$$\frac{دص}{دس} = \frac{د(٤س^٢ - ٣س)}{دس} = ٨س - ٣$$

$$\text{عندما } س = ٢، \frac{دص}{دس} = ٨(٢) - ٣ = ١٠$$

تدريب ١

$$\int \frac{١-س^٤}{١+س^٢} دس، فجد \frac{دص}{دس} \text{ عندما } س = ١$$

بناءً على دراستك قواعد الاشتقاق، يمكنك استنتاج قواعد التكامل غير المحدود الآتية:

$$(1) \int u^a \, du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C, \text{ حيث } a \neq -1.$$

$$(2) \int \frac{u^n}{u} \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \text{ حيث } n \neq -1.$$

$$(3) \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$$

$$(4) \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C.$$

$$(5) \int \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{2u^2} + C.$$

(حيث ج ثابت التكامل).

فكر وناقش

في الفرع (2) من القواعد الآنف ذكرها، لماذا يشترط أن يكون $n \neq -1$ ؟

مثال (2)

جد كلاً من التكاملات الآتية:

$$(1) \int \frac{1}{x^2} \, dx \quad (2) \int \frac{1}{x^3} \, dx \quad (3) \int \frac{1}{x^4} \, dx \quad (4) \int \frac{1}{x^5} \, dx$$

الحل

$$(1) \int x^{-2} \, dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

$$(2) \int x^{-3} \, dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$$

$$(3) \int x^{-4} \, dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = -\frac{1}{3x^3} + C$$

جد كلاً من التكاملات الآتية:

$$(1) \int \sqrt{s} \, ds \quad (2) \int s^3 \, ds$$

$$(3) \int \sqrt{s^2 - 4} \, ds, \quad s \neq 0 \quad (4) \int \sqrt{s^2 + 4} \, ds, \quad s \geq 0$$

بما أن التكامل هو عملية عكسية للتفاضل، فهذه بعض خصائص التكامل غير المحدود:

(١) إذا كان $\int f(s) \, ds = V$ ، حيث V ثابت، فإن $\int f(s) \, ds = V + C$ ؛ لذا فإن:

$$\int \sqrt{s} \, ds = \int \sqrt{s} \, ds + C = \int \sqrt{s} \, ds + C$$

أي إن: $\int \sqrt{s} \, ds = \int \sqrt{s} \, ds + C$ ، حيث C ثابت.

(٢) إذا كان $\int f(s) \, ds = V$ ، فإن $\int f(s) \, ds = V + C$ ؛ لذا فإن:

$$\int \sqrt{s} \, ds = \int (\sqrt{s} + C) \, ds$$

$$V = \int \sqrt{s} \, ds + C$$

أي إن: $\int \sqrt{s} \, ds = \int (\sqrt{s} + C) \, ds$.

(٣) إذا كان $\int f(s) \, ds = V$ ، فإن $\int f(s) \, ds = V + C$ ؛ لذا فإن:

$$\int \sqrt{s} \, ds = \int (\sqrt{s} - C) \, ds$$

$$V = \int \sqrt{s} \, ds - C$$

أي إن: $\int \sqrt{s} \, ds = \int (\sqrt{s} - C) \, ds$.

مثال (٣)

جد قيمة التكامل الآتي:

$$\int (3s - 5s^2 + 9) ds$$

الحل

$$\begin{aligned} \int (3s - 5s^2 + 9) ds &= \int 3s ds - \int 5s^2 ds + \int 9 ds \\ &= \left(\frac{3}{2}s^2 - \frac{5}{3}s^3 + 9s \right) + C \\ &= \frac{3}{2}s^2 - \frac{5}{3}s^3 + 9s + C \end{aligned}$$

حيث الثابت $C = \frac{3}{2} - \frac{5}{3} + 9 = 9\frac{1}{6}$

تدريب ٣

جد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$(1) \int (3s^2 - \frac{6}{s}) ds \quad (2) \int (4s - 3 \text{ جاس}) ds$$

مثال (٤)

جد كلاً مما يأتي:

$$(1) \int s(2s - 1) ds \quad (2) \int \frac{s^2 - 5s}{s} ds, s \neq 0$$

الحل

(١) يتعين أولاً إجراء عملية الضرب، ثم إجراء عملية التكامل كما يأتي:

$$\int s(2s - 1) ds = \int (2s^2 - s) ds$$

$$= \frac{2}{3}s^2 - \frac{1}{2}s^2 + ج$$

(٢) يتعين أولاً إجراء عملية القسمة، ثم إجراء عملية التكامل كما يأتي:

$$\left[\frac{s^5 - 2s^2}{s} ds = (s^4 - 2s) ds \right]$$

$$= \left[\frac{1}{5}s^5 - s^2 + ج \right]$$

$$= \frac{1}{5}s^5 - s^2 + ج$$

فكر وناقش

(١) حلّ الفرع (٢) من المثال (٤) بطريقة أخرى.

(٢) أراد أسامة إيجاد التكامل الآتي: $\int 3s^2(1-s)^2 ds$ ، وذلك بإجراء الخطوات الآتية:

$$\int 3s^2(1-s)^2 ds = \int 3s^2(1-2s+s^2) ds$$

$$= \int (3s^2 - 6s^3 + 3s^4) ds$$

ناقش حل أسامة.

تدريب ٤

جد كلاً من التكاملات الآتية:

$$(١) \int (2s + 3)^2 ds$$

$$(٢) \int \frac{s^5 - 2s^2}{\sqrt{s}} ds, s > 0$$

$$(٣) \int \frac{s^2 + 2s - 15}{s - 3} ds, s \neq 3$$

$$(٤) \int \frac{s^3 + 6s}{s + 4} ds, s \neq -4$$

تدريب ٥

حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

الأسئلة

(١) جد كلاً مما يأتي:

(ب) $\left[\frac{كس}{س^٥} ، س \neq ٠ \right]$

(أ) $\left[\frac{١}{٢ كس} \right]$

(د) $\left[٣س^٢ كس \right]$

(ج) $\left[(٢-س) كس \right]$

(هـ) $\left[\frac{٢-}{س-٥} كس \right]$

(٢) جد كلاً مما يأتي:

(أ) $\left[(١٠س - \sqrt{١٥س} + ٣قأس) كس \right]$

(ب) $\left[(٢-س)(١+س٤) كس \right]$

(ج) $\left[٣ظاس جتاس كس \right]$

(د) $\left[\frac{٨+س٦+٢س}{٢+س} كس ، س \neq ٢- \right]$

(٣) جد $\frac{كص}{كس}$ عندما $س = ٥$ ، حيث $ص = \left[\frac{١+س٤}{س} كس ، س \neq ٠ \right]$

(٤) إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق، وكان ق(س) = $٦س - ٨س^٢ + ٥$ ، وكان ق(١) = ٢، فجد قاعدة الاقتران ق.

(٥) إذا كان $\left[ع(س) كس = ٦س^٣ - ٣س^٢ + ٦س - ٥ \right]$ ، فجد ع(١).

٦) إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق، وكان ق(س) = ٢س - ٥، وكان ق(٢) = ٤، فجد قيمة ق(١).

٧) إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق، وكان ق(س) = ٣س(٦ - ٥س) + ٤س^٣، وكان ق(٢) = ١ - ١، فجد قيمة ق(١).

٨) إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق، وكان ق(س) = $\frac{٢س + ٦س + ٨س^٣}{س}$ ، س ≠ ٠، فجد قاعدة الاقتران ق(١) = ١٢.

٩) إذا كان ل اقتراناً قابلاً للاشتقاق، وكان ل(س) = ٦س^٢ - ٦س^٣ - ٢س، فجد قيمة ل(٣) - ل(١).

إذا كان $ق(1) = 3$ ، $ق(2) = 5$ ، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-1}^2 4ق(س) دس$.

تعلمت في الدرس السابق أن التكامل غير المحدود للاقتران $ق$ يعطي عددًا لانتهائياً من الاقترانات بصيغة $ع(س) + ج$ ، حيث $ج$ ثابت، وأن الاقترانات تختلف فيما بينها في قيمة الثابت $ج$ ، حيث: $ع(س) + ج = ق(س)$.

تعريف

إذا كان $\int ق(س) دس = ع(س) + ج$ ، فإن التكامل المحدود للاقتران $ق$ على الفترة $[أ، ب]$

هو: $\int_{أ} ب ق(س) دس = ع(ب) - ع(أ)$ ، حيث يُسمى العدد:

أ: الحد السفلي للتكامل المحدود.

ب: الحد العلوي للتكامل المحدود.

ويُرمز إلى المقدار العددي $ع(ب) - ع(أ)$ بالرمز: $\int_{أ} ب ق(س) دس$

مثال (١)

جد $\int_{-1}^2 3س^2 دس$

الحل

$$\int_{-1}^2 3س^2 دس = [س^3 + ج]_{-1}^2 = (2^3 + ج) - (-1^3 + ج) = 8 + ج - (-1 + ج) = 8 + ج + 1 - ج = 9$$

لاحظ أن الناتج النهائي للتكامل المحدود يكون قيمة عددية خالية من ثابت التكامل (ج) (لماذا؟)، ولهذا يمكن تجاهل ثابت التكامل في التكامل المحدود.

فكر وناقش

هل يمكن تجاهل ثابت التكامل عند إجراء التكامل غير المحدود؟ برّر إجابتك.

مثال (٢)

جد قيمة التكامل الآتي: $\int_2^5 (3s^2 - 12s + 5) ds$

الحل

$$\int_2^5 (3s^2 - 12s + 5) ds = \left[s^3 - 6s^2 + 5s \right]_2^5$$

$$= (125 - 150 + 25) - (8 - 24 + 10) = 10$$

تدريب ١

جد قيمة كل مما يأتي:

$$(1) \int_1^4 \frac{6}{\sqrt{s}} ds$$

$$(2) \int_0^1 4s^{\frac{4}{3}} ds$$

مثال (٣)

إذا كان $\frac{ص}{دس} = (٤س^٣ - ٣س^٢ + ٣س + ٣)$ ، فجد قيمة $\frac{دص}{دس}$

الحل

$$\frac{دص}{دس} = \text{صفرًا (لماذا؟)}.$$

تدريب ٢

حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

تدريب ٣

إذا كان $\frac{ص}{دس} = ٩$ ، فجد قيمة الثابت ب.

الأسئلة

(١) احسب قيمة كل مما يأتي:

$$(أ) \int_1^6 2 - s \, ds$$

$$(ب) \int_8^1 \frac{1}{\sqrt[3]{s}} \, ds$$

$$(ج) \int_0^2 (2s + s^2 - 8s^3 + 5s^4 + 7) \, ds$$

$$(د) \int_{-2}^2 (3s - 2)(s + 1) \, ds$$

(٢) إذا كان $\int_{-1}^4 4s \, ds = 20$ ، فجد قيمة الثابت م.

(٣) إذا كان الاقتران ق مُعرِّفًا على الفترة $[1, 5]$ ، وكان ق(س) = $2s + 1$ ، فجد قيمة ق(٥) - ق(١).

(٤) احسب قيمة التكامل الآتي: $\int_2^4 (4s - 6s^2 + 3) \, ds$

(٥) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(أ) \int_1^2 3s(2s^2 - 4) \, ds$$

$$(ب) \int_1^3 (3 - 2s)^2 \, ds$$

$$(ج) \int_{-1}^2 \frac{s^2 + 6s - 7}{1 - s} \, ds$$

(٦) إذا كان $\int_0^2 ق(س) \, ds = 13$ ، وكان ق(٥) = -17 ، فجد قيمة ق(٢).

نشاط (١)

(١) أ) احسب قيمة التكامل الآتي: $\int_1^4 3s^2 ds$

ب) احسب قيمة $\int_1^4 3 ds$

ج) ماذا تلاحظ؟ برّر إجابتك.

(٢) أ) احسب قيمة التكامل الآتي: $\int_{-1}^2 (6s^2 + 5 - 6s) ds$

ب) احسب قيمة: $\int_{-1}^2 6s^2 ds - \int_{-1}^2 5 ds + \int_{-1}^2 6s ds$

ج) ماذا تلاحظ؟ برّر إجابتك.

الخصائص الخطية

(١) $\int_a^b l \, ds = l \int_a^b ds$ ، حيث l ثابت.

(٢) $\int_a^b (c \cdot f(s) + g(s)) \, ds = c \int_a^b f(s) \, ds + \int_a^b g(s) \, ds$

(٣) $\int_a^b (c \cdot f(s) - g(s)) \, ds = c \int_a^b f(s) \, ds - \int_a^b g(s) \, ds$

مثال (١)

إذا كان $\int_1^3 f(s) \, ds = 6$ ، $\int_1^3 g(s) \, ds = -2$ ، فجد قيمة كل مما يأتي:

(١) $\int_1^3 2f(s) \, ds$

(٢) $\int_1^3 (3g(s) - 6f(s) + 4) \, ds$

الحل

$$(1) \quad \left[\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right] \text{ق (س) كس} = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right] \text{ق (س) كس}$$

$$12 = (6)2 =$$

$$(2) \quad \left[\begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} \right] \text{هـ (س) كس} - \left[\begin{array}{c} 6 \\ 6 \end{array} \right] \text{ق (س) كس} + \left[\begin{array}{c} 4 \\ 4 \end{array} \right] \text{كس} = \left[\begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} \right] \text{هـ (س) كس} - \left[\begin{array}{c} 6 \\ 6 \end{array} \right] \text{ق (س) كس} + \left[\begin{array}{c} 4 \\ 4 \end{array} \right] \text{كس}$$

$$\left[\begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} \right] \text{هـ (س) كس} - \left[\begin{array}{c} 6 \\ 6 \end{array} \right] \text{ق (س) كس} + \left[\begin{array}{c} 4 \\ 4 \end{array} \right] \text{كس} =$$

$$34 - = (4 - 12) + 36 - 6 - =$$

تدريب ١

إذا كان $\left[\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right] \text{ل (س) كس} = 2 -$ ، $\left[\begin{array}{c} 5 \\ 5 \end{array} \right] \text{ع (س) كس} = 5$ ، فجد قيمة كل مما يأتي:

$$(1) \quad \left[\begin{array}{c} 5 \\ 5 \end{array} \right] \text{ع (س) كس} = \frac{5 \text{ع (س) كس}}{2 \text{كس}}$$

$$(2) \quad \left[\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right] \text{ل (س) كس} - \left[\begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} \right] \text{ل (س) كس} - \left[\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right] \text{كس} =$$

نشاط (٢)

(١) احسب قيمة التكامل الآتي: $\left[\begin{array}{c} 4 \\ 4 \end{array} \right] \text{س} + \left[\begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} \right] \text{س} - \left[\begin{array}{c} 5 \\ 5 \end{array} \right] \text{كس}$ ، ماذا تلاحظ؟ برّر إجابتك.

(٢) احسب قيمة كل من التكاملين الآتين:

$$(أ) \quad \left[\begin{array}{c} 6 \\ 6 \end{array} \right] \text{س}^2 \text{كس}$$

$$(ب) \quad \left[\begin{array}{c} 6 \\ 6 \end{array} \right] \text{س}^2 \text{كس}$$

ماذا تلاحظ؟ برّر إجابتك.

(٣) احسب قيمة كل من التكمالات الآتية:

$$(ب) \int_0^1 (1 - s^2) ds$$

$$(أ) \int_0^1 (1 - s^2) ds$$

$$(ج) \int_0^1 (1 - s^2) ds$$

ماذا تلاحظ؟

بناءً على إجاباتك في النشاط (٢)، يمكنك التوصل إلى الخصائص الآتية للتكامل المحدود:

$$(١) \int_a^a f(s) ds = \text{صفرًا.}$$

$$(٢) \int_a^b f(s) ds = - \int_b^a f(s) ds$$

$$(٣) \int_a^b f(s) ds + \int_b^c f(s) ds = \int_a^c f(s) ds \text{ (خصيصة الإضافة).}$$

(لا يُشترط في خصيصة الإضافة أن تكون قيمة ب بين أ، ج).

مثال (٢)

إذا كان $\int_0^2 f(s) ds = 2$ ، $\int_2^4 f(s) ds = 4$ ، فجد كلاً مما يأتي:

$$(١) \int_0^4 f(s) ds \quad (٢) \int_0^4 f(s) ds \quad (٣) \int_0^4 f(s) ds$$

الحل

$$(1) \int_1^2 \frac{2}{x} dx = 2 \ln 2 = 2$$

$\int_1^2 \frac{2}{x} dx = 2 \ln 2 = 2$ ، وبقسمة كل من الطرفين على 2، ينتج:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = 1 \ln 2 = 1 \text{ (لماذا؟).}$$

$$(2) \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_2^3 \frac{1}{x} dx = \int_1^3 \frac{1}{x} dx \text{ (لماذا؟).}$$

$$1 + 1 = 2$$

$$(3) \int_1^2 \frac{1}{x} dx = 1 \ln 2 = 1 \text{ (لماذا؟).}$$

تدريب ٢

إذا كان $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = 1 \ln 2 = 1$ ، فجد قيمة كل مما يأتي:

$$(1) \int_1^2 \frac{2}{x} dx \quad (2) \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

تدريب ٣

إذا كان $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = 1 \ln 2 = 1$ ، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$

$$(١) \text{ إذا كان } \int_{أ+٢}^{٤-٢أ} ق(س) دس = ٠, \text{ فجد قيمة الثابت أ.}$$

$$(٢) \text{ إذا كان } \int_{ب}^{١} (١ - س٢) دس = ٠, \text{ فجد قيمة الثابت ب.}$$

الحل

(١) بما أن قيمة التكامل المحدود تساوي صفرًا، وقاعدة الاقتران ق غير معلومة، فإن:

$$\text{الحد العلوي للتكامل} = \text{الحد السفلي للتكامل}$$

$$٤ - ٢أ = أ + ٢$$

$$٠ = ٦ - أ - ٢أ \text{ (لماذا؟).}$$

$$٠ = (٣ - أ)(٢ + أ)$$

$$\text{ومنه: } أ = ٣, \text{ أو: } أ = ٢ -$$

$$(٢) \int_{ب}^{١} (١ - س٢) دس = (س - س٣) \Big|_{ب}^{١} = (١ - ١) - (ب - ب٣) = ٠$$

$$٠ = ب(١ - ب)$$

$$\therefore ب = ٠, \text{ أو } ب = ١ \text{ (لماذا؟).}$$

تدريب ٤

$$(١) \text{ إذا كان } \int_{١+٢م}^{٧-} ق(س) دس = ٠, \text{ فجد قيمة الثابت م.}$$

$$(٢) \text{ إذا كان } \int_{ن}^{١} (٣ - س٢) دس = ٠, \text{ فجد قيمة الثابت ن.}$$

الأسئلة

(١) إذا كان $\int_1^4 2q(s) ds = 12$ ، $\int_1^4 q(s) ds = 4$ ، فجد قيمة كل مما يأتي:

(أ) $\int_1^4 3q(s) ds$ (ب) $\int_1^4 q(s) ds$

(ج) $\int_1^4 (q(s) + s^2) ds$

(٢) إذا كان $\int_{-1}^2 \frac{l(s)}{2} ds = 3$ ، $\int_{-1}^2 (h(s) + 1) ds = 5$ ، فجد قيمة كل مما يأتي:

(أ) $\int_{-1}^2 h(s) ds$ (ب) $\int_{-1}^2 (3l(s) + s^2 - 3h(s)) ds$

(٣) إذا كان $\int_{-1}^{7+5} q(s) ds = 0$ ، فجد قيمة الثابت أ.

(٤) إذا كان $\int_3^6 (2 - 4s) ds = 0$ ، فجد قيمة الثابت م.

(٥) إذا كان $\int_1^4 (3q(s) - 5) ds = 9$ ، فجد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_1^4 (2q(s) + 1) ds$$

(٦) إذا كان $\int_1^l (1 - 2s) ds = 6$ ، فجد قيمة الثابت ل.

جد قيمة التكامل الآتي:

$$\int \sqrt{2s^2 + 9} \, ds$$

لا يمكن حساب هذا التكامل بالطرائق التي تعلمتها سابقًا؛ لوجود عملية ضرب اقترانات داخل التكامل يصعب تبسيطها، لذلك نستخدم طريقة **التكامل بالتعويض** في حساب هذا التكامل، وهي طريقة تقوم على استعمال تعويض مناسب لكتابة التكامل بدلالة متغير جديد، وبصورة يسهل إجراء عملية التكامل لها.

مثال (١)

جد قيمة التكامل الآتي: $\int s^3 (s^2 + 5) \, ds$

الحل

يمكن إيجاد قيمة هذا التكامل باستخدام طريقة التكامل بالتعويض، وذلك حسب الخطوات الآتية:

$$(١) \text{ افرض أن ما في داخل القوس } = v$$

$$\text{افرض أن } v = s^2 + 5$$

(٢) حوّل التكامل المطلوب بدلالة المتغير الجديد (v)، كما يأتي:

$$v = s^2 + 5$$

$$\text{بالاشتقاق: } \frac{dv}{ds} = 2s, \text{ ومنه: } ds = \frac{dv}{2s}$$

(٣) بالعودة إلى التكامل وإجراء التعويضات والاختصارات والتكامل، ينتج:

$$\int s^3 (s^2 + 5) \, ds = \int (v) \left(\frac{dv}{2s} \right)$$

$$= \int v^2 \, dv = \frac{v^3}{3} + C$$

٤) أعد التعويض بدلالة المتغير (س)، فيكون ناتج التكامل:

$$\int 3s^2(5 + 3s) ds = \frac{3s^3(5 + 3s)}{3} + ج$$

فكر وناقش

جد قيمة التكامل في المثال (١) بطريقة أخرى، وتحقق من أن إجابتك صحيحة.

تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي: $\int 21(3s^2 + 4s)(s^2 + 2s) ds$

مثال (٢)

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(١) \int (1 + 2s) \sqrt{s^2 + s + 5} ds \quad (٢) \int 6 \cos(2s - 1) ds$$

$$(٣) \int \frac{s^6}{\sqrt[3]{1 + 2s}} ds \quad (٤) \int \frac{1}{\sqrt[3]{1 + 5s}} ds$$

الحل

$$(١) \int (1 + 2s) \sqrt{s^2 + s + 5} ds$$

افرض أن $v = s^2 + s + 5$

$$2s + 1 = \frac{dv}{ds}, \text{ ومنه: } ds = \frac{dv}{2s + 1}$$

$$\int (1 + 2s) \sqrt{s^2 + s + 5} ds = \int \sqrt{v} \frac{dv}{2s + 1}$$

$$= \int \sqrt{v} \frac{dv}{2s + 1}$$

$$= \left[(ص)^{\frac{1}{2}} دص = \frac{2}{3} (ص)^{\frac{2}{3}} + ج \right]$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt[3]{ص} + ج$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt[3]{(س+س+س)} + ج$$

$$(2) \left[6 \text{ جتا } (1 - س2) دس \right]$$

افرض أن $ص = 1 - س2$

$$\frac{دص}{دس} = 2، \text{ ومنه: } دص = 2 دس$$

$$\left[6 \text{ جتا } (1 - س2) دس = 3 \text{ جتا } دص \text{ (لماذا؟)} \right]$$

$$= 3 \text{ جاص} + ج$$

$$= 3 \text{ جا } (1 - س2) + ج$$

$$(3) \left[\text{جد أولاً التكامل غير المحدود: } \frac{س6}{1 + \sqrt[3]{س2}} دس \right]$$

افرض أن $ص = 1 + س2$

$$\frac{دص}{دس} = س2، \text{ ومنه: } دص = 2 س دس$$

$$\left[\frac{س6}{1 + \sqrt[3]{س2}} دس = 3 \frac{1}{\sqrt[3]{ص}} دص \text{ (لماذا؟)} \right]$$

$$= 3 \left[(ص)^{\frac{1}{3}} دص \right]$$

$$= 3 \left(\frac{3}{2} \right) (ص)^{\frac{2}{3}} + ج$$

$$= \frac{9}{2} \sqrt[3]{(1 + س2)} + ج$$

$$\frac{9}{2} - \sqrt[3]{25} \frac{9}{2} = \left[\left(\sqrt[3]{(1 + س2)} \frac{9}{2} \right) دس = \frac{س6}{1 + \sqrt[3]{س2}} \right] \text{ فيكون}$$

يمكن التعويض في قيم ص بدلاً من قيم س كما يأتي:

$$\text{عندما } s = 2, \quad v = 1 + (2)^2 = 5$$

$$\text{عندما } s = 0, \quad v = 1 + (0)^2 = 1$$

$$\therefore \text{قيمة التكامل المحدود} = \int_1^5 \frac{9}{\sqrt{v}} dv$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{9}{2} \sqrt{25} =$$

$$(4) \left. \frac{1}{1+s\sqrt{v}} \right|_{s=0}^{s=2}$$

$$\text{افرض أن } v = 1 + s^2$$

$$s = \frac{dv}{2s}, \quad \text{ومنه: } ds = \frac{dv}{2s}$$

$$\left. \frac{1}{1+s\sqrt{v}} \right|_{s=0}^{s=2} = \left. \frac{1}{\frac{1}{2} + \sqrt{v}} \right|_{v=1}^{v=5} \text{ (لماذا؟)}$$

$$= \left. \frac{1}{\frac{1}{2} + \sqrt{v}} \right|_{v=1}^{v=5}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} + \sqrt{5}} - \frac{1}{\frac{1}{2} + 1}$$

$$= \frac{2}{1 + \sqrt{5}} - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{1 + \sqrt{5}} - \frac{2}{3}$$

$$\int_1^5 \frac{9}{\sqrt{v}} dv = \left. \frac{1}{1+s\sqrt{v}} \right|_{s=0}^{s=2} \text{ قيمة التكامل}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{2}{3} - \frac{2}{1 + \sqrt{5}}$$

تدريب ٢

حلّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.

تدريب ٣

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$\begin{aligned} (١) \quad & \int ٣س(س٢ + ١)٥٠ دس \\ (٢) \quad & \int ٢س قأ (١ - س٢) دس \\ (٣) \quad & \int (٤س - ١) \sqrt[٣]{١ - س٢} دس \\ (٤) \quad & \int \frac{١}{\sqrt[٥]{١ + س}} دس \end{aligned}$$

تدريب ٤

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$\begin{aligned} (١) \quad & \int (أس + ب)٠ دس، حيث أ، ب ثابتان، أ ≠ ٠، ن ≠ ١ - \\ (٢) \quad & \int جتا(أس + ب) دس، حيث أ، ب ثابتان، أ ≠ ٠ \end{aligned}$$

بناءً على حل التدريب (٤)، يمكن استنتاج القواعد الآتية:

إذا كان أ، ب ثابتين، أ ≠ ٠، ن ≠ ١ -، فإن:

$$\begin{aligned} (١) \quad & \int (أس + ب)٠ دس = \frac{(أس + ب)١+٠}{(١ + ن)أ} ج + \\ (٢) \quad & \int جتا(أس + ب) دس = \frac{جتا(أس + ب)}{أ} ج + \\ (٣) \quad & \int جتا(أس + ب) دس = \frac{جتا(أس + ب)}{أ} ج + \\ (٤) \quad & \int قأ(أس + ب) دس = \frac{ظا(أس + ب)}{أ} ج + \end{aligned}$$

جد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-1}^{-1/2} \frac{1}{1-2\sqrt[3]{x}} dx$

الحل

$$\int_{-1}^{-1/2} \frac{1}{1-2\sqrt[3]{x}} dx = \int_{-1}^{-1/2} \frac{1}{1-2x^{1/3}} dx$$

$$= \int_{-1}^{-1/2} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right) (1-2x)^{-1/2} dx =$$

$$= \frac{3}{4} \left[\sqrt{1-2x} \right]_{-1}^{-1/2} = \frac{3}{4} \left[\sqrt{1-2(-1/2)} - \sqrt{1-2(-1)} \right] =$$

$$= \frac{3}{4} \left[\sqrt{2} - \sqrt{3} \right] = \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

تدريب ٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int_{-1}^2 (x^2 - 1)^6 dx$$

$$(2) \int_{1/2}^1 (4x - 1) dx$$

الأسئلة

(١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

أ) $\int (1 - s^2)(s^2 - s)^4 ds$ ب) $\int s^6 \sqrt[5]{(2 - s^3)^2} ds$

ج) $\int (s^2 - s^3)^2 \sqrt[4]{(s^2 - s^3)^2} ds$ د) $\int \frac{s^3 - 9}{(s^2 - s^6)^2} ds$

(٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int \sqrt[3]{(2 - s^3)^2} ds$ ب) $\int (s - 1)(1 - s^2 - 2s^4 + s^8) ds$

ج) $\int 2 \sqrt[4]{(s - 2)} ds$ د) $\int s^2 \sqrt[3]{(s + 1)} ds$

(٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int \sqrt[2]{4s + 1} ds$ ب) $\int s^3 (s^3 - 1)^2 ds$

ج) $\int s^2 \sqrt[3]{s^2 - 1} ds$ د) $\int \frac{s^2 - 3}{(s^3 - s^2)^2} ds$

(٤) إذا علمت أن $q = (s - 8)$ ، $5 = q$ ، $q = (27) = -6$ ، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int s^3 \sqrt[3]{(s^3 - 3)} ds$

(٥) إذا علمت أن $\int q(s) ds = 3$ ، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int s^8 \sqrt[2]{(s^2 + 1)} ds$

(٦) حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

النتائج

- ◀ تحل مسائل هندسية باستخدام التكامل.
- ◀ تحل مسائل فيزيائية باستخدام التكامل.
- ◀ تجد مساحة المنطقة المغلقة بين منحنى اقتران معين ومحور السينات باستخدام التكامل المحدود.

Geometric Applications

تطبيقات هندسية

أولاً

جد قاعدة الاقتران ق، علمًا بأن منحناه يمر بالنقطة $(-1, 2)$ ، وأن ميل المماس لمنحنى الاقتران $ص = ق(س)$ عند النقطة $(س, ص)$ يعطى بالقاعدة:

$$ق(س) = 2س - 1$$

تعلمت سابقًا أن ميل المماس لمنحنى الاقتران $ص = ق(س)$ عند أي نقطة على منحناه $(أ, ق(أ))$ يساوي $ق'(أ)$ ، حيث ق اقتران قابل للاشتقاق عندما $س = أ$. ولأن التكامل عملية عكسية للتفاضل؛ فإنه يمكننا إيجاد قاعدة الاقتران ق بمعرفة ميله $ق'(س)$ عند أي نقطة على منحناه $(س, ص)$ ، وإحداثيي إحدى النقط على منحناه.

مثال (١)

جد قاعدة الاقتران ق، علمًا بأن ميل المماس لمنحناه عند النقطة $(س, ص)$ يعطى بالقاعدة:

$$ق(س) = 3س^2 - 8س، \text{ وأن منحناه يمر بالنقطة } (-1, 3).$$

الحل

$$ق(س) = 3س^2 - 8س$$

بإجراء التكامل بالنسبة إلى المتغير س لكل من الطرفين، ينتج:

$$\int ق(س) دس = \int (3س^2 - 8س) دس$$

$$ق(س) = 3س^2 - 8س + ج$$

لكن منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة $(-1, 3)$ ؛ أي إن $ق(-1) = 3$

$$ق(-1) = 3 \Rightarrow (-1)^2 - 8(-1) + ج = 3$$

$$3 = 1 + 8 + ج \Rightarrow ج = -6$$

∴ قاعدة الاقتران ق(س) = $3س^2 - 8س - 6$

تدريب ١

حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

مثال (٢)

جد قاعدة الاقتران ص = ق(س)، علمًا بأن ميل المماس لمنحناه عند النقطة (س، ص) يعطى

بالقاعدة: $\frac{دص}{دس} = 3س + 9$ ، وأن النقطة $(-4, 1)$ تقع على منحنى الاقتران ص.

الحل

ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س، ص) = $\frac{دص}{دس}$

$$\frac{دص}{دس} = 3س + 9$$

$$ص = \sqrt[3]{س + ٩}$$

$$\left[ص = \sqrt[3]{س + ٩} \right]$$

$$ص = \frac{١}{٣} \sqrt[3]{(س + ٩)} + ج \quad (\text{وضّح خطوات إيجاد التكامل}).$$

لكن $ص = ١$ عندما $س = -٤$

$$١ = \frac{١}{٣} \sqrt[3]{(٩ + (-٤))} + ج$$

$$ج = \frac{-١٢٢}{٣}$$

$$\therefore \text{قاعدة الاقتران } ص = \frac{١}{٣} \sqrt[3]{(س + ٩)} - \frac{١٢٢}{٣}$$

تدريب ٢

جد قيمة $ق(٤)$ ، علمًا بأن ميل المماس لمنحنى الاقتران $ص = ق(س)$ عند النقطة $(س، ص)$ يعطى بالقاعدة: $ق(س) = \sqrt[3]{٦ - ٢س} - ١$ ، وأن منحناه يمر بالنقطة $(٥، ٠)$.

الأسئلة

- (١) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $v = c(s)$ عند النقطة (s, v) يساوي $(6 - 2s + 9s^2)$ ، فجد قاعدة الاقتران c ، علمًا بأن $c(0) = 5$.
- (٢) جد قاعدة الاقتران c ، إذا كان ميل المماس للمنحنى $v = c(s)$ عند النقطة (s, v) يعطى بالقاعدة: $c'(s) = \frac{s^2}{\sqrt[3]{8 + 2s}}$ ، وكان منحنى الاقتران c يمر بالنقطة $(0, 4)$.
- (٣) جد قيمة $c(1)$ ، علمًا بأن ميل المماس للمنحنى $v = c(s)$ عند النقطة (s, v) يساوي $25(5s + 4)^4$ ، وأن منحنى الاقتران c يمر بالنقطة $(-1, 7)$.
- (٤) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران l عند النقطة (s, v) يعطى بالقاعدة: $l'(s) = (4 - 3s)s^2$ ، فجد قاعدة الاقتران l ، علمًا بأن منحناه يمر بالنقطة $(0, 3)$.
- (٥) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران h يعطى بالقاعدة $h'(s) = \frac{2s^2 - 5s}{s}$ ، $s \neq 0$ ، فجد $h(2)$ ، علمًا بأن منحنى الاقتران h يمر بالنقطة $(-1, 5)$.

يتحرك جسيم على خط مستقيم، وتعطى سرعته بالعلاقة: $v = (2n + 5) \text{ م/ث}$ ، حيث n : الزمن بالثواني. جد موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة، علمًا بأن موقعه الابتدائي $f = 3 \text{ م}$.

تعرفت أن سرعة الجسيم الذي يتحرك على خط مستقيم، والذي يكون موقعه $f(n)$ يعطى بعلاقة مع الزمن، هي: $v = f'(n) = \frac{df}{dn}$ ، وأن تسارعه بعد مرور زمن مقداره (n) هو: $a = f''(n) = \frac{dv}{dn}$ ، ولهذا يمكن معرفة المسافة بمعرفة مقدار السرعة، أو السرعة والتسارع، ويمكن أيضًا معرفة السرعة بمعرفة مقدار التسارع.

مثال (١)

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث انطلق من الموقع الابتدائي $f = 4 \text{ م}$. إذا كانت سرعته بعد مرور n ثانية تعطى بالعلاقة: $v = (2n^2 + 6n - 6) \text{ م/ث}$ ، فجد موقعه بعد مرور ثلاث ثوانٍ من بدء الحركة.

الحل

$$v = (2n^2 + 6n - 6) \text{ م/ث} = \frac{df}{dn} \text{ لكن } v = \frac{df}{dn}$$

$$2n^2 + 6n - 6 = \frac{df}{dn}$$

$$\int (2n^2 + 6n - 6) dn = \int df$$

$$f = \frac{2}{3}n^3 + 3n^2 - 6n + C$$

لكن $f = 4$ ، ومنه: $C = 4$ (لماذا؟).

$$\text{ومنه: } f(n) = \frac{2}{3}n^3 + 3n^2 - 6n + 4$$

$$\therefore f(3) = \frac{2}{3}(3)^3 + 3(3)^2 - 6(3) + 4 = 67$$

\therefore موقع الجسيم بعد مرور ثلاث ثوانٍ من بدء الحركة $= 67 \text{ م}$.

- (١) حُلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.
- (٢) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة تعطى بالعلاقة: ع(ن) = (٦ + ١) ن^٢ م/ث. جد موقعه بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة، علمًا بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٥ م.

مثال (٢)

تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث إن تسارعها بعد مرور ن ثانية من انطلاقها يعطى بالعلاقة: ت(ن) = (١٢ ن - ٢٠) م/ث^٢. إذا علمت أن موقعها الابتدائي ف(٠) = ٢ م، وأن سرعتها الابتدائية ع(٠) = ٣ م/ث، فجد:

- (١) سرعة النقطة المادية بعد مرور ثانيتين من انطلاقها.
- (٢) موقع النقطة المادية بعد مرور ثلاث ثوانٍ من انطلاقها.

الحل

$$(١) \text{ ت(ن) } = ١٢ ن - ٢٠$$

$$٢٠ - ١٢ ن = \frac{ع}{ن}$$

$$ع = ن(٢٠ - ١٢ ن)$$

$$\left[ع = ن(٢٠ - ١٢ ن) \right]$$

$$ع = ٢٠ ن - ١٢ ن^٢$$

$$\text{لكن: ع(٠) = ٣، ومنه: ج} = ٣$$

$$\therefore \text{ع(ن) = } ٢٠ ن - ١٢ ن^٢ + ٣$$

$$\text{ومنه: ع(٢) = } ٢٤ - ٤٠ + ٣ = -١٣ \text{ م/ث.}$$

أي إن سرعة النقطة المادية بعد مرور ثانيتين من انطلاقها هي -١٣ م/ث.

$$(2) \text{ ع (ن) } = 3 + 20 - 6^2$$

$$3 + 20 - 6^2 = \frac{f}{n}$$

$$f = n(3 + 20 - 6^2)$$

$$\left[f = n(3 + 20 - 6^2) \right]$$

$$f = 2 = 10 + 3 + 3 - 2^2$$

$$\text{لكن } f(0) = 2, \text{ ومنه: } 2 = 3 - 2^2$$

$$\therefore f(n) = 2 = 3 + 9 - 2^2$$

ومنه: $f(3) = 2 = 9 + 9 - 5^2 = 25 - 2$ م موقع النقطة المادية بعد مرور ثلاث ثوانٍ من انطلاقها.

فكر وناقش

ما دلالة الإشارة السالبة في السرعة في الفرع (1) من مثال 2، والموقع في الفرع (2)؟

تدريب 2

- يتحرك جسيم على خط مستقيم، وبتسارع ثابت مقداره $t(n) = 12$ م/ث². إذا كانت سرعته الابتدائية $ع(0) = 5$ م/ث، وموقعه الابتدائي $ف(0) = 3$ م، فجد:
- (1) سرعة الجسيم بعد مرور أربع ثوانٍ من بدء الحركة.
 - (2) موقع الجسيم بعد مرور ثلاث ثوانٍ من بدء الحركة.

الأسئلة

(١) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور n ثانية من بدء حركته تعطى بالعلاقة: $v(n) = (12 - 2n)$ م/ث. جد القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور n ثانية من بدء الحركة.

(٢) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث إن سرعتها بعد مرور n ثانية من بدء حركتها تعطى بالعلاقة: $v(n) = (4n + 8)$ م/ث. جد موقع النقطة المادية بعد مرور أربع ثوانٍ من بدء حركتها، علمًا بأن موقعها الابتدائي $f(0) = 2$ م.

(٣) إذا كان تسارع جسيم يسير على خط مستقيم بعد مرور n ثانية من بدء الحركة يعطى بالعلاقة: $a(n) = 48(1 - 2n)^3$ م/ث^٢، وكان موقعه الابتدائي $f(0) = 3$ م، وسرعته الابتدائية $v(0) = 2$ م/ث، فجد:

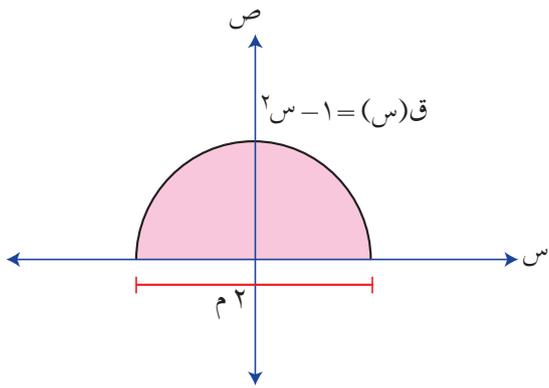
أ) سرعة الجسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة.

ب) موقع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

(٤) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور n ثانية من بدء الحركة تعطى بالقاعدة: $v(n) = (1 - 3n)(1 + 4n)$ م/ث. جد:

أ) القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور n ثانية من بدء الحركة.

ب) موقع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة، علمًا بأن موقعه الابتدائي $f(0) = 7$ م.



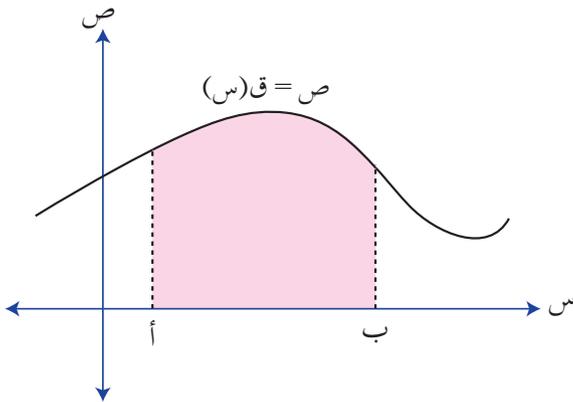
الشكل (١-٤).

يمثل الشكل (١-٤) نافذة طول قاعدتها ٢ م، محصورة بمنحنى الاقتران $ص = ق(س) = 1 - س^2$ إذا أردنا وضع زجاج على النافذة، وكانت تكلفة المتر المربع الواحد منه خمسة دنانير، فما التكلفة الكلية لزجاج النافذة؟

إن من أهم تطبيقات التكامل المحدود حساب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات والمستقيمات. وستقتصر دراستنا على حساب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى اقتران معين ومحور السينات.

مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ص = ق(س)$ ومحور السينات على الفترة [أ، ب] تعطى بالقاعدة:

$$\text{المساحة} = \int_a^b |ق(س)| دس.$$



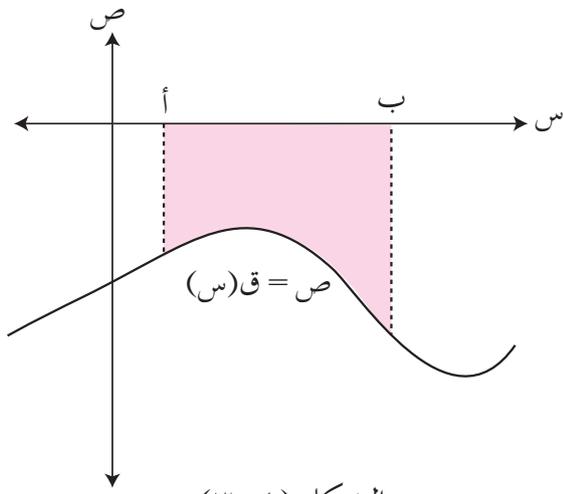
الشكل (٢-٤).

عند تطبيق هذه القاعدة، تظهر الحالات الآتية:
١) إذا كان $ق(س) \geq 0$ لكل $س$ في الفترة [أ، ب]،

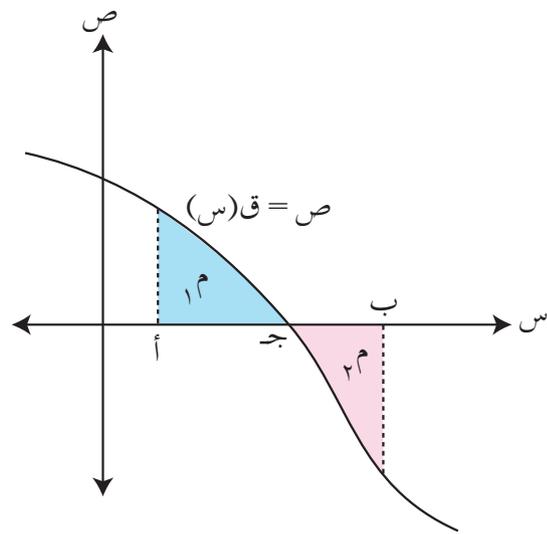
فإن $|ق(س)| = ق(س)$ على الفترة [أ، ب]،

والمساحة المطلوبة $= \int_a^b ق(س) دس$ ،

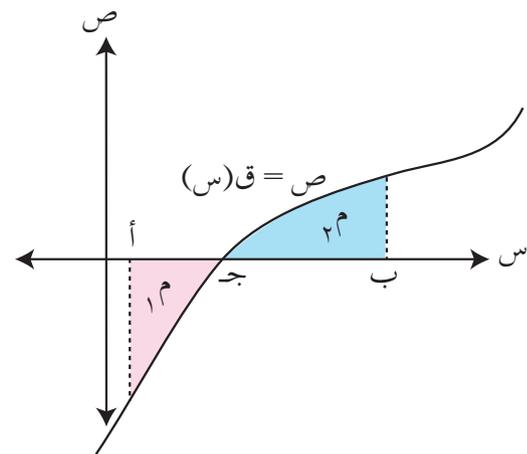
انظر الشكل (٢-٤).



الشكل (٣-٤).



الشكل (٤-٤).



الشكل (٥-٤).

(٢) إذا كان $q(s) \geq 0$ لكل s في الفترة $[a, b]$ ،

فإن $|q(s)| = q(s) = -q(s)$ على الفترة $[a, b]$ ،

$$\text{والمساحة المطلوبة} = \int_a^b q(s) ds,$$

انظر الشكل (٣-٤).

(٣) إذا كان $q(s) \leq 0$ لكل s في الفترة $[a, b]$ ،

$q(s) \geq 0$ لكل s في الفترة $[c, b]$ ، فإن

$$\text{المساحة المطلوبة} = \text{المساحة } 1 + \text{المساحة } 2,$$

$$\text{المساحة المطلوبة} = \int_a^c q(s) ds + \int_c^b q(s) ds$$

$$= \int_a^c q(s) ds - \int_c^b q(s) ds,$$

انظر الشكل (٤-٤).

(٤) إذا كان $q(s) \geq 0$ لكل s في الفترة $[a, c]$ ،

$q(s) \leq 0$ لكل s في الفترة $[c, b]$ ، فإن

$$\text{المساحة المطلوبة} = \text{المساحة } 1 + \text{المساحة } 2,$$

$$\text{المساحة المطلوبة} = \int_a^c q(s) ds + \int_c^b q(s) ds$$

$$= \int_a^c q(s) ds - \int_c^b q(s) ds,$$

انظر الشكل (٥-٤)

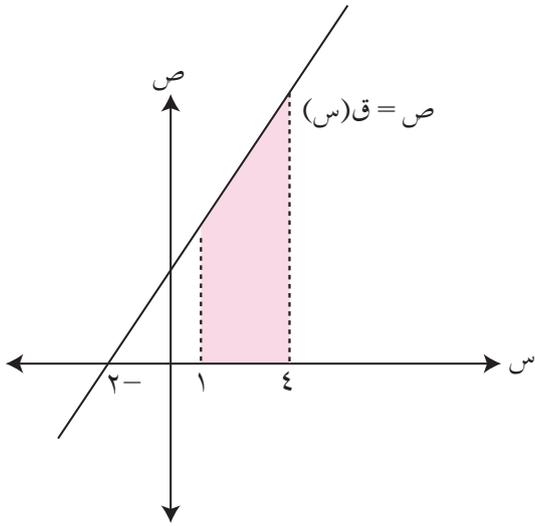
مثال (١)

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = ٢س + ٤$ ، ومحور السينات، والمستقيمين: $س = ١$ ، $س = ٤$

الحل

لايجاد المساحة المطلوبة، اتبع الخطوات الآتية:

(١) جد نقاط تقاطع منحنى الاقتران $ق$ مع محور السينات (إن وجدت). بمساواة الاقتران بالصفر (لماذا؟).



الشكل (٤-٦).

$٢س + ٤ = ٠$ ، ومنه: $س = -٢$ ، وهذه القيمة لا تقع ضمن الفترة المطلوبة، انظر الشكل (٤-٦).

(٢) جد التكامل المحدود للاقتران $ق$ على الفترة $[١، ٤]$.

$$\int_1^4 (٢س + ٤) دس = (س٢ + ٤س) \Big|_1^4$$

$$= (١٦ + ١٦) - (١ + ٤) = ٢٧$$

(٣) المساحة = $\int_1^4 ق(س) دس = ٢٧$ وحدة مربعة.

مثال (٢)

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ص = ق(س) = ٣س٢ - ١٢$ ، ومحور السينات، والمستقيمين: $س = ١$ ، $س = ٢$

الحل

$$ق(س) = ٠$$

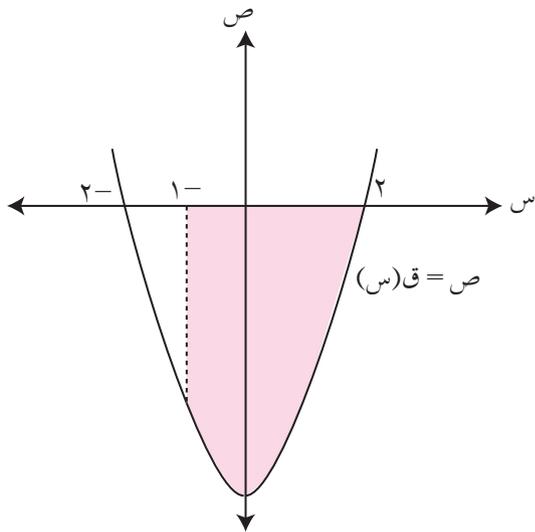
٣س^٢ - ١٢ = ٠، ومنه: س = ٢، -٢، وهي قيم س التي يتقاطع منحنى الاقتران ق عندها مع محور السينات، انظر الشكل (٤-٧).

لاحظ أن ق(س) ≥ ٠ على الفترة [-١، ٢]؛ لذا يتعين إيجاد التكامل المحدود للاقتران ق على الفترة [-١، ٢]:

$$\int_{-1}^2 (٣س^٢ - ١٢) دس = (٣س^٣ - ١٢س) \Big|_{-1}^2$$

$$= (٢٤ - ٨) - ((١٢ -) - ١) = ٢٧ -$$

∴ المساحة المطلوبة = $\int_{-1}^2 |ق(س)| دس = \int_{-1}^2 ق(س) دس = ٢٧$ وحدة مربعة.



الشكل (٤-٧).

مثال (٣)

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق = ق(س) = ٢س^٢ - ٢س، ومحور السينات على الفترة [١، ٤].

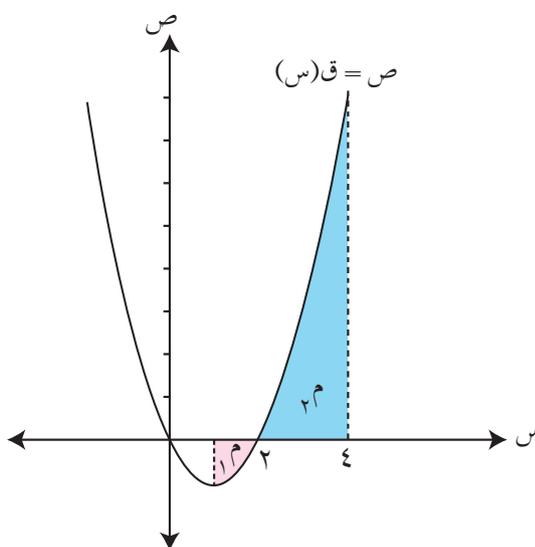
الحل

$$ق(س) = ٠$$

$$٢س^٢ - ٢س = ٠$$

س(س - ٢) = ٠، ومنه: س = ٠، س = ٢، عندها يتقاطع منحنى الاقتران ق مع محور السينات،

انظر الشكل (٤-٨).



الشكل (٤-٨).

لاحظ أن $s = 0$ لا تقع ضمن الفترة $[1, 4]$ ،
 في حين أن $s = 2$ تقع ضمن الفترة $[1, 4]$.
 ولهذا يتعين أولاً إيجاد التكامل المحدود للاقتران q على الفترة $[1, 2]$:

$$\int_1^2 \left(s^2 - \frac{s^3}{3} \right) ds = s^3 - \frac{s^4}{4} \Big|_1^2$$

$$= \left(8 - \frac{16}{4} \right) - \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{20}{3}$$

ثم إيجاد التكامل المحدود للاقتران q على الفترة $[2, 4]$:

$$\int_2^4 \left(s^2 - \frac{s^3}{3} \right) ds = s^3 - \frac{s^4}{4} \Big|_2^4$$

$$= \left(64 - \frac{256}{4} \right) - \left(8 - \frac{16}{4} \right) = \frac{20}{3}$$

∴ المساحة المطلوبة = $\int_1^2 \left(s^2 - \frac{s^3}{3} \right) ds + \int_2^4 \left(s^2 - \frac{s^3}{3} \right) ds = \frac{20}{3} + \frac{20}{3} = \frac{40}{3}$ وحدة مربعة.

$$= \frac{20}{3} + \frac{20}{3} = \frac{40}{3} \text{ وحدة مربعة.}$$

مثال (٤)

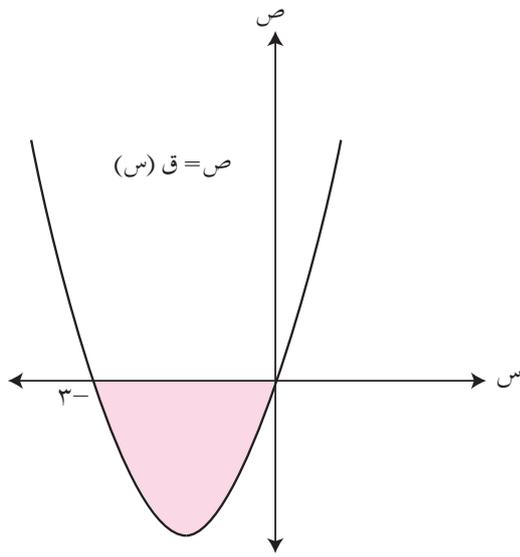
جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $v = q(s) = s^2 + s^3$ ، ومحور السينات.

الحل

$$q(s) = s^2 + s^3$$

$$s^2 + s^3 = 0$$

$$s(s^2 + s) = 0 \Rightarrow s = 0, s = -1, s = 0$$



الشكل (٩-٤).

عندئذ يتقاطع منحنى الاقتران ق مع محور السينات، انظر الشكل (٩-٤)، فتكون المساحة المطلوبة محصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات على الفترة $[-3, 0]$ ؛ إذ يتعين إيجاد التكامل المحدود للاقتران ق على الفترة $[-3, 0]$:

$$\int_{-3}^0 \left(\frac{2s^3}{3} + \frac{s^2}{2} \right) ds = \left[\frac{2s^4}{12} + \frac{s^3}{6} \right]_{-3}^0$$

$$\frac{9}{2} = \left(\frac{27}{2} + 9 \right) - (0) =$$

$$\therefore \text{المساحة المطلوبة} = \int_{-3}^0 |(ق(س))| ds = \frac{9}{2} \text{ وحدة مربعة.}$$

تدريب ١

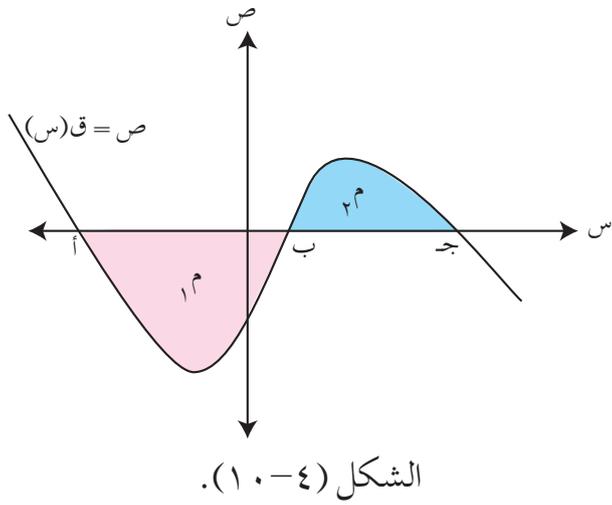
جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ص = ق(س)$ ، ومحور السينات على الفترة المحددة في كل مما يأتي:

- (١) $ق(س) = ١٢ - ٤س$ ، على الفترة $[١, ٢]$.
- (٢) $ق(س) = ٣س^٢ - ١٢س$ ، على الفترة $[٠, ٢]$.
- (٣) $ق(س) = ٦ - ٢س$ ، على الفترة $[١, ٤]$.

تدريب ٢

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ص = ق(س) = ٢س^٢ - ٣س$ ، ومحور السينات.

يمثل الشكل (٤ - ١٠) منحنى الاقتران $ص = ق(س)$. فإذا كانت المساحة $م = ٨$ وحدات مربعة، والمساحة $م = ٥$ وحدات مربعة، فجد قيمة كل مما يأتي، مبرراً إجابتك:



(١) $\int_a^b ق(س) دس$

(٢) $\int_b^ج ق(س) دس$

(٣) $\int_a^ج ق(س) دس$

(٤) مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق$ ومحور السينات على الفترة [أ، ج].

الأسئلة

(١) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $v = c(s)$ ، ومحور السينات والمستقيمين المحددين في كل مما يأتي:

أ) $c(s) = 12$ ، $v = -1$ ، $s = 2$

ب) $c(s) = 5 - 2s$ ، $v = -2$ ، $s = 2$

ج) $c(s) = 3s^2 - 3$ ، $v = -4$ ، $s = 2$

(٢) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $v = c(s)$ ، ومحور السينات على الفترة المحددة في كل مما يأتي:

أ) $c(s) = 6 - 6s^2$ ، على الفترة $[-2, 0]$.

ب) $c(s) = 4s^3$ ، على الفترة $[-1, 1]$.

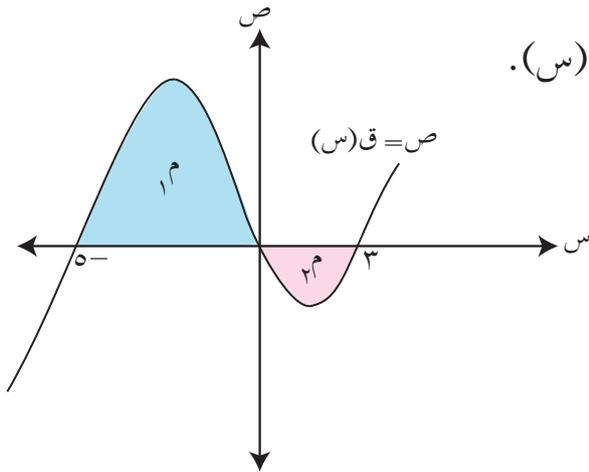
ج) $c(s) = 3s^2 - 48$ ، على الفترة $[3, 5]$.

د) $c(s) = -2s - 4$ ، على الفترة $[-1, 1]$.

(٣) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $v = c(s)$ ، ومحور السينات في كل مما يأتي:

ب) $c(s) = 4s^3 - 12s^2$

أ) $c(s) = 4s - s^2$



الشكل (٤-١١).

(٤) يمثل الشكل (٤-١١) منحنى الاقتران $v = c(s)$.

فإذا كانت المساحة $M = 13$ وحدة مربعة،

والمساحة $M = 3$ وحدات مربعة،

فجد قيمة $\int_{-5}^3 c(s) ds$ ، مبرراً إجابتك.

(٥) حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

النتائج

- تعرف الاقترانين: اللوغاريتمي الطبيعي، والأسّي الطبيعي.
- تجد مشتقة كل من الاقترانين: اللوغاريتمي الطبيعي، والأسّي الطبيعي.
- تجد تكامل الاقتران الأسّي الطبيعي.
- تستخدم الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي في التكامل.
- تحل مسائل عملية تتعلق بالنمو والاضمحلال.

Natural Logarithmic and Natural Exponential Functions

الاقترانان: اللوغاريتمي الطبيعي والأسّي الطبيعي

أولاً

هل يمكنك إيجاد $\int \frac{1}{s} ds$ باستخدام قواعد التكامل التي تعلمتها سابقاً؟ فسّر إجابتك.

الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

استُخدمت اللوغاريتمات منذ القرن السابع عشر الميلادي بوصفها طريقة لإجراء العمليات الحسابية التي يصعب تنفيذها بالطرائق التقليدية. وستدرس في هذا الفصل الاقترانين: اللوغاريتمي الطبيعي، والأسّي الطبيعي، وبعض تطبيقاتهما.

يمثل الشكل (٤-١٢) منحنى الاقتران $v = \frac{1}{e}$ حيث $(e > 0)$ ،

والمستقيمين: $e = 1$ ، $e = s$ (حيث $s < 1$).

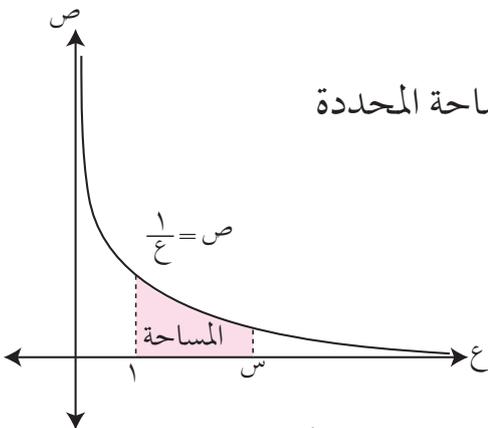
بتطبيق قواعد حساب المساحات بالتكامل المحدود على المساحة المحددة

في الشكل (٤-١٢)، فإن:

$$\int_1^s \frac{1}{e} ds = \text{المساحة}$$

وهذا التكامل يُسمّى

الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، ويُرمز إليه بالرمز: (لوس).



الشكل (٤-١٢).

أي إن: لو $s = \int_1^s \frac{1}{x} dx$ ، حيث $0 < s$ ، ويمكن استخدام هذا التعريف إذا كانت قيمة s بين 0 ، 1 ، وينطبق على الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي قوانين اللوغاريتمات التي درستها سابقاً.

تعريف

$$\text{إذا كان } s < 0, \text{ فإن } \text{لو } s = \int_1^s \frac{1}{x} dx$$

ويُقرأ: اللوغاريتم الطبيعي لـ (s) .
والعدد e هو العدد النيبيري (نسبة إلى عالم الرياضيات الأسكتلندي جون نيبير) الذي يجعل المساحة المحددة في الشكل (٤-١٢) تساوي وحدة مربعة واحدة، وهو عدد غير نسبي، وسنعمد قيمته التقريبية $2,7$

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

$$\text{تعلمت سابقاً أن } \int_1^s x^n dx = \frac{s^{n+1}}{n+1}, \text{ حيث } n \neq -1$$

ولكن، ما قيمة التكامل الآتي: $\int_1^s x^{-1} dx$ ، حيث $s < 0$ ؟

$$\text{ليكن } l(s) = \int_1^s x^{-1} dx = \int_1^s \frac{1}{x} dx, \text{ حيث } s < 0$$

باشتقاق كل من الطرفين، ينتج:

$$l'(s) = \frac{1}{s} \text{ (لماذا؟)}$$

وبما أن $l(s)$ هو التكامل غير المحدود للاقتران $\frac{1}{x}$ ، فإن:

$$\text{لو } s = \int_1^s \frac{1}{x} dx = l(s) - l(1)$$

$$\text{لو } s = l(s) - l(1)$$

وباشتقاق كل من الطرفين، ينتج:
 (لوس) = ل(س) - صفر (لماذا؟).
 وبذلك يكون (لوس) = $\frac{1}{س}$ ، حيث $س > ٠$.

نظرية

- (١) إذا كان ق(س) = لوس حيث $س > ٠$ ، فإن ق(س) = $\frac{1}{س}$.
 (٢) إذا كان ق(س) = لوم(س)، م(س) > ٠ ، وكان م اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن

$$ق(س) = \frac{م(س)}{م(س)}$$

تدريب ١

وضّح الفرع (٢) من النظرية السابقة بتطبيق الفرع (١)، مستخدماً قاعدة السلسلة.

مثال (١)

جد $\frac{ص}{س}$ عند النقطة المحددة في كل مما يأتي:

(١) $ص = لو٦س$ ، $س > ٠$ عندما $س = ١$

(٢) $ص = لو(س٢ + ١٠)$ عندما $س = ٢$

الحل

(١) $ص = لو٦س$

$$\frac{ص}{س} = \frac{٦}{س٦} = \frac{١}{س}$$

$$١ = \left| \frac{ص}{س} \right|_{س=١}$$

$$(2) \text{ ص} = \text{لـو} (س + 10)$$

$$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{س + 10}$$

$$\frac{2-}{7} = \frac{4-}{14} = \left| \frac{ص}{س} \right|_{س=2-}$$

تدريب ٢

جد ق (س) في كل مما يأتي:

(١) ق (س) = لـو جتاس

(٢) ق (س) = لـو $\frac{2}{س}$ ، $س < ٠$

(٣) ق (س) = لـو $(س + ٨)$ ، $س < 2-$

تدريب ٣

إذا كان ق (س) = لـو (أس + ٣) ، حيث أ ثابت، وكان ق (٢-) = ١ ، فجد قيمة الثابت أ.

تدريب ٤

إذا كان ق (س) = لـو |س| (حيث $س \neq ٠$) ، فجد ق (س).

(إرشاد: ادرس الحالتين: الأولى عندما $س < ٠$ حيث $|س| = س$ ،

والثانية عندما $س > ٠$ حيث $|س| = س$).

بناءً على حل التدريب (٤) ، يمكن استنتاج النظرية الآتية:

نظرية

$$\left[س^{-١} س = \frac{١}{س} \right] \text{ ص} = \text{لـو} |س| + ج ، \text{ حيث } س \neq ٠$$

مثال (٢)

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(١) \int \frac{٢}{س} دس، س \neq ٠$$
$$(٢) \int \frac{٥ - ١٠س}{س٢ - س + ٧} دس$$

الحل

$$(١) \int \frac{٢}{س} دس = ٢ \ln |س| + ج$$

$$(٢) \int \frac{٥ - ١٠س}{س٢ - س + ٧} دس = ٥ \ln |س٢ - س + ٧| + ج$$

وضّح خطوات الحل في الفرع (٢) باستخدام التكامل بالتعويض.

تدريب ٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(١) \int \frac{٣-}{س} دس، س \neq ٠$$

$$(٢) \int (٦س٢ - ٤) (س٣ - ٢س + ١) دس$$

الاقتران الأسّي الطبيعي

تعرفت سابقاً أن الاقتران الأسّي الطبيعي (ص = هـ^ص، حيث هـ العدد النيبيري) هو الاقتران

العكسي للاقتران اللوغاريتمي الطبيعي.

فالصورة الأسية (ص = هـ^ص) تكافئ الصورة اللوغاريتمية (لـ^ص = س).

ويمكن إيجاد المشتقة الأولى للاقتران الأسّي الطبيعي باستخدام النظرية الآتية:

- (١) إذا كان ق(س) = ه^س (حيث ه العدد النيبيري)، فإن ق(س) = ه^س.
- (٢) إذا كان ق(س) = ه^{ل(س)}، وكان ل(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن:
ق(س) = ل(س) ه^{ل(س)}}.

٦ تدريب

وضّح الفرع (٢) من النظرية السابقة بتطبيق الفرع (١)، مستخدمًا قاعدة السلسلة.

مثال (٣)

جد ق(س) في كل مما يأتي:

- (١) ق(س) = ه^س
- (٢) ق(س) = ه^{٢س+١}
- (٣) ق(س) = ه^{جا^٣س}
- (٤) ق(س) = ٢س ه^س - ل(س) (١+٣)

الحل

- (١) ق(س) = ٣ ه^س
- (٢) ق(س) = ٤س ه^{٢س+١}
- (٣) ق(س) = ٦س جتا^٣س ه^{جا^٣س} (برر خطوات الحل).
- (٤) ق(س) = ٢س (٥) ه^س + ه^س × ٤س - $\frac{٣س^٣}{١+٣س}$ (برر خطوات الحل).

تدريب ٧

جد ص في كل مما يأتي:

$$(١) \text{ ص } = \text{هـ}^{-٣} \text{س}^٢$$

$$(٢) \text{ ص } = \text{هـ}^{\text{جتا}٢} \text{س}$$

$$(٣) \text{ ص } = (\text{هـ}^{\text{س}})(\text{لوس}^{\text{هـ}})$$

$$(٤) \text{ ص } = \frac{\text{هـ}^{\text{س}^٣}}{\text{س}^٢ + ١}$$

لاحظ أن مشتقة $(\text{هـ}^{\text{س}})$ تساوي $(\text{هـ}^{\text{س}})$ ؛ لذا يمكن استنتاج النظرية الآتية:

نظرية

$$(١) \left[\text{هـ}^{\text{س}} \text{س} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ج} \right] \text{ حيث هـ العدد النيبيري.}$$

$$(٢) \left[\text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}} \text{س} = \frac{\text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}}}{\text{أ}} + \text{ج} \right] \text{ ، أ ، ب عددان حقيقيان، أ } \neq ٠$$

تدريب ٨

وضّح الفرع (٢) من النظرية السابقة بتطبيق الفرع (١)، مستخدمًا التكامل بالتعويض.

مثال (٤)

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(١) \left[\int (\text{هـ}^{\text{س}} - \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}} + ٥) \text{س} \right]$$

$$(٢) \left[\int ٨ \text{هـ}^{\text{س}^٢-٤} \text{س} \right]$$

$$(٣) \left[\int (\text{س} - ٢) \text{هـ}^{\text{س}^٢-٤} \text{س}^٧ \right]$$

$$(1) \left[3\text{هـ} - \frac{6}{\text{س}} + 5 = 3\text{هـ} - 6\text{و} + 5\text{س} + \text{ج} \right]$$

$$(2) \left[8\text{هـ} - 4\text{س} = 4\text{هـ} - 4\text{س} + \text{ج} \right] \text{ (برر الإجابة).}$$

$$(3) \left[(2 - \text{س})\text{هـ} - 2\text{س} + 7 = \frac{1}{2}\text{هـ} - 2\text{س} + 7 + \text{ج} \right]$$

(وضّح خطوات الحل في الفرع (3) باستخدام التكامل بالتعويض).

تدريب ٩

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(1) \int \frac{1}{\text{س}} \text{هـ}$$

$$(2) \int \frac{1}{\text{س}^6} \text{هـ}$$

$$(3) \int (2\text{س}^3 + 2)\text{هـ} - \text{س}^2 + 1 = \text{س}$$

$$(4) \int \frac{6\text{س}}{\text{س}^2 - 1} \text{هـ}$$

الأسئلة

(١) جد ق(س) في كل مما يأتي:

أ) $ق(س) = \frac{1}{س} + لوس + ٧هـ^٢ + ٦، س < ٠$

ب) $ق(س) = ٣لوس - ٢هـ^{٢-٣} - س^٢، س < ٠$

ج) $ق(س) = هـ^{جاس} - ٢لوس(جتاس)$

(٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int (٢هـ^س - \frac{1}{س} + ٣س^٢) دس$

ب) $\int ٤هـ^{٢+١} دس$

ج) $\int ٢س هـ^{-١} دس$

د) $\int (\frac{٥}{س} - ٣هـ^٣ - ٤) دس$

هـ) $\int \frac{٨س}{٤ + س^٢} دس$

(٣) إذا كان ميل المماس للاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س، ص) يعطى بالقاعدة:

$ق(س) = ٢هـ^س + ٢س،$ فجد قاعدة الاقتران ق، علمًا بأن منحناه يمر بالنقطة (٠، ٤).

(٤) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث إن سرعتها بعد مرور ن ثانية من بدء حركتها

تعطى بالعلاقة:

ع(ن) = $٨ + هـ^{١+ن}،$ وإن $٠ < ن$ ، جد الاقتران الذي يمثل موقع النقطة المادية بعد مرور

ن ثانية من بدء حركتها.

يتزايد عدد سكان مدينة ما بصورة مستمرة منتظمة وفق قانون النمو، بنسبة مقدارها ٨,٠٪ سنويًا. فإذا بلغ عدد سكانها ٦٠٠٠٠٠٠ نسمة عام ٢٠١٠م، فكم سيبلغ عدد سكانها عام ٢٠٣٥م؟

النمو والاضمحلال هما من التطبيقات العملية المهمة للاقترايين: اللوغاريتمي الطبيعي، والأسّي الطبيعي؛ فالكثير من الظواهر العلمية والاجتماعية والاقتصادية والإنسانية والبيولوجية وغيرها يمكن التعامل معها باقتران ع(ن) الذي يرتبط بالزمن (ن)؛ أي إن ص = ع(ن)، حيث ن الزمن. أما إذا كان معدل تغير الاقتران ص (أي ع(ن)) يتناسب بانتظام واستمرار مع الاقتران نفسه ع(ن)، فإن:

ع(ن) = أ × ع(ن)، حيث: أ: ثابت التناسب، ن: الزمن.

$$\text{ومنّه: } \frac{ع(ن)}{ع(ن)} = أ، \text{ حيث } ع(ن) \neq ٠$$

$$\therefore \left[\frac{ع(ن)}{ع(ن)} = أ \right] \text{ و } \left[\frac{ع(ن)}{ع(ن)} = أ \right]$$

وبفرض أن ل = ع(ن)، واستخدام التكامل بالتعويض، ينتج:

$$ل = |ع(ن)| = أ + ج$$

وإذا كان ع(ن) < ٠، فإن العلاقة تصبح: ل = أ + ج

وهذه الصورة اللوغاريتمية تكافئ الصورة الأسية: ع(ن) = ه^{أ+ج}

وعندما ن = ٠، فإن ع(٠) = ه^ج

إذن: ع(ن) = ه^{أ+ج}

ع(ن) = ه^أ × ه^ج (استخدام قوانين الأسس).

$$ع(ن) = ه^أ × ع(٠)$$

قيمة الظاهرة المدروسة ص = ع(ن) هي:

ص = ع(ن) = ع × ه^{أن} ، حيث: ع = ع(٠) = القيمة الابتدائية.

ه = العدد النيبيري $\approx 2,7$.

ن = الزمن.

أ = ثابتًا عدديًا يمثل ثابت التناسب.

(١) إذا كان $0 < أ$ ، فإن ص = ع(ن) تزداد بزيادة قيمة ن، فتكون المعادلة ص = ع(ن) **معادلة النمو**، ويكون **معامل النمو**.

(٢) إذا كان $0 > أ$ ، فإن ص = ع(ن) تنقص بزيادة قيمة ن، فتكون المعادلة ص = ع(ن) **معادلة الاضمحلال** أو التلاشي، ويكون **معامل الاضمحلال**.

مثال (١)

إذا كان عدد سكان بلدة ما يخضع لقانون النمو، ويزيد بانتظام واستمرار بمعدل ٢٪ سنويًا، وكان عدد سكانها ٤٠ ألف نسمة عام ١٩٩٠ م، فكم سيبلغ عدد سكانها عام ٢٠٤٠ م؟

الحل

عدد السكان = ع(ن) = ع × ه^{أن}

ع = ع(٠) = ٤٠٠٠٠ نسمة، على فرض أن عام ١٩٩٠ م هو نقطة الإسناد.

أ = ٠,٠٢

ن = ٢٠٤٠ - ١٩٩٠ = ٥٠ عامًا.

ع(ن) = ع × ه^{أن}

ع(٥٠) = (٤٠٠٠٠) × (٢,٧)^{٥٠}

ع(٥٠) = ٢,٧ × ٤٠٠٠٠ = ١٠٨٠٠٠٠ نسمة عدد سكان البلدة عام ٢٠٤٠ م.

اقترض يمان مبلغ ١٠٠٠٠٠ دينار من مصرف يحسب ربحًا مركبًا منتظمًا وفق قانون النمو، بنسبة ربح مقدارها ٤٪ سنويًا. جد جملة المبلغ الذي سيسدده يمان للمصرف بعد مرور خمس وعشرين سنة.

مثال (٢)

تتحلل مادة مشعة بصورة مستمرة منتظمة وفق قانون الاضمحلال، وبمعدل تناقص مقداره ٠,٠٠٠٢ سنويًا. جد كتلة المادة المشعة المتبقية بعد مرور ٥٠٠٠ سنة، علمًا بأن كتلة المادة الأصلية هي ٥٤٠ غرامًا.

الحل

كتلة المادة المتبقية = ع(ن) = ع. × هـ أن

ع. = ع(٠) = ٥٤٠ غرامًا.

أ = -٠,٠٠٠٢ (لماذا الإشارة سالبة؟).

ن = ٥٠٠٠ سنة.

ع(ن) = ع. × هـ أن

ع(٥٠٠٠) = (٥٠٠٠) × (٢,٧) × ٥٤٠ × ٠,٠٠٠٢

٥٤٠ × ٢,٧ =

٥٤٠ = $\frac{٥٤٠٠}{٢٧} = \frac{٥٤٠}{٢,٧}$ = ٢٠٠ غرام كتلة المادة المتبقية بعد ٥٠٠٠ سنة.

يتناقص ثمن عقار بمرور الزمن، وبصورة مستمرة منتظمة وفق قانون الاضمحلال بمعدل ٥٪ سنويًا. فإذا كان ثمنه الأصلي ٨٠٠٠٠٠ دينار، فكم يصبح ثمنه بعد مرور ٤٠ سنة؟

يتزايد سعر قطعة أرض وفق قانون النمو بمرور الزمن، وبصورة مستمرة منتظمة. فإذا ازداد سعرها من ٤٠٠ ألف دينار إلى ٨٠٠ ألف دينار خلال ١٠ سنوات، فجد سعرها بعد مرور ٣٠ سنة.

الحل

$$\text{سعر قطعة الأرض} = \text{ع}(ن) = \text{ع} \cdot \text{ه}^{\text{ن}}$$

$$\text{ع} = \text{ع}(٠) = ٤٠٠٠٠٠ \text{ دينار}$$

$$\text{ع}(١٠) = ٨٠٠٠٠٠ \text{ دينار}$$

$$\text{ع}(ن) = \text{ع} \cdot \text{ه}^{\text{ن}}$$

$$\text{عندما } ن = ١٠ \text{ سنوات، } \text{ع}(١٠) = \text{ع} \cdot \text{ه}^{١٠}$$

$$٨٠٠٠٠٠ = ٤٠٠٠٠٠ \times \text{ه}^{١٠} \text{، ومنه: (ه) = } ٢$$

$$\text{عندما } ن = ٣٠ \text{ سنة، } \text{ع}(٣٠) = ٤٠٠٠٠٠ \times \text{ه}^{٣٠}$$

$$= ٤٠٠٠٠٠ \times (\text{ه}^{١٠})^٣ = ٤٠٠٠٠٠ \times (٢)^٣$$

$$= ٤٠٠٠٠٠ \times (٨)$$

$$= ٣٢٠٠٠٠٠ \text{ دينار يصبح ثمنها بعد } ٣٠ \text{ سنة}$$

الأسئلة

- (١) تتكاثر البكتيريا بصورة مستمرة منتظمة وفق قانون النمو بنسبة ٢٠٠٪ في الساعة. جد عددها بعد نصف ساعة، علمًا بأن عددها الابتدائي (٥٠٠ ٠٠٠).
- (٢) يتناقص ثمن سيارة بمرور الزمن، وبصورة مستمرة منتظمة وفق قانون الاضمحلال، وبمعدل ٨٪ سنويًا. فإذا كان ثمنها الأصلي ١٢٥٨٠ دينارًا، فجد ثمنها بعد مرور ٢٥ سنة.
- (٣) يذوب ملح في الماء، وتخضع كتلة الملح المتبقية من دون الذوبان في الماء لقانون الاضمحلال. إذا وضعت ١٠ كيلوغرامات من الملح في الماء، فذاب نصف الكمية بعد مرور ربع ساعة، فجد كتلة الملح المتبقية من دون الذوبان في الماء بعد ساعة وربع الساعة.
- (٤) حُلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

أسئلة الوحدة

(١) جد $\frac{كص}{كس}$ في كل مما يأتي:

$$(ب) \int_{-1}^2 (ك٣)(ص٤ - ٢) كس$$

$$(أ) \int كس \frac{١-س٤}{٥+س٢}$$

$$(د) \int_{٢}^٢ (ل٥س - ه٢س) كس$$

$$(ج) \int كس (س+٤) ظا$$

$$(ه) \int كس = ل٥ (س+٢) - ه٢س٢ + ١ - ٣س = جاس ل٥س$$

(٢) إذا كان ق(س) = ه٢س٢ - ١، فجد ق'(س).

(٣) إذا كان ق(س) = $\int كس (٢-س) كس$ ، فجد ق'(٢).

(٤) جد كلاً من التكاملات الآتية:

$$(ب) \int كس \frac{٦}{٥-س}$$

$$(أ) \int كس \frac{س٧-٢}{٣س}$$

$$(د) \int كس (٢+س٣) كس$$

$$(ج) \int كس (٢-س)(٢+س) كس$$

$$(و) \int كس \frac{س٢}{١+٣س} كس ، س < ١$$

$$(ه) \int كس (١-س٢)(١-س) كس$$

$$(ح) \int كس \frac{٣س١٢}{٣+س٤} كس$$

$$(ز) \int كس \left(\frac{٢}{س} - ه٢س + ٣ \right) كس$$

$$(ي) \int كس \frac{١+س٢}{جتا(س+٢) كس}$$

$$(ط) \int كس ٦س ه٢س٢+٥ كس$$

٥) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

(أ) $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt[3]{s}} ds$ (ب) $\int_{-1}^{+1} s^4 ds$ ، حيث s العدد النبيري

(ج) $\int_{-4}^{+1} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{\sqrt{s}} \right) ds$ (د) $\int_{-1}^{+1} \frac{s^2 + 7s + 12}{s + 4} ds$

(هـ) $\int_{-2}^{+1} \frac{2}{1 + s^2} ds$ (و) $\int_{-1}^{+1} 4s \times s^2 ds$

(ز) $\int_{-2}^{+6} \frac{10}{\sqrt{5s + 6}} ds$

٦) إذا كان $\int_{-b}^{+b} q(s) ds = 0$ صفراً، فجد قيمة الثابت b .

٧) إذا كان $\int_{-1}^{+1} q(s) ds = 4$ ، $\int_{-1}^{+1} (q(s) + 3) ds = 20$ ، فجد قيمة كل مما يأتي:

(أ) $\int_{-1}^{+1} q(s) ds$ (ب) $\int_{-1}^{+1} q(s) ds$ (ج) $\int_{-1}^{+1} (3q(s) - 4s) ds$

٨) جد قيمة الثابت ب في كل مما يأتي:

$$\begin{aligned} \text{أ) } \int_{-1}^2 2b \, ds = 12 & \quad \text{ب) } \int_{-4}^2 (1 - s^2) \, ds = 0 \\ \text{ج) } \int_{-1}^2 (b s^2 + 2) \, ds = 21 & \quad \text{د) } \int_{-2}^2 (1 - s^4) \, ds = 5b \end{aligned}$$

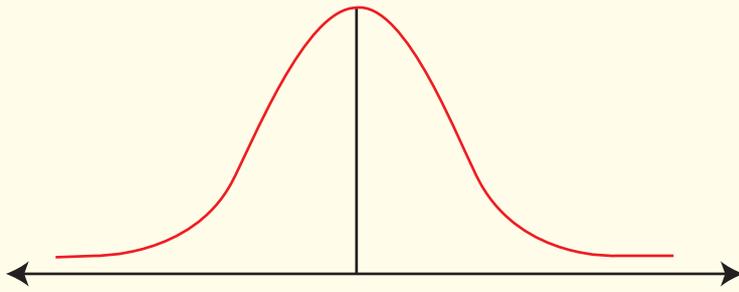
٩) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $v = c(s)$ عند النقطة (s, v) يعطى بالقاعدة $(1 + s)(3 + 2s)$ ، فجد قاعدة الاقتران c ، علمًا بأن منحناه يمر بالنقطة $(2, 1)$.

١٠) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $v = c(s) = 3s^2 - 27$ ، ومحور السينات في الفترة $[-4, 0]$.

١١) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم، بتسارع مقداره $t(ن) = 12ن(ن - 1)$ م/ث^٢، حيث $ن$ الزمن بالثواني. فإذا كانت سرعتها الابتدائية $c(0) = 3$ م/ث، وموقعها الابتدائي $f(0) = 2$ م، فجد:

أ) سرعة النقطة المادية بعد مرور أربع ثوانٍ من بدء الحركة.
ب) موقع النقطة المادية بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

١٢) يتزايد ثمن تحفة فنية بمرور الزمن، وبصورة مستمرة منتظمة وفق قانون النمو، بنسبة $2,5\%$ سنويًا. فإذا كان ثمنها الأصلي 3000 دينار، فكم يصبح ثمنها بعد مرور 80 عامًا؟



يُعدُّ علم الإحصاء والاحتمالات أحد فروع الرياضيات التي لا يمكن الاستغناء عنها؛ نظرًا إلى تطبيقاتها المتعددة في مختلف مجالات الحياة، ولا سيما الهندسية، والعلمية، والاجتماعية، والاقتصادية، والطبية، والإدارية، ولهذا فإن تعلم أساسياتها يُعدُّ مدخلًا مهمًا لفهم الكثير من الظواهر الطبيعية في العالم المحيط بنا.

Statistics and Probability

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- تعرف مبدأ العد، واستخدامه في حل مسائل حياتية.
- استقصاء التباديل والتوافيق ومضروب العدد الصحيح غير السالب باستخدام مبدأ العد، وحل مسائل عملية على ذلك.
- فهم العلامة المعيارية وعلاقتها بالعلامة الخام.
- حساب العلامة المعيارية للعلامة الخام، وتفسيرها.
- استقصاء خصائص التوزيع الطبيعي، والإفادة منها في حل مسائل عملية.
- تحديد طبيعة الارتباط بين متغيرين عن طريق شكل الانتشار.
- حساب قيمة معامل ارتباط بيرسون بين متغيرين، وتفسير دلالات قيمته عن طريق شكل الانتشار.
- تحديد معادلة خط الانحدار للارتباط بين متغيرين.
- تطبيق معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم أحد المتغيرين، وتحديد الفرق بين القيمة المفترضة والقيمة المتنبأ بها.
- فهم المتغير العشوائي المنفصل، وتوزيع ذي الحدين.

النتائج

- ④ تتعرف مبدأ العد، وتستخدمه في حل مسائل حياتية.
- ④ تجد قيمة مضروب العدد الصحيح غير السالب، وتستخدمه في حل مسائل حياتية.
- ④ تتعرف مفهوم التباديل والتوافيق، وخصائص كل منهما.
- ④ تحل مسائل حياتية باستخدام التباديل والتوافيق.

Counting Principle

مبدأ العد

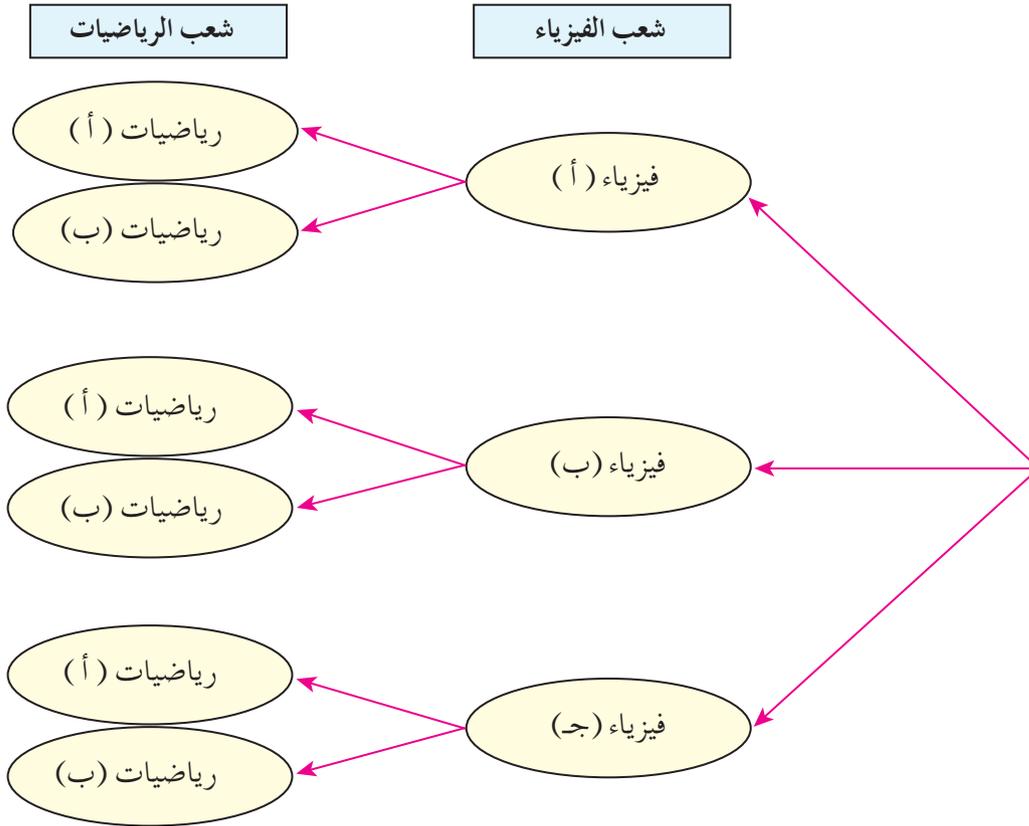
أولاً

لدى محمد أربعة أنواع من القمصان، وثلاثة أنواع من البناطيل، ونوعان من الأحذية، فهل يكفيه ذلك إذا أراد كل يوم ارتداء لباس مختلف عن اليوم الذي سبقه مدة شهر كامل؟

أحمد طالب جامعي يريد تسجيل مساق الفيزياء والرياضيات. فإذا علم أن عدد الشعب المتوافرة لمساق الفيزياء هي ثلاث شعب، وشعبتان لمساق الرياضيات، فكم عدد الطرائق التي يمكنه بها التسجيل للمساقين (علماً بأنه لا يمكن طرح هذه الشعب جميعاً في وقت واحد)؟

يتضح من معطيات السؤال أن الطالب سيقوم بعملية اختيار، تتمثل الأولى في تسجيل شعبة من شعب مساق الفيزياء المتوافرة، وأن أمامه ثلاثة خيارات هي: التسجيل في شعبة (أ)، أو شعبة (ب)، أو شعبة (ج). أما عملية الاختيار الأخرى فتتمثل في تسجيل شعبة من شعب مساق الرياضيات، حيث يوجد لديه خياران فقط هما: التسجيل في شعبة (أ)، أو في شعبة (ب).

ولإيجاد عدد طرائق اختيار شعبتين معًا، انظر الشكل (١-٥):



الشكل (١-٥).

يتبين من الشكل (١-٥) أن عدد طرائق اختيار شعبتي فيزياء ورياضيات يساوي (٦) كالاتي:
(فيزياء أ، رياضيات أ)، (فيزياء أ، رياضيات ب)، (فيزياء ب، رياضيات أ)، (فيزياء ب، رياضيات ب)،
(فيزياء ج، رياضيات أ)، (فيزياء ج، رياضيات ب).

فكر وناقش

ما علاقة عدد طرائق اختيار شعبتي فيزياء ورياضيات معًا بعدد طرائق اختيار شعبة من كل مساق على حدة؟

في مكتبة فاطمة ٤ دواوين شعرية (للشعراء: المتنبي، وأحمد شوقي، وعرار، والفرزدق)، و ٣ روايات أدبية (للروائيين: فدوى طوقان، وتوفيق الحكيم، ووليد سيف). إذا أرادت فاطمة قراءة كتابين أحدهما يمثل ديواناً شعرياً والآخر يمثل روايةً أدبيةً، فبكم طريقة يمكنها ذلك؟

الحل

بما أن الاختيار يتكون من عمليتين، فإننا نستطيع تمثيل طرائق الاختيار باستخدام الجدول الآتي:

طرائق الاختيار			
وليد سيف	توفيق الحكيم	فدوى طوقان	
(المتنبي، وليد)	(المتنبي، توفيق)	(المتنبي، فدوى)	المتنبي
(أحمد، وليد)	(أحمد، توفيق)	(أحمد، فدوى)	أحمد شوقي
(عرار، وليد)	(عرار، توفيق)	(عرار، فدوى)	عرار
(الفرزدق، وليد)	(الفرزدق، توفيق)	(الفرزدق، فدوى)	الفرزدق

يتبين لنا من دراسة الجدول السابق أن فاطمة لديها ١٢ طريقة لقراءة كتابين، بحيث يكون أحدهما ديواناً شعرياً، والآخر روايةً أدبيةً.

فكر وناقش

ما علاقة عدد طرائق اختيار ديوان شعري ورواية أدبية معاً بعدد طرائق اختيار ديوان شعري ورواية أدبية على حدة؟

استناداً إلى العرض السابق، يمكن التوصل إلى قاعدة أساسية في العد تُسمى **مبدأ العد**، وتنص على ما يأتي:

تعريف

إذا أمكن إجراء عملية ما في مرحلتين متتابعتين، بحيث أجريت المرحلة الأولى بطرائق عددها n_1 ، والمرحلة الأخرى بطرائق عددها n_2 ، فإنه يمكن إتمام المرحلتين: الأولى والثانية معًا بطرائق عددها $n_1 \times n_2$.

١ تدريب

محل لبيع الخضراوات والفواكه يحتوي على أربعة أصناف من الفاكهة (موز، برتقال، تفاح، دراق)، وصنفين من الخضراوات (كوسا، بطاطا). دخلت أم رامي المحل لشراء صنف واحد من الفواكه، وصنف آخر من الخضراوات. ما الخيارات المتوافرة لها؟

مثال (٢)

أراد عمر شراء ثلاجة وغسالة وجهاز تكييف من أحد معارض الأجهزة الكهربائية. بكم طريقة يمكنه شراء ذلك، علمًا بأن المعرض يحتوي على ٤ أنواع مختلفة من الثلاجات، و ٥ أنواع من الغسالات، و ٣ أنواع من أجهزة التكييف؟

الحل

عدد طرائق اختيار الثلاجة = ٤ طرائق، وعدد طرائق اختيار الغسالة = ٥ طرائق، وعدد طرائق اختيار جهاز التكييف = ٣ طرائق.

بحسب مبدأ العد، فإن عدد طرائق اختيار الثلاجة والغسالة وجهاز التكييف هي:

$$٤ \times ٥ \times ٣ = ٦٠ \text{ طريقة.}$$

وهذا المثال يقودنا إلى تعميم مبدأ العد الآتي:

إذا أمكن إجراء عملية ما ضمن مراحل عدة متتابعة عددها (ك)، بحيث أجريت المرحلة الأولى

بطرائق عددها n_1 ، والمرحلة الثانية بطرائق عددها n_2 ، وهكذا حتى المرحلة الأخيرة (ك) التي

تجري بطرائق عددها n_k ، فإنه يمكن إتمام هذه العملية بطرائق عددها $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$.

حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

مثال (٣)

من مجموعة الأرقام الآتية: { ٦، ٥، ٣، ٢ }، كم عددًا يمكن تكوينه من منزلتين:

(١) إذا سُمِحَ بتكرار الأرقام؟

(٢) إذا لم يُسَمَحَ بتكرار الأرقام؟

الحل

(١) بما أن التكرار مسموح به، فإن:

عدد طرائق اختيار المنزلة الأولى = ٤ طرائق (لدينا أربعة أرقام يمكن الاختيار منها)،
وعدد طرائق اختيار المنزلة الثانية = ٤ طرائق.

∴ عدد طرائق تكوين العدد = $4 \times 4 = 16$ طريقة، والأعداد هي:

٢٢، ٣٢، ٥٢، ٦٢، ٢٣، ٣٣، ٥٣، ٦٣، ٢٥، ٣٥، ٥٥، ٦٥، ٢٦، ٣٦، ٥٦، ٦٦.

(٢) بما أنه لا يُسَمَحُ بالتكرار، فإن:

عدد طرائق اختيار المنزلة الأولى = ٤ طرائق (لدينا أربعة أرقام يمكن الاختيار منها).

وعدد طرائق اختيار المنزلة الثانية = ٣ طرائق (عدد الاختيارات نقص بمقدار واحد بسبب عدم التكرار).

∴ عدد طرائق تكوين العدد = $4 \times 3 = 12$ طريقة، والأعداد هي:

٢٣، ٥٣، ٦٣، ٢٥، ٣٥، ٦٥، ٢٦، ٣٦، ٥٦.

بكم طريقة يمكن تكوين عدد من ٣ منازل من مجموعة الأرقام الفردية التي هي أكبر من ٤، في حال:

(أ) سُمِحَ بتكرار الأرقام؟ (ب) لم يُسَمَحَ بتكرار الأرقام؟

مضروب العدد الصحيح غير السالب

إذا أردنا معرفة عدد الطرائق التي يمكن بها توزيع ٤ أقلام ملونة (أحمر، أخضر، أزرق، أسود)، على ٤ طالبات (هدى، سمر، ليلى، بتول بالترتيب)، فإن هدى لديها أربعة خيارات، وسمر ثلاثة خيارات، وليلى خياران، وبتول خيار واحد فقط. وبحسب مبدأ العد، فإن عدد طرائق الاختيار ستبلغ: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ طريقة.

لاحظ أن العملية السابقة تضمنت ضرب أعداد متتالية بدءًا بالعدد ٤، ثم تناقصت حتى انتهت بالعدد ١، ويمكننا التعبير عن ذلك باستخدام **مضروب العدد ٤**، ويُرمز إليه بالرمز **٤!**، ويساوي $4 \times 3 \times 2 \times 1$.

يمكن تعريف مضروب العدد على النحو الآتي:

تعريف

إذا كان n عددًا صحيحًا غير سالب، فإن مضروب العدد n يساوي:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

أما مضروب العدد صفر فيساوي $0! = 1$

يمكن أيضًا استنتاج أن $n! = n \times (n-1)!$

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2)!$$

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)!$$

وهكذا.

مثال (٤)

جد قيمة كل مما يأتي:

$$(4) \quad 3! + 4!$$

$$(3) \quad 2!$$

$$(2) \quad 7!$$

$$(1) \quad 5!$$

الحل

$$120 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = !5 \quad (1)$$

$$5040 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = !7 \quad (2)$$

$$2 = 1 \times 2 = !2 \quad (3)$$

$$30 = 6 + 24 = (1 \times 2 \times 3) + (1 \times 2 \times 3 \times 4) = !3 + !4 \quad (4)$$

تدريب ٤

بكم طريقة يمكن أن يجلس ٦ طلاب على ٦ مقاعد موضوعة بطريقة مستقيمة؟

مثال (٥)

حلّ كلاً من المعادلات الآتية:

$$720 = (n!) \quad (1)$$

$$52 = (n!) 2 + 4 \quad (2)$$

$$17 + !0 = !(1+n) + 6 - \quad (3)$$

$$12 = \frac{n!}{!(2-n)} \quad (4)$$

الحل

$$!6 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720 \quad (1)$$

$$\therefore (n!) = !6, \text{ ومنه } n = 6$$

$$52 = (n!) 2 + 4 \quad (2)$$

$$48 = (n!) 2$$

$$24 = n!$$

$$!4 = n!$$

$$\therefore n = 4$$

٢	٧٢٠
٣	٣٦٠
٤	١٢٠
٥	٣٠
٦	٦
	١

$$17 + 10 = (1+n)! + 6 - (3)$$

$$17 + 1 = (1+n)! + 6 -$$

$$24 = (1+n)!$$

$$!4 = (1+n)!$$

$$4 = 1+n$$

$$3 = n \therefore$$

$$12 = \frac{n!}{(2-n)!} \quad (4)$$

$$12 = \frac{n!(2-n)(1-n)}{(2-n)!}$$

$$12 = n(1-n)$$

$$0 = 12 - n - n^2$$

$$0 = (3+n)(4-n)$$

$$4 = n$$

أو: $n = 3$ (مرفوض).

تدريب ٥

حلّ كلّاً من المعادلات الآتية:

$$16 = (n!)3 + 10 \quad (2)$$

$$120 = (n!) \quad (1)$$

$$30 = \frac{(1+n)!}{(1-n)!} \quad (4)$$

$$120 = (1+n)2 \quad (3)$$

الأسئلة

(١) تعمل ١٠ حافلات لنقل الركاب بين مدينتي مادبا وعمان، وتعمل ٣٠ حافلة أخرى بين مدينتي عمّان والزرقاء. فإذا أراد راكب أن يسافر من مادبا إلى الزرقاء مروراً بعمّان، ثم يعود سالكاً الطريق نفسه، فبكم طريقة يمكنه عمل ذلك شريطة ألا يركب الحافلة نفسها في أثناء رحلته؟

(٢) محل لبيع المجمدات الغذائية، فيه ٣ أنواع مختلفة من الأسماك، و ٤ أنواع مختلفة من اللحوم الحمراء، ونوعان مختلفان من الدجاج. بكم طريقة يمكن لأحد الزبائن أن يشتري نوعاً واحداً من كل من الأسماك واللحوم الحمراء والدجاج؟

(٣) اتبعت دائرة السير في إحدى الدول نظاماً لترقيم السيارات مُستخدمة الأرقام ١ ← ٩، بحيث تحتوي لوحة السيارة على ٤ أرقام، و حرفين من أحرف الهجاء. كم سيارة يمكن ترقيمها بهذه الطريقة، علماً بأن عدد أحرف الهجاء ٢٨ حرفاً، وتكرار الأرقام مسموح به، خلافاً لتكرار الأحرف؟

(٤) جد قيمة كل مما يأتي:

(ب) $!٢ + !٥ + !٣$

(أ) $!٦$

(د) $!٣ \times ٤٢$

(ج) $!٢ + !٠$

(٥) حُلِّ كلاً من المعادلات الآتية:

(أ) $٤٨ = (!ن) \times ٢$

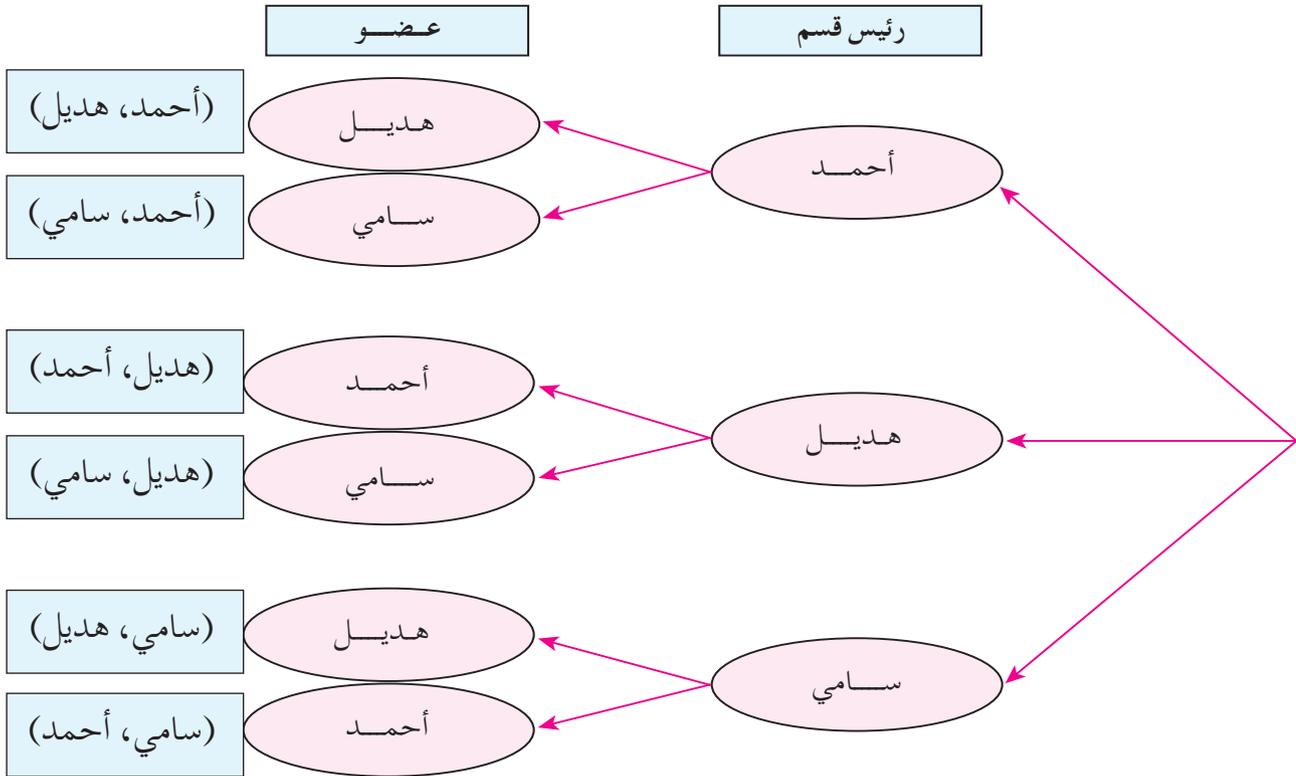
(ب) $٢٠ - = (!ن) - ١٠٠$

(ج) $٢ = !(١ - ن٣)$

أعلنت إحدى الإدارات عن توافر شاغرين لرئيس قسم وعضو فيها. فإذا تقدم ثلاثة أشخاص لهاتين الوظيفتين، هم: أحمد، وهديل، وسامي، فاكتب جميع الطرائق الممكنة لاختيار شخصين منهم؛ على أن لا يشغل الشخص نفسه كلتا الوظيفتين.

لاحظ أننا سنقوم بعمليتين؛ الأولى: اختيار رئيس قسم بثلاث طرائق، والثانية: اختيار عضو بطريقتين اثنتين.

اعتمادًا على مبدأ العد، فإن اختيار رئيس القسم والعضو معًا سيكون بست طرائق ($6 = 2 \times 3$)، والشكل (٥-٢) يبين هذه الطرائق.



الشكل (٥-٢).

يتبين مما سبق أهمية الترتيب في كتابة الأزواج المرتبة؛ وذلك أنه يعطي معنى مختلفًا. فإذا اخترنا مثلًا (أحمد، هديل) فهذا يعني أن أحمد هو رئيس القسم، وهديل هي العضو، أما إذا اخترنا

(هديل، أحمد) فهذا يعني أن هديل هي رئيس القسم، وأحمد هو العضو.

يُطلق على الأزواج المرتبة الآنف ذكرها اسم **تباديل** المجموعة {أحمد، هديل، سامي}، وهي تتضمن عنصرين في كل مرة، ويُرمز إليها بالرمز: $ل(٣، ٢) = ٢ \times ٣ = ٦$

عدد تباديل مجموعة متمايضة، عدد عناصرها (ن) عنصر، مأخوذة (ر) في كل مرة، يساوي حاصل ضرب الأعداد المتتالية بدءًا من (ن)، ثم تتناقص واحدًا كل مرة حتى تصل العدد (ن - ر + ١)، أو تتناقص بحيث يكون عددها (ر).

تعريف

التباديل

إذا اخترت عناصر عددها ر من مجموعة عدد عناصرها ن، بحيث يكون ترتيب الاختيار مهمًا، فإن هذا الاختيار يُسمى تباديل.

ويُرمز إلى عددها بالرمز: $ل(ن، ر)$ ، حيث ن، ر عددان طبيعيان، $٠ \leq ر \leq ن$ ،

$$\text{ويكون ل (ن، ر) = } \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$

$$\text{أي إن ل (ن، ر) = } ن \times (ن - ١) \times (ن - ٢) \times \dots \times (٣ - ن) \times (٢ - ن) \times (١ - ن)$$

مثال (١)

ما عدد تباديل مجموعة مكونة من (٧) عناصر مأخوذة (٣) في كل مرة؟

الحل

$$\text{ل (٧، ٣) = } ٧ \times ٦ \times ٥ \quad (\text{عدد الأعداد = ٣، وهو يمثل (ر) في القانون})$$

$$= ٢١٠$$

$$\text{وبطريقة أخرى: ل (٧، ٣) = } \frac{٧!}{(٧ - ٣)!} = \frac{٧!}{٤!} = ٧ \times ٦ \times ٥$$

تدريب ١

- (١) كم عدد تباديل مجموعة مكونة من ٥ عناصر مأخوذة ٢ في كل مرة؟
(٢) جد قيمة ل (٤، ٦) + ل (٥، ٧) + ٢!

مثال (٢)

بكم طريقة يمكن اختيار رئيس منتدى ثقافي، ومساعد له، وأمين سر، وأمين صندوق مختلفين، من بين ١٠ أعضاء منتسبين إلى هذا النادي؟

الحل

$$ل (٤، ١٠) = ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ = ٥٠٤٠ \text{ طريقة.}$$

فكر وناقش

جد طريقة أخرى لحل المثال (٢).

تدريب ٢

ما عدد طرائق اختيار رئيس شركة، ونائب له، ومدير مالي من بين ٢٠ موظفًا في الشركة، علمًا بأن الشخص الواحد لا يشغل أكثر من وظيفة واحدة في الشركة؟

مثال (٣)

جد قيمة (ر) في كل معادلة مما يأتي:

$$(١) ل (٥، ر) = ٦٠$$

$$(٢) ٣ + ٢ ل (٦، ر) = ٣٩ + ٤!$$

٥	٦٠
٤	١٢
٣	٣
	١

$$(١) \quad ٦٠ = ٣ \times ٤ \times ٥, \text{ عدد الأعداد} = ٣$$

$$\therefore ٣ = ر$$

$$(٢) \quad ٣٩ + ٤! = (٦, ر) ل \quad ٣ + ٢$$

$$٦٣ = ٣٩ + ٢٤ = (٦, ر) ل \quad ٢ + ٣$$

$$٦٠ = ٣ - ٦٣ = (٦, ر) ل \quad ٢$$

$$٣٠ = (٦, ر) ل$$

$$٣٠ = ٥ \times ٦, \text{ عدد الأعداد} = ٢$$

$$\therefore ٢ = ر$$

٣ تدريب

جد قيمة (ر) في كل من المعادلتين الآتيتين:

$$(١) \quad ١٦٨٠ = (٨, ر) ل$$

$$(٢) \quad ٤٣ + ١٠! = (٤, ر) ل \quad ٣ - ٨٠$$

نشاط

(١) جد قيمة كل من:

$$ل (٤, ٠), ل (٣, ٠), ل (٥, ٠)$$

(٢) جد قيمة كل من:

$$ل (٤, ١), ل (٣, ١), ل (٥, ١)$$

(٣) جد قيمة كل من:

$$ل (٤, ٤), ل (٣, ٣), ل (٥, ٥)$$

ماذا تستنتج في كل حالة من الحالات الثلاث؟

الأسئلة

- (١) ما عدد تباديل مجموعة مكونة من ٩ عناصر مأخوذة ٥ في كل مرة؟
- (٢) بكم طريقة يمكن اختيار رئيس قسم، ومساعد له، وأمين عهدة من بين ٩ أعضاء في هذا القسم شريطة أن لا يشغل أحدهم وظيفتين معاً؟
- (٣) جد قيمة كل مما يأتي:
- (أ) ل (٨، ٣).
- (ب) ل (١٣، ٤).
- (ج) ل (٢٠، ٣).
- (د) ل (١٧، ٠).
- (٤) عبّر عما يأتي باستخدام التباديل:
- (أ) $13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17$
- (ب) $ك \times (ك - ١) \times (ك - ٢)$ ، $ك \leq ٣$
- (٥) جد قيمة كل من (ن)، و (ر) في ما يأتي:
- (أ) ل (٣، ن) = ٧٢٠
- (ب) ل (٦، ر) = ٣٦٠
- (ج) ل (٣، ن) = ٩ ل (٢، ن)
- (٦) كم كلمة مكونة من ٣ أحرف مختلفة يمكن تكوينها من مجموعة الأحرف: {أ، ن، ق، غ، م}، علماً بأنه ليس شرطاً أن يكون للكلمة معنى؟

ضمن تصفيات كرة القدم للأمم آسيا، ضمت المجموعة الأولى فرق الدول الآتية: الأردن، السعودية، اليابان، العراق. بكم طريقة يمكن إجراء مباريات التصفية النهائية بين هذه الفرق؟

إن مباريات التصفية ستكون على النحو الآتي: (الأردن، السعودية)، (الأردن، اليابان)، (الأردن، العراق)، (السعودية، اليابان)، (السعودية، العراق)، (اليابان، العراق)، وإن عدد هذه المباريات هو ٦. لاحظ أن الترتيب هنا غير ضروري (ليس له معنى)؛ لأن مباراة (الأردن، السعودية) هي نفسها مباراة (السعودية، الأردن).

إن اختيار مجموعة جزئية عدد عناصرها (ر) من مجموعة عدد عناصرها (ن)، بحيث يكون الترتيب غير مهم، يُسمى **توفيقاً**.

تعريف

إذا كان n ، r عددين طبيعيين بحيث $0 \leq r \leq n$ ، فإن كل مجموعة جزئية عدد عناصرها (ر) تُختار من مجموعة عدد عناصرها (ن) تُسمى توفيقاً مكوناً من (ر) عنصر، ويُرمز إليها بالرمز: $\binom{n}{r}$ وتُقرأ: (ن فوق ر)، حيث:

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال (١)

جد قيمة كل مما يأتي:

$$\binom{6}{4} \quad (٣)$$

$$\binom{9}{5} \quad (٢)$$

$$\binom{4}{2} \quad (١)$$

الحل

$$٦ = \frac{!٢ \times ٣ \times ٤}{!٢ \times !٢} = \frac{!٤}{!(٢ - ٤)!٢} = \binom{٤}{٢} \quad (١)$$

$$١٢٦ = \frac{!٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨ \times ٩}{!٤ \times !٥} = \frac{!٩}{!(٥ - ٩)!٥} = \binom{٩}{٥} \quad (٢)$$

$$١٥ = \frac{!٤ \times ٥ \times ٦}{!٢ \times !٤} = \frac{!٦}{!(٤ - ٦)!٤} = \binom{٦}{٤} \quad (٣)$$

تدريب ١

جد قيمة كل مما يأتي:

$$\binom{٥}{٢} \quad (٣)$$

$$\binom{٨}{٥} \quad (٢)$$

$$\binom{٩}{٧} \quad (١)$$

نشاط

جد قيمة كل مما يأتي:

$$\binom{٨}{٨}, \binom{٩}{٩}, \binom{٣}{٣}, \text{ ماذا تستنتج؟} \quad (١)$$

$$\binom{٥}{١}, \binom{٧}{١}, \binom{٣}{١}, \text{ ماذا تستنتج؟} \quad (٢)$$

$$\binom{٨}{٠}, \binom{٢}{٠}, \binom{٤}{٠}, \text{ ماذا تستنتج؟} \quad (٣)$$

يمكن استخدام التوافق في حل مسائل عملية كما يتضح من الأمثلة الآتية:

مثال (٢)

امتحان اللغة العربية يتكون من ٧ أسئلة. جد عدد طرائق اختيار ٥ أسئلة للإجابة عنها.

$$\text{عدد الطرائق} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{(7-5)!5!} = \frac{7!}{2!5!} = 21 \text{ طريقة.}$$

مثال (٣)

في إحدى مديريات التربية والتعليم يراد اختيار لجنة رباعية تتولى إعداد خطة استعداداً لبدء العام الدراسي، من بين ٧ رؤساء أقسام، و ٨ أعضاء أقسام. بكم طريقة يمكن تكوين اللجنة في الحالات الآتية:

- (١) اللجنة تتكون من ٣ رؤساء أقسام وعضو واحد.
- (٢) اللجنة تتكون من عضوين اثنين على الأقل.
- (٣) رئيس اللجنة يجب أن يكون رئيس قسم، والبقية من الأعضاء.
- (٤) لا تضم اللجنة أي عضو من أعضاء الأقسام.

الحل

- (١) عدد طرائق اختيار ٣ رؤساء أقسام = $\binom{7}{3} = 35$ طريقة.
- عدد طرائق اختيار عضو = $\binom{8}{1} = 8$ طرائق.
- عدد طرائق اختيار اللجنة = $8 \times 35 = 280$ طريقة.
- (٢) تتكون اللجنة من عضوين اثنين ورئيسي قسمين، أو من ثلاثة أعضاء ورئيس قسم واحد، أو من أربعة أعضاء.

$$\begin{aligned} \text{عدد طرائق اختيار اللجنة} &= \binom{7}{0} \times \binom{8}{4} + \binom{7}{1} \times \binom{8}{3} + \binom{7}{2} \times \binom{8}{2} \\ &= 1 \times 70 + 7 \times 56 + 21 \times 28 \\ &= 1050 = 70 + 392 + 588 \end{aligned}$$

- (٣) عدد طرائق اختيار رئيس اللجنة = ٧ طرائق.
- عدد طرائق اختيار اللجنة = $7 \times \binom{8}{3} = 392 = 56 \times 7$ طريقة.
- (٤) تتألف اللجنة جميعها من رؤساء الأقسام، فيكون عدد طرائق اختيار اللجنة: $\binom{7}{4} = 35$ طريقة.

في أحد المستشفيات يراد اختيار فريق طبي خماسي لتمثيل المستشفى في مؤتمر صحي، من بين ٥ أطباء، و ٦ مرضين. بكم طريقة يمكن تكوين الفريق في الحالات الآتية:

(١) الفريق يتألف من طبيبين اثنين على الأكثر.

(٢) رئيس الفريق ونائبه من الأطباء، والبقية ممرضون.

والآن، جد قيمة كل من التوفيقين في (أ) و (ب)، ثم قارن النتيجة التي ستوصل إليها.

$$(أ) \binom{8}{3} \text{ و } \binom{8}{5} \quad (ب) \binom{6}{4} \text{ و } \binom{6}{2}$$

لاحظ أن كلاً من التوفيقين في (أ) متساويان، وكذا الحال في (ب)، وهذا يقودنا إلى التعميم الآتي:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \text{ حيث } n, r \text{ عددان طبيعيان، } 0 \leq r \leq n.$$

مثال (٤)

حلّ كلاً من المعادلتين الآتيتين:

$$(١) \binom{7}{3} = \binom{7}{k} \quad (٢) \binom{k}{4} = \binom{k}{5}$$

الحل

$$(١) k = 3$$

$$\text{أو: } k = 3 + 7 = 10, \text{ ومنه: } k = 4$$

$$\therefore k = 3, k = 4 \text{ (تحقق من صحة الحل).}$$

$$(٢) k = 5 + 4 = 9 \text{ (تحقق من صحة الحل).}$$

حلّ كل معادلة مما يأتي:

$$(١) \binom{6}{s+1} = \binom{6}{4} \quad (٢) \binom{s}{7} = \binom{s}{5}$$

الأسئلة

(١) جد قيمة كل مما يأتي:

$$\text{أ) } \begin{pmatrix} 100 \\ 97 \end{pmatrix} \quad \text{ب) } \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{ج) } \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{د) } \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(٢) جد عدد طرائق اختيار قلمين من علبة تحوي ١٠ أقلام.

(٣) عائلة تتألف من ٥ أولاد و ٣ بنات. يراد تكليف ٣ منهم بتنظيف الحديقة، فبكم طريقة يمكن اختيارهم، بحيث:

أ) يوجد بنتان على الأقل ضمن الفريق.

ب) لا يوجد أي بنت في الفريق.

ج) يكون رئيس الفريق من البنات.

(٤) حل كل معادلة مما يأتي:

$$\text{أ) } \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ب) } \begin{pmatrix} 5 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

النتائج

- تتعرف مفهوم المتغير العشوائي: المنفصل، والمتصل.
- تحسب الاحتمال باستخدام توزيع ذي الحدين.
- تتعرف العلامة المعيارية، وعلاقتها بالعلامة الخام.
- تحسب العلامة المعيارية، وتفسرها.
- تتعرف منحني التوزيع الطبيعي وخصائصه.
- تستخدم خصائص التوزيع الطبيعي في حل مسائل عملية.

المتغير العشوائي المنفصل وتوزيع ذي الحدين

أولاً

عند إجراء تجربة ما، قد يتركز اهتمامنا أحياناً على خصيصة محددة لنتائج التجربة أكثر من النتائج نفسه. فعلى سبيل المثال، قد نركز على عدد الأبناء الذكور لعائلة معينة أكثر من تركيزنا على تسلسل الذكور والإناث عند الولادة، أو قد نهتم بعدد العمليات الجراحية الناجحة من بين العمليات التي يجريها طبيب جراح، أو عدد مرات ظهور الصورة في تجربة إلقاء قطعة نقد مرتين.

رَكَزَت كل تجربة من التجارب السابقة على القيم العددية لكل ناتج من نواتج التجربة؛ ما شكَّل اقتراناً يُعرف باسم **المتغير العشوائي**، ومجاله الفضاء العيني، ومداه مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية ح.

تعريف

المتغير العشوائي هو اقتران معرف من الفضاء العيني Ω إلى مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية ح، بحيث تُستخدم الرموز س، ص، ع، ... للدلالة على المتغيرات العشوائية. أما إذا كانت القيم التي يأخذها المتغير العشوائي مجموعة معدودة فإنه يُسمَّى المتغير العشوائي المنفصل.

إذا دلّ المتغير العشوائي س على عدد الأطفال الذكور في تجربة اختيار عشوائي لعائلة لديها ٣ أطفال، ودوّنت النتائج بحسب الجنس وتسلسل الولادة، فجد القيم التي قد يأخذها المتغير العشوائي س.

الحل

يتعين إيجاد عناصر الفضاء العيني لهذه التجربة، وعدد الأطفال الذكور من كل ناتج كما في الجدول الآتي:

عدد الأطفال الذكور	عناصر الفضاء العيني Ω
٣	(و و و)
٢	(و و ب)
٢	(و ب و)
٢	(ب و و)
١	(و ب ب)
١	(ب و ب)
١	(ب ب و)
٠	(ب ب ب)

المتغير العشوائي س يأخذ القيم: $\{٠, ١, ٢, ٣\}$ ، وهي قيم معدودة ومنتهية؛ لذا يُسمى س متغيراً عشوائياً منفصلاً.

في المثال السابق، يمكن حساب احتمال القيم التي يأخذها المتغير العشوائي س، حيث:

$$\begin{aligned}
 L(س = ٣) &= L(و و و) = \frac{1}{8} \\
 L(س = ٢) &= L(و و ب) + L(و ب و) + L(ب و و) = \frac{3}{8} \\
 L(س = ١) &= L(و ب ب) + L(ب و ب) + L(ب ب و) = \frac{3}{8} \\
 L(س = ٠) &= L(ب ب ب) = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

يمكن أيضاً ترتيب هذه القيم على صورة أزواج مرتبة تُسمى **التوزيع الاحتمالي** للمتغير العشوائي س كالاتي:

$$\left\{ \left(\frac{1}{8}, 0 \right), \left(\frac{3}{8}, 1 \right), \left(\frac{3}{8}, 2 \right), \left(\frac{1}{8}, 3 \right) \right\}, \text{ أو بصورة جدول نُسمّيه جدول التوزيع}$$

الاحتمالي للمتغير العشوائي س، على النحو الظاهر في الجدول الآتي:

س	٠	١	٢	٣
ل(س _ر)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

لاحظ أن:

$$- \text{ ل (س}_r) \leq \text{صفر، } r = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$- \sum \text{ ل (س}_r) = 1$$

لذا نُسمّي ل **اقتران احتمال** للمتغير العشوائي س.

تدريب ١

في تجربة إلقاء قطعتي نقد مرة واحدة، دَل المتغير العشوائي ع على عدد مرات ظهور كتابة على الوجه الظاهر:

- (١) جد القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي ع.
- (٢) اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ع.
- (٣) بيّن أن ل هو اقتران احتمال للمتغير العشوائي ع.

مثال (٢)

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س معطى كما في الجدول الآتي، فما قيمة الثابت أ؟

س	٠	١	٢
ل(س _ر)	٠,٣	٠,١	أ

$$\sum_{r=0}^{\infty} P(r) = 1 = 0,1 + 0,3 + 0,6$$

$$0,4 = 1 - 0,6 \text{ ومنه: } 0,6 = 0,4$$

تدريب ٢

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س معطى في المجموعة:
 $\{(0, 2, 0), (0, 3, 1), (2, 1, 0), (3, 2, 0)\}$ ، فما قيمة الثابت ب؟

توزيع ذي الحدين

أطلق صياد (٥) رصاصات نحو هدف. فإذا كان احتمال إصابته الهدف في كل مرة ثابتاً، ويساوي ٠,٨، فما احتمال أن يصيب الصياد الهدف ٣ مرات؟

كل محاولة للصيد تشمل احتمالين؛ إما أن ينجح في إصابة الهدف، وإما أن يفشل في ذلك. وهذه المحاولة تُسمى **تجربة برنولي**، وفضاؤها العيني مكون من ناتجين منفصلين؛ إما نجاح، وإما فشل. وفي حال كُثرت هذه المحاولة عدداً من المرات بحيث تكون مستقلة ومتماثلة (نتيجة إحدى التجارب لا تؤثر في سواها)، وكان احتمال النجاح ثابتاً في كل مرة، فإن هذا النوع من التجارب يُسمى **توزيع ذي الحدين**.

إذا أُجريت تجربة برنولي ن من المرات، وكان احتمال النجاح في المحاولة الواحدة (أ)،

وكان س متغيراً عشوائياً ذا حدين معاملته: ن، أ؛

أي إن س يساوي عدد مرات النجاح من (ن) محاولة مستقلة ومتماثلة، فإن احتمال النجاح

في (ر) من المرات يساوي:

$$P(r) = \binom{n}{r} (a)^r (1-a)^{n-r} \text{ حيث } r \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

يمكن حل المسألة السابقة على النحو الآتي:

(عدد مرات إجراء التجربة يساوي ٥) $\leftarrow n = 5$

(احتمال النجاح في كل محاولة ثابت) $\leftarrow A = 0,8$

$$L(س = 3) = \binom{5}{3} (0,8)^3 (0,8 - 1)^{3-5} = 10 \times 0,512 \times 0,04 = 0,208$$

مثال (٣)

إذا كان س متغيرًا عشوائيًا ذا حدين، ومعامله: $n = 3$ ، $A = 0,4$ ، فجد كلاً مما يأتي:

(١) $L(س = 2)$. (٢) $L(س \leq 1)$. (٣) $L(س > 2)$.

الحل

$$(١) L(س = 2) = \binom{3}{2} (0,4)^2 (0,4 - 1)^{3-2} = 3 \times 0,16 \times 0,6 = 0,288$$

$$(٢) L(س \leq 1) = L(س = 1) + L(س = 0) = 0,4^3 + 0,6^3 = 0,064 + 0,216 = 0,28$$

$$= 1 - L(س = 2) = 1 - 0,288 = 0,712$$

$$= 1 - \binom{3}{2} (0,4)^2 (0,4 - 1)^{3-2} = 1 - 0,288 = 0,712$$

$$= 1 - 0,216 \times 3 = 0,36$$

$$= 0,784$$

$$(٣) L(س > 2) = L(س = 3) = 0,4^3 = 0,064$$

$$= \binom{3}{3} (0,4)^3 (0,4 - 1)^{3-3} + \binom{3}{1} (0,4)^1 (0,4 - 1)^{3-1} = 0,064 + 0,36 \times 0,6 = 0,28$$

$$= 0,064 + 0,216 = 0,28$$

$$= 0,064 + 0,216 = 0,28$$

تدريب ٣

إذا كان س متغيرًا عشوائيًا ذا حدين، ومعامله: $n = 6$ ، $A = 0,7$ ، فجد كلاً مما يأتي:

(١) $L(س = 5)$. (٢) $L(س \leq 4)$. (٣) $L(س \geq 2)$.

مثال (٤)

إذا كان س متغيراً عشوائياً ذا حدين، ومعامله: $n = 3$ ، $p = 0,3$ ، فجد كلاً مما يأتي:
(١) قيم س.

(٢) جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س.

الحل

(١) قيم س = $\{0, 1, 2, 3\}$.

$$(٢) ل (س = ٠) = \binom{3}{0} (0,3)^0 (0,7)^3 = 1 \times 1 \times 0,343 = 0,343$$

$$0,343 = 0,343 \times 1 \times 1 =$$

$$ل (س = ١) = \binom{3}{1} (0,3)^1 (0,7)^2 = 3 \times 0,3 \times 0,49 = 0,441$$

$$ل (س = ٢) = \binom{3}{2} (0,3)^2 (0,7)^1 = 3 \times 0,09 \times 0,7 = 0,189$$

$$ل (س = ٣) = \binom{3}{3} (0,3)^3 (0,7)^0 = 1 \times 0,027 \times 1 = 0,027$$

يكون جدول التوزيع الاحتمالي كما في الجدول الآتي:

س	٠	١	٢	٣
ل (س)	٠,٣٤٣	٠,٤٤١	٠,١٨٩	٠,٠٢٧

فكر وناقش

كيف يمكنك التحقق من صحة حلك للمثال (٤)؟

تدريب ٤

غرس مزارع ٧ شتلات، وكان احتمال نجاح غرس الشتلة الواحدة هو ٦٠٪. ما احتمال نجاح غرس ٣ شتلات على الأقل؟

الأسئلة

- (١) إذا دَلَّ المتغير العشوائي S على مجموع العددين الظاهريين في تجربة إلقاء حجري نرد، وملاحظة الرقمين على الوجهين الظاهريين، فأجب عما يأتي:
- أ) جد القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي S .
- ب) اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي S .
- ج) بين أن L هو اقتران احتمال.

- (٢) إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي S معطى بالجدول الآتي، فما قيمة الثابت A ؟

س	٠	١	٢
ل (س)	٠,٥	٠,١	١ + أ

- (٣) إذا كان S متغيراً عشوائياً ذا حدين، ومعامله: $n = 4$ ، $A = 0,6$ ، فجد كلاً مما يأتي:
- أ) $L (S = 2)$.
- ب) $L (S \leq 4)$.
- ج) $L (S \geq 1)$.

- (٤) صندوق يحوي ٥ كرات، ٣ منها حمراء، والبقية زرقاء اللون. إذا سُحِبَت من الصندوق ٤ كرات على التوالي مع الإرجاع، ودَلَّ المتغير العشوائي S على عدد الكرات الحمراء المسحوبة، فأنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي S .

درس أحمد مساقًا في الرياضيات، وحصل على علامة ٨٧، في حين كانت علامة رامي ٩٠ في المساق نفسه، ولكن في شعبة أخرى. أي الطالبين كان مستواه التحصيلي أفضل في هذا المساق؟

يبدو من أول وهلة أن تحصيل رامي أفضل من تحصيل أحمد؛ لأن علامته أعلى. ولكن، لكي تكون المقارنة دقيقة؛ فلا بد من مراعاة عدد من المعايير، مثل: مستوى أسئلة معلم كل مساق، ومستوى تحصيل طلبة كل شعبة.

إذن، يجب توافر معلومات عن طبيعة توزيع علامات كل شعبة، مثل: المتوسط الحسابي، والانحراف المعياري، وحساب ما يُسمى **العلامة المعيارية**، ثم إجراء عملية المقارنة. والتعريف الآتي يوضح مفهوم العلامة المعيارية.

تعريف

العلامة المعيارية للمشاهدة س هي نسبة انحراف المشاهدة س عن المتوسط الحسابي $\bar{س}$ إلى الانحراف المعياري (ع)، ويُرمز إليها بالرمز: (ز)؛ أي إن:

$$ز_s = \frac{س - \bar{س}}{ع} ، ع \neq \text{صفرًا}.$$

مثال (١)

إذا كان المتوسط الحسابي لعلامات طلاب صف ما في مادة الرياضيات ٧٠، والانحراف المعياري للعلامات ٤، فجد العلامة المعيارية لعلامة كل من الطالب محمد الذي نال علامة ٨٢، والطالب يوسف الذي نال علامة ٦٦

الحل

المتوسط الحسابي (س) = ٧٠

الانحراف المعياري (ع) = ٤

$$٣ = \frac{١٢}{٤} = \frac{٧٠ - ٨٢}{٤} = ٨٢ \text{ ز هي: } ٨٢$$

وهذا يعني أن العلامة المعيارية للطالب محمد هي: ٨٢ تنحرف ثلاثة انحرافات معيارية فوق المتوسط الحسابي.

$$١- = \frac{٤-}{٤} = \frac{٧٠ - ٦٦}{٤} = ٦٦ \text{ ز هي: } ٦٦$$

وهذا يعني أن العلامة المعيارية للطالب يوسف هي: ٦٦ تنحرف انحرافاً معيارياً واحداً تحت المتوسط الحسابي.

تدريب ١

تخضع كتل طلبة الصف الخامس الأساسي في إحدى المدارس لمتوسط حسابي مقداره ٤٠ كغ، ولانحراف معياري مقداره ٤. فإذا كانت كتلة أحد طلبة الصف ٣٨ كغ، فجد العلامة المعيارية لكتلة هذا الطالب.

مثال (٢)

إذا علمت أن المتوسط الحسابي لعلامات طلبة في امتحان الفيزياء هو ٦٠، والانحراف المعياري هو ٦، فجد:

(١) العلامة التي تنحرف فوق المتوسط أربعة انحرافات معيارية.

(٢) العلامة التي تنحرف تحت المتوسط بمقدار ٢,٥

الحل

$$(1) \quad \bar{s} = 60, \quad \sigma = 6, \quad \sigma_s = 4$$

$$\frac{\bar{s} - s}{\sigma} = \sigma_s$$

$$\frac{60 - s}{6} = 4$$

$$60 - s = 24$$

$$\therefore s = 84$$

$$(2) \quad \sigma_s = -2,5 \text{ (لماذا؟)}$$

$$\frac{60 - s}{6} = -2,5$$

$$60 - s = 15$$

$$\therefore s = 45$$

تدريب ٢

جد قيمة المتوسط الحسابي لعلامات طالبة في مادة اللغة الإنجليزية، علمًا بأن الانحراف المعياري للعلامات ٤، وعلامة هديل (٨٥) تنحرف فوق هذا المتوسط بمقدار $\frac{1}{4}$ انحراف معياري.

مثال (٣)

اعتمادًا على الجدول الآتي، أجب عن السؤالين الآتيين:

(١) في أي المبحثين كان تحصيل صفاء أفضل؟

(٢) في أي المبحثين كان تحصيل مريم أضعف؟

المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري	علامة صفاء	علامة مريم
٦٠	٤	٦٨	٧٢
٧٨	٥	٧٣	٨٣

الحل

(١) احسب العلامة المعيارية للطالبة صفاء في كل من مبحثي التاريخ والجغرافيا:

$$z_1 = \frac{60 - 68}{4} = 68$$

$$z_2 = \frac{50 - 73}{5} = 73$$

∴ تحصيل صفاء في مبحث التاريخ أفضل.

(٢) احسب العلامة المعيارية للطالبة مريم في كل من مبحثي التاريخ والجغرافيا:

$$z_3 = \frac{60 - 72}{4} = 72$$

$$z_4 = \frac{78 - 83}{5} = 83$$

∴ تحصيل مريم في مبحث الجغرافيا أضعف.

مثال (٤)

إذا كانت العلامتان المعياريتان ٢، (١-) تقابلان العلامتين ٨٠، ٦٥ على الترتيب، فجد قيمة المتوسط الحسابي، والانحراف المعياري للعلامات الخام.

الحل

$$z_1 = \frac{\bar{x} - 80}{\sigma}$$

..... المعادلة (١).

$$\text{ومنه: } 2\sigma = \bar{x} - 80$$

$$z_2 = \frac{\bar{x} - 65}{\sigma}$$

..... المعادلة (٢).

$$\text{ومنه: } \sigma = \bar{x} - 65$$

ب طرح المعادلة (٢) من المعادلة (١)، ينتج:

$$١٥ = ع٣$$

$$٥ = ع \therefore$$

بتعويض قيمة ع في إحدى المعادلتين، ولتكن المعادلة (١)، ينتج:

$$\bar{س} - ٨٠ = ٥ \times ٢$$

$$\bar{س} = ٧٠ \therefore$$

تدريب ٣

إذا كانت المشاهدتان ٨٤ ، ٧٢ تقابلان العلامتين المعياريتين ١ ، (٢-) على الترتيب، فجد العلامة المعيارية للمشاهدة ٩٠

الأسئلة

(١) إذا كان المتوسط الحسابي لعلامات طلاب صف ما في مادة الكيمياء ٦٠، والانحراف المعياري للعلامات ٣، فجد العلامة المعيارية لعلامة الطالب ساهر الذي نال علامة ٧٢، والعلامة المعيارية للطالب مهند الذي نال علامة ٥٤

(٢) إذا علمت أن المتوسط الحسابي لأطوال طالبات إحدى المدارس هو ٦٠ سم، وأن الانحراف المعياري لأطوالهن ٤، فجد:

أ) الطول الذي ينحرف فوق المتوسط ثلاثة انحرافات معيارية.

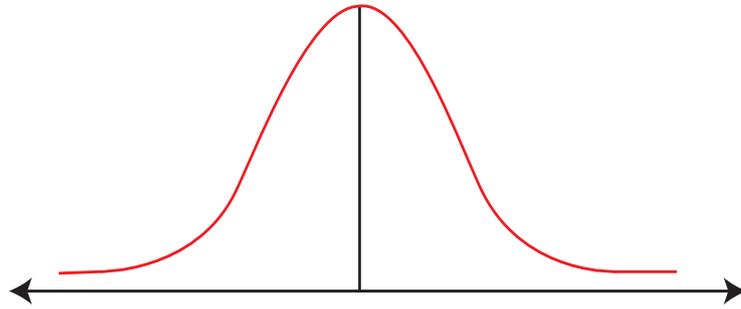
ب) الطول الذي ينحرف تحت المتوسط انحرافين معياريين وربع انحراف معياري.

(٣) إذا كانت المشاهدة ٨ تقابل العلامة المعيارية ٢، وكان الانحراف المعياري ٢، فجد المتوسط الحسابي.

(٤) إذا كانت العلامتان ٣٢، ١٢ تقابلان العلامتين المعياريتين ٣، (-٣) على الترتيب، فجد قيمة المتوسط الحسابي، والانحراف المعياري.

إذا كانت علامات ١٠٠٠٠ طالب في جامعة ما تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي مقداره ٦٥، وانحراف معياري مقداره ٥، فكم يبلغ عدد الطلبة الناجحين، علماً بأن علامة النجاح ٦٠؟

إن الكثير من الظواهر في حياتنا تحتاج إلى دراسة علمية لبيان حقيقتها. وفي حال رُصدت المشاهدات، وتكرّر حدوثها، وعُبر عنها بمنحنى تكراري كالاتي:



فإن توزيع البيانات يمثل **توزيعاً طبيعياً** يتميز بالخصائص الآتية:

- (١) التوزيع الطبيعي متماثل حول العمود المقام على الوسط (μ)، وشكله يشبه الجرس.
 - (٢) للتوزيع الطبيعي قمة واحدة؛ ما يعني أن له منوالاً واحداً ينطبق على المتوسط.
 - (٣) تقارب طرفي منحنى التوزيع الطبيعي من الصفر.
 - (٤) المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي وحدة واحدة.
 - (٥) المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.
 - (٦) المساحة على يمين المتوسط تساوي المساحة على يسار المتوسط، ومقدارها (٠,٥).
- وبوصف ذلك حالة خاصة، فإذا كان المتوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي مساوياً للصفر، وقيمة الانحراف المعياري ١ فإن التوزيع الطبيعي يُسمى **التوزيع الطبيعي المعياري**.
- وللتحقق من ذلك، نفضّ النشاط الآتي:

افرض أن العلامات: (١١، ٧، ٥، ٣، ١٤) تتخذ شكل التوزيع الطبيعي بمتوسط

حسابي مقداره ٨، وانحراف معياري مقداره ٤:

(١) حوّل العلامات الخام إلى علامات معيارية.

(٢) احسب المتوسط الحسابي للعلامات المعيارية، ماذا تلاحظ؟

(٣) احسب الانحراف المعياري للعلامات المعيارية، ماذا تلاحظ؟

وبما أن المتوسط (μ) والانحراف المعياري (σ) يحددان التوزيع الطبيعي، فإن المساحة على

أي فترة تعتمد على قيمتهما، ولهذا لا يمكن وضع جداول لكل حالة؛ ما يُحتمّ تحويله إلى توزيع

طبيعي معياري، ثم إيجاد المساحة المطلوبة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

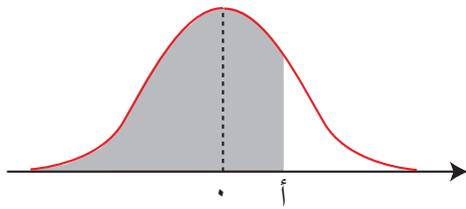
يمكن إيجاد احتمال وقوع المتغير (z) تحت قيمة ما، أو فوقها، أو إذا كان محصوراً بين قيمتين، عن

طريق جدول التوزيع الطبيعي الوارد ذكره في ملحق الكتاب؛ وذلك على النحو الآتي:

• الحالة القياسية (الجدولية)

ل ($z \geq A$) من الجدول مباشرة،

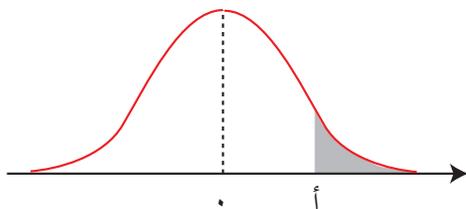
انظر الشكل (٥-٣).



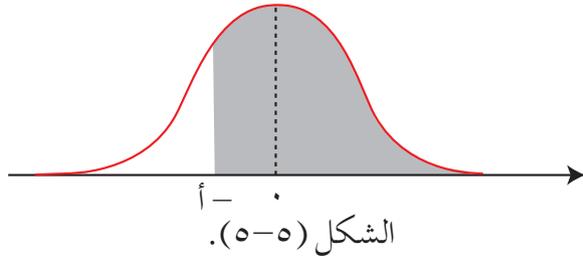
الشكل (٥-٣).

• ل ($z \leq A$) = ١ - ل ($z \geq A$)،

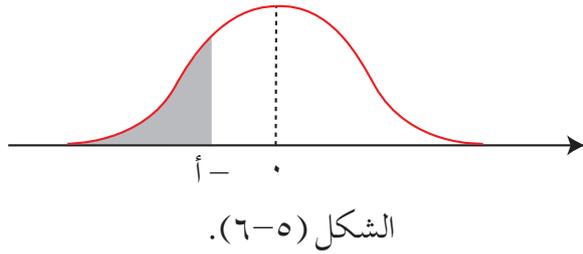
انظر الشكل (٥-٤).



الشكل (٥-٤).



- $L = P(z \leq A) = P(z \geq A)$ ،
انظر الشكل (٥-٥).



- $L = P(z \leq A) = P(z \geq A) - 1$ ،
انظر الشكل (٦-٥).

مثال (١)

إذا كان (ز) متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً، فجدد قيمة كل مما يأتي باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

- (١) $L = P(z \geq 1,8)$.
- (٢) $L = P(z \geq 2,37)$.
- (٣) $L = P(z \leq 1,45)$.
- (٤) $L = P(z \geq 2,25)$.
- (٥) $L = P(1,15 \leq z \leq 1,87)$.

الحل

- (١) $L = P(z \geq 1,8) = 0,9641$ (من الجدول مباشرة)، وهي القيمة الواقعة في الصف (١,٨) مع عمود الأجزاء من مئة (٠,٠٠).
- (٢) $L = P(z \geq 2,37) = 0,9911$ (من الجدول مباشرة)، وهي القيمة الواقعة في الصف (٢,٣) مع عمود الأجزاء من مئة (٠,٠٧).
- (٣) $L = P(z \leq 1,45) = 0,9265$

$$(4) \quad L(z \geq 2,25) = L(z \leq 2,25) - 1 = L(z \geq 2,25) - 1$$

$$= (0,9878) - 1 =$$

$$= 0,0122 =$$

$$(5) \quad L(-1,15 \leq z \leq 1,87) = L(z \geq 1,87) - L(z \geq 1,15) =$$

$$L(z \geq 1,87) - L(z \leq 1,15) =$$

$$= (0,9693) - (1 - L(z \geq 1,15)) =$$

$$= (0,8749 - 1) - 0,9693 =$$

$$= 0,1251 - 0,9693 =$$

$$= 0,8442 =$$

تدريب ١

إذا كان (ز) متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا، فجد قيمة كل مما يأتي باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

$$(1) \quad L(z \geq 2,4)$$

$$(2) \quad L(z \leq 2,85)$$

$$(3) \quad L(z \geq 1,14)$$

$$(4) \quad L(-1,33 \leq z \leq 1,58)$$

يمكن إيجاد الاحتمال للمتغير العشوائي المتصل (س) الذي يتبع أي توزيع طبيعي عن طريق تحويله إلى توزيع طبيعي معياري، وملاحظة أن المتوسط الحسابي لمجتمع الدراسة يُرمز إليه بالرمز (μ) ، وأن الانحراف المعياري لمجتمع الدراسة يُرمز إليه بالرمز (σ) ، فتكون العلامة المعيارية (ز) للمتغير العشوائي (س) هي:

$$z = \frac{s - \mu}{\sigma}$$

مثال (٢)

إذا كان (س) متغيرًا عشوائيًا يتبع التوزيع الطبيعي الذي متوسطه الحسابي ٦٠، وانحرافه المعياري ٤، فجد:

$$(١) \text{ ل (س} \geq ٦٧ \text{).}$$

$$(٢) \text{ ل (س} \leq ٥٨ \text{).}$$

الحل

$$\mu = ٦٠, \sigma = ٤$$

$$(١) \text{ ل (س} \geq ٦٧ \text{) = ل (ز} \geq \frac{٦٧ - ٦٠}{٤} \text{)}$$

$$\text{ل (ز} \geq ١,٧٥ \text{) =}$$

$$٠,٩٥٩٥ =$$

$$(٢) \text{ ل (س} \leq ٥٨ \text{) = ل (ز} \leq \frac{٥٨ - ٦٠}{٤} \text{)}$$

$$\text{ل (ز} \leq -٠,٥ \text{) =}$$

$$\text{ل (ز} \geq ٠,٥ \text{) = ٠,٦٩١٥ =}$$

تدريب ٢

إذا كان (س) متغيرًا عشوائيًا يتبع التوزيع الطبيعي الذي متوسطه الحسابي ٢٥، وانحرافه المعياري ٥، فجد:

$$(١) \text{ ل (س} \geq ٣٣ \text{).}$$

$$(٢) \text{ ل (٢٢} \leq \text{س} \leq ٣٠ \text{).}$$

للتوزيع الطبيعي المعياري الكثير من الاستخدامات العملية، والمثال الآتي يوضح ذلك:

مثال (٣)

إذا كان متوسط أطوال ٥٠٠ شجرة حرجية في إحدى غابات عجلون هو ٨ أمتار، والانحراف المعياري ١,٥، وكانت الأطوال تتوزع توزيعاً طبيعياً، واختيرت إحدى الأشجار عشوائياً، فجد:

- (١) احتمال أن لا يزيد طول الشجرة على ١١ متراً.
- (٢) احتمال أن يكون طول الشجرة أكبر من أو يساوي ٦,٥ أمتار.
- (٣) احتمال أن يكون طول الشجرة محصوراً بين ٦ أمتار و ٩ أمتار.
- (٤) عدد الأشجار التي طولها ٥ أمتار على الأقل.

الحل

إذا كان (س) طول الشجرة، الذي يتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه $\mu = 8$ ، وانحرافه المعياري $\sigma = 1,5$ ، فإن:

(١) احتمال أن لا يزيد طول الشجرة على ١١ متراً هو: $L(س \geq 11)$.

$$L(س \geq 11) = L\left(z \geq \frac{11 - 8}{1,5}\right) = L(z \geq 2) = 0,9772$$

(٢) احتمال أن يكون طول الشجرة أكبر من أو يساوي ٦,٥ أمتار هو:

$$L(س \leq 6,5) = L\left(z \leq \frac{6,5 - 8}{1,5}\right)$$

$$= L(z \leq -1) = 1 - L(z \geq 1) = 0,8413$$

(٣) احتمال أن يكون طول الشجرة محصورًا بين ٦ أمتار و ٩ أمتار هو:

$$\begin{aligned} L &= (6 < S < 9) = \left(\frac{8-6}{1,5} < Z < \frac{8-9}{1,5} \right) \\ &= (0,67 < Z < 1,33) \\ &= L(0,67 < Z) - L(1,33 < Z) \\ &= L(0,67 < Z) - L(1,33 < Z) \\ &= [L(1,33 < Z) - 1] - 0,7486 = \\ &= [0,9082 - 1] - 0,7486 = \\ &= 0,0918 - 0,7486 = \\ &= 0,6568 \end{aligned}$$

(٤) احتمال أن يكون طول الشجرة ٥ أمتار على الأقل هو:

$$\begin{aligned} L &= (S \leq 5) = \left(Z \leq \frac{8-5}{1,5} \right) \\ &= L(Z \leq 2) \end{aligned}$$

$$L(Z \geq 2) = 0,9772$$

∴ عدد الأشجار التي طولها ٥ أمتار على الأقل يساوي:

$$0,9772 \times 500 = 488,6 \approx 488 \text{ شجرة.}$$

تدريب ٣

حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

الأسئلة

(١) إذا كان (ز) متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا، فجد قيمة كل مما يأتي باستخدام جدول التوزيع

الطبيعي المعياري:

(أ) ل (ز) $(1, 2 \geq z)$.

(ب) ل (ز) $(2, 67 \geq z)$.

(ج) ل (ز) $(1, 27 - \leq z)$.

(د) ل (ز) $(2, 14 - \geq z)$.

(هـ) ل $(1, 11 - \geq z \geq 1, 15)$.

(٢) إذا كان (س) متغيرًا عشوائيًا يتبع التوزيع الطبيعي الذي متوسطه الحسابي ٨٠، وانحرافه

المعياري ٥، فجد:

(أ) ل (س) $(76 \geq s)$.

(ب) ل (س) $(88 \leq s)$.

(٣) إذا كان متوسط كتل ١٠٠٠ طالبة في إحدى مدارس عمان هو ٥٥ كيلوغرامًا، والانحراف

المعياري ٢، وكانت الكتل تتوزع توزيعًا طبيعيًا، واختيرت إحدى الطالبات عشوائيًا، فجد:

(أ) احتمال أن لا تزيد كتلة الطالبة على ٥٢ كيلوغرامًا.

(ب) احتمال أن تكون كتلة الطالبة محصورة بين ٥٠ كيلوغرامًا و ٦٠ كيلوغرامًا.

(ج) عدد الطالبات اللواتي تزيد كتلتهن على ٥٦ كيلوغرامًا.

(٤) إذا كانت علامات امتحان عام تتبع توزيعًا طبيعيًا متوسطه الحسابي ٧٠، وانحرافه المعياري

١٠، فما نسبة العلامات التي تقل عن ٦٥؟

النتائج

- ◀ تتعرف مفهوم الارتباط.
- ◀ ترسم شكل الانتشار بين متغيرين، وتحدد نوع الارتباط من شكل الانتشار.
- ◀ تحسب معامل ارتباط بيرسون بين متغيرين، وأثر التعديلات الخطية فيه.
- ◀ تجد معادلة خط الانحدار البسيط بين متغيرين.
- ◀ تطبق معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم أحد المتغيرين، وتجد الخطأ في التنبؤ.

Correlation

الارتباط

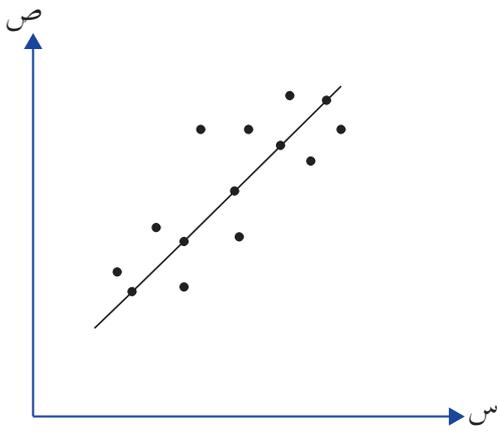
أولاً

ما العلاقة بين سرعة السيارة وزمن الوصول إلى الهدف؟ ما علاقة عدد ساعات العمل بالأجرة اليومية؟ هل توجد علاقة بين عدد ساعات الدراسة والتحصيل الأكاديمي؟ هل توجد علاقة بين لون العيون والذكاء المنطقي الرياضي؟ ما قوة هذه العلاقات؟ ما اتجاهها؟

للإجابة عن هذه التساؤلات التي تحدد العلاقة بين متغيرين، تُجمَع بعض البيانات المتعلقة بهذه المسألة موضوع البحث. فإذا رُمز إلى أحد المتغيرين بالرمز S ، والمتغير الآخر بالرمز V ، فإن البيانات تكون على صورة أزواج مرتبة كالتالي:

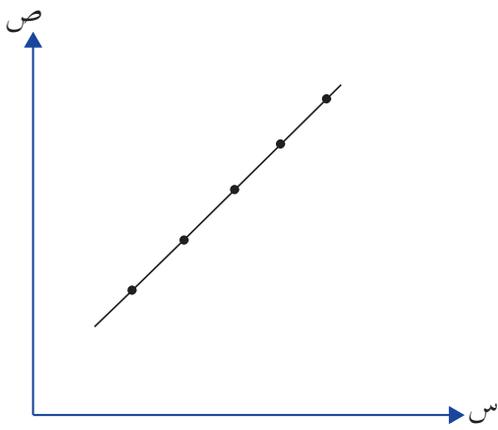
(S_1, V_1)، (S_2, V_2)، (S_3, V_3)، ...، (S_n, V_n)، ثم يصار إلى تعيين هذه الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي، فيُسمَّى الشكل الناتج **شكل الانتشار**. وعن طريق هذا الشكل يمكن تحديد طبيعة العلاقة بين المتغيرين، وقوتها، واتجاهها، علمًا بأنه توجد أنواع للعلاقات الارتباطية، منها:

(١) **العلاقة الطردية (الموجبة):** هي علاقة تربط بين متغيرين، وكلما ازدادت قيمة المتغير الأول ازدادت قيمة المتغير الثاني، مثل علاقة ساعات العمل بالأجرة؛ إذ كلما زادت ساعات العمل زادت الأجرة اليومية. والشكل (٧-٥) يمثل نموذجًا لشكل الانتشار الذي يُعبّر عن هذه العلاقة.



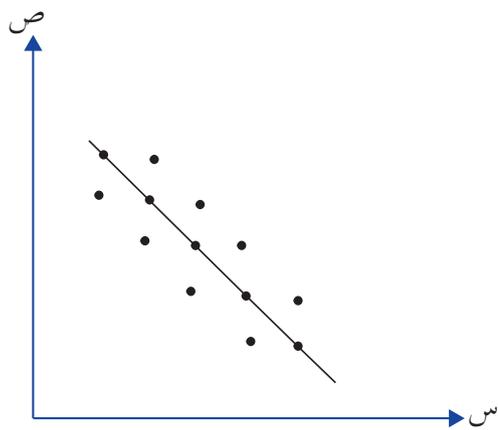
الشكل (٧-٥).

أما إذا وقعت النقاط جميعًا على الخط المستقيم فإن العلاقة تصبح **طردية تامة**، ويكون شكل الانتشار كما في الشكل (٨-٥).



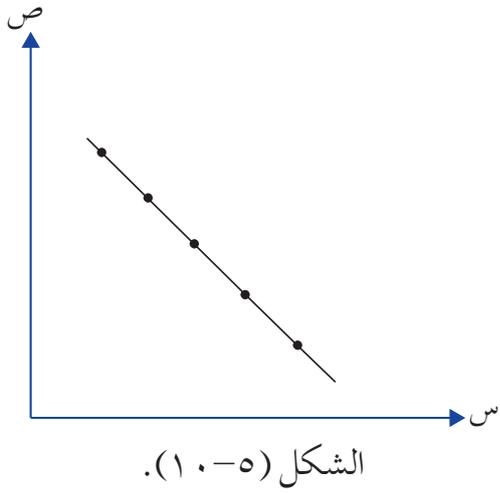
الشكل (٨-٥).

(٢) **العلاقة العكسية (السالبة):** هي علاقة تربط بين متغيرين، وكلما زادت قيمة المتغير الأول قلت قيمة المتغير الثاني، مثل علاقة سرعة سيارة بزمن الوصول؛ إذ كلما زادت سرعة السيارة قل زمن الوصول إلى الهدف. والشكل (٩-٥) يمثل نموذجًا لشكل الانتشار الذي يُعبّر عن هذه العلاقة.

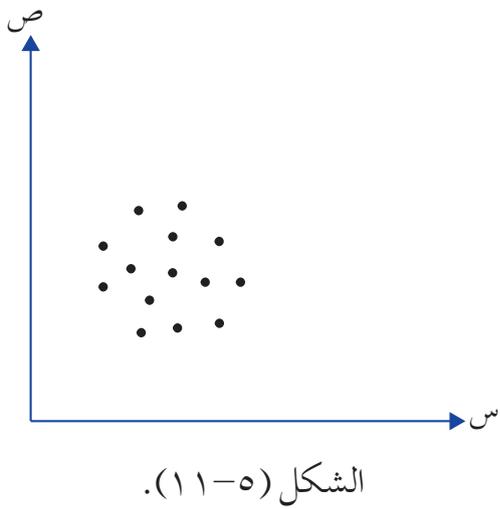


الشكل (٩-٥).

أما إذا وقعت النقط جميعًا على الخط المستقيم فإن العلاقة تصبح **عكسية تامة**، ويكون شكل الانتشار كما في الشكل (١٠-٥).



٣) لا توجد علاقة تربط بين المتغيرين، مثل علاقة المستوى التحصيلي للطلبة بلون عيونهم؛ إذ يتمثل شكل الانتشار في تجمع النقط على صورة دائرة؛ ما يدل على **عدم وجود ارتباط خطي** كما في الشكل (١١-٥).



مثال (١)

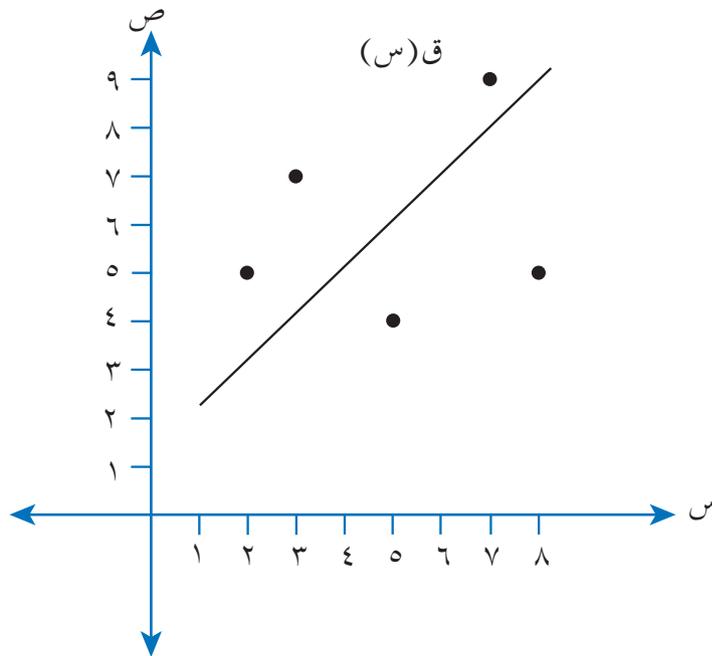
يبين الجدول الآتي علامات ٥ طلاب في امتحاني الرياضيات والتاريخ:

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
علامة الرياضيات (س)	٢	٣	٥	٧	٨
علامة التاريخ (ص)	٥	٧	٤	٩	٥

ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين: س، ص، محددًا نوع العلاقة التي تربط بينهما.

الحل

تُمثّل الأزواج المرتبة: (٥، ٢)، (٧، ٣)، (٤، ٥)، (٩، ٧)، (٥، ٨) في المستوى الإحداثي كما في الشكل (٥-١٢).



الشكل (٥-١٢).

يتبين من شكل الانتشار أن العلاقة التي تربط بين المتغيرين: س، ص هي علاقة طردية (موجبة).

١ تدريب

النقط: (٢، ٨)، (٣، ٦)، (٥، ٥)، (٤، ٧)، (٨، ٢)، (٦، ٣)، (٤، ٧)، (٤، ٦)، (٢، ٨)، (٧، ٤)، (٥، ٥)، (٦، ٣)، (٨، ٢) تمثل القيم المتناظرة لمتغيرين. ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين: س، ص، محدداً نوع العلاقة التي تربط بينهما.

معامل ارتباط بيرسون

تعرفت سابقاً كيف تحدد نوع العلاقة بين متغيرين، عن طريق رسم شكل الانتشار بين المتغيرين، ثم الحكم على نوعية العلاقة الارتباطية، وتقدير قوتها، وستتعرف الآن طريقة جديدة لتحديد نوع العلاقة بين متغيرين وقوتها تحديداً دقيقاً، وذلك باستخدام **قانون بيرسون** في إيجاد **معامل الارتباط** الذي يمكن تعريفه كما يأتي:

إذا كانت $(س_١، ص_١)$ ، $(س_٢، ص_٢)$ ، $(س_٣، ص_٣)$ ، ...، $(س_ن، ص_ن)$ ، ن من الأزواج المرتبة للمتغيرين: س، ص، فإن معامل ارتباط بيرسون الخطي الذي يُرمز إليه بالرمز (ر) بين المتغيرين يُعرف بالعلاقة الآتية:

$$r = \frac{\sum_{k=1}^n (س_k - \bar{س})(ص_k - \bar{ص})}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (س_k - \bar{س})^2 \sum_{k=1}^n (ص_k - \bar{ص})^2}}$$

وترمز $س_k$ إلى قيم المتغير س، وترمز $ص_k$ إلى قيم المتغير ص، حيث $ك = ١، ٢، ٣، \dots، ن$.

يمكن حساب معامل الارتباط بين علامات الرياضيات والتاريخ للطلبة الخمسة، باتباع الخطوات الآتية:

(١) إيجاد المتوسط الحسابي لعلامات مبحث الرياضيات:

$$\bar{س} = \frac{٢٥}{٥} = \frac{(٨+٧+٥+٣+٢)}{٥}$$

(٢) إيجاد المتوسط الحسابي لعلامات مبحث التاريخ:

$$\bar{ص} = \frac{٣٠}{٥} = \frac{(٥+٩+٤+٧+٥)}{٥}$$

٣) إنشاء الجدول الآتي:

$(ص_k - \bar{ص})^2$	$(س_k - \bar{س})^2$	$(س_k - \bar{س})(ص_k - \bar{ص})$	$ص_k - \bar{ص}$	$س_k - \bar{س}$	$ص_k$	$س_k$
١	٩	٣	١-	٣-	٥	٢
١	٤	٢-	١	٢-	٧	٣
٤	٠	٠	٢-	٠	٤	٥
٩	٤	٦	٣	٢	٩	٧
١	٩	٣-	١-	٣	٥	٨
١٦	٢٦	٤	٠	٠	المجموع	

٤) التعويض بقانون معامل الارتباط:

$$r = \frac{\sum_{k=1}^n (س_k - \bar{س})(ص_k - \bar{ص})}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (ص_k - \bar{ص})^2 \sum_{k=1}^n (س_k - \bar{س})^2}}$$

$$r = \frac{4}{\sqrt{16 \times 26}} \approx 0,20$$

∴ توجد علاقة طردية ضعيفة بين علامات هؤلاء الطلبة في هذين المبحثين.

تدريب ٢

احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين: س، ص كما في الجدول الآتي:

١١	١٠	٩	٨	٦	٣	٢	س
٧	٢	٤	٨	٥	١٠	٦	ص

مثال (٢)

إذا كان s ، v متغيرين، وعدد قيم كل منهما ٥، $\sum_{k=1}^5 (s_k - \bar{s})^2 = 25$ ،

$$\sum_{k=1}^5 (v_k - \bar{v})^2 = 16، \sum_{k=1}^5 (s_k - \bar{s})(v_k - \bar{v}) = -15$$

فاحسب معامل ارتباط بيرسون بين هذين المتغيرين، محدداً نوع العلاقة بينهما.

الحل

$$r = \frac{\sum_{k=1}^n (s_k - \bar{s})(v_k - \bar{v})}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (s_k - \bar{s})^2 \sum_{k=1}^n (v_k - \bar{v})^2}}$$

$$r = \frac{-15}{\sqrt{25 \times 16}} = -\frac{15}{20} = -0,75$$

∴ توجد علاقة عكسية قوية بين هذين المتغيرين.

تدريب ٣

إذا كان s ، v متغيرين، وعدد قيم كل منهما ٧، $\sum_{k=1}^7 (s_k - \bar{s})^2 = 4$ ،

$$\sum_{k=1}^7 (v_k - \bar{v})^2 = 9، \sum_{k=1}^7 (s_k - \bar{s})(v_k - \bar{v}) = 2$$

فاحسب معامل ارتباط بيرسون بين هذين المتغيرين، محدداً نوع العلاقة بينهما.

أثر التعديلات الخطية في قيمة معامل ارتباط بيرسون

لمعرفة أثر التعديلات الخطية في قيمة معامل ارتباط بيرسون، نفذ النشاط الآتي:

نشاط

- احسب معامل الارتباط بين المتغيرين: س، ص للقيم التالية كما في الجدول الآتي:

س	٢	٥	٦	٧
ص	١	٤	٩	١٠

- اضرب قيم س كلها في العدد ٣، وقيم ص كلها في العدد ٢، ثم احسب معامل الارتباط بين القيم الجديدة، ماذا تلاحظ؟
- اضرب قيم س كلها في العدد -٢، وقيم ص كلها في العدد -٣، ثم احسب معامل الارتباط بين القيم الجديدة، ماذا تلاحظ؟
- اضرب قيم س كلها في العدد ٣، وقيم ص كلها في العدد -٢، ثم احسب معامل الارتباط بين القيم الجديدة، ماذا تلاحظ؟

بوجه عام:

إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين: س، ص هو (ر)، وعُدلت قيم كل منهما بحسب العلاقة:

$$س^* = أس + ب، ص^* = جص + د، حيث:$$

أ، ب، ج، د أعداد حقيقية، أ \neq صفراً، ج \neq صفراً، فإن معامل الارتباط بين س*، ص* يساوي:

(١) إذا كانت إشارتا أ، ج متشابهتين.

(٢) - إذا كانت إشارتا أ، ج مختلفتين.

فكر وناقش

صِف بالكلمات أثر التعديلات الخطئية في قيمة معامل ارتباط بيرسون.

مثال (٣)

إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين: س، ص هو $-0,8$ ، فجد معامل الارتباط بين س*، ص* اللذين يمثلان المشاهدات بعد التعديل في كل مما يأتي:

$$(١) \text{ س } * = ٢\text{س} + ٥ ، \text{ ص } * = \text{ص} - ٥$$

$$(٢) \text{ س } * = -٤\text{س} + ٥ ، \text{ ص } * = ٦\text{ص} - ٥$$

$$(٣) \text{ س } * = ٥ - ٨\text{س} ، \text{ ص } * = -\text{ص} - ٥$$

الحل

(١) معامل س هو (٢) موجب، ومعامل ص هو (١) موجب، والمعاملان لهما الإشارة نفسها؛ لذا فإن $r = -0,8$

(٢) معامل س هو (-٤) سالب، ومعامل ص هو (٦) موجب، والمعاملان ليس لهما الإشارة نفسها؛ لذا فإن $r = 0,8$

(٣) معامل س هو (-٨) سالب، ومعامل ص هو (-١) سالب، والمعاملان لهما الإشارة نفسها؛ لذا فإن $r = -0,8$

تدريب ٤

إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين: س، ص هو $0,65$ ، فجد معامل الارتباط بين س*، ص* في كل مما يأتي:

$$(١) \text{ س } * = -٨\text{س} + ٥ ، \text{ ص } * = ٨ - \text{ص}$$

$$(٢) \text{ س } * = \text{س} + ٥ ، \text{ ص } * = ٦\text{ص} - ٥$$

$$(٣) \text{ س } * = ٢٠ - ٧\text{س} ، \text{ ص } * = \text{ص} - ٥$$

الأسئلة

- (١) النقط: (٧، ٧)، (٦، ٨)، (٥، ٦)، (٨، ٥)، (٤، ٩)، (٤، ٦)، (٣، ١٠) تمثل القيم المتناظرة للمتغيرين. ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين: س، ص، محدداً نوع العلاقة التي تربط بينهما.
- (٢) الجدول الآتي يبين بُعد مؤسسة استهلاكية عن مركز المدينة بالكيلومتر (س)، وحجم مبيعات المؤسسة بالألف دينار شهرياً (ص) لخمسة مؤسسات. احسب معامل الارتباط بين المتغيرين: س، ص.

س	٧	٦	٢	٣	١٢
ص	١١	٩	٦	٨	٦

- (٣) احسب معامل الارتباط بين المتغيرين: س، ص للقيم المبينة في الجدول الآتي:

س	٦٠	٧٠	٧٥	٩٥
ص	٨٠	١٠٠	٩٠	٥٠

(٤) إذا كان س، ص متغيرين، وعدد قيم كل منهما (٧)، $\sum_{k=1}^7 (s_k - \bar{s})(v_k - \bar{v}) = 20$ ،

$$\sum_{k=1}^7 (v_k - \bar{v})^2 = 500، \quad \sum_{k=1}^7 (s_k - \bar{s})^2 = 80$$

- (أ) جد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين: س، ص. (ب) حدد نوع العلاقة بينهما.

- (٥) أي معاملات الارتباط الآتية أقوى:

(أ) ٠,٧ (ب) -٠,٩ (ج) ٠,٨ (د) -٠,٨

- (٦) إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين: س، ص هو ٠,٨٥، فجد معامل الارتباط بين

س*، ص* في كل مما يأتي:

(أ) س* = ٩ - س + ١٥، ص* = ٨ - ٢ ص

(ب) س* = ٤ + س + ٥٢، ص* = ٥ - ص

(ج) س* = ١٧ - ٧ س، ص* = ٥ - ٣ ص

لاحظ صاحب محل لبيع الأجهزة الكهربائية وجود علاقة بين عدد ساعات العمل وعدد الأجهزة المباعة كالآتي:

٨	٥	٤	٢	١	عدد ساعات العمل
١٢	٨	٧	٥	٣	عدد الأجهزة المباعة

بناءً على المعطيات السابقة، هل يستطيع صاحب المحل أن يتنبأ بعدد الأجهزة المباعة إذا عمل مدة ١٠ ساعات؟

تعرفت سابقاً كيف يمكن رسم شكل الانتشار بين متغيرين، وأن النقط (س، ص) التي تربطها علاقة خطية تتجمع حول خط مستقيم يمر بعدد منها، ويتوسط النقط الباقية التي تتوزع على جانبي الخط المستقيم، وأن النقط التي لا تقع على الخط المستقيم تُسبب خطأً في التنبؤ يُعبّر عنه بالصورة الآتية:

الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية - القيمة المتنبأ بها

وإذا رُمز إلى القيمة الحقيقية بالرمز ص_ر، وإلى القيمة المتنبأ بها بالرمز ص_ر، فإن

الخطأ في التنبؤ = ص_ر - ص_ر

يمكن تمثيل العلاقة بين المتغيرين بمعادلة الخط المستقيم الآتية: ص_ر = أس + ب، وتُعرف هذه

المعادلة باسم خط الانحدار، حيث:

$$أ = \frac{\sum_{k=1}^n (س_k - \bar{س})(ص_k - \bar{ص})}{\sum_{k=1}^n (س_k - \bar{س})^2}$$

$$ب = \bar{ص} - أ \bar{س}$$

$$ب = \bar{ص} - أ \bar{س}$$

يمكن حل المسألة الواردة في بداية الدرس باتباع الخطوات الآتية:

$$(1) \text{ إيجاد الوسط الحسابي لقيم (س)، وهو } \bar{س} = \frac{20}{5} = \frac{(1+2+4+5+8)}{5}$$

$$(2) \text{ إيجاد الوسط الحسابي لقيم (ص)، وهو } \bar{ص} = \frac{35}{5} = \frac{(3+5+7+8+12)}{5}$$

(3) إنشاء الجدول الآتي:

$س_k$	$ص_k$	$س_k - \bar{س}$	$ص_k - \bar{ص}$	$(س_k - \bar{س})(ص_k - \bar{ص})$	$(س_k - \bar{س})^2$
1	3	-3	-4	12	9
2	5	-2	-2	4	4
4	7	0	0	0	0
5	8	1	1	1	1
8	12	4	5	20	16
المجموع	0	0	0	37	30

$$(4) \text{ إيجاد قيمة أ} = \frac{\sum_{k=1}^5 (س_k - \bar{س})(ص_k - \bar{ص})}{\sum_{k=1}^5 (س_k - \bar{س})^2}$$

$$1,2 = \frac{37}{30} =$$

(5) إيجاد قيمة ب = $\bar{ص} - \bar{س}$

$$2,2 = 4 \times 1,2 - 7 =$$

(6) معادلة خط الانحدار $\hat{ص} = \text{أس} + \text{ب}$

$$\hat{ص} = 1,2س + 2,2$$

والآن، إذا عمل صاحب المحل مدة 10 ساعات $\leftarrow س = 10$ ، فإن:

$$\hat{ص} = 1,2 \times 10 + 2,2 = 14,2 \approx 14 \text{ جهازًا.}$$

∴ يمكن أن يبيع صاحب المحل 14 جهازًا إذا عمل مدة 10 ساعات.

الجدول الآتي يبين علامات خمسة طلاب في امتحان لمبثي الجغرافيا والتاريخ، علامته القصوى ١٠:

٥	٤	٣	٢	١	رقم الطالب
١٠	٨	٦	٥	١	علامة الجغرافيا (س)
١٠	٩	٨	٧	٦	علامة التاريخ (ص)

- (١) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بعلامة مبحث التاريخ إذا علمت علامة مبحث الجغرافيا.
- (٢) قدر علامة طالب في مبحث التاريخ إذا كانت علامته في مبحث الجغرافيا ٧
- (٣) جد الخطأ في التنبؤ بعلامة طالب في مبحث التاريخ إذا كانت علامته في مبحث الجغرافيا ٥

الحل

(١) لإيجاد معادلة خط الانحدار:

$$\bar{y} = \frac{30}{5} = \frac{(10+8+6+5+1)}{5} = \text{وهو } \bar{س}$$

$$\bar{x} = \frac{40}{5} = \frac{(10+9+8+7+6)}{5} = \text{وهو } \bar{ص}$$

أنشئ الجدول الآتي:

$(س_ك - \bar{س})^2$	$(س_ك - \bar{س})(ص_ك - \bar{ص})$	$ص_ك - \bar{ص}$	$س_ك - \bar{س}$	$ص_ك$	$س_ك$
٢٥	١٠	٢-	٥-	٦	١
١	١	١-	١-	٧	٥
٠	٠	٠	٠	٨	٦
٤	٢	١	٢	٩	٨
١٦	٨	٢	٤	١٠	١٠
٤٦	٢١	٠	٠	المجموع	

$$\frac{\sum_{k=1}^5 (s_k - \bar{s})(v_k - \bar{v})}{\sum_{k=1}^5 (s_k - \bar{s})^2} = \text{جد قيمة أ}$$

$$0,46 = \frac{21}{46} =$$

$$\text{جد قيمة ب } \bar{v} - \bar{s} =$$

$$0,2 = 6 \times 0,46 - 8 =$$

∴ معادلة خط الانحدار $\hat{v} = \bar{s} + 0,46s$ هي:

$$\hat{v} = 0,46s + 0,2$$

(٢) إذا كانت علامة الطالب في مبحث الجغرافيا ٧، فإن $s = 7$

$$\therefore \hat{v} = 0,46 \times 7 + 0,2 = 3,42 \approx 3$$

(٣) الطالب الذي حصل على علامة ٥ في مبحث الجغرافيا كانت علامته الحقيقية في مبحث التاريخ ٧ (انظر الجدول ١).

العلامة المتنبأ بها في مبحث التاريخ هي: $\hat{v} = 0,46 \times 5 + 0,2 = 2,5$

$$\therefore \text{الخطأ في التنبؤ} = v_r - \hat{v} = 7 - 2,5 = 4,5$$

تدريب ١

الجدول الآتي يبين معدل أربعة طلاب في امتحانات الثانوية العامة والجامعة:

رقم الطالب	١	٢	٣	٤
معدل الثانوية العامة (س)	٦٥	٧٠	٨٠	٨٥
معدل الجامعة (ص)	٦٠	٦٠	٧٠	٩٠

أجب عما يأتي:

(١) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بمعدل الجامعة إذا عُلم معدله في الثانوية العامة.

(٢) تنبأ بمعدل طالب في الجامعة إذا كان معدله في الثانوية العامة ٨٨

(٣) جد الخطأ في التنبؤ بمعدل طالب في الجامعة إذا كان معدله في الثانوية العامة ٧٠

مثال (٢)

إذا كان s ، v متغيرين، وعدد قيم كل منهما ٨، $\sum_{k=1}^8 (s_k - \bar{s})^2 = 15$ ،

$\sum_{k=1}^8 (s_k - \bar{s})(v_k - \bar{v}) = 60$ ، $\bar{s} = 12$ ، $\bar{v} = 50$ ، فجد معادلة خط الانحدار

للتنبؤ بقيم v إذا علمت قيم s .

الحل

$$\frac{\sum_{k=1}^8 (s_k - \bar{s})(v_k - \bar{v})}{\sum_{k=1}^8 (s_k - \bar{s})^2} = \text{جد قيمة أ}$$

$$\sum_{k=1}^8 (s_k - \bar{s})^2$$

$$\epsilon = \frac{60}{15} =$$

$$\text{جد قيمة ب} = \bar{v} - \bar{s} \epsilon =$$

$$2 = 12 \times \epsilon - 50 =$$

∴ معادلة خط الانحدار: $\hat{v} = \bar{s} + \epsilon$

$$\hat{v} = \bar{s} + \epsilon = 2 + 12$$

تدريب ٢

إذا علمت أن معادلة خط الانحدار للعلاقة بين عدد ساعات العمل اليومي (s) وعدد الأخطاء

التي يرتكبها الموظف في هذا اليوم (v) هي: $\hat{v} = 6 + 0.1s + 1$ ، فأجب عما يأتي:

(١) تنبأ بعدد الأخطاء التي سيرتكبها موظف يعمل مدة ١٠ ساعات يوميًا.

(٢) إذا كان عدد الأخطاء التي يرتكبها موظف يعمل ١٥ ساعة يوميًا هي ٦ أخطاء، فجد الخطأ

في التنبؤ.

الأسئلة

(١) الجدول الآتي يبين معدل خمسة طلاب في الصفين: التاسع والعاشر.

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
التاسع (س)	٥٠	٥٥	٧٠	٨٥	٩٠
العاشر (ص)	٦٠	٧٠	٦٠	٧٠	٨٠

أ) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بمعدل الطالب في الصف العاشر إذا عُلم معدله في الصف التاسع.

ب) تنبأ بمعدل طالب في الصف العاشر إذا كان معدله في الصف التاسع ٨٨

ج) جد الخطأ في التنبؤ بمعدل طالب في الصف العاشر إذا كان معدله في الصف التاسع ٩٠

$$(٢) \text{ إذا كان } s, \text{ ص متغيرين، وعدد قيم كل منهما } ٨, \sum_{k=1}^8 (s_k - \bar{s}) = ٢٠$$

$$\sum_{k=1}^8 (s_k - \bar{s})(v_k - \bar{v}) = ٤٠, \bar{s} = ١٥, \bar{v} = ٤٥, \text{ فجد معادلة خط الانحدار}$$

للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س.

(٣) إذا علمت أن معادلة خط الانحدار للعلاقة بين قيمة رأس المال (س) والأرباح السنوية لشركة

بالألف دينار (ص) هي: $\hat{v} = ٣ + ٠,٣س + ١٠$ ، فجد الخطأ في التنبؤ بأرباح شركة رأس مالها

٦٠ ألف دينار، وأرباحها السنوية ٤, ٢٧ ألف دينار.

أسئلة الوحدة

- (١) بكم طريقة يمكن اختيار ٤ مهندسين، و ٣ فنيين لتكوين لجنة من بين ٥ مهندسين و ١٠ فنيين؟
- (٢) جد قيمة (ر) التي تحقق المعادلة: $360 = (ر, ٦) ل ٣$
- (٣) إذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذا حدين، ومعاملاته: $ن = ٢, أ = ٤, ٠$ ، فجد:
 أ) قيم (س).
 ب) التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س).
- (٤) إذا كان المتوسط الحسابي لأعمار مجموعة من الأشخاص هو ٤٢ سنة، والانحراف المعياري لها ٤، فجد العمر الذي ينحرف انحرافين معياريين تحت الوسط الحسابي.
- (٥) إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) معطى بالمجموعة:
 $\{(١, ٤, ٠), (٢, ٥, ٠), (٣, ٠, ٣), (٤, ٠, ٠)\}$ ، فجد قيمة (ب).
- (٦) إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين: س، ص هو $(٠, ٨-)$ ، فجد معامل الارتباط بين س*، ص* في كل مما يأتي:
 أ) $س* = ١٠ - س$ ، $ص* = ٨ - ص$
 ب) $س* = ٤ + س$ ، $ص* = ٥ - ص$
- (٧) الجدول الآتي يبين القيم المتناظرة للمتغيرين: س، ص:
- | | | | | |
|----|---|---|---|---|
| ٥ | ٤ | ٢ | ١ | س |
| ١٠ | ٧ | ٦ | ٥ | ص |
- أ) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيمة ص إذا عُلِّمت قيمة س.
 ب) تنبأ بقيمة ص إذا كان س = ١٤
 ج) جد الخطأ في التنبؤ بقيمة ص إذا كان س = ٤

٨) إذا كان (ز) متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً، فجد قيمة كل مما يأتي باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

أ) ل (ز) $(1, 7 \geq z)$. ب) ل (ز) $(2, 15 \geq z)$.

ج) ل (ز) $(1, 14 - \leq z)$. د) ل (ز) $(2, 5 - \geq z)$.

هـ) ل (ز) $(1, 1 \geq z \geq 1, 32 -)$.

٩) إذا كان (س) متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي ٩٠، وانحرافه المعياري (٥)، فجد:

أ) ل (س) $(85 \geq s)$. ب) ل (س) $(93 \leq s)$.

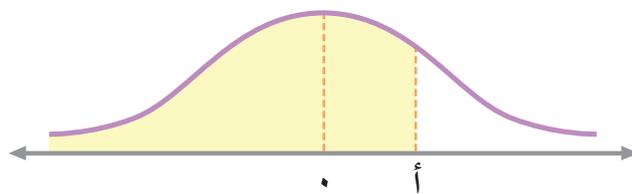
١٠) إذا كان متوسط معدل ١٠٠٠ طالبة في إحدى مدارس عمّان ٨٠، والانحراف المعياري ٥، وكانت المعدلات تتوزع توزيعاً طبيعياً، واختيرت إحدى الطالبات عشوائياً، فجد:

أ) احتمال أن لا يزيد معدل الطالبة على ٧٥

ب) احتمال أن يكون معدل الطالبة محصوراً بين ٧٠ و ٩٠

ج) عدد الطالبات اللواتي يزيد معدل كل منهن على ٧٠

جدول التوزيع الطبيعي



٠,٠٩	٠,٠٨	٠,٠٧	٠,٠٦	٠,٠٥	٠,٠٤	٠,٠٣	٠,٠٢	٠,٠١	٠,٠٠	f
٠,٥٣٥٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥١٩٩	٠,٥١٦٠	٠,٥١٢٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٠٠	٠,٠
٠,٥٧٥٣	٠,٥٧١٤	٠,٥٦٧٥	٠,٥٦٣٦	٠,٥٥٩٦	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥١٧	٠,٥٤٧٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٣٩٨	٠,١
٠,٦١٤١	٠,٦١٠٣	٠,٦٠٦٤	٠,٦٠٢٦	٠,٥٩٨٧	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩١٠	٠,٥٨٧١	٠,٥٨٣٢	٠,٥٧٩٣	٠,٢
٠,٦٥١٧	٠,٦٤٨٠	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٠٦	٠,٦٣٦٨	٠,٦٣٣١	٠,٦٢٩٣	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢١٧	٠,٦١٧٩	٠,٣
٠,٦٨٧٩	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٠٨	٠,٦٧٧٢	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٠٠	٠,٦٦٦٤	٠,٦٦٢٨	٠,٦٥٩١	٠,٦٥٥٤	٠,٤
٠,٧٢٢٤	٠,٧١٩٠	٠,٧١٥٧	٠,٧١٢٣	٠,٧٠٨٨	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠١٩	٠,٦٩٨٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩١٥	٠,٥
٠,٧٥٤٩	٠,٧٥١٧	٠,٧٤٨٦	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٢٢	٠,٧٣٨٩	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٢٤	٠,٧٢٩١	٠,٧٢٥٧	٠,٦
٠,٧٨٥٢	٠,٧٨٢٣	٠,٧٧٩٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٠٤	٠,٧٦٧٣	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦١١	٠,٧٥٨٠	٠,٧
٠,٨١٣٣	٠,٨١٠٦	٠,٨٠٧٨	٠,٨٠٥١	٠,٨٠١٣	٠,٧٩٩٥	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٣٥	٠,٧٩١٠	٠,٧٨٨١	٠,٨
٠,٨٣٨٩	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣١٥	٠,٨٢٨٩	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢١٢	٠,٨١٨٦	٠,٨١٥٩	٠,٩
٠,٨٦٢١	٠,٨٥٩٩	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٠٨	٠,٨٤٨٥	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤١٣	١,٠
٠,٨٨٣٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٠٨	٠,٨٦٨٦	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٤٣	١,١
٠,٩٠١٥	٠,٨٩٩٧	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٠٧	٠,٨٨٨٨	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٤٩	١,٢
٠,٩١٧٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٤٧	٠,٩١٣١	٠,٩١١٥	٠,٩٠٩٩	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٣٢	١,٣
٠,٩٣١٩	٠,٩٣٠٦	٠,٩٢٩٢	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩١٩٢	١,٤
٠,٩٤٤١	٠,٩٤٢٩	٠,٩٤١٨	٠,٩٤٠٦	٠,٩٣٩٤	٠,٩٣٨٢	٠,٩٣٧٠	٠,٩٣٥٧	٠,٩٣٤٥	٠,٩٣٣٢	١,٥
٠,٩٥٤٥	٠,٩٥٣٥	٠,٩٥٢٥	٠,٩٥١٥	٠,٩٥٠٥	٠,٩٤٩٥	٠,٩٤٨٤	٠,٩٤٧٤	٠,٩٤٦٣	٠,٩٤٥٢	١,٦
٠,٩٦٣٣	٠,٩٦٢٥	٠,٩٦١٦	٠,٩٦٠٨	٠,٩٥٩٥	٠,٩٥٩١	٠,٩٥٨٢	٠,٩٥٧٣	٠,٩٥٦٤	٠,٩٥٥٤	١,٧
٠,٩٧٠٦	٠,٩٦٩٩	٠,٩٦٩٣	٠,٩٦٨٦	٠,٩٦٧٨	٠,٩٦٧١	٠,٩٦٦٤	٠,٩٦٥٦	٠,٩٦٤٩	٠,٩٦٤١	١,٨
٠,٩٧٦٧	٠,٩٧٦١	٠,٩٧٥٦	٠,٩٧٥٠	٠,٩٧٤٤	٠,٩٧٣٨	٠,٩٧٣٢	٠,٩٧٢٦	٠,٩٧١٩	٠,٩٧١٣	١,٩
٠,٩٨١٧	٠,٩٨١٢	٠,٩٨٠٨	٠,٩٨٠٣	٠,٩٧٩٨	٠,٩٧٩٣	٠,٩٧٨٨	٠,٩٧٨٣	٠,٩٧٧٨	٠,٩٧٧٢	٢,٠
٠,٩٨٥٧	٠,٩٨٥٤	٠,٩٨٥٠	٠,٩٨٤٦	٠,٩٨٤٢	٠,٩٨٣٨	٠,٩٨٣٤	٠,٩٨٣٠	٠,٩٨٢٦	٠,٩٨٢١	٢,١
٠,٩٨٩٠	٠,٩٨٨٧	٠,٩٨٨٤	٠,٩٨٨١	٠,٩٨٧٨	٠,٩٨٧٥	٠,٩٨٧١	٠,٩٨٦٨	٠,٩٨٦٤	٠,٩٨٦١	٢,٢
٠,٩٩١٦	٠,٩٩١٣	٠,٩٩١١	٠,٩٩٠٩	٠,٩٩٠٦	٠,٩٩٠٤	٠,٩٩٠١	٠,٩٨٩٨	٠,٩٨٩٦	٠,٩٨٩٣	٢,٣
٠,٩٩٣٦	٠,٩٩٣٤	٠,٩٩٣٢	٠,٩٩٣١	٠,٩٩٢٩	٠,٩٩٢٧	٠,٩٩٢٥	٠,٩٩٢٢	٠,٩٩٢٠	٠,٩٩١٨	٢,٤
٠,٩٩٥٢	٠,٩٩٥١	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٤٨	٠,٩٩٤٦	٠,٩٩٤٥	٠,٩٩٤٣	٠,٩٩٤١	٠,٩٩٤٠	٠,٩٩٣٨	٢,٥
٠,٩٩٦٤	٠,٩٩٦٣	٠,٩٩٦٢	٠,٩٩٦١	٠,٩٩٦٠	٠,٩٩٥٩	٠,٩٩٥٧	٠,٩٩٥٦	٠,٩٩٥٥	٠,٩٩٥٣	٢,٦
٠,٩٩٧٤	٠,٩٩٧٣	٠,٩٩٧٢	٠,٩٩٧١	٠,٩٩٧٠	٠,٩٩٦٩	٠,٩٩٦٨	٠,٩٩٦٧	٠,٩٩٦٦	٠,٩٩٦٥	٢,٧
٠,٩٩٨١	٠,٩٩٨٠	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٨	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٦	٠,٩٩٧٥	٠,٩٩٧٤	٢,٨
٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨١	٢,٩
٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٣,٠
٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩٠	٣,١
٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٣,٢
٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٣,٣
٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٣,٤

قائمة المراجع

أولاً: المراجع العربية

- ١- منصور عوض، مبادئ الإحصاء، عمّان: دار الصفاء للنشر، ٢٠٠٦م.
- ٢- إدارة المناهج والكتب المدرسية (الأردن) - الرياضيات للمرحلة الثانوية / الفرع الأدبي (المستويان: الثالث والرابع)، عمّان، ط١، وزارة التربية والتعليم، ٢٠١٦م.

ثانياً: المراجع الأجنبية

- 1- Howard Anton, Irl Bivens, Stephen Davis- **Calculus Early Transcendentals** - Tenth Edition.
- 2- Larson, **Hosteler-Precalculus** - 7th Edition - Boston.
- 3- Salas, Hille, Etgen - **Calculus one and Several Variables** -Tenth Edition 2007 John Willy and sons.

