إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات (٧٧ ٨٨ ٥٣١ ٠٧٨)

عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

منهاجي

الرياضيات

(الإضافية للصناعي والفندقي)

الصف الثاني الثانوي

2015 / 2014

المستوى الرابع

وحدة التكامل

- شرح وأمثلة
- تمارين
- جميع أسئلة الوزارة(٢٠٠٨-٢٠١٥)

المعلم : عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

اسم الطالب :

١)التكامل هو عملية عكسية للتفاضل ورمزه ($\int$)

أي بما أن مشتقة (س٢) تساوي(٢س) فإن تكامل (٢س) يساوي (س٢ + جـ) حيث جـ عدد ثابت يسمى ثابت التكامل .

لذلك فالتعبير ($\int$ ق(س) دس) يعني ما هو الاقتران الذي مشتقته ق(س) ؟

ملاحظة : دس تعني أن التكامل بدلالة س (وليس ص أو م ...)

مثلاً : $\int$ جتا س دس = جا س + جـ لأن مشتقة جا س + جـ هي جتا س

قاعدة (١) : تكامل أي عدد ثابت = نفس العدد الثابت مضروباً في (س) ومضافاً إليه ثابت التكامل جـ

أو : $\int$ أ دس = أ س + جـ

مثلاً : ١) $\int$ ٥ دس = ٥ س + جـ ٢) $\int$ -٤ دس = -٤س + جـ ٣) $\int \frac{٣}{٧}$ دس = $\frac{٣}{٧}$ س + جـ

قاعدة (٢) : تكامل حد واحد في (س) = إضافة (١) إلى قوة (س) والقسمة على ناتج الجمع مضافاً إليه ثابت التكامل جـ

أو : $\int$ س^{م} دس = $\frac{س^{م+١}}{م+١}$ + جـ (بشرط أن قوة س لا تساوي -١ (هذه حالة خاصة))

مثال : ١) $\int$ س^{٣} دس = $\frac{س^{٣+١}}{٣+١}$ + جـ = $\frac{س^{٤}}{٤}$ + جـ ٢) $\int$ س$^{-٦}$ دس = $\frac{س^{-٦+١}}{-٦+١}$ + جـ = $\frac{س^{-٥}}{-٥}$ + جـ

٣) $\int$ س$^{\frac{٣}{٤}}$ دس = $\frac{س^{\frac{٣}{٤}+١}}{\frac{٣}{٤}+١}$ + جـ = $\frac{س^{\frac{٧}{٤}}}{\frac{٧}{٤}}$ + جـ

ملاحظة :عند إضافة (١) إلى أي كسر يمكن استخدام القاعدة :

$$\boxed{\frac{\text{البسط + المقام}}{\text{المقام}}}$$

مثلاً : $\frac{٤}{٥}$ + ١ = $\frac{٤ + ٥}{٥}$ = $\frac{٩}{٥}$

قاعدة (٣) : يمكن إخراج العدد الثابت خارج التكامل في حالة الضرب : ($\int$ م ق(س) دس = م $\int$ ق(س) دس)

مثلاً : $\int$ ٦ س٤ دس = ٦ $\int$ س٤ دس = ٦ $\frac{س^{٥}}{٥}$ + جـ

أو نكامل وكأن العدد الثابت غير موجود

مثلاً : $\int$ -٧ س^{٥} دس = -٧ $\frac{س^{٦}}{٦}$ + جـ

ملاحظة : هناك ٣ احتمالات لقوة س :

١) عدد موجب ٢) عدد سالب ٣) عدد غير صحيح (كسر)

عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات (078 531 88 77)

تمارين: جد التكاملات التالية

١) ∫ ٤س دس =   ٢) ∫ ٣س^{٢} دس =   ٣) ∫ س$^{-٢}$ دس =

٤) ∫ س$^{\frac{٣}{٧}}$ دس =   ٥) ∫ س$^{-\frac{٦}{٥}}$ دس =   ٦) ∫ ٧ دس =

قاعدة (٤) :إذا كانت قوة س تساوي (-١) أو س في المقام وقوتها (١) فإن التكامل يساوي لــو$_{هـ}$ س + جـ

أو ∫ $\frac{١}{س}$ دس = لــو$_{هـ}$ س + جـ

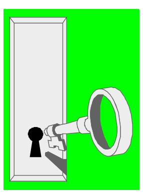
قاعدة (٥) :تكامل الاقتران الأسي هـ^{س} هو نفسه + جـ   أو ∫ هـ^{س} دس = هـ^{س} + جـ

قاعدة (٦) :تكامل الاقترانات الدائرية :

∫ جتا س دس = جا س + جـ   ،   ∫ جا س دس = - جتا س + جـ   ،   ∫ قا^{٢} س دس = ظا س + جـ

مثلاً : (١) ∫ ٨ جاس دس = – ٨ جتاس + جـ

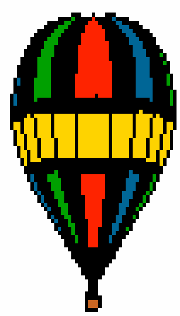
٢) ∫ – $\frac{٣}{٤}$ قا^{٢}س دس يساوي = – $\frac{٣}{٤}$ ظاس + جـ



ملخص القواعد الخاصة بالتكامل

مراجعة المستوى الثالث(التفاضل)

ق (س)	ق َ (س)
٨	صفر
٥س	٥
٧س^{٤}	٢٨س^{٣}
لــو$_{هـ}$ س	$\frac{١}{س}$
هـ^{س}	هـ^{س}
جـا س	جتـا س
جتـا س	– جـا س
ظـا س	قـا^{٢} س



المستوى الرابع (التكامل)

الاقتران	تكامله
∫ صفر دس	جـ : عدد ثابت
∫ ٥ دس	٥س + جـ
∫ ٢٨س^{٣} دس	٧س^{٤} + جـ
∫ $\frac{١}{س}$ دس	لــو$_{هـ}$ س + جـ
∫ هـ^{س} دس	هـ^{س} + جـ
∫ جـا س دس	- جتـا س+ جـ
∫ جتـا س دس	جـا س+ جـ
∫ قـا^{٢} س دس	ظـا س + جـ

عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

٧) يمكن توزيع التكامل في حالتي الجمع والطرح فقط: $\int (\text{ق(س)} \pm \text{هـ(س)})\, \text{دس} = \int \text{ق(س) دس} \pm \int \text{هـ(س) دس}$

مثلاً $\int (\text{س}^{-5} + \frac{2}{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}})\, \text{دس}$ ، س ≠ ٠

$$= \frac{\text{س}^{-4}}{-4} + 2\, \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$$

ولكن لا يمكن ذلك عند الضرب أو القسمة: $\int (\text{ق(س)} \times \text{هـ(س)})\, \text{دس} \neq \int \text{ق(س) دس} \times \int \text{هـ(س) دس}$

فإذا كان هناك تكامل لحاصل ضرب اقترانين فيجب إيجاد حاصل ضربهما أولاً ثم توزيع التكامل على الحدود الناتجة

مثلاً : $\int (2\text{س}+1)(3\text{س}-4)\, \text{دس} = \int (6\text{س}^2 - 8\text{س} + 3\text{س} - 4)\, \text{دس} = \int (6\text{س}^2 - 5\text{س} - 4)\, \text{دس}$

$$= \int 6\text{س}^2\, \text{دس} - \int 5\text{س دس} - \int 4\, \text{دس} = 2\text{س}^3 - \frac{5}{2}\text{س}^2 - 4\text{س} + \text{جـ}$$

٨) إذا كان هناك تكامل لقسمة اقترانين (بسط ومقام) فنقوم بتحليل كل منهما والاختصار ثم نجد التكامل للناتج

مثلاً : $\int \frac{\text{س}^2 - 9}{2\text{س} - 6}\, \text{دس} = \int \frac{\cancel{(\text{س}-3)}(\text{س}+3)}{2\cancel{(\text{س}-3)}}\, \text{دس} = \int \frac{(\text{س}+3)}{2}\, \text{دس} = \frac{1}{2}\int (\text{س}+3)\, \text{دس} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\text{س}^2 + 3\text{س}) + \text{جـ}$

تمارين: ــــــــــ جد التكاملات التالية ــــــــــ

١) $\int (7\text{هـ}^{\text{س}} + 2)\, \text{دس} =$

٢) $\int 8\, \text{جاس دس} =$

٣) $\int \text{ظاس جتاس دس} =$

٤) $\int \frac{1}{\text{س}}\, \text{دس} =$

---

٩) هناك حالتان لا يمكن فيهما إجراء التكامل مباشرةً (نحتاج إلى خطوة تجهيز) وهما :

أ) س في المقام (دائماً نرفع س إلى البسط ونعكس إشارة قوتها إلا إذا كانت قوتها (١) عندها يكون التكامل مباشرةً

$\int \frac{1}{\text{س}}\, \text{دس} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{جـ}$ تذكر أن : $\frac{1}{\text{س}^{\text{م}}} = \text{س}^{-\text{م}}$

ب) س تحت الجذر (دائماً نحولها إلى قوة كسرية) تذكر أن : $\sqrt[5]{\text{س}^3} = \text{س}^{\frac{3}{5}}$

تمارين: ــــــــــ جد التكاملات التالية ــــــــــ

١) $\int \sqrt[3]{\text{س}^5}\, \text{دس} =$

٢) $\int \sqrt[7]{\text{س}^4}\, \text{دس} =$

٣) $\int \frac{6}{\text{س}^3}\, \text{دس} =$

٤) $\int \frac{3}{\text{س}^{-2}}\, \text{دس} =$

منهاجي

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات (078 531 88 77)

١٠) يمكن تجزئة الكسر عندما يكون الجمع أو الطرح في البسط : $\frac{\text{س} + ٧}{٣} = \frac{\text{س}}{٣} + \frac{٧}{٣}$

مثلاً : $\int \frac{\text{س}^٣ + \sqrt[٤]{\text{س}^٥}}{\text{س}^٢}\,\text{دس} = \int \left(\frac{\text{س}^٣}{\text{س}^٢} + \frac{\sqrt[٤]{\text{س}^٥}}{\text{س}^٢} \right) \text{دس} = \int \text{س دس} + \int \text{س}^{\frac{٥}{٤} - ٢}\,\text{دس}$

$= \int \text{س دس} + \int \text{س}^{-\frac{٣}{٤}}\,\text{دس} = \frac{١}{٢}\text{س}^٢ + ٤\,\text{س}^{\frac{١}{٤}} + \text{جـ}$

ولكن لا يمكن تجزئة الكسر $\frac{\text{س}}{\text{س}^٣ + ٧}$ إلى $\frac{\text{س}}{\text{س}^٣} + \frac{\text{س}}{٧}$

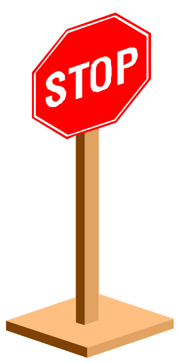
١١) دائماً $\frac{١}{\text{جتاس}}$ نحولها إلى (قا س) أو $\frac{١}{\text{جتا}^٢\text{س}}$ إلى (قــا^٢ س) كذلك (ظا س) إلى $\frac{\text{جــا س}}{\text{جتــا س}}$

<u>تذكر أن:</u> جـا^٢ س + جتا^٢ س = ١ ومنها جتا^٢ س = ١ – جـا^٢ س

(عندما تجد جتا^٢ س أو ١ – جـا^٢ س <u>في</u> المقام دائماً حولهما إلى قــا^٢ س)

٩) تحليل الفرق بين مربعين : س^٢ – ص^٢ = (س + ص) (س – ص)

مثلاً : س^٢ - ٤٩ = (س + ٧) (س – ٧)



أي أن $\int$ (س + ٧) (س – ٧) دس = $\int$ (س^٢ - ٤٩) دس

١٠) تحليل الفرق بين مكعبين : س^٣ – ص^٣ = (س - ص)(س^٢ + س ص + ص^٢)

مثلاً : س^٣ – ٨ = (س – ٢) (س^٢ + ٢س + ٤)

١١) تحليل مجموع مكعبين : س^٣ + ص^٣ = (س + ص) (س^٢ – س ص + ص^٢)

مثلاً : س^٣ + ٢٧ = (س +٣) (س^٢ - ٣س + ٩)

تمارين: جد التكاملات التالية

١) $\int$ (٣س+١)(س-٥) دس =

٢) $\int \frac{٧}{\text{جتا}^٢\text{س}}$ دس =

٣) $\int \frac{٩}{١ - \text{جا}^٢\text{س}}$ دس =

٤) $\int$ س^٢(٥س-٣) دس

٥) $\int \frac{\text{س}^٢ - ٢٥}{\text{س} - ٥}$ دس =

٦) $\int$ (س-٢)(س–٤) دس

٧) $\int \frac{\text{س}^٢ - ٤\text{س}}{٢\text{س} - ٨}$ دس =

٨) $\int \frac{٣\text{س}^٣ + ١٢}{٣\text{س}}$ دس

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات (078 531 88 77)

أسئلة الوزارة على هذا الدرس من (٢٠٠٨-٢٠١٥) السؤال الأول : جد قيمة ما يلي (اختر الإجابة الصحيحة) :

١) ∫ (جتا س – ٢) دس يساوي :(س١ : ٣ وزارة ٢٠٠٨ صيفية)

٢) ∫ س^{٢}(٨س+٣) دس (وزارة ٢٠٠٩ صيفية (٤علامات))

٣) إذا علمت أن ل ثابت فإن ∫ ل دس يساوي :(س١ : ١ وزارة ٢٠٠٩ صيفية)

٤) ∫ (١ – جتا س) دس هو:(س١ : ٤ وزارة ٢٠٠٩ صيفية)

٥) ∫ $\frac{١}{س}$ دس يساوي :(س١ : ٢ وزارة ٢٠١٠ شتوية)

٦) ∫ ٦جاس دس = (وزارة ٢٠١٠ صيفية)

٧) ٦ ∫ (س+١)(س-٣) دس (وزارة ٢٠١٠ صيفية (٥علامات))

٨) ∫(س$^{-٥}$ + $\frac{٢}{س}$ + هـ^{س}) دس ، س ≠ ٠ (وزارة ٢٠١٢ شتوية (٤علامات))

٩) ∫ $\frac{٣}{س^{-٢}}$ دس =(وزارة ٢٠١٣ صيفية)

١٠) ∫ ٤ قا^{٢}س دس يساوي = (وزارة ٢٠١٣ شتوية)

١١) ∫ س^{٣} دس يساوي :(وزارة ٢٠١١ شتوية)

١٢) ∫ $\sqrt{س^{٣}}$ دس ، س > ٠ ، يساوي :(وزارة ٢٠١٢ شتوية)

١٣) ∫ (– جا س +١) دس يساوي :(س١ : ٢ وزارة ٢٠١٢ شتوية)

١٤) ∫ $\frac{١}{س}$ دس ، س ≠ ٠ ، يساوي :(س١ : ٥ وزارة ٢٠١٢ صيفية)

السؤال الثاني : أوجد التكاملات الآتية :

١) ∫ (٣س^{٢} – ٢س) دس (وزارة ٢٠٠٨ شتوية (٣علامات))

٢) ∫ (٦س^{٢} – ٢س) دس (وزارة ٢٠٠٨ صيفية (٣علامات))

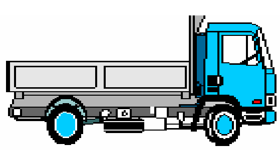
٣) ∫ (٣ – ٢س) دس (وزارة ٢٠٠٩ شتوية (٣علامات))

٤) ∫ (قا^{٢}س + $\frac{٣}{س}$) دس ، (وزارة ٢٠١١ صيفية (٣علامات))

٥) ∫(٦س^{٢} + ٣ هـ^{س} – جا س) دس (وزارة ٢٠١٣ شتوية (٣علامات))

٦) ∫ ($\frac{قا^{٢}س}{٣}$ – ٢س +١٢) دس (وزارة ٢٠١٢ صيفية (٤علامات))

٧) ١) ∫(٣ قا^{٢}س + $\frac{٥}{س}$ – جاس) د س. وزارة ٢٠١٤ ص م٤



٨) ∫ (قا^{٢}س – ٢ جتاس + $\frac{١}{س}$) دس (٢٠١٥ شتوية)

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات (078 531 88 77)

الصف الثاني الثانوي الصناعي والفندقي / م٤ : التكامل غير المحدود (٢)

قاعدة: التكامل عملية عكسية للتفاضل ، أي أن **التكامل يلغي المشتقة الأولى** و **المشتقة الأولى تلغى التكامل**.

وبالرموز:

١) ∫ قَ(س) دس = ق(س) + جـ

٢) د/دس (∫ ق(س) دس) = ق(س) أو د/دس (∫ قَ(س) دس) = قَ(س)

ملاحظة: نستخدم القاعدة حسب الحاجة أو حسب المطلوب في السؤال :

فإذا كان المُعطى هو المشتقة الأولى (كما في مثال (١) التالي) فإنا نكامل الطرفين لإلغاء المشتقة والحصول على قاعدة الاقتران ثم نجد قيمة الثابت جـ

وإذا كان المعطى هو تكامل المشتقة الأولى (كما في مثال (٢)) أو تكامل قاعدة الاقتران (كما في مثال (٣)) فإنا نشتق الطرفين لإلغاء التكامل والحصول على ما بداخله

مثال (١): إذا كان قَ(س) = ٦س٢ – ٢س فجد قاعدة ق(س) علماً بأن ق(١) =٨ (أو ق(س) يمر بالنقطة (١ ، ٨))

الحل : نكامل الطرفين : ∫ قَ(س) دس = ∫ (٦س٢ – ٢س) دس (التكامل يلغي المشتقة وتبقى ق(س) لوحدها)

ق(س) = ٢س٣ - س٢ + جـ لكن ق(١) =٨ وبالتالي ٢ - ١ + جـ = ٨ ومنها جـ =٧

إذاً ق(س)= ٢س٣ - س٢ + ٧

****

مثال (٢) : إذا كان ∫ قَ(س)دس = س٤ – ٢س + ٧ فجد ق(١) و قَ(٢)

الحل : التكامل يلغي المشتقة إذاً ق(س) = س٤ – ٢س + ٧ ومنها ق(١) = ١ - ٢ + ٧ وبالتالي ق(١)= ٦

قَ(س)= ٤س٣ – ٢ ومنها قَ(٢) = ٤(٢)٣ - ٢ = ٣٢-٢=٣٠

****

مثال (٣) : إذا كان ∫ ق(س)دس = س٣+٣س٢ + ١ فجد ق(–١) و قَ(–٢)

الحل : نشتق الطرفين : (∫ ق(س) دس)َ = (س٣+٣س٢ + ١)َ

المشتقة تلغي التكامل إذاً ق(س) = ٣س٢+٦س ومنها ق(–١) = ٣(-١)٢+٦(-١) = ٣ +(-٦) = -٣

كذلك قَ(س)= ٦س+ ٦ ومنها قَ(–٢) = ٦(–٢)+ ٦ = –١٢ + ٦ = –٦

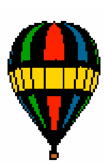
*** **تمارين** ***

٢) إذا كان ص= ∫ ٣هـ^٢س دس فإن ءص/ءس تساوي:

٣) إذا كان ص= ∫ قً(س) دس ، فإن ءص/ءس تساوي:

٤) إذا كان ص= ∫ ١/س دس ، س ≠ ٠ ، فإن ءص/ءس تساوي:

٥) إذا كان ص = ∫ ق(س) دس فإن ءص/ءس =



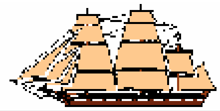
٦) إذا كان ق(س) = ∫ (س٢+ س)دس فجد قَ(-٣)

٧) إذا كان قَ(س) =٣س٢ + ٤س فجد قاعدة الاقتران ق علماً بأن النقطة (١ ، ٥) تقع على منحنى الاقتران ق(س)

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات (078 531 88 77)

أسئلة الوزارة على هذا الدرس من(٢٠٠٨ – ٢٠١٥)

السؤال الأول : اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي :



١) إذا كان ق(س)= ∫ (٢س^{٢} – ٣) دس فإن قَ(٢) تساوي : (س١ : ١ وزارة ٢٠٠٨ شتوية)

٢) إذا كان ص= ∫ هـ^{٢س} دس فإن دص/دس تساوي: (س١ : ٦ وزارة ٢٠٠٩ شتوية)

٣) إذا كان ص= ∫ قَ(س) دس ، فإن دص/دس تساوي: (س١ : ١ وزارة ٢٠١٠ شتوية)

٤) إذا كان ص= ∫ $\frac{١}{س}$ دس ، س ≠ ٠ ، فإن دص/دس تساوي: (س١ : ٢ وزارة ٢٠١٠ صيفية)

٥) إذا كان ق(س)= ∫ س^{٢} دس ، فإن قَ(س) تساوي: (س١ : ٤ وزارة ٢٠١١ شتوية)

٦) إذا كان ق(س)= ∫ (٤س^{٣} +٢س) دس ، فإن قَ(١) تساوي: (س١ : ١ وزارة ٢٠١١ صيفية)

٧) إذا كان ق(س)= ∫ ٣ دس فإن قَ(س) تساوي : (س١ : ١ وزارة ٢٠١٢ صيفية)

٨) إذا كان ق(س) = ∫ (س^{٢} + ٥س)دس فجد قَ(-١) (وزارة ٢٠١٣ صيفية)

الصف الثاني الثانوي الصناعي والفندقي / م٤ : التكامل غير المحدود (٣)

١) كما لاحظنا الفصل الأول (المستوى الثالث)

مشتقة المسافة = السرعة (فَ(ن) = ع(ن)) و مشتقة السرعة = التسارع (عَ(ن) = ت(ن))

وبما أن التكامل عملية عكسية للتفاضل فإن

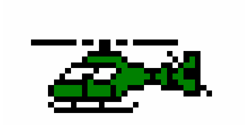
∫ (التسارع) = السرعة أو ∫ ت(ن)دن = ع(ن) كذلك ∫ (السرعة) = المسافة أو ∫ ع(ن)دن = ف(ن)

٢) ميل المماس لمنحنى ق(س) = المشتقة الأولى لقاعدة ق(س) أو (قَ(س$_{١}$) = الميل)

لذلك ∫ الميل = قاعدة ق(س) + جـ (ويجب أن يحتوي السؤال على معلومة لإيجاد قيمة جـ مثلاً : ق(٢) = ٩)

****

مثال (١) : يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد (ن) ثانية تعطى بالعلاقة: ع(ن) =٣ن^{٢} – ٢ن +١. جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور (٣) ثوان علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٧ م



الحل: ع(ن) = ٣ن^{٢} – ٢ن +١

تكامل الطرفين : ∫ ع(ن) دن = ∫(٣ن^{٢} – ٢ن +١) دن

ف(ن) = ن^{٣} – ن^{٢} + ن + جـ لكن ف(٠)= ٧ إذاً جـ = ٧

وبالتالي ف(ن) = ن^{٣} – ن^{٢} + ن + ٧ إذاً ف(٣) = ٣^{٣} – ٣^{٢} +٣ + ٧ = ٢٧ – ٩ +٣+٧ =٢٨ م

مثال (٢) : يتحرك جسيم في خط مستقيم بتسارع ثابت (ت) مقداره ت(ن) = ٦ م/ ث^{٢}. جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع(٠) = ٤ م/ ث وموضعه الابتدائي ف(٠)=١١م

الحل: ت(ن) =٦ن تكامل الطرفين : ∫ ت(ن) دن = ∫٦ دن (تكامل التسارع = السرعة)

ع = ٦ن + جـ لكن ع(٠) = ٠+ جـ = ٤ ⇐ جـ = ٤ ⇐ ع = ٦ن + ٤

تكامل الطرفين مرة أخرى : ∫ ع(ن) دن = ∫ (٦ن + ٤) دن ⇐ ف(ن)= ٣ن^{٢} + ٤ن + جـ (تكامل السرعة = المسافة)

لكن ف(٠)= ١١ إذاً ٠+ ٠+ جـ = ١١ ⇐ جـ = ١١ وبالتالي ف(ن) =٣ن^{٢} + ٤ن + ١١

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات (078 531 88 77)

مثال (٣) : إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س ، ص) يساوي (٦ – ٤س)،

فجد قاعدة الاقتران ق علماً بأن ق(١)= ٧

الحل : ميل المماس = قَ(س) = ٦ – ٤ س نكامل الطرفين : ∫ قَ(س) دس = ∫ (٦ – ٤ س) دس

ق(س) =٦س – ٢س^{٢} + جـ لكن ق(١) = ٧ ⇐ ٦(١) – ٢(١)^{٢} + جـ =٧ إذاً جـ = ٣

وبالتالي ق(س) =٦س – ٢س^{٢} + ٣

تمارين

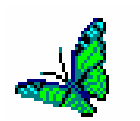
١) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد (ن) ثانية تعطى بالعلاقة: ع(ن) =٦(ن - ١)^{٢} م/ ث . جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٥ م

٢) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند أي نقطة (س ، ص) يساوي (س +٢)(س – ٤) .

فجد قاعدة الاقتران ق علماً بأن منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (– ١ ، ٥)

٣) يتحرك جسيم على خط مستقيم بتسارع ثابت مقداره ت(ن)= ٢٤ م/ ث^{٢} ، جد سرعة الجسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية ع(٠) = ١٢ م/ث

٤) يتحرك جسم بحيث أن تسارعه ت(ن) = (٨ن +٤) م/ ث^{٢} . جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور (٢) ثانية علماً بأن ع(٠) = ٦ م / ث و ف(٠) = ٤م



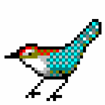
٥) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة(س ، ص) يساوي (٤س^{٣} – ٨ س)، فجد قاعدة الاقتران ق علماً بأن منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (١ ، ٥)

يتحرك جسيم في خط مستقيم بتسارع ثابت (ت) مقداره ت(ن) = ١٠ م/ ث^{٢}. جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع(٠) = ٦ م/ ث وموضعه الابتدائي ف(٠)=٨م

٦) تتحرك نقطة في خط مستقيم بتسارع ثابت مقداره ت(ن)= ١٤ م/ ث^{٢} ، جد سرعتها بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة علماً بأن سرعتها الابتدائية ع(٠) = ٩م/ث

أسئلة الوزارة على هذا الدرس من(٢٠٠٨–٢٠١٥)

١) يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد (ن) ثانية تعطى بالعلاقة: ع(ن) =٣ن^{٢} – ٢ن . جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور (٣) ثوان علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٥ م (٢٠٠٨ شتوية (٤علامات))



٢) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س ، ص) يساوي (٦ – ٢س)،

فجد قاعدة الاقتران ق علماً بأن ق(١)= ٢ (٢٠٠٨ صيفية (٥علامات))

٣) يتحرك جسيم على خط مستقيم بتسارع ثابت مقداره ت(ن)= ١٢ م/ ث^{٢} ، جد سرعة الجسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية ع(٠) = ٧ م/ث (٢٠٠٨ صيفية (٤علامات))

٤) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد (ن) ثانية تعطى بالعلاقة: ع(ن) =٣(ن+ ١)^{٢} م/ ث . جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ١ م (٢٠٠٩ شتوية (٥علامات))

٥) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد (ن) ثانية تعطى بالعلاقة: ع(ن) =(٦ن+٣) م/ ث . جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور (٣) ثوان علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٢ م (٢٠١٠ صيفية (٥علامات))

٦) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ﻫ(س) عند النقطة(س ، ص) يساوي هـ^{٣س} ، فاكتب قاعدة الاقتران ﻫ علماً بأنه يمر بالنقطة(٠ ، ١) (٢٠١١ شتوية (٥علامات))

٧) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ﻫ(س) عند النقطة(س ، ص) يساوي (٤س^{٣} – ٦س)، فجد قاعدة الاقتران ﻫ علماً بأن منحنى الاقتران ﻫ يمر بالنقطة(٢ ، ٥) (٢٠١١ صيفية (٤علامات))

٨) إذا كان تسارع جسيم يعطى بالعلاقة ت(ن) =٨ ن م/ ث^{٢}. جد السرعة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع(٠) = ٣ م/ ث (٢٠١٢ شتوية (٥علامات))

٩) يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث تكون سرعته ع معطاة بالعلاقة: ع(ن) = (٦ن + ٨) م/ ث . جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة علماً بأن الموقع الابتدائي للجسيم ف(٠) = ٣ م (٢٠١٢ صيفية (٣علامات))

١٠) يتحرك جسيم في خط مستقيم بتسارع ثابت (ت) مقداره ت(ن) =٨ م/ ث^{٢}. جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع(٠) = ٢ م/ ث وموضعه الابتدائي ف(٠)=١٠م (٢٠١٣ شتوية (٥علامات))

١١) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ﻫ(س) عند النقطة(س ، ص) يساوي(٣س^{٢} – ١)، فجد قاعدة الاقتران ﻫ علماً بأن منحنى الاقتران ﻫ يمر بالنقطة(٢ ، ٤) (٢٠١٣ صيفية (٥علامات))

١٢) يتحرك جسيم على خط مستقيم بتسارع ثابت ت(ن)= ٦ م/ ث^{٢} ، جد سرعة الجسيم بعد ن ثانية من بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية ع(٠) = ٨ م/ث (٢٠١٣ صيفية)

١٣) يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث تكون سرعته ع معطاة بالعلاقة: ع(ن) = (٤ن +٦) م/ ث . جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (٣) ثوان من بدء الحركة علماً بأن الموقع الابتدائي للجسيم ف(٠) = ١٠ م (وزارة ٢٠١٤ شتوية (٤علامات))

١٤) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد (ن) ثانية تعطى بالعلاقة: ع(ن) =٦(ن+ ٢)^{٢} م/ ث . جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٥ م (٢٠١٤ صيفية (٥علامات)

١٥) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س،ص) يساوي (٢ − $\frac{١}{س^{٢}}$) وكان المنحنى يمرّ بالنقطة ($-\frac{١}{٢}$ ، ١) ، فجد قاعدة الاقتران ق. (٤ علامات) وزارة ٢٠١٤ ص م٤

١٦) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ﻫ(س) عند النقطة(س ، ص) يساوي(هـ$^{٣- س}$)، وكان المنحنى يمر بالنقطة(٣ ، ١) فجد قاعدة الاقتران ﻫ (٢٠١٥ شتوية (٤ علامات))

١٧) إذا كان تسارع جسيم بعد مرور (ن) من الثواني يعطى بالعلاقة ت(ن)= ٦ن م/ ث^{٢}، جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع(٠) = ٢م/ث وموقعه الابتدائي ف(٠)=١٢م (٢٠١٥ شتوية (٤علامات))

١) التكامل المحدود للاقتران قَ(س) في الفترة [أ ، ب] يساوي ق(ب) – ق(أ)

أو $\int_{أ}^{ب}$ قَ(س) دس = ق(ب) – ق(أ) حيث أ : الحد السفلي للتكامل المحدود ، ب : الحد العلوي

ويمكن كتابة المقدار ق(ب) – ق(أ) على الصورة : $[\,ق(س)\,]_{أ}^{ب}$

٢) أي أن التكامل المحدود هو نفسه غير المحدود باستثناء أنه لن يكون هناك (جـ) والناتج سيكون عدداً حقيقياً بعد تعويض الحد العلوي مطروحاً منه ناتج تعويض الحد السفلي

تذكر أن :
لـو ١ = صفر
هـ
هـ' = ١

$\boxed{\text{لو}_{هـ} هـ = ١}$

مثال (١) : $\int_{١}^{٢}$ ٦س دس = ٣ $[س^{٢}]_{١}^{٢}$ = ٣ $(٢)^{٢}$ –٣$(١)^{٢}$ = ١٢ – ٣ =٩

مثال (٢) :إذا كان $\int_{٣}^{م}$ ٢س دس = ٧ ، فجد قيمة م

الحل : $[س^{٢}]_{٣}^{م}$ = ٧ ⟵ $م^{٢}$ - ٩ = ٧ ومنها $م^{٢}$ = ١٦ أي أن م = ± ٤

** تمارين **

س١:احسب قيمة كل من التكاملات التالية :

١) $\int_{٠}^{٢}$ $س^{٤}$ دس =

٢) $\int_{-١}^{٣}$ $\frac{٤}{هـ}$ دس =

٣) $\int_{١}^{٣}$ $\frac{١}{س^{٣}}$ دس =

٤) $\int_{-١}^{١}$ (٣س+١)(س-٥) دس=

عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

٥) $\int_{١}^{هـ}$ $\frac{١}{س}$ دس =

٦) $\int_{٠}^{٥}$ $هـ^{س}$ دس =

٧) $\int_{٠}^{٩}$ $\sqrt{س}$ دس يساوي :

٨) $\int_{٠}^{٤}$ ($\sqrt{س}$ + ٣$س^{٢}$ + ١) دس

س٢: إذا كان $\int_{١}^{م}$ ٢ دس = ١٢، فجد قيمة م

س٣: إذا كان $\int_{١}^{٣}$ م دس = –١٠ ، فجد قيمة م

س٤: إذا كان $\int_{م}^{-١}$ ٩ س دس = –٤ ، فجد قيمة م

س٥: إذا علمت أن قَ(س) متصل، وكان ق(١)= –٥ ، ق(٢)= ٤ فجد $\int_{١}^{٢}$ قَ(س) دس

س٦: إذا كان $\int$ ق(س) دس = $س^{٣}$ + جـ ، فجد $\int_{-١}^{٤}$ ق(س) دس

س٧: إذا كان قَ(س)= ٤س ،وكان ق(س) معرف على الفترة [– ١، ٣] وكان ق(– ١) = ١٠، فجد قيمة ق(٣)

س٨: إذا كان قَ(س)= ٦س ،وكان ق(س) معرف على الفترة [١، ٣] ، فجد $\int_{١}^{٣}$ قَ(س) دس

س٩: إذا كان ق(٢)= ٤ ، وكان ق(– ٢)= – ١ ، فجد قيمة $\int_{-١}^{٣}$ قَ(س – ١) دس

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات (078 531 88 77)

أسئلة الوزارة على التكامل المحدود من(٢٠٠٨-٢٠١٥)

السؤال الأول : اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي :

١) إذا كان ق(١)= ١٠ ، ق(٣)= ٦ فجد $\int_{١}^{٣}$ قَ(س)دس : (س١ : ٦ وزارة ٢٠٠٨ صيفية)

٢) إذا علمت أن $\int_{٠}^{٣}$ ق(س) دس= ٥ ، فإن $\int_{٠}^{٣}$ (ق(س) – ٢) دس يساوي: (س١ : ٤ ، وزارة ٢٠١٠ شتوية)

٣) إذا كان ق(٢)= ٥ ، ق(١)= ٢ فإن قيمة $\int_{٠}^{١}$ قَ(س+١)دس : (س١ : ٣ وزارة ٢٠١١ صيفية)

٥) إذا كان $\int_{٠}^{٣}$ ق(س) دس= ١٠ ، فإن $\int_{٠}^{٣}$ (٢س+ ق(س))دس يساوي: (س١ : ٤ ، وزارة ٢٠١٢ شتوية)

٦) إذا علمت أن قَ(س) متصل، وكان ق(١)= –٣ ، ق(٢)= ١ فإن $\int_{١}^{٢}$ قَ(س) دس يساوي: (س١ :٣ وزارة ٢٠١٢ شتوية)

٧) قيمة $\int_{٠}^{١}$ هـ^س دس تساوي : (س١ : ٣ ، وزارة ٢٠١٢ صيفية)

٨) إذا كان $\int_{١}^{م}$ ٣ دس = -٦ ، فجد قيمة م (وزارة ٢٠١٣ صيفية)

٩) $\int_{٠}^{١}$ $\sqrt{س}$ دس يساوي : (س١ : ٤ ، وزارة ٢٠١٣ شتوية)

١٠) إذا كان ق(١)= -٦ ، ق(٣)= ٨ فإن $\int_{١}^{٣}$ قَ(س)دس : (س١ : وزارة ٢٠١٣ شتوية)

١١) $\int_{٠}^{١}$ ($\sqrt{س}$ + ٣س^٢) دس ، (وزارة ٢٠١٤ شتوية (٤علامات))

١٢) إذا كان $\int_{١}^{م}$ (٢س +٣) دس=٦ ، فجد قيمة م (س٢ : ٣ وزارة ٢٠٠٩ شتوية (٥علامات))

١٣) جد قيمة $\int_{٠}^{١}$ ($\sqrt{س}$ + س) دس (س٢ : أ ، ١ وزارة ٢٠١١ شتوية (٥علامات))

١٤) إذا كان $\int_{٠}^{م}$ ٧ دس = ٢١ فجد قيمة الثابت م؟ (س٣ : ج ، وزارة ٢٠١١ شتوية (٤ علامات))

هناك ٥ قواعد مهمة في التكامل المحدود :

١) $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = -\int_{ب}^{أ} ق(س)\,دس$

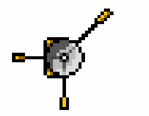
٢) $\int_{أ}^{أ} ق(س)\,دس = صفر$

٣) $\int_{أ}^{ب} م\,ق(س)\,دس = م\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس$

٤) $\int_{أ}^{ب} \left(ق(س) \pm هـ(س)\right)\,دس = \int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س)\,دس$

٥) $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس + \int_{ب}^{جـ} ق(س)\,دس = \int_{أ}^{جـ} ق(س)\,دس$ (خاصية الإضافة : مهمة جداً)

مثال (١) : إذا كان $\int_{٤}^{٥} ق(س)\,دس = ٦$ ، فجد قيمة $\int_{٥}^{٤} ق(س)\,دس$



الحل: بما أن $\int_{٤}^{٥} ق(س)\,دس = ٦$ إذاً $\int_{٥}^{٤} ق(س)\,دس = -٦$

مثال (٢) :إذا كان $\int_{٣}^{م} ٤س\,دس = صفر$ ، فجد قيمة م

الحل:بما أن $\int_{٣}^{م} ٤س\,دس = صفر$ إذاً م = ٣

(وهناك قيمة أخرى لـ م نجدها من خلال إجراء عملية التكامل وتعويض حدي التكامل وهي م= – ٣ ... ولكن إذا كانت قاعدة ق(س) غير معطاة فنكتفي بقيمة واحدة وهي التي تساوي الحد السفلي – حسب القاعدة (٢))

مثال (٣) :إذا $\int_{١}^{٢} ق(س)\,دس = ٨$ ، $\int_{٥}^{٢} ق(س)\,دس = ١٠$ ، فجد قيمة $\int_{١}^{٥} ق(س)\,دس$

الحل: الأفضل أن نبدأ بالمطلوب وهو هنا ($\int_{١}^{٥} ق(س)\,دس$) ثم نجزئه حسب القاعدة الخامسة وحدود التكامل ... بعدها نعوض القيم المعطاة مع تغيير الإشارات اللازم تغييرها . وإليك الخطوات :

$\int_{١}^{٥} ق(س)\,دس = \int_{١} + \int^{٥}$ ثم نكتب الحد الأوسط فيصبح $\int_{١}^{٢} ق(س)\,دس + \int_{٢}^{٥} ق(س)\,دس$

$= ٨ + -١٠ = -٢$

مثال (٤) :إذا كان $\int_{٥}^{٧} ق(س)\,دس = -٦$ ، $\int_{٥}^{٢} ٢ق(س)\,دس = ٢$ ، فجد قيمة $\int_{٧}^{٥} ق(س)\,دس$

الحل: نبدأ بالمطلوب وهو هنا ($\int_{٧}^{٥} ق(س)\,دس$) ثم نجزئه حسب القاعدة الخامسة وحدود التكامل

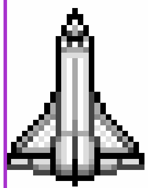
$\int_{٧}^{٥} ق(س)\,دس = \int_{٧} + \int^{٥}$ ثم نكتب الحد الأوسط $\int_{٧}^{٢} ق(س)\,دس + \int_{٢}^{٥} ق(س)\,دس$

$= ٦ + -١ = ٥$

مثال (٥) إذا كان $\int_{١}^{٢} ٤ق(س)\,دس = ٢٠$ ، فإن $\int_{٢}^{١} ق(س)\,دس$ يساوي:

الحل: بما أن $\int_{١}^{٢} ٤ق(س)\,دس = ٢٠$ إذاً $\int_{١}^{٢} ق(س)\,دس = ٥$ وبالتالي فإن $\int_{٢}^{١} ق(س) = -٥$

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات (078 531 88 77)



مثال (٦) :إذا كان ق(س)=
$$\begin{cases} ٤\,س & ، -١ \le س \le ٣ \\ ٦ & ، ٣ < س \le ٥ \end{cases}$$
فجد $\int_{-١}^{٥} ق(س)\,دس$

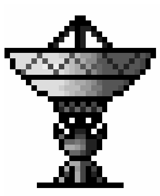
الحل : نستخدم خاصية الإضافة (القاعدة الخامسة) : $\int_{-١}^{٥} ق(س)\,دس = \int_{-١}^{٣} ٤س\,دس + \int_{٣}^{٥} ٦\,دس$

$= [٢س^{٢}]_{-١}^{٣} + [٦\,س]_{٣}^{٥} = ٢(٣)^{٢} - ٢(-١)^{٢} + ٦\,(٥) - ٦\,(٣) = ١٤ + ١٢ = ٢٦$

تمارين

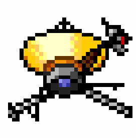
س١ : إذا كان $\int_{٣}^{٥} ق(س)\,دس = ٤$ ، فجد قيمة $\int_{٥}^{٣} ٦ق(س)\,دس$

س٢ : إذا كان $\int_{-١}^{٢} ٢ق(س)\,دس = ١٢$ ، فجد قيمة $\int_{٢}^{-١} \frac{ق(س)}{٣}\,دس$



س٣ : إذا كان $\int_{-١}^{٣} ٢ق(س)\,دس = ١٠$ ، $\int_{٣}^{٥} ق(س)\,دس = ٢$ فجد $\int_{-١}^{٥} ق(س)\,دس$

س٤ : إذا كان $\int_{-٢}^{ن} ق(س)\,دس = -٦$ ، $\int_{٢}^{ن} ٢ق(س)\,دس = ٨$ فجد $\int_{-٢}^{٢} ق(س)\,دس$



س٥ : إذا كان $\int_{ب}^{٣} ق(س)\,دس = ٦$ ، $\int_{٣}^{ن} ٢هـ(س)\,دس = -٨$ فجد

أ) $\int_{ب}^{٣} (٢ق(س) + هـ(س))\,دس$ ب) $\int_{٣}^{ن} (ق(س) - ٢)\,دس$ جـ) $\int_{٣}^{ن} (ق(س) - هـ(س) + ٢س)\,دس$

= = =

= = =

أسئلة الوزارة على خواص التكامل المحدود من(٢٠٠٨-٢٠١٥)

السؤال الأول : اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي :

١) إذا كان ق(س)= $\int_{١}^{ك}$ هـ^{س} دس= صفر فإن قيمة ك تساوي : (س١ : ٢ وزارة ٢٠٠٨ شتوية)

٢) إذا علمت أن $\int_{٠}^{٢}$ ق(س) دس= ٤ ، $\int_{٢}^{٣}$ ٦ق(س) دس= ١٢، فإن $\int_{٣}^{٠}$ ق(س) دس يساوي: (س١ : ٧ ، وزارة ٢٠٠٨ شتوية)

٣) إذا كان $\int_{١}^{٢}$ ٣ق(س) دس= ١٢ ، فإن $\int_{٢}^{١}$ ق(س) دس يساوي: (س١ : ١ ، وزارة ٢٠٠٨ صيفية)

٤) $\int_{٢}^{٢}$ (٣س^{٢} – ٢س – ٥) دس يساوي : (س١ : ٣ ، وزارة ٢٠٠٩ شتوية)

٥) إذا علمت أن $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس=٨ فإن $\int_{ب}^{أ}$ ٢ق(س) دس يساوي : (س١ : ٧ ، وزارة ٢٠٠٩ شتوية)

٦) قيمة $\int_{٤}^{٤}$ (س^{٣} + $\sqrt{س}$ – ٢) دس تساوي : (س١ : ٢ ، وزارة ٢٠٠٩ صيفية)

٧) إذا علمت أن $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس= ٦ ، $\int_{٥}^{٣}$ ق(س) دس= ٢، فإن قيمة $\int_{١}^{٥}$ ق(س) دس تساوي:(س١ : ٣ ، وزارة ٢٠٠٩ صيفية)

٨) إذا علمت أن $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس= $\frac{٣}{٤}$ فإن $\int_{ب}^{أ}$ ق(س) دس يساوي : (س١ : ٣، وزارة ٢٠١٠ شتوية)

٩) إذا كان $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس= –٣ ، $\int_{جـ}^{ب}$ ق(س) دس=٤ فإن $\int_{أ}^{جـ}$ ق(س) دس يساوي :(س١ : ٣، وزارة ٢٠١٠ صيفية)

١٠) إذا كان $\int_{١}^{٢}$ ق(س) دس= ٦ ، فإن $\int_{٢}^{١}$ ق(س) دس يساوي: (س١ : ٢ ، وزارة ٢٠١١ شتوية)

١١) $\int_{١}^{١}$ $\frac{١}{س}$ دس يساوي: (س١ : ٣ ، وزارة ٢٠١١ شتوية)

١٢) إذا كان $\int_{٢}^{١}$ ق(س) دس= ٥ ، $\int_{٢}^{٣}$ ٣ق(س) دس= ٩، فإن $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس يساوي:(س١ : ٢ ، وزارة ٢٠١١ صيفية)

١٣) إذا كان $\int_{٦}^{٧}$ ٢ق(س) دس= ١٠ ، فإن قيمة $\int_{٧}^{٦}$ ق(س) دس تساوي: (س١ : ٢ ، وزارة ٢٠١٢ صيفية)

١٣) إذا كان $\int_{-١}^{٦}$ ق(س) دس= ٨ ، $\int_{-١}^{٣}$ ٢ق(س) دس=١٠ فجد $\int_{٣}^{٦}$ (ق(س)+٢س) دس (وزارة ٢٠١٣ صيفية) (٦علامات)

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات (078 531 88 77)

السؤال الثاني : ١) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ٤ \text{ ، } ٠ \le \text{س} \le ٢ \\ ٢\text{س} \text{ ، } ٢ < \text{س} \le ٤ \end{cases}$ فأوجد $\int_{٠}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

(س٢ :ب وزارة ٢٠٠٨ شتوية(٤علامات))

٢) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س}^{٢} - ٢ \text{ ، } ١ \le \text{س} \le ٢ \\ ٢\text{س} + ٦ \text{ ، } ٢ < \text{س} \le ٤ \end{cases}$ فاحسب $\int_{١}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$ (س٢ :ج وزارة ٢٠١٠ شتوية(٦علامات)

٤) إذا كان $\int_{٠}^{٢} \frac{١}{٢}\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٦$ ، فجد قيمة $\int_{٠}^{٢} (٣\text{س}^{٢} + ٣\,\text{ق}(\text{س}))\,\text{دس}$ (س٢ : ب ، وزارة ٢٠١١ صيفية (٥علامات))

٣) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{هـ}^{\text{س}} \text{ ، } ١ \le \text{س} \le ٣ \\ \text{س} \text{ ، } ٣ < \text{س} \le ٥ \end{cases}$ فاحسب $\int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$ (س٣:ج وزارة ٢٠١٠ ص (٥علامات))

٥) إذا كان $\int_{-١}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٦$ ، $\int_{٣}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -٢$ فجد $\int_{-١}^{٣} (\text{ق}(\text{س}) + ٥)\,\text{دس}$ (س٢ : ج ، وزارة ٢٠١٢ شتوية(٥علامات))

٦) إذا كان $\int_{٣}^{٥} \frac{\text{ق}(\text{س})}{٢}\,\text{دس} = ٤$ ، $\int_{٩}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ١٢$ ، فجد قيمة $\int_{٣}^{٩} (\text{ق}(\text{س}) - ٧)\,\text{دس}$

(س٢:ب وزارة ٢٠١٢ صيفية(٥علامات))

٧) إذا كان $\int_{-٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} = ٦$ ، $\int_{٥}^{-٢} \frac{١}{٢}\,\text{ع}(\text{س})\,\text{د س} = ٤$ ، فجد $\int_{-٢}^{٥} (٣\,\text{ق}(\text{س}) + \text{ع}(\text{س}) - \text{س})\,\text{د س}$

(س٢:ب وزارة ٢٠١٣ شتوية (٦علامات))

٨) ب) إذا كان $\int_{٣}^{٥} \left(\frac{\text{ق}(\text{س})}{٢} - ١\right)\text{د س} = ٦$ ، $\int_{٨}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} = ١٠$ ، فجد $\int_{٣}^{٨} (\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س})\,\text{د س}$
وزارة ٢٠١٤ ص م٤ (٥ علامات)

٩) إذا كان جـ عدداً ثابتاً وكان ق(جـ) = ١٢ ، ق(٠) = ٨ ، $\int_{٠}^{\text{جـ}} (\text{ق}'(\text{س}) - \text{هـ}^{-\text{س}})\,\text{د س} = ٠$ ،
فجد قيمة $\text{هـ}^{\text{جـ}}$. وزارة ٢٠١٤ ص م٤ (٤ علامات)

١٠) إذا كان ق(س) متصلاً وكان ق(١)=٤ ، ق(٢)=١٢، $\int_{١}^{٢} \text{أ}\,\text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = ١٦$ ،أ ثابت ، فجد قيمة أ (٢٠١٥ شتوية) (٤علامات)

١١) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ \text{ ، } -١ \le \text{س} < ٣ \\ ٤\text{س} - ٢ \text{ ، } ٣ \le \text{س} \le ٤ \end{cases}$ فجد $\int_{-١}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$ (٢٠١٥ شتوية) (٤ علامات)

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات (078 531 88 77)

الصف الثاني الثانوي الصناعي والفندقي / م٤ :التكامل بالتعويض

أ) نلجأ إلى التكامل بالتعويض عندما يكون هناك مقدار لا يمكن إيجاد تكامله مباشرة مثل حاصل ضرب اقترانين أو قسمتهما أو غير ذلك بشرط أن يكون هناك اقتران ومشتقته في نفس المسألة

مثلاً : ∫(س^{٢} + ٨س)(٢س + ٨) دس أو ∫٢س جـا س^{٢} دس أو ∫٤س هـ$^{س^{٢}}$ دس

وكإجراء : نفرض أن الاقتران (الذي قوته أكبر) = ص ثم نجد دص ونجري الاختصارات اللازمة ليصبح التكامل بدلالة ص فقط

وبالرموز : ∫ $\underbrace{\text{ق(س)}}_{\text{ص}}$ $\underbrace{\text{قَ(س) دس}}_{\text{دص}}$ = ∫ ص دص

الخطوات :

١) نفرض أن ص = (المقدار الذي قوة س فيه اكبر)
٢) نجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = (ويجب أن تكون قوة المشتقة الناتجة مساوية لقوة المقدار المتبقي)
٣) نستبدل (دس) بالقيمة الناتجة عن الاشتقاق
٤) نعود إلى التكامل الأصلي ونعوض بدلاً من (ص) و (دس)
٥) نختصر ما بين البسط والمقام (ويجب أن تختفي جميع قيم س ويبقى التكامل بدلالة ص)
٦) نجري عملية التكامل بدلالة ص
٧) نعيد قيمة ص التي فرضناها في الخطوة الأولى

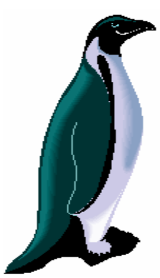
ملاحظة : دائماً نفرض ان ما بداخل القوس أو الجيب او الجذر ... هو (ص) وليس كامل القوس

مثلاً : ١) ∫٢س جـا (س^{٢} + ٧) دس : نفرض أن ص = س^{٢} + ٧ وليس ص = جـا(س^{٢} + ٧)

٢) ∫ ٢س$\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥}$ دس : نفرض أن ص = س^{٢} + ٥ وليس ص =$\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥}$

٣) ∫(س + ١) هـ$^{\text{س}^{٢}+٢\text{س}}$ دس : نفرض أن ص = س^{٢} + ٢س وليس ص = هـ$^{\text{س}^{٢}+٢\text{س}}$

ب) في حالة التكامل المحدود واستخدام طريقة التعويض يجب تغيير حدود التكامل لتصبح بدلالة ص وذلك من خلال تعويض قيمتي س في ص التي فرضناها



مثال (١) : ∫(٢س +١)(س^{٢} + س + ٥)^{٦} دس

الحل : نفرض أن ص= س^{٢} + س + ٥

ومنها $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢س + ١

دس = $\frac{\text{دص}}{\text{٢س+١}}$

نعود إلى التكامل الأصلي ونعوض قيمتي ص و د س

=∫$\cancel{(\text{٢س+١})}$(ص)^{٦} $\frac{\text{دص}}{\cancel{\text{٢س+١}}}$ = ∫ص^{٦} دص = $\frac{\text{ص}^{٧}}{٧}$ + جـ

وأخيراً نعوض قيمة ص ليصبح المقدار بدلالة س :

∫(٢س +١)(س^{٢} + س + ٥)^{٦} دس = $\frac{(\text{س}^{٢} + \text{س} + ٥)^{٧}}{٧}$ + جـ

مثال (٢) : ∫ جا (٣س +٥) دس

عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

الحل: نفرض أن ص= ٣س+٥ ⇐ ءص/ءس = ٣ ⇐ دس = دص/٣

إذاً ∫ جا (٣س +٥) دس = ∫ جا (ص) دص/٣

= ١/٣ (- جتا ص) +جـ = - ١/٣ جتا (٣س+٥) + جـ

مثال (٣) : ∫ من ١ إلى ٣ (س٢ – ٤س +٤)٣ دس = ∫ من ١ إلى ٣ ((س – ٢)٢)٣ دس = ∫ من ١ إلى ٣ (س – ٢)٦ دس

نفرض أن ص= س – ٢ ⇐ دص = دس ⇐ نجد قيمتي ص المقابلتين لقيمتي س

ص= س–٢
س=١ ⇐ ص= ١–٢ = – ١
س=٣ ⇐ ص= ٣–٢ = ١

إذاً ∫ من ١ إلى ٣ (س – ٢)٦ دس = ∫ من -١ إلى ١ ص٦ دص= [١/٧ ص٧] من -١ إلى ١

= ١/٧ ((١)٧ – (-١)٧) = ١/٧ (١ + ١)= ٢/٧

مثال (٤) :إذا كان ق (- ١) = ٦، ق (٣) = ١٤ ، جد ∫ من ١ إلى ٢ ٨س قَ (س٢ – ١) دس

الحل: نفرض أن ص= س٢ – ١ ⇐ ءص/ءس = ٢س ⇐ دص = ٢س دس ⇐ دس = دص/٢س

ص = س٢ – ١:
س= ٠ ⇐ ص= ٠ – ١ ص= –١
س= ٢ ⇐ ص= ٤ – ١ ص= ٣

⇐ ∫ ٨س قَ (س٢ – ١) دس = ∫ ٨س قَ (ص) دص/٢س

= ∫ $\cancel{٨س}$^٤ قَ (ص) دص/$\cancel{٢س}$

= ∫ من -١ إلى ٣ ٤ قَ (ص) دص= ٤ [ق (ص)] من -١ إلى ٣

= ٤ (ق (٣) – ق (–١)) = ٤(١٤ – ٦) = ٤×٨ =٣٢

مثال (٥) يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة: ع(ن) = ٣(ن + ١)٢ م/ ث
جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ١ م

الحل : ع(ن) = ٣(ن +١)٢

نكامل الطرفين : ∫ ع(ن) دن = ∫ ٣(ن +١)٢ دن : نفرض أن ص = ن+١ ⇐ دص/دن = ١ ⇐ دص = دن

ف(ن) = ∫ ٣ص٢ دص = ص٣ + جـ = (ن +١)٣ + جـ لكن ف(٠)= ١ إذاً جـ = ١

وبالتالي ف(ن) = (ن +١)٣ + ١

إذاً ف(٢) =(٢ +١)٣ + ١ = (٣)٣ + ١ = ٢٧ + ١ =٢٨ م

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات (078 531 88 77)

تمارين:جد قيمة التكاملات التالية :

١) ∫ جتا (٥ – ٢س) دس

٢) ∫ (٢س – ٦) $\sqrt[3]{}$(س٢ – ٦ س + ٥) دس

٣) ∫ س قا٢ (٣س٢ – ١)دس

٤) ∫ (هـ^٥س – س٣ / (س٢ + ١) + ٤قا٢س) دس

١١) ∫ ٩س $\sqrt{}$(س٢ + ٣) دس

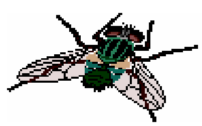
١٢) ∫ (س+١) جا (س٢ +٢س) دس

١٣) ∫ ٣ / (٣س - ٦) دس

١٤) ∫ (٢س + ٤) / $\sqrt{}$(س٢ +٤ س –٥) دس

١٥) ∫ س٢ جتا س٣ دس

١٦) ∫ من ١- إلى ١ : ٤ / (٢س+١)٣ دس

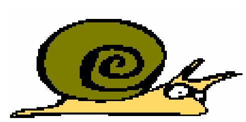


١٧) ∫ من ١ إلى ٣ : ١ / (س٢ + ٦س + ٩) دس

١٨) ∫ جا٢ س قا٤ س دس

١٩) إذا كان ق (١) = ٤، ق (٥) = ٩ ، جد ∫ من ١ إلى ٥ : س قَ(س٢ + ١) دس

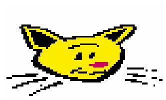
٢٠) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق (س) عند النقطة (س ، ص) يساوي (٤س + ١)٥ . وكان ق (– ١)= ٧
فجد قاعدة الاقتران ق (س)



أسئلة الوزارة على التكامل بالتعويض من(٢٠٠٨–٢٠١٥)

١) ∫ س جـا (س٢ – ٣) دس (س٢ : أ ، ٢ وزارة ٢٠٠٨ شتوية (٤ علامات))

٢) ∫ س هـ^س٢ دس (س٢ : أ ، ٢ وزارة ٢٠٠٨ صيفية (٦علامات))



٣) ∫ (٢س +١) / $\sqrt{}$(س٢+س –١) دس (س٢ : ب وزارة ٢٠١٠ شتوية (٦علامات))

٤) $\int \frac{\text{٣س}^{٢}+\text{١}}{(\text{س}^{٣}+\text{س}+\text{٧})^{\text{٥}}}\,\text{دس}$ (س٢ : أ ، ٢ وزارة ٢٠١١ شتوية (٥علامات))

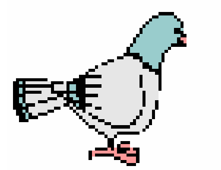
٥) $\int \frac{\text{٢س}+\text{٣}}{\text{جتا}^{٢}(\text{س}^{٢}+\text{٣س})}\,\text{دس}$ (س٢ : أ ، ٢ وزارة ٢٠١٢ شتوية (٥علامات))

٦) $\int \frac{\text{٣س}^{٢}-\text{٦}}{\sqrt[\text{٥}]{\text{س}^{٢}-\text{٦س}+\text{٩}}}\,\text{دس}$ (س٢ : أ ، ٢ وزارة ٢٠١٢ صيفية (٥علامات))

١) $\int \text{س جا}(\text{س}^{٢}+\text{٧})\,\text{دس}$ (س٢ : أ ، ٢ وزارة ٢٠٠٩ شتوية (٤علامات))

٢) $\int (\text{هـ}^{\text{٢}-\text{س}}+\text{قا}^{٢}\text{س})\,\text{دس}$ (س٢ : أ ، ٢ وزارة ٢٠٠٩ صيفية (٣علامات))

٣) $\int \text{٦س جا س}^{٢}\,\text{دس}$ (س٢ : أ ، ٣ وزارة ٢٠٠٩ صيفية (٥علامات))



٤) $\int (\text{هـ}^{\text{س}}+\text{قا}^{٢}(\text{٤س}))\,\text{دس}$ (س٢ : أ وزارة ٢٠١٠ شتوية (٤علامات))

٥) $\int (\text{س}+\text{١})\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}+\text{٢س}}\,\text{دس}$ (س٢ : أ ، ٢ وزارة ٢٠١٠ صيفية (٥علامات))

٦) $\int \sqrt[\text{٣}]{\text{٦س}-\text{س}^{٢}}\,(\text{٦}-\text{٢س})\,\text{دس}$ (س٢ : أ ، ٢ وزارة ٢٠١١ صيفية (٥علامات))

٩) $\int \frac{\text{٦س}-\text{٤}}{\text{٣س}^{٢}-\text{٤س}+\text{١}}\,\text{دس}$ (س٢ : أ ، ٢ وزارة ٢٠١٣ شتوية (٥علامات))

١٠) $\int (\text{هـ}^{\text{٢س}}-\frac{\text{٥}}{\text{س}}+\text{قا}^{٢}\text{س})\,\text{دس}$ (وزارة ٢٠١٣ صيفية)

١١) $\int \text{٢س}\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{٣}}\,\text{دس}$ (وزارة ٢٠١٣ صيفية)

١٢) $\int \text{س}^{٢}\,\text{جا}(\text{س}^{٣}-\text{١})\,\text{دس}$ (وزارة ٢٠١٤ شتوية (٦علامات))

١٣) إذا كان $\text{ق}'(\text{س}) = \text{٦ هـ}^{\text{٢س}} - \frac{\text{١}}{\text{س}+\text{هـ}}$ فجد قاعدة الاقتران ق علماً بأن النقطة (٠ ، ٥) تقع على منحنى الاقتران ق
(وزارة ٢٠١٤ شتوية (٤علامات))

١٤) ٢) $\int \frac{\text{١٠س}-\text{١}}{\sqrt{\text{٥س}^{٢}-\text{س}+\text{١}}}\,\text{دس}$ وزارة ٢٠١٤ ص (٥ علامات)

١٥) $\int \text{س}^{٢}(\text{س}^{٣}-\text{١})^{٢}\,\text{دس}$ (٢٠١٥ شتوية (٤علامات))

١) التكامل المحدود لمنحنى اقتران ما يساوي المساحة (أو مجموع المساحات) المحصورة بين منحنى ذلك الاقتران ومحور السينات ، وهناك ٣ احتمالات للأسئلة :

أ) أن تكون الفترة معطاة مثل [١ ، ٥] أو س=١ ، س=٥ عندها م= $\int$ ق(س)دس

(دائماً نساوي الاقتران بالصفر ونجد الجذور فإذا كانت الجذور داخل الفترة أو ضمن حدود التكامل نقوم بتجزئة التكامل وإلا فلا)

ب) أن يكون المطلوب هو المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ومحور السينات :
عندها نجد حدود التكامل من خلال مساواة الاقتران بالصفر وإيجاد الجذور : ق(س) = صفر

جـ) أن يكون المطلوب هو المساحة المحصورة بين منحنيي اقترانين

٢) إذا كان المنحنى فوق محور السينات (في الفترة المعطاة) فإن التكامل (المساحة) سيكون موجباً

٣) إذا كان المنحنى تحت محور السينات (في الفترة المعطاة) فإن التكامل سيكون سالباً عندها نأخذ القيمة المطلقة لتصبح موجبة (المساحة لا يمكن أن تكون سالبة)

٤)إذا كان المنحنى يتغير فوق وتحت محور السينات (في الفترة المعطاة) نقوم بتجزئة التكامل وأخذ القيمة المطلقة للقيمة السالبة ثم نجمع الناتجين

مثال(١) :احسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س)= ٢س – ٦ ومحور السينات والمستقيمين س= ١ ، س= ٢

الحل: أولاً نساوي الاقتران بالصفر لإيجاد نقطة تقاطعه مع محور السينات
ق(س)= ٢س – ٦=٠ ⇐ ٢س = ٦ ⇐ س = ٣ لكن ٣ ∉ [١ ، ٢] لذلك لا نجزئ التكامل

المساحة : $\int_{١}^{٢}$ (٢س – ٦) دس= [س٢ – ٦س]$_{١}^{٢}$ = ((٢)٢ – ٦(٢)) – ((١)٢ – ٦(١))
= (٤ – ١٢) – (١ – ٦) = – ٨ +٥ = –٣

المساحة = م = | $\int_{١}^{٢}$(٢س – ٦) دس | = | – ٣| = ٣ وحدات مربعة

مثال(٢) :احسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س)=٨ – ٢س ومحور السينات في الفترة [٢ ، ٥]

الحل: أولاً نساوي الاقتران بالصفر لإيجاد نقطة تقاطعه مع محور السينات
ق(س)=٨ – ٢س = ٠ ⇐٢س = ٨ ⇐ س =٤ نلاحظ أن ٤ ∈ [٢ ، ٥] لذلك نجزئ التكامل إلى م١ ، م٢

م١= $\int_{٢}^{٤}$(٨– ٢س)دس=٨س – س٢]$_{٢}^{٤}$ = (٨(٤) – (٤)٢)– (٨(٢) –(٢)٢)=(٣٢ – ١٦)– (١٦– ٤)= ٤

م٢= $\int_{٤}^{٥}$(٨ – ٢س) دس=٨س – س٢]$_{٤}^{٥}$ = (٨(٥) – (٥)٢)– (٨(٤) –(٤)٢)= (٤٠ – ٢٥)– (٣٢– ١٦)= – ١

نلاحظ أن م٢ سالبة لذلك نأخذ القيمة المطلقة لها
إذاً المساحة المطلوبة = م١ + □م٢□ = ٤+ □– ١□= ٤+ ١ = ٥ وحدات مربعة

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات (078 531 88 77)

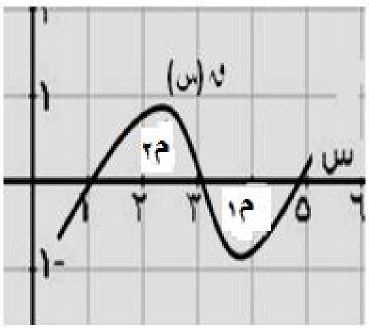
مثال (٣) :احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى ق(س)= س^{٢} – ٤ ومحور السينات

الحل: أولاً نساوي الاقتران بالصفر لإيجاد نقاط تقاطعه مع محور السينات

ق(س)= س^{٢} – ٤ = ٠ ⇐ س^{٢} = ٤ ⇐ س = ±٢

$\int_{-٢}^{٢}$ (س^{٢} – ٤) دس= [($\frac{١}{٣}$ س^{٣} – ٤س)]$_{-٢}^{٢}$ = ($\frac{٨}{٣}$ – ٨) – (– $\frac{٨}{٣}$ + ٨)= – $\frac{٣٢}{٣}$

إذاً المساحة المطلوبة = + $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

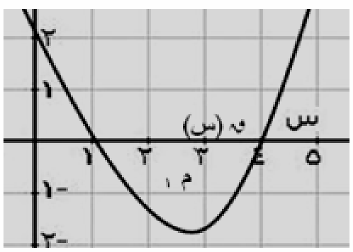


تمارين

س١ : معتمداً الشكل المجاور حيث م$_{١}$ =٨ ، م$_{٢}$ =٦ ، جد

١) $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس ٢) $\int_{٣}^{٥}$ ق(س) دس ٣) $\int_{١}^{٥}$ ق(س) دس

٤) المساحة المحصورة بين منحنى ق (س) ومحور السينات في الفترة [١، ٥]

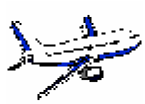


س٢ : معتمداً الشكل المجاور حيث $\int_{١}^{٤}$ ق(س) دس = – ٨

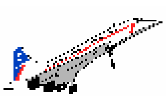
جد المساحة م$_{١}$

س٣ :احسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س)= ٢س– ١٠ ومحور السينات والمستقيمين س= ١، س= ٣

س٤ : احسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س)=٢–٢س ومحور السينات في الفترة [٠، ٣]



س٥ :احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى ق(س)= س^{٢} – ٢س ومحور السينات



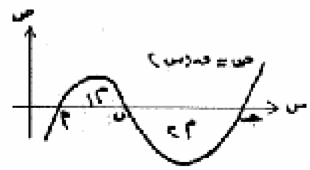
س٦ :احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى ق(س)= س^{٢} – س – ٢ ومحور السينات

س٧ :احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى ق(س)= ٩ – س^{٢} ومحور السينات

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات (078 531 88 77)

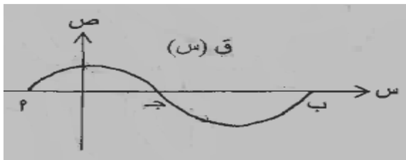
أسئلة الوزارة على المساحات(١) من(٢٠٠٨-٢٠١٥)

السؤال الأول : اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي :



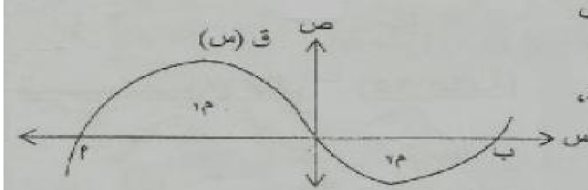
١) بالاعتماد على الشكل الآتي الذي يمثل منحنى ق (س) ،إذا كانت المساحة م١ =٦ ، المساحة م٢= ١٠ فإن $\int_{\text{أ}}^{\text{ج}}$ ق(س)دس = (٢٠٠٩ شتوية)

٢) يمثل الشكل المجاور المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات في الفترة [أ ، ب]
إذا علمت أن مساحة (م١)تساوي (٥) وحدات مربعة ومساحة (م٢)تساوي (٣) وحدات مربعة فإن
$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق (س) دس يساوي: (٢٠١٠ صيفية)



٣) معتمداً الشكل المجاور والذي يُمثّل منحنى الاقتران ق المُعرّف في الفترة [أ ، ب] ، إذا علمت أن مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات تساوي (١٤) وحدة مربعة، وكان $\int_{\text{أ}}^{\text{ج}}$ ق (س) دس = ٦ ، فما قيمة $\int_{\text{ج}}^{\text{ب}}$ ق (س) دس ؟

أ) ٨ ب) ٢٠ ج) −٨ د) −٢ (٢٠١٢ صيفية)



٤) يبين الشكل المجاور المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) ومحور السينات في الفترة [أ ، ب]. إذا علمت أن م١ = ٩ وحدات مربعة ، م٢ = ٤ وحدات مربعة، فإن $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق (س) د س =

أ) −١٣ ب) −٥ ج) ٥ د) ١٣ (٢٠١٣ شتوية)

٥) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س)= س٢ − ٢س ومحور السينات (٢٠٠٨ صيفية(٨علامات))

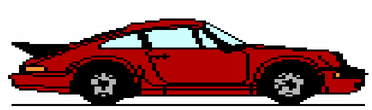
٦) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س)= ٦− ٢س ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٤]
(٢٠١٠ شتوية(٥علامات)) الجواب =٩ + ١=١٠

٧) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س)= ١ − س٢ ومحور السينات (٢٠١٠ صيفية(٧علامات))

٨) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س)= ٢س + ١ ومحور السينات والمستقيمين س=٠ ،س= ٢
(٢٠١١ شتوية(٥علامات)) الجواب =٦

٩) احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س)= ٣س + ٦ ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٣]
(٢٠١٢ صيفية (٤علامات)) الجواب = $\frac{٦٣}{٢}$

س٥:احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى ق(س)= س٢ − ٤س ومحور السينات
(٢٠١٣ صيفية) (٦علامات)



١) عندما يكون المطلوب هو المساحة المحصورة بين منحنيي اقترانين : نجد حدود التكامل من خلال المساواة بين الاقترانين وإيجاد نقاط تقاطعهما ثم طرح الاقترانين : الأكبر(الأعلى) – الأصغر(الأسفل) ى(س) – هـ(س) ولتحديد الأكبر(بدون رسم) نختار أي عدد ضمن الفترة ونعوضه في كل من الاقترانين ونلاحظ الناتج مثلاً : في الفترة [٢ ، ٥] نجد ى(٣) ، هـ(٣)
أو نجد تكامل(ى(س) – هـ(س)) أو (هـ(س) – ى(س)) وإذا كانت النتيجة سالبة نحولها إلى موجبة

٢) إذا كان هناك ٣ نقاط تقاطع بين الاقترانين ى(س) ، هـ(س) فمعنى ذلك أن الاقترانين يغيران وضعهما :
مرة ى(س) أكبر من هـ(س) ومرة يكون هـ(س) أكبر من ى(س) . في هذه الحالة يجب تجزئة التكامل وتكون المساحة = ∫(ى(س) – هـ(س))دس + ∫(هـ(س) – ى(س)) دس

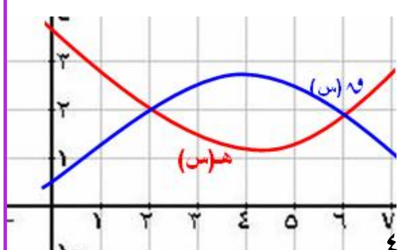
مثال (١): احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ى(س)= ٣ س^{٢} و هـ(س) = ١٢س

الحل: أولاً نساوي بين الاقترانين : ى(س)= هـ(س) ⇐ ٣س^{٢} = ١٢س ⇐ ٣س^{٢} – ١٢س= ٠
أي أن ٣س(س– ٤) = ٠ ⇐ س= ٠ أو س=٤

∫$_{٠}^{٤}$(هـ(س)– ى(س)) دس= ∫$_{٠}^{٤}$(١٢س–٣س^{٢}) دس = [٦س^{٢} – س^{٣}]$_{٠}^{٤}$ = ٩٦–٦٤=٣٢

المساحة المطلوبة = ٣٢

مثال (٢): معتمداً الشكل المجاور ، إذا كانت المساحة بين ى ، هـ تساوي ١٠ وحدة مربعة وكان ∫$_{٢}^{٦}$ ى(س)دس=١٤ فجد ∫$_{٢}^{٦}$ هـ(س)دس



الحل: المساحة : = ∫$_{٢}^{٦}$ (ى – هـ)دس= ∫$_{٢}^{٦}$ ى(س)دس – ∫$_{٢}^{٦}$ هـ(س) دس

١٠=١٤ – ∫$_{٢}^{٦}$ هـ(س) دس ⇐ ∫$_{٢}^{٦}$ هـ(س) دس= ٤

مثال (٣): احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ى(س)= س^{٢} +٤س والمستقيم ص=١٢

الحل: أولاً نساوي بين الاقترانين س^{٢} +٤س = ١٢ ⇐ س^{٢} +٤س – ١٢ =٠ ⇐ (س +٦)(س– ٢)= ٠
إذاً س= – ٦ و س=٢

نجد = ∫$_{-٦}^{٢}$ (ص– ى)دس= ∫$_{-٦}^{٢}$ (١٢ – س^{٢} –٤س) دس= [(١٢س – $\frac{١}{٣}$ س^{٣} –٢س^{٢})]$_{-٦}^{٢}$

= (١٢(٢) – $\frac{١}{٣}$ (٢)^{٣} –٢(٢)^{٢}) – (١٢(-٦) – $\frac{١}{٣}$ (-٦)^{٣} –٢(-٦)^{٢}) = $\frac{٤٠}{٣}$ – ٧٢= – $\frac{٣٢}{٣}$

إذاً المساحة = + $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات (77 88 531 078)

تمارين

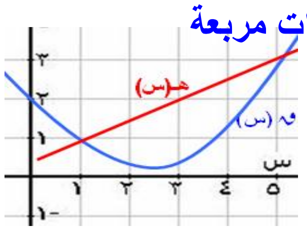
س ١): احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س)= ٦ س^{٢} و هـ(س) = ١٢س

س ٢): احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س)= ٢س – ٣ و هـ(س)= س^{٢}– ٢س

س ٣): احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س)= س^{٢} ومنحنى هـ(س)= س+ ٢

س ٤): احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س)=س^{٢}+ ٢ ومنحنى ص = ٣

س ٥): معتمداً الشكل المجاور ، إذا كانت المساحة بين ق ، هـ تساوي ٥ وحدات مربعة

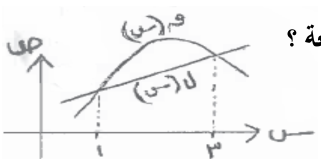


وكان $\int_{١}^{٥}$ هـ(س)دس=٩ فجد $\int_{١}^{٥}$ ق(س)دس

أسئلة الوزارة على التكامل المساحات(٢) من(٢٠٠٨–٢٠١٥)

١) الشكل المجاور يمثل منحنيي الاقترانين ق(س) ، ل(س) ، إذا علمت أن $\int_{١}^{٣}$ ٢ق(س) دس =١٢، $\int_{٣}^{١}$ ل(س) دس = – ٤

فما مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين في الفترة [١ ، ٣] بالوحدات المربعة ؟



الجواب : ٢

٢) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س)= س^{٢} – ٤س والمستقيم ص=٥ (٢٠٠٨ شتوية (٨علامات))

٣) احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س)= ٦س– س^{٢} و هـ(س)= ٢س (٢٠٠٩ شتوية (٨علامات))

٤) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س)= ٣– س^{٢} و هـ(س)= ٢س (٢٠٠٩ صيفية (٧علامات))

٥) احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س)= س^{٢} – ١ و المستقيم ص= ٣

(س٣ :أ وزارة ٢٠١١ صيفية (٧علامات)) الجواب= $\frac{٣٢}{٣}$

٦) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س)= س^{٢} - س و هـ(س)= ٢س

(س٣ :أ وزارة ٢٠١٣ شتوية (٦علامات)) الجواب= $\frac{٩}{٢}$

٧)احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانينق(س)= س^{٢} و هـ(س) = ٢س +٣

(وزارة ٢٠١٤ شتوية (٧علامات)) الجواب= $\frac{٣٢}{٣}$

٨) احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س)= ١- س^{٢} و المستقيم ص= - ٣

(وزارة ٢٠١٤ صيفية (٦علامات))

٩)احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س)= ٢- س^{٢} ، هـ(س) = س (٢٠١٥ شتوية (٦علامات))

قاعدة (١):إذا كان د(س) هو اقتران الإيراد الكلي ، دَ(س) هو اقتران الإيراد الحدي (كما لاحظنا الفصل الأول) فإن

$\int$ دَ(س) دس = د(س) (ثابت التكامل جـ في اقتران الإيراد الكلي دائماً يساوي صفر)

قاعدة (٢) : إذا دلّ المتغير س على عدد وحدات الطلب والمتغير ع على السعر

ع = ں (س) : اقتران (السعر - الطلب) ع = هـ (س) : اقتران (السعر - العرض)

ع١ = سعر التوازن س١ = كمية التوازن حيث ں (س١) = هـ(س١)

فإن فائض المستهلك = فـك = $\int_{.}^{س_١}$ (ں (س) - ع١)دس

فائض المنتج = فـجـ = $\int_{.}^{س_١}$ (ع١ - هـ(س)) دس

مثال (١):إذا كان اقتران الإيراد الحدي لبيع س من الثلاجات يعطى بالاقتران دَ(س)=٣س^٢ - ٤س + ٦
فجد الإيراد الكلي الناتج عن بيع ١٠ ثلاجات

الحل: د(س)= $\int$ (٣س^٢ - ٤س + ٦)دس ⇐ د (س)= س^٣ – ٢س^٢ +٦س ⇐ د (١٠)= (١٠)^٣ – ٢(١٠)^٢ +٦(١٠)= ٨٠٦

مثال (٢):إذا كان ع = ں (س) = ٦٥ – ٤س يمثل اقتران (السعر – الطلب) وكان السعر ثابتاً عند ع١ = ٥ فجد قيمة فائض المستهلك

الحل: ع١ = ق (س) ⇐ ٥ = ٦٥ – ٤س ⇐ ٤س = ٦٠ ⇐ س=١٥

فـك = $\int_{.}^{١٥}$ (ں (س) - ع١)دس = $\int_{.}^{١٥}$ (٦٥ - ٤س)دس- ٥×١٥=(٦٥ س – ٢س^٢)$]_{.}^{١٥}$ - ٧٥

=٦٥×١٥ – ٢(١٥)^٢–٧٥ =٩٧٥-٤٥٠- ٧٥= ٥٢٥-٧٥=٤٥٠

طريقة الحسنات

ولكن لو قمنا بطرح ع١ من ں (س) ثم أجرينا عملية التكامل فإن الخطوة قبل الأخيرة ستكون : عدد – نصفه (هذا في حالة الاقترانات الخطية)

لاحظ المثال السابق :

فـك = $\int_{.}^{١٥}$ (ں (س) - ع١)دس = $\int_{.}^{١٥}$ (٦٥ - ٤س - ٥)دس=(٦٠ س – ٢س^٢)$]_{.}^{١٥}$

=٦٠×١٥ – ٢(١٥)^٢–٠ =٩٠٠ - ٤٥٠ = ٤٥٠ (**لاحظ : عدد – نصفه**)

مثال (٣):إذا كان اقتران (السعر – العرض) لمنتج ما هو ع = هـ (س) = ١٢ +٤س وكان السعر ثابتاً عند ع١ = ٢٠ فجد فائض المنتج

الحل: عندما ع١ = ٢٠ ⇐ ١٢ + ٤س = ٢٠ ⇐ ٤س = ٨ ⇐ س= ٢

فـج = $\int_{.}^{٢}$(ع١ – هـ(س))دس = $\int_{.}^{٢}$(٢٠ – ١٢–٤س)دس

= (٨ س –٢س^٢)$]_{.}^{٢}$ =٨×٢ –٢(٢)^٢–٠= ١٦ – ٨ = ٨ (لاحظ : عدد – نصفه)

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات (077 88 531 078)

مثال (٤):): إذا كان اقتران (السعر – الطلب) لمنتج ما هو ع = ى(س) = ١٨ – ٢س ، وكان اقتران (السعر – العرض) لهذا لمنتج هو ع = هـ (س) = ٦+ ٤س فجد

١) كمية التوازن ٢) سعر التوازن ٣) فائض المستهلك ٤) فائض المنتج

الحل: أولاً نساوي بين الاقترانين : ى($س_{١}$) = هـ ($س_{١}$) ⇐ ١٨ – ٢س=٦ + ٤س ⇐ ١٢=٦ $س_{١}$ ⇐ $س_{١}$= ٢

إذاً كمية التوازن = $س_{١}$= ٢ ولإيجاد سعر التوازن نعوض (٢) في أحد الاقترانين

ى(٢) = ١٨ – ٢×٢ = ١٤ أو هـ (٢) = ٦+ ٤×٢=١٤ (يجب أن نحصل على نفس القيمة)

٣) $ف_{ك}$ = $\int_{٠}^{٢}$(١٨ – ٢س – ١٤)دس = $\int_{٠}^{٢}$(٤ – ٢س)دس= [(٤س – $س^{٢}$)]$_{٠}^{٢}$ = ٤×٢ – $(٢)^{٢}$ – ٠ = ٨ – ٤ =٤

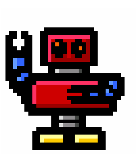
٤) $ف_{ج}$ = $\int_{٠}^{٢}$(١٤ – ٦ – ٤س)دس = $\int_{٠}^{٢}$(٨ – ٤س)دس= (٨ س – $٢س^{٢}$)]$_{٠}^{٢}$ = ٨×٢ – $٢(٢)^{٢}$ – ٠ =١٦ - ٨ = ٨

تمارين

س١) إذا كان اقتران الإيراد الحدي لبيع س طابعة هو دَ(س)=$٦س^{٢}$ - ١٢س + ١٥ فجد الإيراد الكلي الناتج عن بيع ١٠ طابعات

س٢) إذا كان ع = ى(س)=٤٢ – ٣س يمثل اقتران (السعر – الطلب) حيث (ع) السعر بالدنانير ،(س) عدد الوحدات المنتجة وكان السعر ثابتاً عند $ع_{١}$ =٣٠ جد قيمة فائض المستهلك (س٣ :ب وزارة ٢٠١٣ صيفية(٥ علامات))

س٣) إذا كان اقتران (السعر – العرض) لمنتج ما هو ع = هـ (س) = ٥ + $٣س^{٢}$ وكان السعر ثابتاً عند $ع_{١}$ =٥٣ فجد فائض المنتج



س٤) إذا كان اقتران (السعر – الطلب) لمنتج ما هو ع = ى(س) = ١٢ – ٣س ، وكان اقتران (السعر – العرض) للمنتج نفسه هو ع = هـ (س) = ٥+ ٤س فجد

١) كمية التوازن ٢) سعر التوازن ٣) فائض المستهلك ٤) فائض المنتج

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات (078 531 88 77)

أسئلة الوزارة على التطبيقات الاقتصادية من(٢٠٠٨-٢٠١٥)

السؤال الأول : اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي :

١) إذا كان اقتران (السعر – الطلب) لمنتج معين هو ع = ق(س) = ١٢ – س ، وكان اقتران (السعر – العرض) لهذا المنتج هو ع = هـ (س) = س+٢ ، فإن كمية التوازن (س) تساوي : ...... (س١ :٤ وزارة ٢٠١١ صيفية) الجواب : ج ، ٥

السؤال الثاني :

١) إذا كان منحنى (السعر – العرض) لمنتج معين معطى بالعلاقة ع= هـ(س)= ٥ + ٢س حيث (ع) السعر بالدنانير ،(س) عدد الوحدات المنتجة وكان السعر ثابتاً عند ع١ =٢١ أوجد قيمة فائض المنتج (س٣ :أ وزارة ٢٠٠٨ شتوية(٥علامات)) الجواب = ٦٤

٢) إذا كان اقتران (السعر – الطلب) لمنتج معين هو ع = ق(س) = ٤٠ – ٢س ،
وكان اقتران (السعر – العرض) معطى بالعلاقة ع = هـ (س) = ٦س ، أوجد فائض المستهلك عند سعر التوازن
(س٣ :ب وزارة ٢٠٠٨ صيفية(٦علامات)) الجواب :س١= ٥ ، ع١=٣٠ ، فائض المستهلك=٢٥ دينار

٣) إذا كان اقتران الإيراد الحدي لبيع س لعبة من لعب الأطفال التي ينتجها مصنع هو دَ(س)=٣س^{٢} - ٨س + ٢ فجد الإيراد الكلي الناتج عن بيع (٥) لعب (س٣ :ب وزارة ٢٠٠٩ شتوية(٤علامات)) الجواب :د(٥)=٣٥

٤) إذا كان اقتران الإيراد الحدي لبيع س ثلاجة من إنتاج مصنع هو دَ(س)=٣س^{٢} - ٨س + ٢٠ ديناراً ، فجد الإيراد الكلي الناتج عن بيع ٢٠ ثلاجة (س٣ :أ وزارة ٢٠٠٩ صيفية(٤علامات)) الجواب :د(٢٠)=٦٨٠٠

٥) إذا كان الإيراد الحدي لبيع (س) قطعة من منتج ما يعطى بالاقتران دَ(س)=٣س^{٢} - ٤س + ٣ فجد الإيراد الكلي الناتج عن بيع (٥) قطع من هذا المنتج (س٣ :ب وزارة ٢٠١٠ شتوية(٤علامات)) الجواب :د(٥)=٩٠

٦) إذا كان ع = ق(س)=٤٠ – ٢س يمثل اقتران (السعر – الطلب) حيث (ع) السعر بالدنانير ،(س) عدد الوحدات المنتجة وكان السعر ثابتاً عند ع١ = ١٠ جد قيمة فائض المستهلك (س٣ :ب وزارة ٢٠١٠ صيفية(٧علامات))
الجواب : س١=١٥ ، فائض المستهلك=٢٢٥دينار

٧) إذا كان اقتران (السعر – العرض) لمنتج معين هو ع= هـ(س)= ١١ + ٢س حيث (ع) السعر بالدنانير ،(س) عدد القطع المنتجة وأن السعر ثابت عند ع١ =٢١ فجد قيمة فائض المنتج
(س٣ :أ وزارة ٢٠١١ شتوية(٧علامات)) الجواب : س١= ٥ ، فائض المنتج=٢٥دينار

٨) إذا كان اقتران (السعر – الطلب) لمنتج معين هو ع = ق(س) = ٧٠ – ٤س ،
وكان اقتران (السعر – العرض) لهذا المنتج هو ع = هـ (س) = ١٠+ ٦س ، فجد فائض المستهلك عند سعر التوازن
(س٣ :ب وزارة ٢٠١٢ شتوية(٧علامات)) الجواب :س١= ٦ ، ع١=٤٦ ، فائض المستهلك=٧٢ دينار

٩) إذا كان الإيراد الحدي لبيع س لعبة من لعب الأطفال التي ينتجها أحد المصانع هو دَ(س)=٣س^{٢} - ٨س + ٥ ديناراً ، فجد الإيراد الكلي الناتج عن بيع هذه اللعب (س٣ :أ وزارة ٢٠١٢ صيفية (٥علامات)) الجواب : د(س)= س^{٣} - ٤س^{٢} + ٥س ديناراً

١٠) إذا كان اقتران (السعر – العرض) لمنتج معين هو ع= هـ(س)= ١٢ + ٤س حيث (ع) السعر بالدنانير ، (س) عدد القطع المنتجة وكان السعر ثابتاً عند ع١ =٣٢ ديناراً ، فجد قيمة فائض المنتج
(س٣ :ب وزارة ٢٠١٣ شتوية(٥علامات)) الجواب : س١= ٥ ، فائض المنتج=٥٠دينار

١١) إذا كان ع = ٯ(س)=٤٢ – ٣س يمثل اقتران (السعر – الطلب) حيث (ع) السعر بالدنانير ،(س) عدد الوحدات المنتجة وكان السعر ثابتاً عند ع١ =٣٠ جد قيمة فائض المستهلك (س٣ :ب وزارة ٢٠١٣ صيفية(٥ علامات))

١٢) إذا كان اقتران الإيراد الحدي لبيع س من الثلاجات يعطى بالاقتران دَ(س)=٦٠س^{٢} - ٣٠س + ٦ ديناراً ، فجد الإيراد الكلي الناتج عن بيع (٤) ثلاجات (وزارة ٢٠١٤ شتوية(٤علامات))

١٣) إذا كان اقتران (السعر – الطلب) لمنتج معين هو ع = ٯ(س) = ٤٨ – ٣س ،
وكان اقتران (السعر – العرض) لهذا المنتج هو ع = هـ (س) =٥س ، فجد فائض المنتج عند سعر التوازن
(وزارة ٢٠١٤ شتوية(٧علامات)) الجواب :س١= ٦ ، ع١=٣٠ ، فائض المنتج =٩٠ دينار

١٤) إذا كان اقتران (السعر – الطلب) لمنتج معين هو ع = ٯ(س)=١٦ – ٢س حيث (ع) السعر بالدنانير ،(س) عدد القطع المنتجة وكان السعر ثابتاً عند ع١ =١٠ دنانير فجد فائض المستهلك (وزارة ٢٠١٤ صيفية(٤علامات))

١٥) إذا كان اقتران (السعر – العرض) لمنتج معين هو ع= هـ(س)= ١٠ + ٢س حيث (ع) السعر بالدنانير ،(س) عدد القطع المنتجة وكان السعر ثابتاً عند ع١ =٢٤ ديناراً ، فجد فائض المنتج (٢٠١٥ شتوية(٦علامات))

١٦) إذا كان اقتران الإيراد الحدي لبيع (س) من القطع من منتج معين هو دَ(س)=٦٠ س^{٢} - ١٨س + ٢٠ ديناراً ، فجد الإيراد الكلي الناتج عن بيع (٥) قطع (٢٠١٥ شتوية(٣علامات))

علمتني الرياضيات
أن السالب بعد السالب يعني موجب ... فلا تيأس ... فالمصيبة بعد المصيبة تعني الفرج

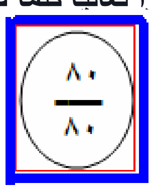
علمتني الرياضيات
أنه يمكننا الوصول لنتيجة صحيحة بأكثر من طريقة ... فلا تظن أنك وحدك صاحب الحقيقة وأن كل من خالفك مخطئ

علمتني الرياضيات
أن هناك شيء اسمه (مالا نهاية) فلا تكن محدود الفكر و الطموح

علمتني الرياضيات
أن لكل مجهول قيمة، فلا تحتقر أحداً لا تعرفه

علمتني الرياضيات
أن العدد السالب كلما كبرت أرقامه صغرت قيمته، كالمتعالين على الناس: كلما ازدادوا تعالياً كلما صغروا في عيوننا

علمتني الرياضيات
أن لكل متغير قيمة تؤدي إلى نتيجة فاختر متغيراتك جيداً لتصل إلى نتيجةٍ ترضيك



مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح
معلم المادة : عبدالقادر الحسنات

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات (77 88 531 078)

الصف الثاني الثانوي الصناعي والفندقي / م٤ / امتحان شامل على وحدة التكامل

السؤال الأول : أكمل الفراغ فيما يلي :

١) إذا كان ق(س) = $\int$ (٢ س – ٣) دس فإن قَ(١) = ــــــ ٢) إذا كان ص = $\int \frac{١}{\text{س}}$ دس فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ــــــــــــــ

٣) $\int$ جا س دس = ــــــــــــــ ٤) $\int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ دس = ــــــــــــــ

٥) $\int_{٠}^{١}$ هـ$^{\text{س}}$ دس = ــــــــــــــ

٦) إذا كان ق(– ١)= ٤ ، ق(١)= –٦ ، فإن $\int_{-١}^{١}$ قَ(س) دس = ــــــــــــــ

٧) $\int_{٢}^{٢}$ (٣س^{٢}+ ٤) دس = ــــــــــــــ

٨) إذا كان ق(س)=١٨ – ٢س هو اقتران (السعر – الطلب) ، هـ(س)= س+٣ هو اقتران (السعر – العرض) ، فإن :

سعر التوازن = ــــــــــــــ وكمية التوازن = ــــــــــــــ

٩) إذا كان $\int_{١}^{٢}$ ٤ق(س) دس = ١٢ فإن $\int_{٢}^{١}$ ق(س) دس يساوي : ــــــــــــــ

١٠) إذا علمت أن $\int_{٣}^{١}$ ٢ق(س) دس = ١٤ ، $\int_{٥}^{١}$ ق(س) دس = ٣ ، فان $\int_{٥}^{٣}$ ق(س) دس = ــــــــــــــ

السؤال الثاني: أ) جد التكاملات الآتية :

١) $\int$ (٣س– جتاس) دس ٢) $\int_{١}^{٤} \frac{٥}{\sqrt{\text{س}}}$ د س ٣) $\int \frac{٣}{\text{س}^{٢}}$ د س

٤) $\int \frac{١}{\text{س}^{٢}+٥}$ د س ٥) $\int$(٤س+ ٦) $\sqrt[٥]{\text{س}^{٢}+٣\text{ س}}$ دس

ب) إذا كان $\int_{٠}^{\text{م}}$ س دس = ٨ فجد قيمة م

ج) إذا كان $\int_{٠}^{٢}$ ق(س) دس = ٤ ، $\int_{٠}^{٤}$ ق(س) دس = ٣ ، فجد $\int_{٢}^{٤}$(٦ – ق(س)) دس

د) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢\text{س} ، & ٠ \leqslant \text{س} \leqslant ١ \\ ٣\text{س}^{٢} ، & ١ < \text{س} \leqslant ٢ \end{cases}$ فجد $\int_{٠}^{٢}$ ق(س)) دس

هـ) إذا كان ق(٤)=١٢ ، ق(١)= ٥ ، فاحسب قيمة $\int_{١}^{٢}$ ٢س قَ(س^{٢}) دس

و) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٤ ــ س^{٢} ومحور السينات

ز) إذا كان اقتران الإيراد الحدي لبيع س من الحقائب يعطى بالاقتران دَ(س)=٣س^{٢} -٢س+٧ فجد الإيراد الكلي الناتج عن بيع ٥ منها

ح) إذا كان اقتران (السعر ــ العرض) لمنتج ما هو ع = هـ(س) = ٢س+ ١٣ وكان السعر ثابتاً عند ٢٧ فجد قيمة فائض المنتج

ط) إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (س ، ص) يساوي (٣ س^{٢}+ ٨س) . فجد قاعدة الاقتران علماً بأن ق(٢)=٧

ك) يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد ن ثانية تساوي ع(ن)=(٢ن +٤) م/ث ، جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور (٣) ثوان علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) =٥م

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات (078 531 88 77)

الصف الثاني الثانوي الصناعي والفندقي / م٤ : **حل الامتحان الشامل على وحدة التكامل**

الحل : السؤال الأول :

١) إذا كان ق(س) = $\int$ (٢ س – ٣) دس فإن قَ(١) = ٢-٣ = -١

٢) إذا كان ص = $\int$ $\frac{١}{س}$ دس فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{س}$

٣) $\int$ جا س دس = – جتاس + جـ

٤) $\int$ $\frac{١}{جتا^{٢}س}$ دس = ظاس +جـ

٥) $\int_{٠}^{١}$ هـ^س دس = [هـ^س]$_{٠}^{١}$ = هـ^١ – هـ^٠ = هـ - ١

٦) إذا كان ق(– ١)= ٤ ، ق(١)= –٦ ، فإن $\int_{-١}^{١}$ قَ(س) دس = ق(١) - ق(-١) =-٦ – ٤ = -١٠

٧) $\int_{٢}^{٢}$ (٣س^٢ + ٤) دس = صفر

٨) إذا كان ق(س)=١٨ – ٢س هو اقتران (السعر – الطلب) ، هـ(س)= س+٣ هو اقتران (السعر – العرض) ، فإن :

سعر التوازن = ع= ٨ وكمية التوازن = س= ٥

٩) إذا كان $\int_{١}^{٢}$ ٤ق(س) دس = ١٢ فإن $\int_{٢}^{١}$ ق(س) دس يساوي : -٣

١٠) إذا علمت أن $\int_{٣}^{١}$ ٢ق(س) دس = ١٤ ، $\int_{٥}^{١}$ ق(س) دس = ٣ ، فان $\int_{٥}^{٣}$ ق(س) دس = ٣ + - ٧ = - ٤

السؤال الثاني: أ) ١) $\int$ (٣س – جتاس) دس = $\frac{٣}{٢}$ س^٢ – جاس + جـ

٢) $\int_{١}^{٤}$ $\frac{٥}{\sqrt{س}}$ د س = ٢٠ - ١٠ = ١٠

٣) $\frac{٣}{٢}$ لـو س + جـ

٤) $\int$ $\frac{١}{٢س+٥}$ د س ، ص = ٢س+٥، دس= $\frac{١}{٢}$ دص ⇐

$\int$ $\frac{١}{٢س+٥}$ د س = $\frac{١}{٢}$ لـو ص + جـ = $\frac{١}{٢}$ لـو |٢س+٥| + جـ

٥) $\int$(٤س+٦) $\sqrt[٥]{س^{٢}+٣ س}$ دس ، ص = س^٢ + ٣س ⇐ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س+٣ ⇐ $\int$ ~~(٤س+٦)~~^٢ $\sqrt[٥]{ص}$ $\frac{دص}{\cancel{٢س+٣}}$

= $\int$ ٢ ص^$\frac{١}{٥}$ دص = ٢ × $\frac{٥}{٦}$ ص^$\frac{٦}{٥}$ + جـ = ٢ × $\frac{٥}{٦}$ (س^٢+٣س)^$\frac{٦}{٥}$ + جـ

ب) إذا كان $\int_{٠}^{م}$ س دس = ٨ ⟸ $\frac{١}{٢}$ م^{٢} - ٠ = ٨ ⟸ م^{٢} = ١٦ ⟸ م = ∓ ٤

ج) $\int_{٢}^{٤}$ (٦ – ق(س)) دس = $\int_{٢}^{٤}$ ٦ دس - $\int_{٢}^{٤}$ ق(س) دس = [٦س]$_{٢}^{٤}$ – – ١ = ٢٤ – ١٢ + ١ = ١٣

د) $\int_{ب}^{٢}$ ق(س)) دس = $\int_{ب}^{١}$ ٢س دس + $\int_{١}^{٢}$ ٣س^{٢} دس = [س^{٢}]$_{ب}^{١}$ + [س^{٣}]$_{١}^{٢}$ = (١-٠) + (٨ - ١) =١+ ٧ = ٨

هـ) نفرض أن ص = س^{٢} ⟸ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س ⟸ دس = $\frac{دص}{٢س}$ ⟸ $\int_{١}^{٤}$ ~~٢س~~ قَ (ص) $\frac{دص}{\cancel{٢س}}$

= $\int_{١}^{٤}$ قَ (ص) دص = [ق(ص)]$_{١}^{٤}$ = ق(٤) - ق(١) = ١٢ - ٥ = ٧

ص = س^{٢} ⟸ { س = ١ ⟸ ص = ١ ؛ س = ٢ ⟸ ص = ٤ }

و) ق(س) = ٤ – س^{٢} = ٠ ⟸ س = ∓ ٢ ، م = $\int_{-٢}^{٢}$ (٤ – س^{٢}) دس = [٤س – $\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{-٢}^{٢}$ = (٨ – $\frac{٨}{٣}$) – (–٨ + $\frac{٨}{٣}$) = $\frac{٣٢}{٣}$

ز) د(س) = $\int$ (٣س^{٢} - ٢س + ٧) دس

د (س) = س^{٣} – س^{٢} + ٧س

د (٥) = (٥)^{٣} – (٥)^{٢} + ٧(٥) = ١٢٥ - ٢٥ + ٣٥ = ١٣٥

ح) هـ(س) = ٢س + ١٣ = ٢٧

٢س = ١٤ ⟸ س = ٧

ف$_{ج}$ = $\int_{ب}^{٧}$ (ع$_{١}$ – هـ(س)) دس = $\int_{ب}^{٧}$ (٢٧ – ٢س – ١٣) دس = (١٤س – س^{٢})]$_{ب}^{٧}$ = ١٤×٧ – (٧)^{٢} – ٠ = ٩٨ - ٤٩ = ٤٩ دينار

ط) الميل = قَ(س) ⟸ ق (س) = $\int$ (٣ س^{٢} + ٨س) دس = س^{٣} + ٤س^{٢} + جـ

لكن ق(٢) = ٧ ⟸ (٢)^{٣} + ٤(٢)^{٢} + جـ = ٧ ⟸ جـ = – ١٧

ق (س) = س^{٣} + ٤س^{٢} – ١٧

ك) ع(ن) = ٢ن + ٤ نكامل الطرفين : $\int$ ع(ن) دن = $\int$ (٢ن + ٤) دن

ف(ن) = ن^{٢} + ٤ن + جـ لكن ف(٠) = ٥ إذاً جـ = ٥

وبالتالي ف(ن) = ن^{٢} + ٤ن + ٥

إذاً ف(٣) = ٣^{٢} + ٤(٣) + ٥ = ٢٦ م

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

المعلم : عبدالقادر الحسنات
(٠٧٨٥٣١٨٨٧٧)