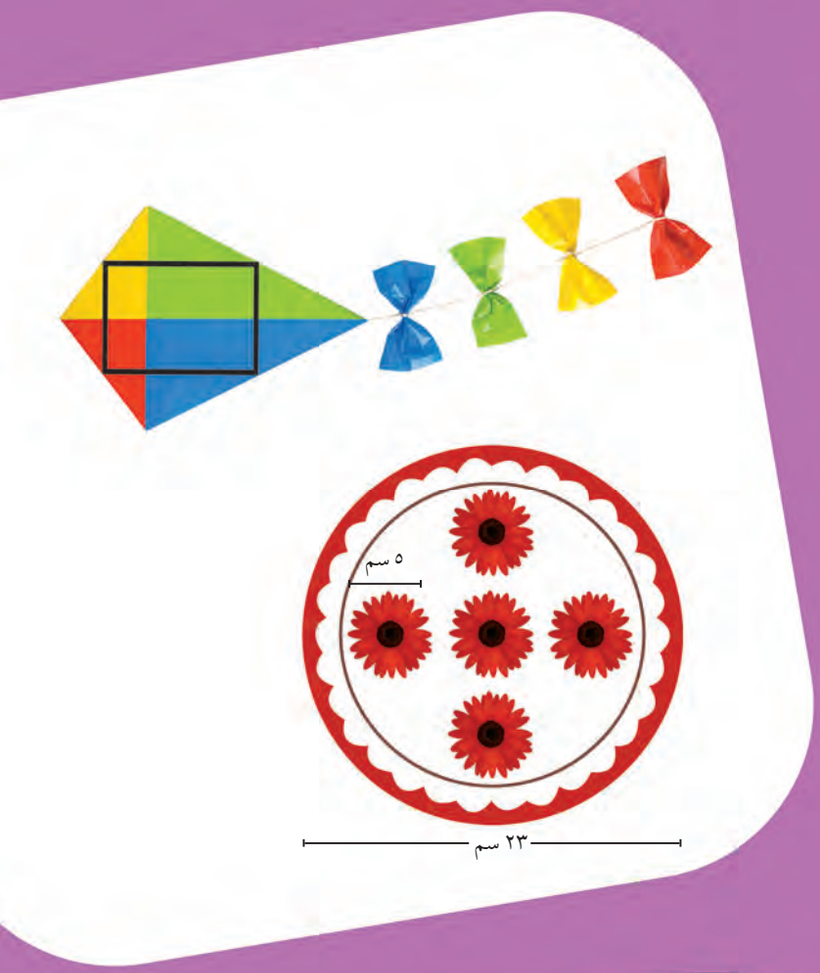
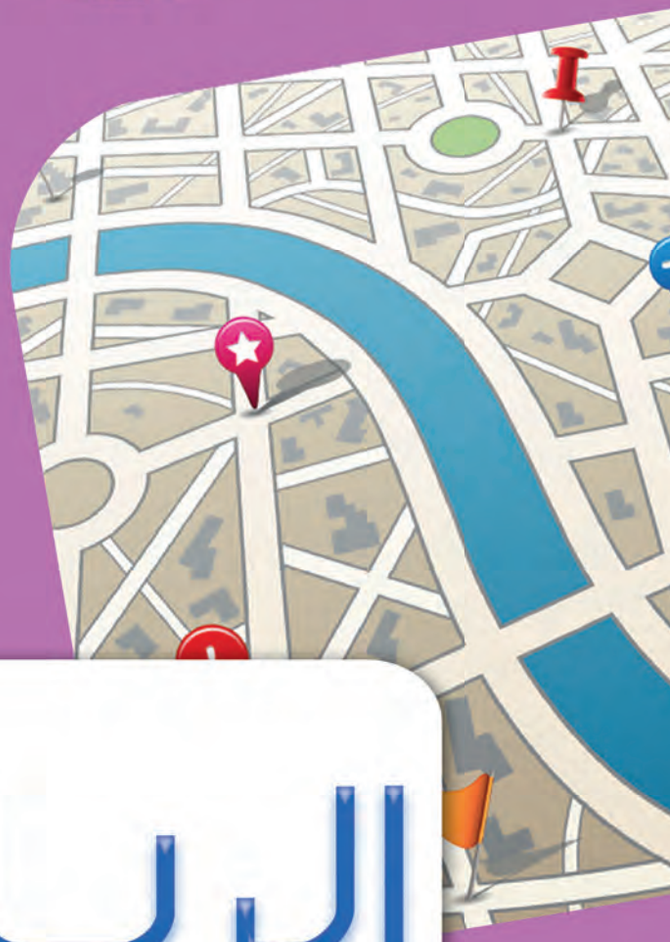




كتاب الطالب

الصفّ التاسع ٩
الفصل الدراسي الثاني

الرياضيات

الطبعة الثالثة

وزارة التربية

الرياضيات

الصفّ التاسع

الفصل الدراسي الثاني

كتاب الطالب

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. إبراهيم حسين القطان (رئيسًا)

أ. حصة يونس محمد علي **أ. فتحية محمود أبو زور**

أ. حسين علي عبدالله

الطبعة الثالثة

١٤٣٨ - ١٤٣٩ هـ

٢٠١٧ - ٢٠١٨ م

فريق عمل دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف التاسع

أ. جميلة محمد البيدان (رئيسًا)

أ. حسن نوح المهنا **أ. منى فتحى عاشور**

أ. عبد الرزاق على البغلي **أ. غدير عيسى الشطي**

دار التَّربَويّون House of Education ش.م.م. وبيرسون إديوكيشن ٢٠١١

© جَميع الحقوق مَحفوظة: لا يَجوز نشْر أيّ جُزء من هذا الكِتاب أو تَصويره أو تَخزينه أو تَسجيله بأيّ وَسيلَة دُون مُوَافقَة خطّيَّة مِنَ النّاشِر.

الطبعة الأولى ٢٠١١

الطبعة الثانية ٢٠١٣

الطبعة الثالثة ٢٠١٥

٢٠١٧

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

مقدمـــــة

الحمدلله رب العالمين، والصلاة والسلام على سيد المرسلين، محمد بن عبدالله وصحبه أجمعين.

عندما شرعت وزارة التربية في عملية تطوير المناهج، استندت في ذلك إلى جملة من الأسس والمرتكزات العلمية والفنية والمهنية، حيث راعت متطلبات الدولة وارتباط ذلك بسوق العمل، وحاجات المتعلمين والتطور المعرفي والعلمي، بالإضافة إلى جملة من التحديات التي تمثلت بالتحدي القيمي والاجتماعي والاقتصادي والتكنولوجي وغيرها، وإن كنا ندرك أن هذه الجوانب لها صلة وثيقة بالنظام التعليمي بشكل عام وليس المناهج بشكل خاص.

ومما يجب التأكيد عليه، أن المنهج عبارة عن كم الخبرات التربوية والتعليمية التي تُقدم للمتعلم، وهذا يرتبط أيضًا بعمليات التخطط والتنفيذ، والتي في محصلتها النهائية تأتي لتحقيق الأهداف التربوية، وعليه أصبحت عملية بناء المناهج الدراسية من أهم مكونات النظام التعليمي، لأنها تأتي في جانبين مهمين لقياس كفاءة النظام التعليمي، فهي من جهة تمثل أحد المدخلات الأساسية ومقياسًا أو معيارًا من معايير كفاءته من جهة أخرى، عدا أن المناهج تدخل في عملية إنماء شخصية المتعلم في جميع جوانبها الجسمية والعقلية والوجدانية والروحية والاجتماعية.

من جانب آخر، فنحن في قطاع البحوث التربوية والمناهج، عندما نبدأ في عملية تطوير المناهج الدراسية، ننطلق من كل الأسس والمرتكزات التي سبق ذكرها، بل إننا نراها محفزات واقعية تدفعنا لبذل قصارى جهدنا والمضي قدمًا في البحث في المستجدات التربوية سواء في شكل المناهج أم في مضامينها، وهذا ما قام به القطاع خلال السنوات الماضية، حيث البحث عن أفضل ما توصلت إليه عملية صناعة المناهج الدراسية، ومن ثم إعدادها وتأليفها وفق معايير عالمية استعدادًا لتطبيقها في البيئة التعليمية.

ولقد كانت مناهج العلوم والرياضيات من أول المناهج التي بدأنا بها عملية التطوير، إيمانًا بأهميتها وانطلاقًا من أنها ذات صفة عالمية، مع الأخذ بالحسبان خصوصية المجتمع الكويتي وبيئته المحلية، وعندما أدركنا أنها تتضمن جوانب عملية التعلم ونعني بذلك المعرفة والقيم والمهارات، قمنا بدراستها وجعلها تتوافق مع نظام التعليم في دولة الكويت، مركزين ليس فقط على الكتاب المقرر ولكن شمل ذلك طرائق وأساليب التدريس والبيئة التعليمية ودور المتعلم، مؤكدين على أهمية التكامل بين الجوانب العلمية والتطبيقية حتى تكون ذات طبيعة وظيفية مرتبطة بحياة المتعلم.

وفي ضوء ما سبق من معطيات وغيرها من الجوانب ذات الصفة التعليمية والتربوية تم اختيار سلسلة مناهج العلوم والرياضيات التي أكملناها بشكل ووقت مناسبين، ولنحقق نقلة نوعية في مناهج تلك المواد، وهذا كله تزامن مع عملية التقويم والقياس للأثر الذي تركته تلك المناهج، ومن ثم عمليات التعديل التي طرأت أثناء وبعد تنفيذها، مع التأكيد على الاستمرار في القياس المستمر والمتابعة الدائمة حتى تكون مناهجنا أكثر تفاعلية.

د. سعود هلال الحربي

الوكيل المساعد لقطاع البحوث التربوية والمناهج

المحتويات

الوحدة السادسة: العلاقة والتطبيق (الدالة) ١٢

مشروع الوحدة ١٣

الوحدة السادسة (أ): العلاقة ١٥

٦ – ١ حاصل الضرب الديكارتي ١٦

٦ – ٢ مفهوم العلاقة ١٩

الوحدة السادسة (ب): التطبيق (الدالة) ٢٤

٦ – ٣ التطبيق ٢٥

٦ – ٤ أنواع التطبيق (الدالة) ٣٠

٦ – ٥ الدالة الخطية (التطبيق الخطي) ٣٤

٦ – ٦ الدالة التربيعية ٣٩

مخطط تنظيمي للوحدة السادسة ٤٧

الوحدة السابعة: هندسة المثلث ٤٨

مشروع الوحدة ٤٩

الوحدة السابعة: هندسة المثلث ٥١

٧ – ١ متباينة المثلث وأنواعه ٥٢

٧ – ٢ القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في المثلث ٥٦

٧ – ٣ القطعة المستقيمة الواصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر ٦٢

٧ – ٤ محاور أضلاع المثلث ٦٨

٧ – ٥ منصفات الزوايا الداخلية للمثلث ٧٢

٧ – ٦ الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ٧٦

٧ – ٧ القطع المتوسطة للمثلث ٨٠

مخطط تنظيمي للوحدة السابعة ٨٧

المحتويات

الوحدة الثامنة: الهندسة ٨٨

مشروع الوحدة ٨٩

الوحدة الثامنة (أ): الهندسة الإحداثية في المستوي ٩١

٨ – ١ المسافة بين نقطتين على محور ٩٢

٨ – ٢ المسافة بين نقطتين في المستوي الإحداثي ٩٦

٨ – ٣ إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة في المستوي الإحداثي ١٠٠

الوحدة الثامنة (ب): هندسة التحويلات ١٠٥

٨ – ٤ التحويلات والتطابق ١٠٦

٨ – ٥ تحويلات وتشابه ١١١

٨ – ٦ التناظر (التماثل) ١١٥

مخطط تنظيمي للوحدة الثامنة ١٢٠

الوحدة التاسعة: النسبة والتناسب ١٢٢

مشروع الوحدة ١٢٣

الوحدة التاسعة (أ): التناسب ١٢٥

٩ – ١ ارتباط التناسبات والرسومات البيانية ١٢٦

٩ – ٢ استخدام معدلات الوحدة ١٣١

٩ – ٣ حل المسائل باستخدام المعدلات والتناسبات ١٣٥

٩ – ٤ مقياس الرسم والنماذج ١٣٨

الوحدة التاسعة (ب): فهم النسب المئوية ١٤٢

٩ – ٥ حل مسائل باستخدام النسب المئوية ١٤٣

٩ – ٦ تقدير النسب المئوية ١٤٧

الوحدة التاسعة (جـ): حل المسائل باستخدام النسب المئوية ١٥١

٩ – ٧ النسبة المئوية التزايدية ١٥٢

المحتويات

٩ – ٨ النسبة المئوية التناقصية ١٥٦

٩ – ٩ تطبيقات على تغير النسبة المئوية ١٦٠

مخطط تنظيمي للوحدة التاسعة ١٦٥

الوحدة العاشرة: العد والاحتمال ١٦٦

مشروع الوحدة ١٦٧

الوحدة العاشرة (أ): العد ١٦٩

١٠ – ١ الشجرة البيانية ومبدأ العد ١٧٠

١٠ – ٢ التباديل والترتيبات ١٧٥

١٠ – ٣ التوافيق والمجموعات ١٨٠

الوحدة العاشرة (ب): الفرصة والاحتمال ١٨٦

١٠ – ٤ الاحتمال ١٨٧

١٠ – ٥ الاحتمال التجريبي والاحتمال الهندسي ١٩٢

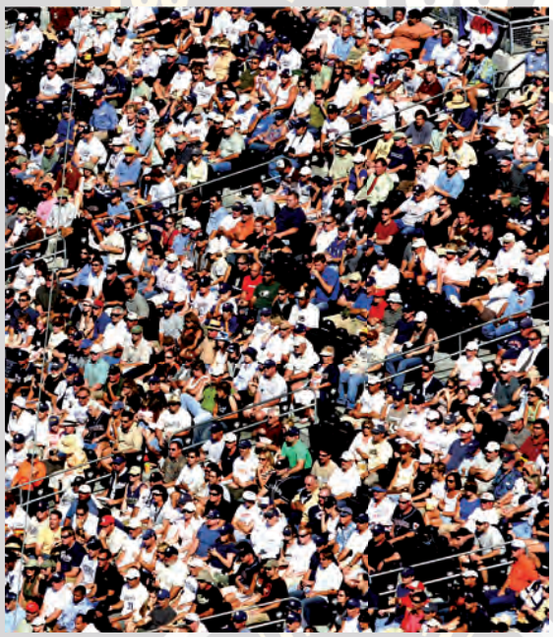
مخطط تنظيمي للوحدة العاشرة ١٩٨

الوحدة السادسة

العلاقة والتطبيق (الدالة)
Relation and Mapping (Function)

شعوب العالم

في البدء كان نمو سكان العالم بطيئًا جدًّا، ومع مرور الزمن بدأت وتيرة النمو تتصاعد شيئًا فشيئًا حتى أصبح عدد سكان العالم قرابة المليار نسمة في بداية القرن التاسع عشر. ومع نهاية القرن العشرين تخطى هذا العدد ٦ مليارات، لذلك هناك علاقة بين الفترة الزمنية وعدد السكان.



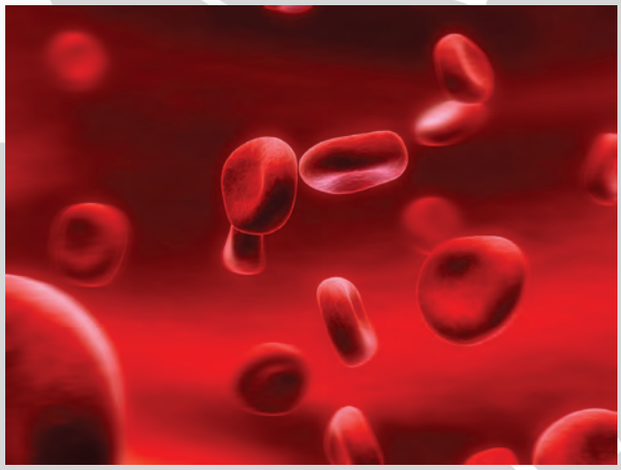
الرياضية

تستغرق بعض سيارات الفورمولا ون ١,٧ ثانية للانطلاق من صفر إلى ١٠٠ كم/ س، ٣,٨ ثوانٍ من صفر إلى ٢٠٠ كم/ س٦, ٨ ثوانٍ من صفر إلى ٣٠٠ كم/ س. هذه العلاقة تمثّل الزمن والسرعة القصوى لتلك السيارات. إن التوفيق بين الوزن الخفيف والقوة والأداء العالي للإطارات يعطي سيارات الفورمولا الأداء المميز.

علوم

يمثّل الدم نسبة ٨٪ من وزن جسم الإنسان. وتبلغ كثافة الدم ١,٠٦٠ جرام/ سم^{٣}.

يتألف الدم من البلازما بنسبة ٥٥٪، وكريات الدم الحمراء بنسبة ٤٤٪، و الكريات البيضاء والصفائح الدموية بنسبة ١٪ . وهناك علاقة بين عمر الإنسان وكثافة الدم في جسمه.



الاقتصاد

يعتبر سوق صرف الأموال أكبر الأسواق في العالم وأنشطها. نستطيع أن نميِّز نوعين من سعر الصرف: المتحرك عندما تكون العملة خاضعة للسوق، والثابت عندما تثبت قيمة العملة بالنسبة إلى عملة أخرى أو بالنسبة إلى مجموعة من العملات أو بالنسبة إلى سعر الذهب.

أفكار رياضية أساسية

حاصل الضرب الديكارتي س × ص هو مجموعة كل الأزواج المرتبة (أ ، ب) حيث أ ينتمي إلى س، ب ينتمي إلى ص.

العلاقة «ع» من س إلى ص هي مجموعة جزئية من الحاصل الديكارتي س × ص.

التطبيق علاقة تربط كل عنصر في س (المجال) بعنصر واحد فقط في ص (المجال المقابل) ومدى التطبيق هو مجموعة صور عناصر المجال.

الدالة الخطية هي دالة تمثيلها البياني خط مستقيم.

الدالة التربيعية هي دالة حيث القوة الأعلى للمتغير هي ٢. ويكون تمثيلها البياني قطعًا مكافئًا.

مشروع الوحدة

حل المسائل

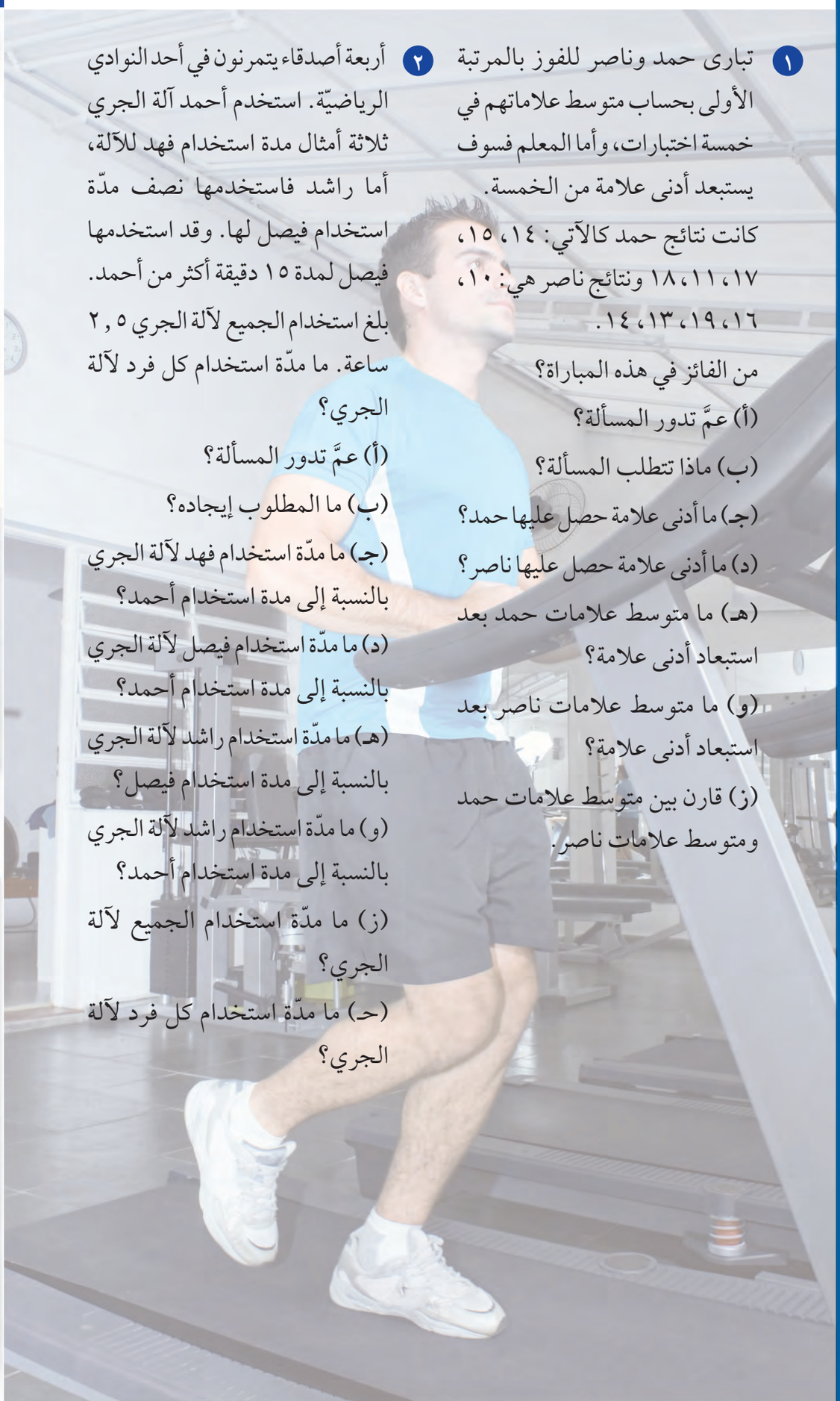
افهم
خطط
حل
تحقق

سوف تستقصي في هذا المشروع عن تكاليف أو خدمات تتضمّن دفعة ابتدائية محددة تضاف إليها دفعات تتبع نمطًا معينًا. مثلًا:

شركة تأجير سيارات وضعت التعرفة التالية لزبائنها بحيث يدفع مبلغ ٥ دنانير للتأمين ضد حوادث الاصطدام والحوادث الشخصية، و١٢ دينارًا عن كل يوم إيجار لسيارة متوسطة الحجم.

التركيز على حلّ المسائل

اقرأ كل مسألة وأجب عن الأسئلة:



١ تبارى حمد وناصر للفوز بالمرتبة الأولى بحساب متوسط علاماتهم في خمسة اختبارات، وأما المعلم فسوف يستبعد أدنى علامة من الخمسة.

كانت نتائج حمد كالآتي: ١٤، ١٥، ١٧، ١١، ١٨ ونتائج ناصر هي: ١٠، ١٦، ١٩، ١٣، ١٤.

من الفائز في هذه المباراة؟

(أ) عمَّ تدور المسألة؟

(ب) ماذا تتطلب المسألة؟

(جـ) ما أدنى علامة حصل عليها حمد؟

(د) ما أدنى علامة حصل عليها ناصر؟

(هـ) ما متوسط علامات حمد بعد استبعاد أدنى علامة؟

(و) ما متوسط علامات ناصر بعد استبعاد أدنى علامة؟

(ز) قارن بين متوسط علامات حمد ومتوسط علامات ناصر.

٢ أربعة أصدقاء يتمرنون في أحد النوادي الرياضيّة. استخدم أحمد آلة الجري ثلاثة أمثال مدة استخدام فهد للآلة، أما راشد فاستخدمها نصف مدّة استخدام فيصل لها. وقد استخدمها فيصل لمدة ١٥ دقيقة أكثر من أحمد. بلغ استخدام الجميع لآلة الجري ٢,٥ ساعة. ما مدّة استخدام كل فرد لآلة الجري؟

(أ) عمَّ تدور المسألة؟

(ب) ما المطلوب إيجاده؟

(جـ) ما مدّة استخدام فهد لآلة الجري بالنسبة إلى مدة استخدام أحمد؟

(د) ما مدّة استخدام فيصل لآلة الجري بالنسبة إلى مدة استخدام أحمد؟

(هـ) ما مدّة استخدام راشد لآلة الجري بالنسبة إلى مدة استخدام فيصل؟

(و) ما مدّة استخدام راشد لآلة الجري بالنسبة إلى مدة استخدام أحمد؟

(ز) ما مدّة استخدام الجميع لآلة الجري؟

(حـ) ما مدّة استخدام كل فرد لآلة الجري؟

حلّ المسائل
افهم
خطّط
حلّ
تحقّق

قراءة المسألة:

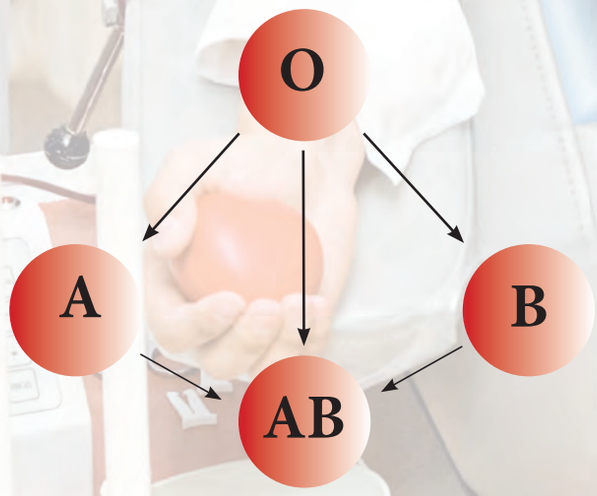
عندما تقرأ مسألة ما، ربما تربكك كمية المعلومات الواردة فيها . يمكن أن يساعد تجزيء تلك المعلومات إلى أجزاء صغيرة على فهم المسألة ككل. اسأل نفسك أسئلة كي تكون واثقًا من فهمك لكلّ جزء من المسألة.

التبرع بالدم

التبرع بالدم هو عملية سحب الدم لتجهيزه ونقله إلى من هو بحاجة إليه. يمثّل المتبرعون المصدر الوحيد لجميع فئات دم الإنسان القابلة للنقل. يستعيد جسم الإنسان الضائع من البلازما (السائل) في ٢٤ ساعة بعد التبرع، ويعوّض كريات الدم الحمراء والخلايا الأخرى بين ستة وثمانية أسابيع. يتمكن شخص ناضج ذو صحة جيدة من التبرع بوحدة كاملة من الدم مرة واحدة كل ثمانية أسابيع.

خلال عملية نقل الدم، يجب الأخذ بعين الاعتبار عاملين أساسيين: فصيلة الدم (O، AB، B، A) وعامل «ريسوس» (Rh^-، Rh^+).

يستحسن أن تتم عملية نقل الدم بين أشخاص يحملون فصيلة الدم نفسها، لتجنب العوارض السلبية. ولكن من الممكن أيضًا، استخدام البيان السهمي المقابل لمعرفة كيفية نقل الدم من فصيلة إلى أخرى عند الحاجة.



١ كون جدولًا تبين فيه العلاقة بين الفئات المتبرعة والفئات المتلقية.

٢ اسأل أصدقاءك عن فصيلة دمهم، ومثّل علاقة تبين عملية نقل الدم في ما بينكم (دون الأخذ بعين الاعتبار العامل «ريسوس»).

٦-١

حاصل الضرب الديكارتي
Cartesian Product

◄ صلة الدرس درست في السابق الأزواج المرتبة. في هذا الدرس سوف تتعرف حاصل الضرب الديكارتي. ►

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد حاصل الضرب الديكارتي.
- كيفية تمثيل حاصل الضرب الديكارتي بالمخططات السهمية والبيانية.

من الاستخدامات

- يستخدم مصممو الأقمشة حاصل الضرب الديكارتي لمعرفة عدد نماذج القماش وفق الألوان والنقوش المتنوعة.

المصطلحات الأساسية

- ◄ زوج مرتب Ordered Pair
- ◄ حاصل الضرب الديكارتي Cartesian Product
- ◄ مخطط سهمي Arrow Diagram
- ◄ مخطط بياني Graph

استكشف الأزواج المرتبة

لدى محلات سالم تشكيلة كبيرة من القمصان التي تتميز بألوان وقياسات مختلفة.

١ اذكر خمسة ألوان مفضلة لديك.

٢ اذكر ثلاثة قياسات ممكنة.

٣ ما عدد القياسات المختلفة التي يمكنك أن تختارها لكل لون من الألوان؟

٤ ما عدد الألوان المختلفة التي يمكنك أن تختارها لكل قياس؟

٥ اصنع جدولًا كالآتي: (في الصف الأول: اكتب الألوان المختلفة التي اخترتها؛ في العمود الأول: اكتب القياسات المختلفة التي اخترتها؛ وأكمل الجدول بكتابة التشكيلات المختلفة التي يمكنك أن تحصل عليها).

٦ ما عدد التشكيلات المختلفة التي حصلت عليها؟

تعلم حاصل الضرب الديكارتي

تعلم أن الحاصل الديكارتي (أو حاصل الضرب الديكارتي) س × ص هو مجموعة كل الأزواج المرتبة (أ، ب) حيث المسقط الأول أ ∈ س، والمسقط الثاني ب ∈ ص.

أي أن:

س × ص = {(أ، ب): أ ∈ س ، ب ∈ ص}

مثال (١)

إذا كانت:

س = {١، ٢}، ص = {٣، ٤، ٥}، اكتب الحاصل الديكارتي س × ص، ثمّ مثّله بمخطط سهمي ومخطط بياني.

الحل:

س × ص = {(١، ٣)، (١، ٤)، (١، ٥)، (٢، ٣)، (٢، ٤)، (٢، ٥)}

فكرة مفيدة — لحل المسائل

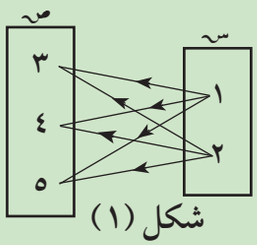
لرسم المخطط السهمي لأي علاقة:

نرسم شكل ڤن لكل من المجموعتين س ، ص ونكتب العناصر في شكل ڤن المناسب، ومن ثم نصل عناصر س بالعناصر في ص والتي ترتبط معها بعلاقة.

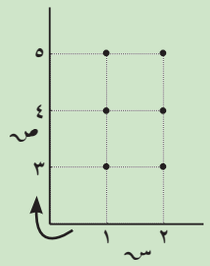
شكل (١) هو المخطط السهمي للحاصل الديكارتي س × ص.

يمكن تمثيل الحاصل الديكارتي س × ص بمخطط بياني على النحو التالي:

نمثّل عناصر «س» وعناصر «ص» على المحورين الأفقي والرأسي على الترتيب، ثم نمثل عناصر الحاصل الديكارتي س × ص كما في الشكل (٢).



شكل (١)



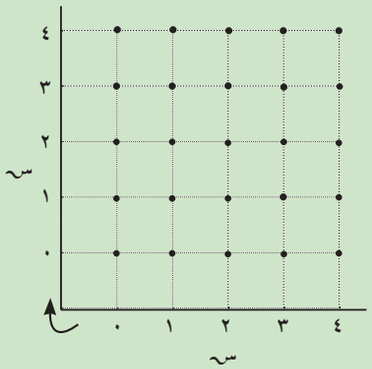
شكل (٢)

حاول أن تحل

١ من المثال (١) أوجد الحاصل الديكارتي ص × س، ثم مثّله بمخطط بياني.

مثال (٢)

إذا كانت س = {٠، ١، ٢، ٣، ٤}، فاكتب الحاصل الديكارتي س × س بذكر الصفة المميزة ثم بذكر العناصر، ومثّل س × س بمخطط بياني.



الحل:

س = {٠، ١، ٢، ٣، ٤}

بالصفة المميزة:

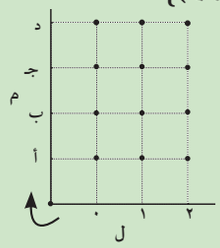
س × س = {(أ، ب): أ ∈ س ، ب ∈ س}

بذكر العناصر

س × س = {(٠، ٠)، (٠، ١)، (٠، ٢)، (٠، ٣)، (٠، ٤)،
(١، ٠)، (١، ١)، (١، ٢)، (١، ٣)، (١، ٤)، (٢، ٠)، (٢، ١)، (٢، ٢)، (٢، ٣)، (٢، ٤)، (٣، ٠)،
(٣، ١)، (٣، ٢)، (٣، ٣)، (٣، ٤)، (٤، ٠)، (٤، ١)، (٤، ٢)، (٤، ٣)، (٤، ٤)}

حاول أن تحل

٢ يوضح المخطط البياني المقابل حاصل الضرب الديكارتي ل × م. اكتب ل × م بذكر العناصر.



ملاحظة:

عدد عناصر س × ص = عدد عناصر س × عدد عناصر ص

إذا كان عدد عناصر س = م وعدد عناصر ص = ن، فإن عدد عناصر س×ص = م×ن

تحقق من فهمك

١ هل عدد عناصر الحاصل الديكارتي س × ص يساوي عدد عناصر الحاصل الديكارتي ص × س؟

٢ هل س × ص = ص × س؟

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ إذا كانت س = {١، ٢، ٣}، ص = {٤، ٥، ٦}، فأي العبارات التالية صحيحة؟ فسر إجابتك.

(أ) (٥، ١) ∈ س × ص.

(ب) (٢، ٣) ∈ س × ص.

(جـ) (٣، ٦) ∈ س × ص.

(د) (٦، ٦) ∈ س × ص.

(هـ) (٤، ٣) ∈ س × ص.

(و) (٤، ٥) ∈ س × ص.

٢ إذا كانت س = {أ: أ ∈ ص، -١ < أ ≤ ٢}

ك = {ب: ب ∈ ص، -٣ ≤ ب < ٠}، حيث ص هي مجموعة الأعداد الصحيحة.

(أ) اكتب كلًّا من المجموعتين س، ك بذكر العناصر.

(ب) اكتب س × ك بذكر العناصر.

٣ إذا كانت ك = {أ: أ ∈ ص، -٢ ≤ أ ≤ ١}

ل = {ب: ب ∈ ص، -١ < ب ≤ ٣}

(أ) فاكتب كلًّا من ك، ل بذكر العناصر.

(ب) فاكتب ك × ل بذكر العناصر.

(جـ) فاكتب ل × ل بذكر العناصر.

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٦ – ٢

مفهوم العلاقة
The Concept of Relation

سوف تتعلم

- مفهوم العلاقة.
- إيجاد العلاقة من مجموعة إلى مجموعة أخرى، وتمثيلها بمخطط سهمي أو بياني.
- إيجاد العلاقة على مجموعة (من مجموعة إلى نفسها) وتمثيلها بمخطط (سهمي أو بياني).

من الاستخدامات

يستخدم الأطباء مفهوم العلاقة لكي ينظموا مخططًا يبين بموجبه إمكانية نقل الدم من فئة إلى أخرى أو من شخص إلى آخر.

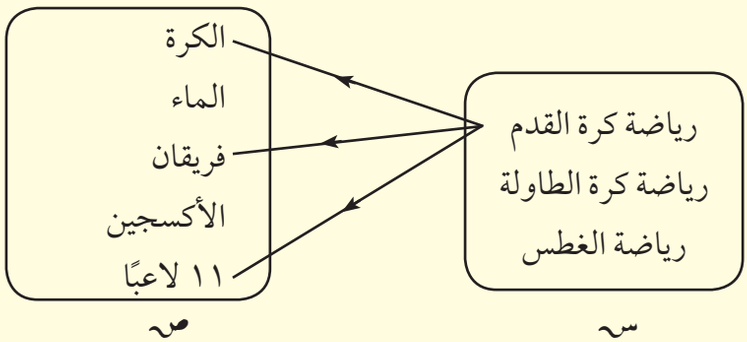
المصطلحات الأساسية

- علاقة من مجموعة إلى مجموعة أخرى
  Relation from a Set to Another
- علاقة على مجموعة
  Relation on a Set

◄ صلة الدرس في الدرس السابق، تعرفت الحاصل الديكارتي. في هذا الدرس سوف تتعرف مفهوم العلاقة.►

استكشف العلاقة

١ اربط عناصر س بعناصر ص حيث تجد علاقة بينهما. رياضة كرة القدم معطاة كمثال.



٢ أكمل كتابة العلاقة ع التي مثّلتها العناصر. ع = {(رياضة كرة القدم، ...)، (رياضة كرة القدم، ...)، (رياضة كرة القدم، ....)، ....}

٣ قارن ع بـ س × ص.

٤ تمثل قطاعات المياه والكهرباء والهاتف الثابت مجموعة موارد يحتاجها سكان المباني في المدن، ويشكل كل مبنى مجموعة مرتبطة بمجموعة القطاعات. اربط كل شقة بالقطاعات التي ترتبط بها.

تعلم مفهوم العلاقة

لتكن س، ص مجموعتين غير خاليتين. تكون ع علاقة من س إلى ص عندما تكون ع مجموعة جزئية من الحاصل الديكارتي س × ص ونعبر عن ذلك ع ⊆ س × ص.

تكون ع علاقة على س إذا كانت ع ⊆ س × س.

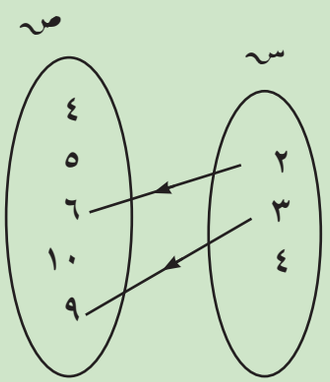
مثال (١)

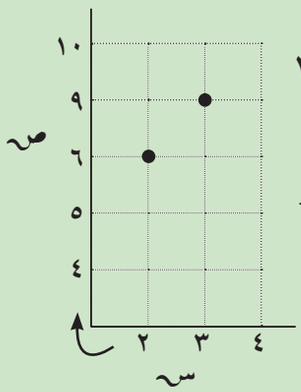
لتكن:
س = {٢، ٣، ٤}، ص = {٤، ٥، ٦، ١٠، ٩}
(أ) إذا كانت ع علاقة «ثلث: $\frac{١}{٣}$» من س إلى ص، فاكتب ع بذكر العناصر.
(ب) مثّل ع بمخطط سهمي ومخطط بياني.

معلومة مفيدة

عندما نقول إن ع علاقة ثلث، نعني أن في كل زوج مرتب المسقط الأول ثلث المسقط الثاني.

الحل:





(أ) حيث إن ٢ «ثلث» ٦، و ٣ «ثلث» ٩.
إذًا ع = {(٢، ٦)، (٣، ٩)}

حاول أن تحل

١ لتكن س = {٤، ٦، ٨، ١٠}، ص = {٢، ٣، ٤}.
(أ) إذا كانت ع علاقة «ضعف» من س إلى ص، فاكتب ع بذكر العناصر.
(ب) مثّل ع بمخطط سهمي ومخطط بياني.

مثال (٢)

في ما يلي مجموعة من العلاقات المعرّفة على س = {٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}
اكتب كل علاقة بذكر عناصرها:
(أ) ع$_١$ = {(أ، ب) : أ ∈ س، ب ∈ س، أ + ب = ٨}
(ب) ع$_٢$ = {(أ، ب) : أ ∈ س، ب ∈ س، ب = ٣أ}
(جـ) ع$_٣$ = {(أ، ب) : أ ∈ س، ب ∈ س، ب = $\frac{١}{٤}$ أ}

الحل:
(أ) حيث إن ٢ + ٦ = ٨، ٦ + ٢ = ٨، ٤ + ٤ = ٨، ٣ + ٥ = ٨، ٥ + ٣ = ٨
فتكون ع$_١$ = {(٢، ٦)، (٦، ٢)، (٤، ٤)، (٣، ٥)، (٥، ٣)}
(ب) حيث إن ٦ = ٣ × ٢
فتكون العلاقة ع$_٢$ = {(٢، ٦)}
(جـ) حيث إن ٢ = $\frac{١}{٤}$ × ٨
فتكون العلاقة ع$_٣$ = {(٨، ٢)}

حاول أن تحل

٢ إذا كانت س = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} والعلاقة ع = {(أ، ب) : أ ∈ س، ب ∈ س، ب = أ + ٢}
اكتب العلاقة بذكر عناصرها.

مثال (٣)

معلومة مفيدة

عندما نقول إن ع علاقة مربع يعني أن في كل زوج مرتب المسقط الأول هو مربع المسقط الثاني.

لنأخذ:

س = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٩}

(أ) اكتب ع علاقة مربع من س إلى س بذكر العناصر.

(ب) مثّل ع بمخطط سهمي ومخطط بياني.

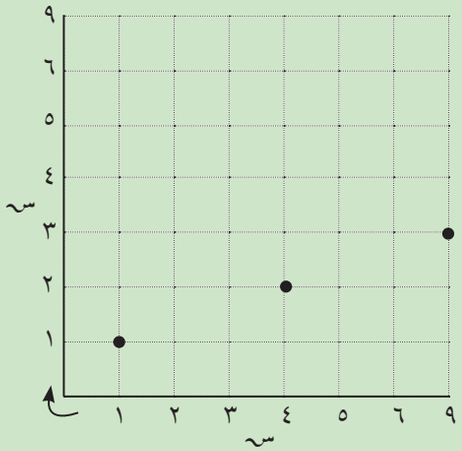
الحل:

(أ) حيث إن ١ مربع العدد ١، ٤ مربع العدد ٢، ٩ مربع العدد ٣

فتكون ع = {(١، ١)، (٤، ٢)، (٩، ٣)}

(ب) مخطط سهمي:

مخطط بياني:



حاول أن تحل

٣ لنأخذ س = {محمد، عبدالله، مروان، أحمد، عصام، جاسم}

(أ) اكتب ع علاقة «الحرف الأول هو نفسه» من س إلى س بذكر العناصر.

(ب) مثّل ع بمخطط سهمي ومخطط بياني.

مثال (٤)

لتكن: س = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩} ، ع علاقة معرّفة على س كما يلي: ع = {(أ، ب)، أ ∈ س، ب ∈ س، ٢أ + ١ = ب}

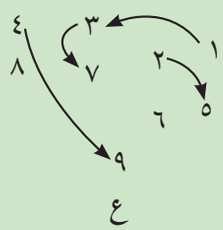
(أ) اكتب ع من س إلى س بذكر العناصر.

(ب) مثّل ع بمخطط سهمي ومخطط بياني.

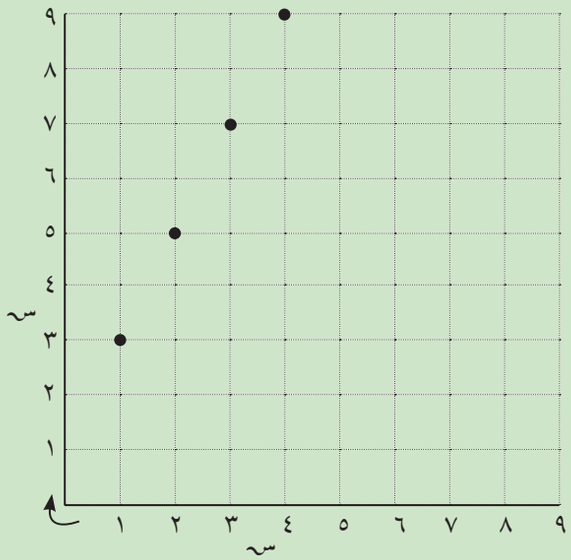
الحل:

(أ) ع = {(١، ٣)، (٢، ٥)، (٣، ٧)، (٤، ٩)}

(ب) مخطط سهمي:



مخطط بياني:



حاول أن تحل

٤ لتكن س = {١، ٢، ٣، ٤، ٧، ٩، ١٠}

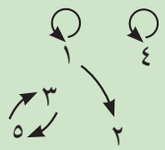
ع علاقة معرّفة على س كما يلي: ع = {(أ، ب)، أ ∈ س، ب ∈ س، ٣أ − ٢ = ب}

(أ) اكتب ع من س إلى س بذكر العناصر.

(ب) مثّل ع بمخطط سهمي ومخطط بياني.

مثال (٥)

اكتب العلاقة ع على المجموعة سـ التي يمثلها المخطط السهمي المقابل.



ع

الحل:

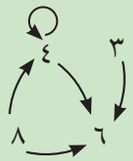
من المخطط السهمي: ٤ مرتبط بـ ٤ ، ١ مرتبط بـ ١ ، ١ مرتبط بـ ٢،

٣ مرتبط بـ ٥ ، ٥ مرتبط بـ ٣.

فتكون ع = {(٤، ٤)، (١، ١)، (١، ٢)، (٣، ٥)، (٥، ٣)}

حاول أن تحل

٥ **اكتب العلاقة ع على المجموعة سـ التي يمثلها المخطط السهمي.**



ع

تحقق من فهمك

١ هل يمثّل الحاصل الديكارتي سـ × صـ علاقة من سـ إلى صـ؟

٢ هل يمكن تحديد أكثر من علاقة من مجموعة إلى أخرى؟

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ إذا كان كل من $ع_١$، $ع_٢$، $ع_٣$ علاقة على سـ = {٣، ٤، ٥، ٦}، فمثّل كلًّا منها بمخطط بياني.

(أ) $ع_١$ = {(٥، ٥)، (٤، ٤)، (٣، ٣)، (٦، ٦)}.

(ب) $ع_٢$ = {(أ، ب) : أ ∈ سـ، ب ∈ سـ، أ < ب}.

(جـ) $ع_٣$ = {(٥، ٤)، (٣، ٣)، (٤، ٤)، (٣، ٤)، (٥، ٦)}.

.....

.....

.....

.....

٢ إذا كانت سـ = {أ، ب، جـ}، صـ = {١، ٢، ٣} فأي المجموعات الآتية يمثّل علاقة من سـ إلى صـ؟ ارسم مخططًا بيانيًّا لها.

(أ) $ع_١$ = {(أ، ٣)، (أ، ١)، (أ، ٢)}

(ب) $ع_٢$ = {(أ، ٣)، (أ، ٢)، (ب، ١)، (ب، ٢)، (جـ، ١)، (جـ، ٢)، (جـ، ٣)}

(جـ) $ع_٣$ = {(أ، ٣)، (أ، ٢)، (٣، ب)، (ب، ٣)}

.....

.....

.....

.....

٣ في ما يلي مجموعة من العلاقات المعرّفة على:

سـ = {٣، ٦، ٩، ١٢، ١٥}

اكتب كل علاقة بذكر عناصرها:

(أ) $ع_١$ = {(أ، ب) : أ ∈ سـ، ب ∈ سـ، ب = أ + ٦}

(ب) $ع_٢$ = {(أ، ب) : أ ∈ سـ، ب ∈ سـ، ب = $\frac{١}{٣}$ أ}

(جـ) $ع_٣$ = {(أ، ب) : أ ∈ سـ، ب ∈ سـ، ب = أ^٢}

.....

.....

.....

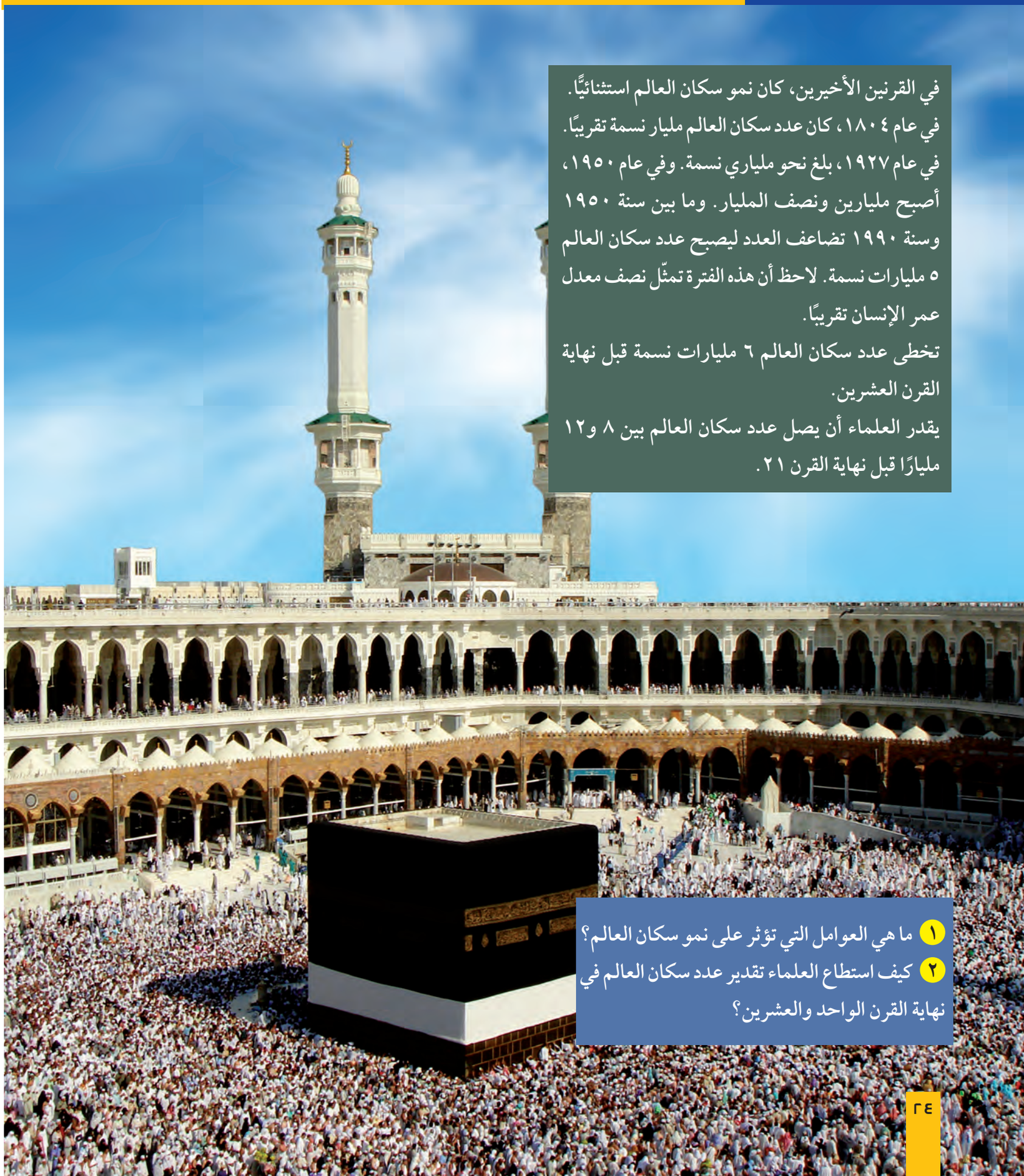
.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

الوحدة السادسة (ب)

التطبيق – (الدالة)
Mapping – (Function)



في القرنين الأخيرين، كان نمو سكان العالم استثنائيًّا. في عام ١٨٠٤، كان عدد سكان العالم مليار نسمة تقريبًا. في عام ١٩٢٧، بلغ نحو ملياري نسمة. وفي عام ١٩٥٠، أصبح مليارين ونصف المليار. وما بين سنة ١٩٥٠ وسنة ١٩٩٠ تضاعف العدد ليصبح عدد سكان العالم ٥ مليارات نسمة. لاحظ أن هذه الفترة تمثّل نصف معدل عمر الإنسان تقريبًا.

تخطى عدد سكان العالم ٦ مليارات نسمة قبل نهاية القرن العشرين.

يقدر العلماء أن يصل عدد سكان العالم بين ٨ و١٢ مليارًا قبل نهاية القرن ٢١.

١ ما هي العوامل التي تؤثر على نمو سكان العالم؟

٢ كيف استطاع العلماء تقدير عدد سكان العالم في نهاية القرن الواحد والعشرين؟

٦-٣

التطبيق
Mapping

سوف تتعلم
- مفهوم التطبيق.
- تعيين التطبيق من بين عدة علاقات.
- كيفية التعبير الرمزي عن التطبيق.

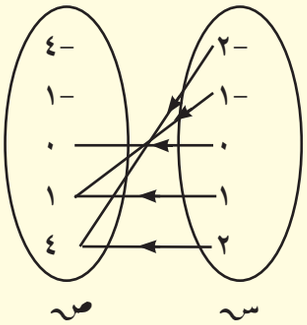
من الاستخدامات
- يستخدم التقنيون التطبيق عند تصميم إشارات المرور.

المصطلحات الأساسية
- تطبيق
Mapping
- قاعدة الاقتران
Mapping Rule
- مجال
Domain
- مجال مقابل
Corresponding Domain

صلة الدرس درست حاصل الضرب الديكارتي، ودرست العلاقة التي هي مجموعة جزئية من الحاصل الديكارتي، وكيفية تمثيل كلّ منها بالمخطط السّهمي والمخطط البياني. والتطبيق هو نوع خاصّ من العلاقات له أهمية بالغة في دراسة الرياضيات والعلوم الأخرى، وكذلك في التطبيقات الحياتية اليومية.

استكشف العلاقات بين العناصر

يمثّل المخطط السهمي العلاقة بين عناصر من س وعناصر من ص.



١ أكمل الجدول التالي بـ:

✓ إذا كان هناك علاقة بين العنصرين.

✗ إذا لم يكن هناك علاقة بين العنصرين.

ص \ س	-٢	-١	٠	١	٢
-٤					
-١					
٠					
١					
٤					

٢ هل جميع عناصر ص مرتبطة بعناصر من س؟

٣ هل جميع عناصر س مرتبطة بعناصر من ص؟

٤ بكم عنصرًا من ص ارتبط كل عنصر من عناصر س؟

٥ املأ الفراغات بالأعداد المناسبة.

-٢ ← $\square = \square^{٢}$

-١ ← $\square = (-١)^{\square}$

$\square$ ← $\square = ٠^{٢}$

١ ← $\square = \square^{٢}$

٢ ← $\square = ٢^{\square}$

٦ حدد القاعدة التي تربط (تقرن) عناصر س مع عناصر ص في السؤال رقم ٥

تعلم | التطبيق

التطبيق: علاقة تربط كل عنصر في مجموعة ولتكن س~ **بعنصر واحد فقط** في مجموعة أخرى ولتكن ص~.

نسمي س~ «**المجال**».

ونسمي ص~ «**المجال المقابل**».

ونسمي مجموعة صور عناصر المجال «**مدى التطبيق**».

الدالة: تكون علاقة بين مجموعتين من **الأعداد** حيث كل عنصر في المجموعة الأولى (**المجال**) يرتبط بعنصر واحد فقط في المجموعة الثانية (**المجال المقابل**).

وبالتالي كل دالة تعتبر تطبيق والعكس غير صحيح أي ليس كل تطبيق دالة.

بفرض أن علاقة ما تمثل تطبيقًا من س~ إلى ص~ ، فنرمز لهذا التطبيق بأحد الرموز مثل: ت، هـ، د، ل، ق، ...

ويكتب هذا التطبيق بالصورة التالية: ت: س~ ← ص~ حيث ت (س) هي قاعدة الاقتران للتطبيق.

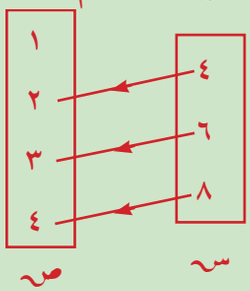
عندما يتساوى المجال «س~» مع المجال المقابل «ص~» فيكون التطبيق من س~ إلى س~.

في أي علاقة من س~ إلى ص~ عندما يرتبط عنصر في س~ بأكثر من عنصر في ص~ أو عندما نجد عنصرًا في س~ لا يرتبط بأحد عناصر ص~ فهذه العلاقة ليست تطبيقًا.

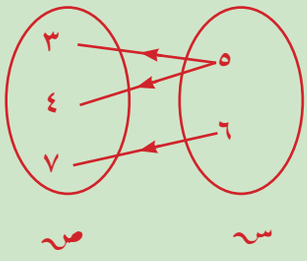
نمثّل التطبيق بمخطط سهمي أو بياني كما في العلاقة.

مثال (١)

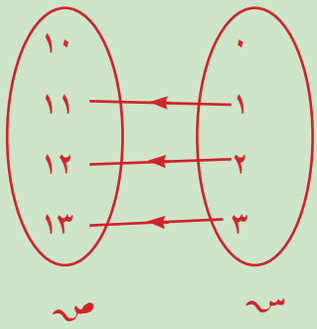
أي العلاقات التالية تمثل تطبيقًا؟ اذكر السبب، ثم حدّد المجال والمجال المقابل والمدى للتطبيق.



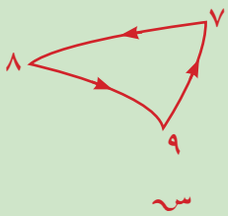
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

الحل:

شكل (١) يمثّل تطبيقًا من س إلى ص لأن كل عنصر في س ارتبط بعنصر واحد فقط من ص.

مجاله = {٤، ٦، ٨}، مجاله المقابل = {١، ٢، ٣، ٤}، المدى = {٢، ٣، ٤}.

شكل (٢) لا يمثّل تطبيقًا، وذلك لأن العنصر ٥ من س ارتبط بعنصرين من ص هما ٣، ٤.

شكل (٣) لا يمثّل تطبيقًا، لأن العنصر صفر في س لم يرتبط بأي عنصر من ص.

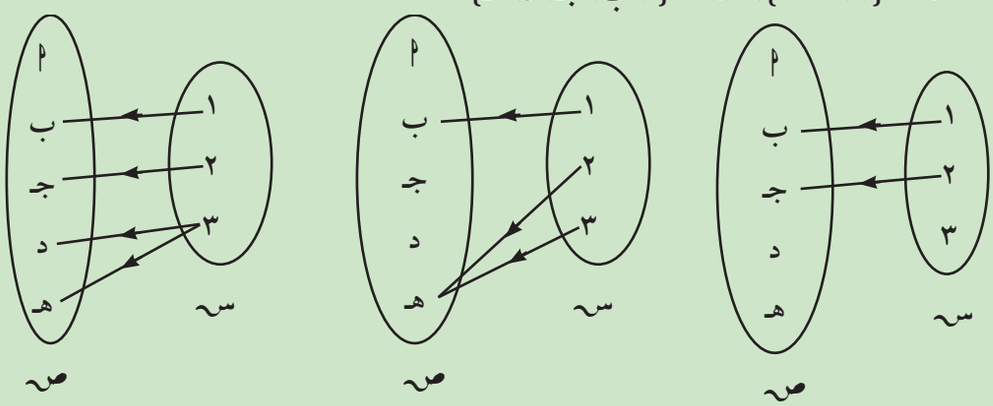
شكل (٤) يمثّل تطبيقًا من س إلى س، لأن كل عنصر من س ارتبط بعنصر واحد فقط من س.

مجاله = {٧، ٨، ٩} = مجاله المقابل = مداه.

حاول أن تحل

١ أي من العلاقات التالية يمثّل تطبيقاً من س إلى ص، حيث

س = {١، ٢، ٣}، ص = {أ، ب، جـ، د، هـ}؟

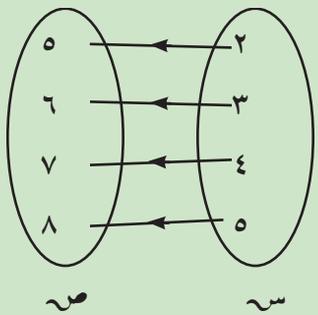


شكل (١) شكل (٢) شكل (٣)

مثال (٢)

ليكن ل: س ⟵ ص تطبيق مخططه السهمي مبيّن في الشكل المقابل.

اكتب قاعدة الاقتران لهذا التطبيق.



الحل:

يربط التطبيق «ل» كل عدد في س بعدد في ص يزيد عنه بمقدار ٣.

٢ ⟵ ٢ + ٣ = ٥

٣ ⟵ ٣ + ٣ = ٦

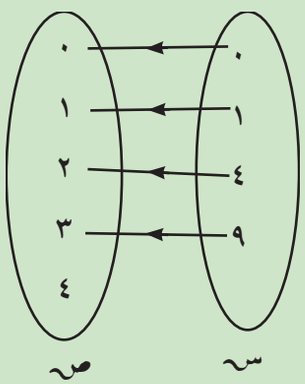
٤ ⟵ ٤ + ٣ = ٧

٥ ⟵ ٥ + ٣ = ٨

أي أن قاعدة الاقتران هي:

س ⟵ س + ٣

أو بصورة أخرى: ل(س) = س + ٣، لكل س ∈ س.



حاول أن تحل

٢ ليكن ي: س ⟵ ص تطبيق مخططه السهمي كما في الشكل المقابل. اكتب قاعدة الاقتران لهذا التطبيق.

مثال (٣)

إذا كان التطبيق د: ط ⟵ ط حيث ط مجموعة الأعداد الطبيعية، د(س) = س + ٢

فما الأعداد التي صورها ٤، ٨، ١٥؟

الحل:

يربط التطبيق «د» كل عدد س في ط بالعدد س + ٢ في ط ، د(س) = س + ٢

إذا كان س ⟵ س + ٢ = ٤ فإن س = ٢ لأن ٢ + ٢ = ٤

كذلك س + ٢ = ٨، س = ٦ لأن ٦ + ٢ = ٨

س + ٢ = ١٥، س = ١٣ لأن ١٣ + ٢ = ١٥

∴ الأعداد التي صورها ٤، ٨، ١٥ هي ٢، ٦، ١٣ على الترتيب.

حاول أن تحل

٣ إذا كان التطبيق د: ط ⟵ ط ، د(س) = ٣س

فما الأعداد التي صورها ٦، ٩، ١٨، ٢١؟

تحقق من فهمك

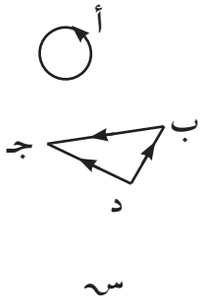
١ هل العلاقة تمثّل دائمًا تطبيقًا؟ فسّر.

٢ كيف تستنتج أن المخططات السهمية والبيانية تمثل تطبيقًا أم لا؟ فسّر.

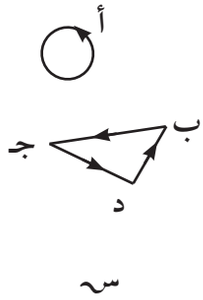
حل المسائل والتفكير المنطقي

١ أي من المخططات السهمية التالية يمثّل تطبيقًا؟

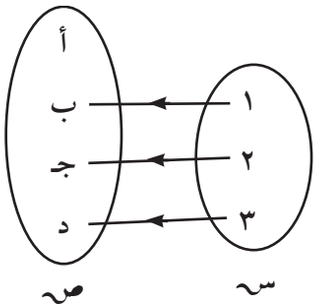
(أ)



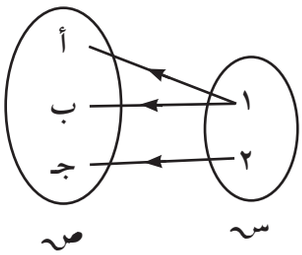
(ب)



(جـ)

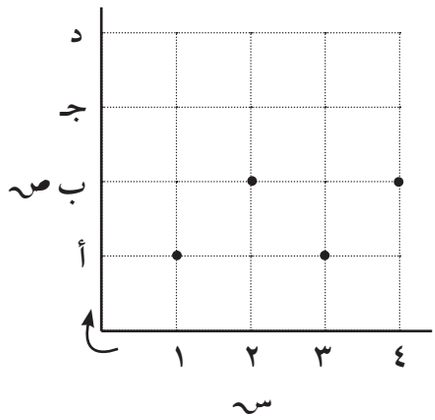


(د)

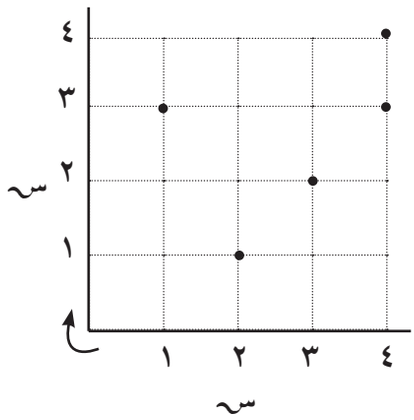


٢ أي من المخططات البيانية التالية يمثّل تطبيقًا؟

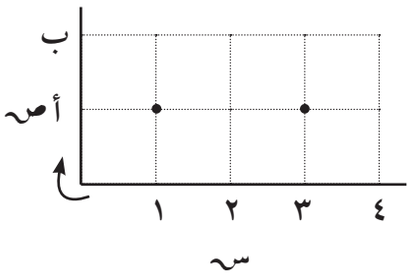
(أ)



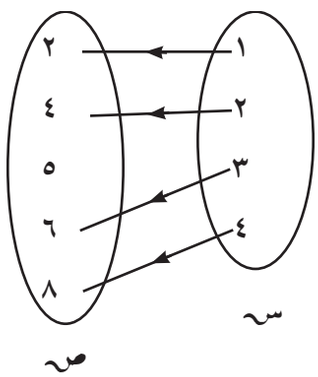
(ب)



(جـ)



٣ ليكن د: س ← ص مخططه السهمي كما في الشكل أدناه. اكتب قاعدة الاقتران لهذا التطبيق.



.....

.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٦ – ٤

أنواع التطبيق (الدالة)

Kinds of Mapping (Function)

سوف تتعلم

- تحديد أنواع التطبيق المختلفة.

من الاستخدامات

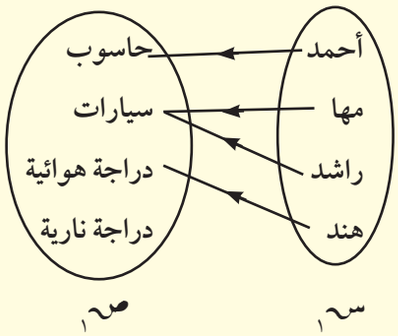
- يستخدم مبرمجو الآلات الحاسبة أنواعًا من التطبيق لبرمجة آلات حاسبة بيانية.

صلة الدرس في الدرس السابق تعرفت التطبيق. في هذا الدرس سوف تتعرف أنواع التطبيق.

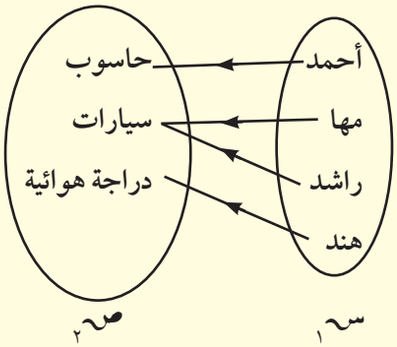
استكشف أنواع التطبيق

لنأخذ التطبيقات التالية:

١ $د_{١} : س_{١} \leftarrow ص_{١}$

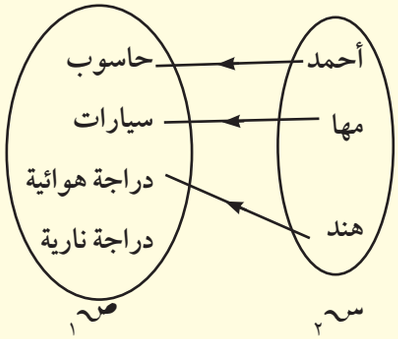


٢ $د_{٢} : س_{١} \leftarrow ص_{٢}$



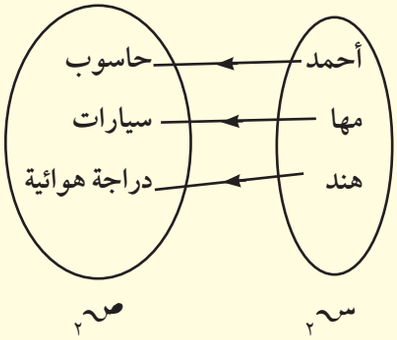
بم يتميّز المجال المقابل في ٢ عنه في ١؟

٣ $د_{٣} : س_{٢} \leftarrow ص_{١}$



بم يتميز هذا التطبيق؟

٤ $د_{٤} : س_{٢} \leftarrow ص_{٢}$



بم يتميز هذا التطبيق؟

تعلم أنواع التطبيق

التطبيق الذي يتساوى فيه المدى والمجال المقابل يسمى **تطبيقًا شاملًا**.

التطبيق الذي لا يرتبط فيه أي عنصرين مختلفين من المجال بالعنصر نفسه في المجال المقابل يسمى **تطبيقًا متباينًا**.

التطبيق الشامل والمتباين يسمّى **تقابلًا**.

المصطلحات الأساسية

- تطبيق شامل Surjective
- تطبيق متباين Injective
- تطبيق تقابل Bijective
- دالة Function

أمثلة

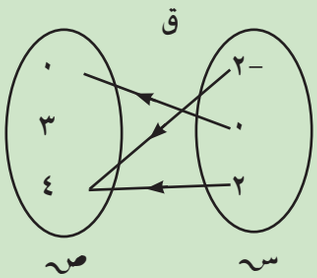
١ ليكن س = {-٢، ٠، ٢}، ص = {٠، ٢، ٤} وليكن لدينا التطبيق:

(أ) ق: س ⟵ ص حيث ق(س) = $س^{٢}$

(ب) هـ: س ⟵ ص حيث هـ(س) = س + ٢

اكتب ق ، هـ كمجموعة من الأزواج المرتبة، ثمّ مثلها بمخطط سهمي.

هل ق ، هـ شامل، متباين، تقابل؟ ولماذا؟



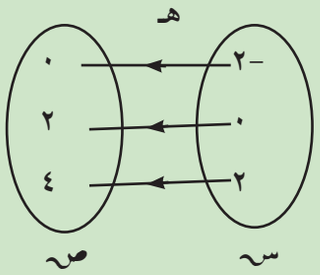
الحل:

(أ) ق = {(-٢، ٤)، (٠،٠)، (٤،٢)}

المخطط السهمي للتطبيق ق:

كلا، ق ليس شاملًا لأن المجال المقابل لا يساوي المدى.

كذلك ق ليس متباينًا لأن -٢ و٢ يرتبطان بـ ٤، وبالتالي ق ليس تقابلًا .



(ب) هـ = {(-٢، ٠)، (٠،٢)، (٤،٢)}

المخطط السهمي للتطبيق هـ:

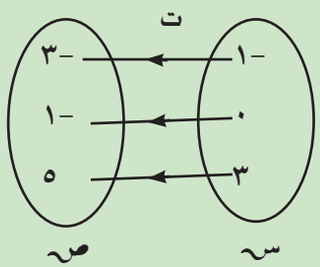
التطبيق هـ هو تقابل لأنه تطبيق شامل حيث المدى يساوي المجال المقابل،

وهو أيضًا متباين لأن كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر مختلف في المجال المقابل.

٢ ليكن س = {-١، ٠، ٣}، ص = {-٣، -١، ٥}

التطبيق ت: س ⟵ ص حيث ت (س) = ٢س - ١

اكتب ت كمجموعة من الأزواج المرتبة، ثمّ مثّلها بمخطط سهمي. هل ت شامل، متباين، تقابل؟ ولماذا؟



الحل:

ت (-١)= ٢(-١) -١ = -٢ - ١ = -٣

ت (٠)= ٢(٠) -١ = ٠ - ١ = -١

ت (٣)= ٢(٣) -١ = ٦ - ١ = ٥

ت = {(-١، -٣)، (٠، -١)، (٣، ٥)}

المدى = {-٣، -١، ٥}

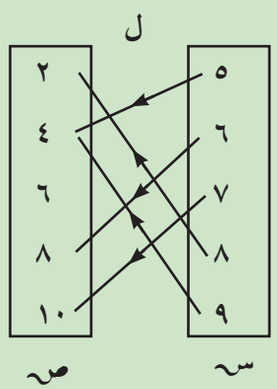
ت شامل لأن المجال المقابل يتساوى مع المدى.

ت متباين لأن ت(-١) ≠ ت (٠) ≠ ت (٣)

وبالتالي ت تقابل.

حاول أن تحل

١ ليكن ل: س ⟵ ص تطبيق مخططه السهمي مبين في الشكل المقابل.



(أ) هل ل شامل؟ ولماذا؟

(ب) هل ل متباين؟ ولماذا؟

ملاحظة:

يكفي للحكم على كون التطبيق غير شامل الكشف عن عنصر في المجال المقابل لا يمثّل صورة لأحد عناصر المجال.

يكفي للحكم على كون التطبيق غير متباين الكشف عن عنصرين في المجال لهما الصورة نفسها في المجال المقابل.

مثال (٣)

إذا كان ل: سـ ⟵ صـ حيث سـ = {١، ٢، ٣، ٤} ، صـ = {٨، ٢٧، ١، ٦٤}
وكان ل(س) = س^{٣}، فبيّن أن ل هو تطبيق شامل ومتباين (تقابل)

الحل:

ل(١) = $١^{٣}$ = ١

ل(٢) = $٢^{٣}$ = ٨

ل(٣) = $٣^{٣}$ = ٢٧

ل(٤) = $٤^{٣}$ = ٦٤

لذا المدى = {١، ٨، ٢٧، ٦٤} = المجال المقابل، فتكون ل تطبيق شامل

وحيث إن ل(١) ≠ ل(٢) ≠ ل(٣) ≠ ل(٤)، أي أنه لم يرتبط أي عنصرين مختلفين بالمجال بالعنصر نفسه بالمجال المقابل، فالتطبيق ل تطبيق متباين.

إذًا التطبيق ل يسمى تقابلًا.

حاول أن تحل

٢ إذا كان ل: صـ ⟵ صـ حيث ل(س) = س^{٢}، (صـ هي مجموعة الأعداد الصحيحة).
هل هذا التطبيق يسمى تقابلًا؟ فسر.

مثال (٤)

إذا كان ط: سـ ⟵ صـ حيث: سـ = {-٢، -١، ٢، ٣} ، صـ = {٠، ٣، ٨}
وكان ط(أ) = (أ)^{٢} - ١، فبيّن أن ط هو تطبيق شامل ولكن ليس تقابلًا.

الحل:

ط(-٢) = (-٢)^{٢} - ١ = ٤ - ١ = ٣

ط(-١) = (-١)^{٢} - ١ = ١ - ١ = ٠

ط(٢) = (٢)^{٢} - ١ = ٤ - ١ = ٣

ط(٣) = (٣)^{٢} - ١ = ٩ - ١ = ٨

المدى = {٠، ٣، ٨} = صـ ∴ هو تطبيق شامل.

∵ ط(-٢) = ط(٢) = ٣ ∴ ط ليس تباينًا

وبالتالي ط هي تطبيق شامل ولكن ليس تقابلًا.

حاول أن تحل

٣ إذا كان ط: سـ ⟵ صـ: حيث: سـ = {٢، ٣، ٤، ٥}،
صـ = {٨، ١١، ١٤، ١٧، ٢٠} وكان ط(أ) = ٣أ + ٢ فبيّن أن ط هو تطبيق متباين ولكن ليس تقابلًا.

تحقق من فهمك

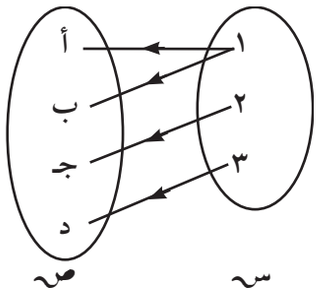
١ هل التطبيق المتباين هو تطبيق شامل؟

٢ هل العلاقة ص = $\frac{١}{س}$ من ح إلى ح تعتبر تطبيقًا حيث ح مجموعة الأعداد الحقيقية؟

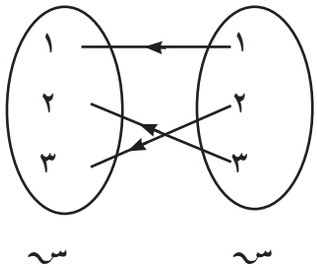
حل المسائل والتفكير المنطقي

١ هل العلاقات التالية تمثّل تطبيقًا؟ ما خواص هذا التطبيق في حالة وجوده؟

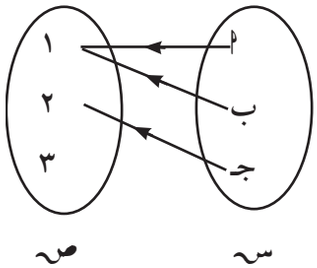
(أ)



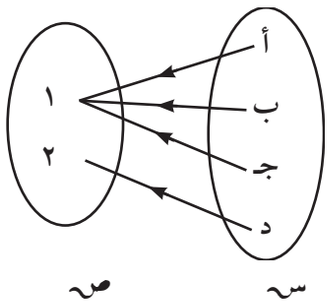
(ب)



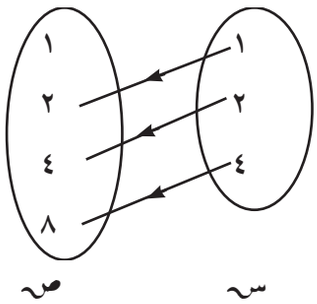
(جـ)



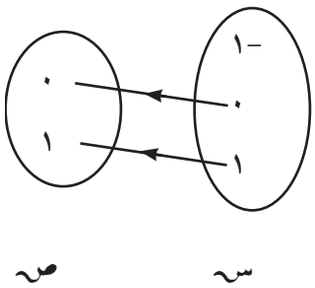
(د)



(هـ)



(و)



٢ إذا كانت سـ = {١، ٢}، فأي من التطبيقات التالية من سـ إلى سـ هو تقابل؟

(أ) {(١، ١)، (٢، ١)} (ب) {(١، ١)، (٢، ٢)} (جـ) {(١، ٢)، (٢، ٢)}

٣ لتكن (صـ هي مجموعة الأعداد الصحيحة)، **التطبيق** ي: صـ ⟵ صـ حيث ي(س) = س^{٢} ليس شاملًا لأن:

(أ) المدى = صـ (ب) المجال = المجال المقابل (جـ) المدى ≠ صـ (د) المدى ⊄ صـ

٤ إذا كانت سـ = {١، ٢، ٣}، صـ = {٢، ٥، ٨، ١٠} والتطبيق ل: سـ ⟵ صـ،

ل(س) = س^{٢} + ١

(أ) اكتب ل كمجموعة أزواج مرتبة. .....

(ب) بيّن خواص التطبيق ل من حيث كونه شاملًا، متباينًا، تقابلًا، واذكر السبب. .....

.....

(جـ) ارسم المخطط السهمي للتطبيق.

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٦ـ٥

الدالة الخطية (التطبيق الخطي)
Linear Function

◄ صلة الدرس تعلمت أن علاقات خاصة تسمى تطبيقًا أو دالة، ستتعلم في هذا الدرس كيفية تمثيل الدوال بطرق مختلفة. ►

سوف تتعلم

- تمثيل الدوال باستخدام الجداول والتمثيل البياني والمعادلات والرسم.

من الاستخدامات

- تستخدم المطابع الدوال الخطية لتحديد تكاليف أعمال الطباعة الضخمة.

استكشف الدوال الخطية

الأدوات المستخدمة: أوراق رسم بياني، مسطرة

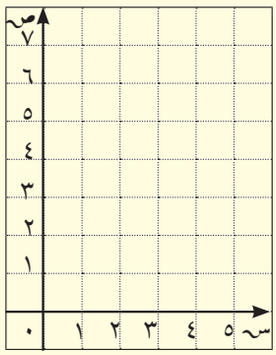
لنأخذ س = {١، ٢، ٣، ٤، ٥}، ص = {٣، ٤، ٥، ٦، ٧}

١ (أ) اكتب ع١ العلاقة من س إلى ص حيث

ع١ = {(أ، ب) : أ ∈ س، ب ∈ ص ، ب = أ + ٢}

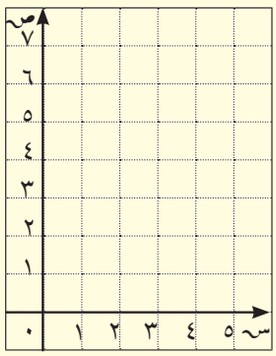
(ب) مثّل ع١ بمخطط بياني.

(جـ) هل يمكن وصل هذه النقاط بخط مستقيم؟



٢ لنأخذ س = {١، ٢، ٣}، ص = {٠، ٣، ٨}

كرر الخطوات في ١ من (أ) إلى جـ إذا كانت ب = أ^{٢} − ١ .

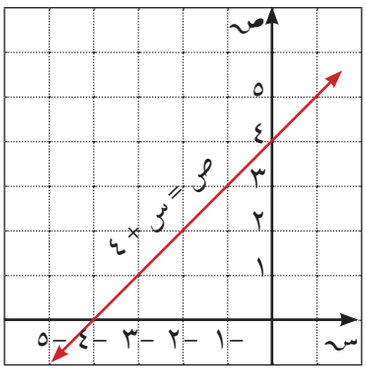


تعلم الدوال الخطية

التطبيق (الدالة) د: ح ⟵ ح حيث د (س) = س + ٤، يمكن كتابة قاعدة الاقتران على الصورة ص = س + ٤ .

عندما ترتبط قيمة ص بقيمة س يكون ص دالة في س ويسمى ص **المتغير التابع** ويسمى س **المتغير المستقل**.

في التمثيل البياني نستخدم المحور الأفقي (محور السينات) للمتغير المستقل، والمحور الرأسي (محور الصادات) للمتغير التابع.



المصطلحات الأساسية

◄ متغير تابع
Dependent Variable

◄ متغير مستقل
Independent Variable

◄ دالة خطية
Linear Function

الدالة د: ح ⟵ ح حيث د(س) = أ س + ب أو ص = أ س + ب ، أ، ب ∋ ح تسمى دالة خطية بيانها خط مستقيم.

ملاحظة: عندما أ = ٠ تكون الدالة ثابتة وبيانها خطًّا مستقيمًا أفقيًّا.

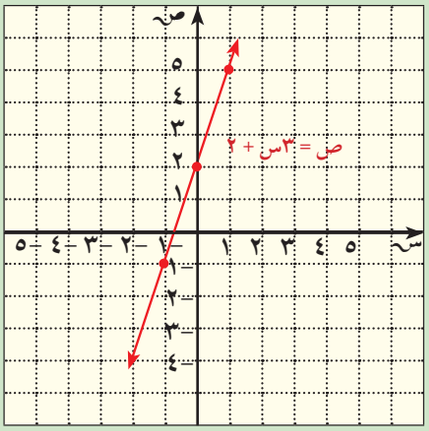
أمثلة

١ مثّل بيانيًّا العلاقة على ح حيث ص = ٣س + ٢. هل تمثّل دالة؟ هل هي دالة خطية؟

الحل:

نكوّن جدولًا لقيم المتغير المستقل والمتغير التابع:

المتغير المستقل	قاعدة الاقتران	المتغير التابع
س	٣س + ٢	ص
١−	٣ (−١) + ٢	١−
٠	٣(٠) + ٢	٢
١	٣ (١) + ٢	٥



هذه العلاقة تمثل دالة لأن كل قيمة في المتغير المستقل (س) لها قيمة وحيدة للمتغير التابع (ص). وهي دالة خطية لأن التمثيل البياني خط مستقيم.

◄ الصلة بالرياضيات

تبين المعادلة ص = ٣س + ٢ أن التعبيرين ص ، ٣س + ٢ متساويان. وتعني الدالة ص = ٣س + ٢ أن قيمة ص معطاة من خلال القاعدة ٣س + ٢.

عند حل بعض مسائل الحياة اليومية يمكننا استخدام بيانات الدوال الخطية في تمثيلها مع ملاحظة أن بعض القيم غير منطقية بالنسبة إلى المسألة.

لذلك فالرسم البياني للمسألة ليس بالضرورة أن يكون خطًّا مستقيمًا، ولكن جميع القيم التي تحقق المسألة تقع على خط مستقيم واحد.

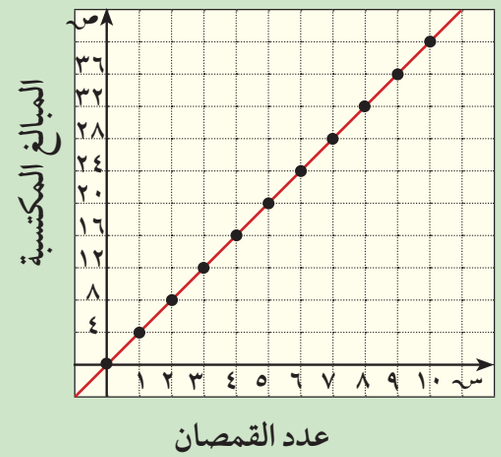
٢ يباع القميص الرياضي بمبلغ ٤ دنانير. اكتب ومثّل بيانيًّا القاعدة التي تربط بين المبالغ المكتسبة وعدد القمصان المبيعة.

إذا حصل عبدالله على ٣٦ دينارًا، فكم قميصًا باع؟ هل تصف هذه القاعدة دالة؟ فسر إجابتك.

الحل:

القاعدة التي تربط المبالغ المكتسبة بعدد القمصان المباعة هي : ص = ٤ س.

س	٠	١	٢
ص	٠	٤	٨



إذا حصل عبدالله على ٣٦ دينارًا، فيكون عدد القمصان المباعة ٩ قمصان.

نعم، تبعًا لعدد القمصان المباعة نحدد المبالغ المكتسبة.

٣ تمثّل المسافة التي يقطعها الحوت الأزرق دالة في الوقت، فإذا كانت سرعته في السباحة تساوي ٢٦ كم/ ساعة تقريبًا.

(أ) اكتب معادلة توضح العلاقة بين المسافة ف والوقت ن، ثمّ مثلها بيانيًّا.

(ب) استخدم المعادلة لإيجاد المسافة التي يقطعها الحوت الأزرق في كل من الأوقات التالية:

ساعتان ، ٥ ساعات ، ٨ ساعات.

الحل:

(أ) إن المسافة التي يقطعها الحوت الأزرق هي دالة في الوقت بحيث كل ساعة يقطع مسافة ٢٦ كم

المسافة = السرعة × الزمن

ف= ٢٦ن

(ب) هذا الجدول يعطينا إمكانية إيجاد الزمن إذا علمنا المسافة المقطوعة

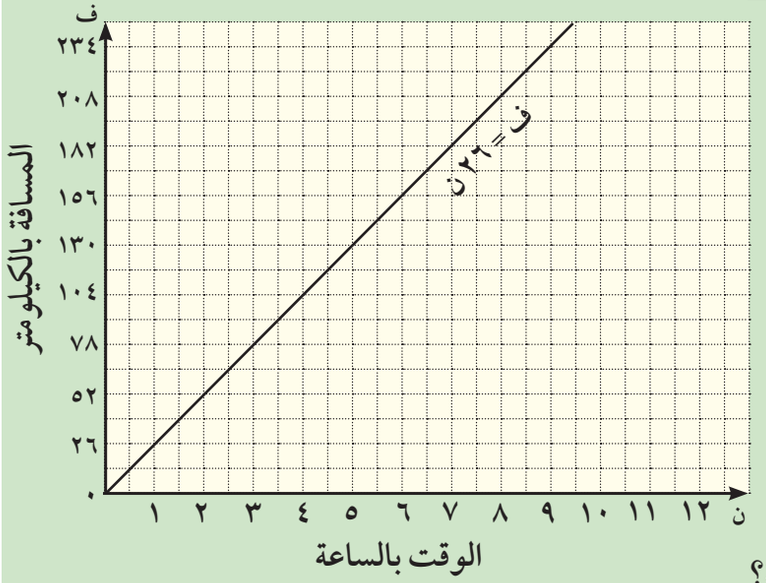
ن/ ساعة	١	٢	٥	٨
ف/ كم	٢٦	٥٢	١٣٠	٢٠٨

وذلك عن طريق تطبيق المعادلة التالية ف = ٢٦ × ن

يقطع الحوت الأزرق ٥٢ كم في ساعتين

١٣٠ كم في ٥ ساعات

٢٠٨ كم في ٨ ساعات



حاول أن تحل

١ (أ) مثّل بيانيًّا الدالة ص = −٢س،

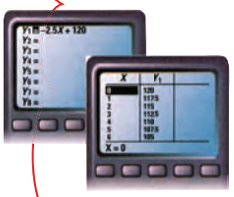
هل هي دالة خطية؟ فسر إجابتك.

(ب) مثل بيانيًّا الدالة ص = ٥؟ هل تمثل دالة خطية؟

ما رأيك؟

تنعدم الأوزان خارج المحطات الفضائية ومن ثمّ يمكن نمذجة ارتفاع قلم رصاص بعد رميه بدالة خطية في الزمن وذلك من لحظة رميه. علمًا أن القلم رمي من ارتفاع ١٢٠ سم وهبط ٥ , ٢ سم كل ثانية. كوِّن جدولًا لقيم المتغير التابع للدالة ص = −٥ , ٢ س + ١٢٠.

عبدالله يفكر ...



يمكنني إيجاد قيم المتغير التابع باستخدام الجداول في الآلة الحاسبة. إذا أدخلت
− ٥ , ٢ س ⊞ ١٢٠
على أنها الدالة Y ونظرت إلى الجدول الناتج، فيمكنني إيجاد قيم المتغير التابع، وهي:
١٢٠، ١١٧,٥، ١١٥، ١١٢,٥، .. وهكذا.

فهد يفكر ...

ألاحظ أن ١٢٠ قيمة الدّالة عندما س = ٠، فيمكنني أن أطرح ٥ , ٢ فقط لكل زيادة قدرها ١ في قيم س:

س	٠	١	٢	٣	٤	٥
ص	١٢٠	١١٧,٥	١١٥	١١٢,٥	١١٠	١٠٧,٥

−٢,٥ −٢,٥ −٢,٥ −٢,٥ −٢,٥

ما رأيك؟

ما الطريقة التي ستستخدمها إذا أردت معرفة الفترة الزمنية اللازمة حتى يصطدم قلم الرصاص بالأرضية؟ لماذا؟

تحقق من فهمك

١ لماذا لم نستخدم القيم السالبة في مثال ٣؟

٢ كيف يمكنك استخدام الرسم البياني لدالة كي توجد قيمة المتغير المستقل من أجل قيمة معطاة للمتغير التابع؟

٣ باستخدام جدول معطى، كيف يمكنك معرفة أن العلاقة دالة؟

٤ هل الرسم البياني للتطبيق ص = $\frac{١}{٢}$ س − ٥ يمثّل دالة خطية؟ وضح إجابتك.

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ **التفكير الناقد:** تساءل محمد عمّا إذا كانت شركات الطيران تحدد كلفة تذكرة السفر استنادًا إلى مسافة الرحلة. لقد أوجد متوسط المسافات بالكيلومتر بين بعض المدن وتكاليف تذاكر السفر ذهابًا وإيابًا.

المسافة بالكيلومتر	السعر بالدينار
١٠٨٦	٨٥
١٦٧٠	١٢٥
١٠٨٦	٥٥
١٠٨٦	١٢٤
١٦٧٠	٢٥٠
١٦٧٠	١٥٥

(أ) هل يمثّل سعر التذكرة دالة في المسافة؟ وضّح إجابتك. .....

.....

(ب) ما العوامل الأخرى التي تؤثر في تكلفة تذكرة السفر؟ .....

.....

٢ **المجلة:** اكتب مثالًا من الحياة اليومية لدالة. وضح الأسباب التي تجعل المعادلة دالة وعرف كلًّا من المتغيرين، التابع والمستقل. .....

.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٦-٦

الدالة التربيعية
Quadratic Functions

◄ صلة الدرس درست الدوال الخطية، وفي هذا الدرس ستتوسع في الأفكار التي تعلمتها عن الدوال الخطية وستتعرف نوعًا آخر من الدوال. ►

سوف تتعلم

- تمثيل الدوال التربيعية على شكل رسوم بيانية وجداول ومعادلات.

من الاستخدامات

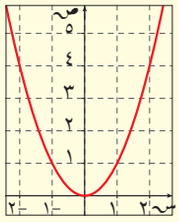
- يمكن تمثيل حركة المقذوفات وحركة الألعاب النارية في حفل استعراضي باستخدام المعادلات التربيعية.

استكشف الدوال التربيعية

صعودًا أو نزولًا

الأدوات المستخدمة: آلة حاسبة بيانية

١ يمثل الشكل المقابل بيان: ص=س^{٢}. هل يمثّل الرسم البياني هذا دالة؟ وضح إجابتك.



٢ أين تزداد قيم ص؟ وأين تتناقص؟

٣ اتبع مسار الرسم البياني (أو احسب) لإيجاد قيمة ص عندما تكون س = ٤، وعندما تكون س = −٤.

٤ استخدم الرسم البياني لإيجاد قيمة سالبة لـ ص. كيف تساعدك معادلة الدالة على توضيح إجاباتك؟

٥ غيّر الدالة إلى ص = س^{٢} − ٤ (يمثل الشكل المقابل بيانها). هل يغير ذلك إجابتك عن السؤال رقم ٤؟ وضح ذلك.

تعلم الدوال التربيعية

الدالة التربيعية هي دالة فيها القوة الأعلى للمتغير المستقل تساوي ٢.

يكون الرسم البياني لدالة خطية خطًّا مستقيمًا لأن التغيرات المتساوية في قيمة س تنتج تغيرات متساوية في قيمة ص. (تذكر أن التغير في قيمة ص مقسومًا على التغير في قيمة س يمثّل الميل).

يكون الرسم البياني لدالة تربيعية منحنًى على شكل ل أو منحنًى على شكل ∩، ويسمى قطعًا مكافئًا.

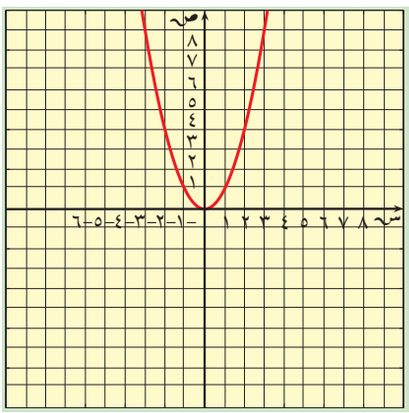
في الدوال التربيعية، لا تؤدي التغيرات المتساوية في قيمة س إلى تغيرات متساوية في قيمة ص.

مثال (١)

كوّن جدولًا ومثل بيانيًّا ص = س^{٢}

س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣
ص	٩	٤	١	٠	١	٤	٩

هذا التمثيل البياني للدالة ص = س^{٢}



المصطلحات الأساسية

◄ دالة غير خطية
Non-linear Function

◄ دالة تربيعية
Quadratic Function

◄ قطع مكافئ
Parabola

هل تعلم؟

في كرة السلة الأولمبية، تلقى كرة الرمية الثلاثية عن مسافة ٦ أمتار و١٥ سم.

الصورة العامة للدالة التربيعية هي:
ص = أ س^{٢} + ب س + جـ حيث أ ≠ ٠ ، أ، ب، جـ أعداد حقيقية.

حد من الدرجة الثانية — حد من الدرجة الأولى — حد ثابت

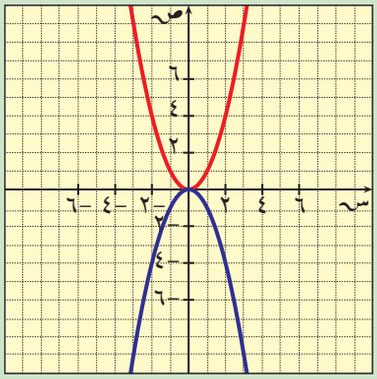
يمكن الحصول على أي تمثيل بياني لبعض الدوال التربيعية بتطبيق بعض التحويلات على التمثيل البياني للدالة التربيعية هي ص = س^{٢}: الإزاحة لأعلى ↑ أو لأسفل ↓ أو لليمين → أو لليسار ← أو الانعكاس في محور السينات ↕ .

أمثلة

٢ مثّل بيانيًّا الدالة ص = −س^{٢} مستخدمًا التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢}.

الحل:

يمكن رسم التمثيل البياني للدالة ص = − س^{٢} باستخدام الانعكاس في محور السينات على التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢}.



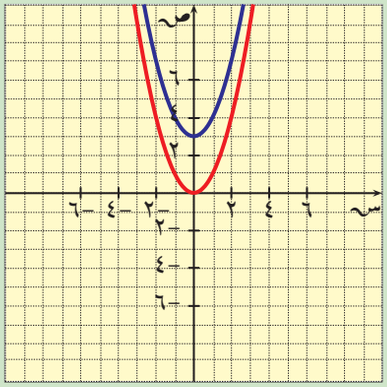
الخطوات

↕

٣ مثّل بيانيًّا الدالة ص = س^{٢} + ٣ مستخدمًا التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢}.

الحل:

يمكن رسم التمثيل البياني للدالة ص = س^{٢} + ٣ باستخدام الإزاحة الرأسية ٣ وحدات إلى الأعلى على التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢}.



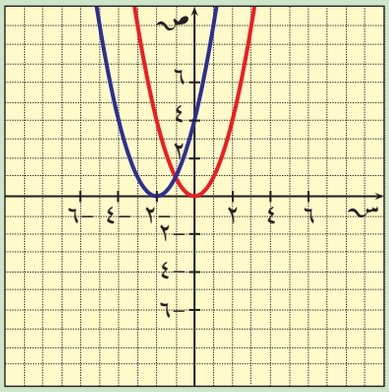
الخطوات

↑

٤ مثّل بيانيًّا الدالة ص = (س + ٢)^{٢} مستخدمًا التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢}.

الحل:

يمكن رسم التمثيل البياني للدالة ص = (س + ٢)^{٢} باستخدام الإزاحة الأفقية وحدتين (٢ وحدة) إلى اليسار على التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢}.



الخطوات

←

حاول أن تحل

١ (أ) مثل بيانيًّا الدالة ص = س^{٢} – ٤ مستخدمًا التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢}.

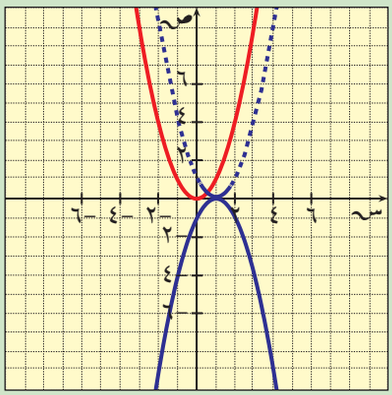
(ب) مثل بيانيًّا ص = (س – ٤)^{٢}، مستخدمًا التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢}.

٥ مثّل بيانيًّا الدالة ص = – (س – ١)^{٢} مستخدمًا التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢}.

الحل:

يمكن رسم التمثيل البياني للدالة ص = –(س – ١)^{٢} بواسطة تطبيق الإزاحة الأفقية وحدة واحدة (١ وحدة) إلى اليمين على التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢} ومن ثم الانعكاس في محور السينات.

الخطوات

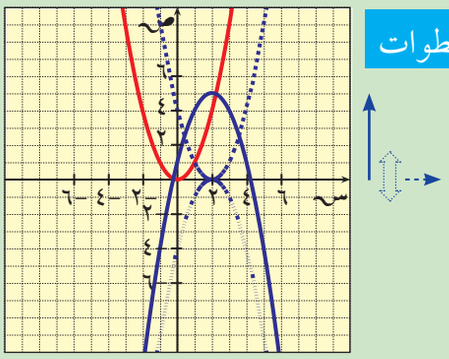


٦ مثّل بيانيًّا الدالة ص = –(س – ٢)^{٢} + ٥ مستخدمًا التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢} .

الحل:

يمكن رسم التمثيل البياني للدالة ص = –(س – ٢)^{٢} + ٥ عن طريق تطبيق الإزاحة الأفقية وحدتين (٢وحدة) إلى اليمين على التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢} ، ومن ثم الانعكاس في محور السينات، والإزاحة الرأسية ٥ وحدات إلى الأعلى.

الخطوات



الدالة التربيعية	التحويلات المطبقة على التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢}
ص = –س^{٢}	الانعكاس في محور السينات.
ص = س^{٢} + د	الإزاحة د وحدة إلى الأعلى إذا كانت د موجبة و |د| وحدة إلى الأسفل إذا كانت د سالبة.
ص = (س + هـ)^{٢}	الإزاحة أفقيًّا هـ وحدة إلى اليسار إذا كانت هـ موجبة و |هـ| وحدة إلى اليمين إذا كانت هـ سالبة.
ص = –(س + هـ)^{٢}	الإزاحة أفقيًّا هـ وحدة إلى اليسار إذا كانت هـ موجبة و |هـ| وحدة إلى اليمين إذا كانت هـ سالبة ومن ثم الانعكاس في محور السينات.
ص = (س + هـ)^{٢} + د	الإزاحة أفقيًّا هـ وحدة إلى اليسار إذا كانت هـ موجبة و |هـ| وحدة إلى اليمين إذا كانت هـ سالبة ومن ثم الإزاحة د وحدة إلى الأعلى إذا كانت د موجبة و |د| وحدة إلى الأسفل إذا كانت د سالبة .

عند حلّ مسائل من الحياة اليومية، تكون بعض القيم غير منطقية بالنسبة إلى المسألة. يمكن ألا يشبه جزء من الرسم البياني الذي يحل المسألة قطعًا مكافئًا كاملًا.

◄ الربط بالعلوم

يتسارع الجسم الساقط بفعل قوة جاذبية الأرض. يسقط الجسم بسرعة أكبر إذا كانت الأرض أكبر حجمًا مما هي عليه، وبسرعة أقل كما لو كانت الأرض أصغر حجمًا مما هي عليه.

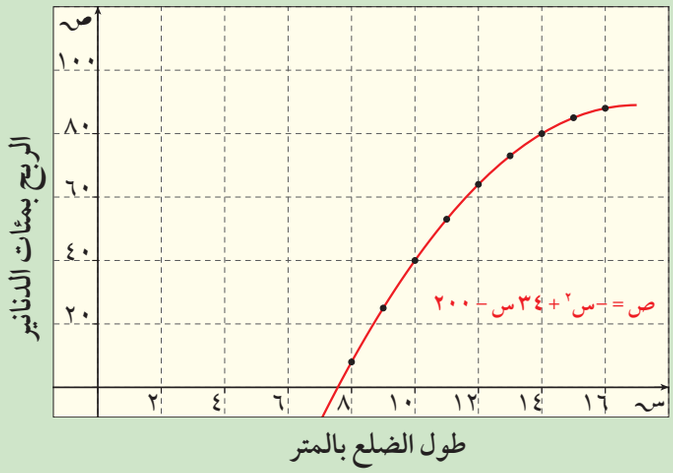
مثال (٧)

تبيع إحدى الشركات أشرعة مربعة الشكل للمراكب الشراعية.
تنمذج المعادلة ص = −س^{٢} + ٣٤س − ٢٠٠ ربح الشركة
حيث س طول ضلع الشراع بالمتر وص الربح بمئات الدنانير من مبيع الشراع الواحد.
اعمل جدولًا، وضع تمثيلًا بيانيًّا مستخدمًا س = ٨ إلى س = ١٦.
هل يمكنك استخدام قيم سالبة لـ س أو ص؟
ولماذا لم يكن الرسم البياني قطعًا مكافئًا كاملًا؟

الحل:

يمكنك استخدام قيم سالبة للمتغيرين س، ص، لكن سيكون من غير المنطقي بالنسبة إلى المسألة أن تستخدم قيمًا سالبة لطول ضلع الشراع. ولكن يمكن استخدام قيم سالبة لـ ص حيث الربح سالب (أي أن الشركة لا تحقق أرباحًا بل خسارة). وبما أن القيم السالبة لم تستخدم، فالرسم البياني ليس قطعًا مكافئًا.

طول الضلع	سعر المبيع
٨	٨
٩	٢٥
١٠	٤٠
١١	٥٣
١٢	٦٤
١٣	٧٣
١٤	٨٠
١٥	٨٥
١٦	٨٨



حاول أن تحل

٢ تبيع شركة ثانية أشرعة مربعة الشكل للمراكب الشراعية وتنمذج أرباحها بالمعادلة ص = − س^{٢} + ٢٨ س − ١٠٠ (حيث س بالمتر وص بمئات الدنانير).

اعمل جدولًا، وضع تمثيلًا بيانيًّا مستخدمًا س = ٥ إلى س = ١٤.

تحقق من فهمك

١ ما أوجه الاختلاف بين الدالة التربيعية والدالة الخطية؟

٢ كيف يؤثر ضرب $س^{٢}$ في −١ على الرسم البياني لدالة تربيعية؟

٣ قارن بين الرسمين البيانيين للدالتين ص = $س^{٢}$ − ٢ ، ص = س − ٢. ما أوجه الشبه والاختلاف بينهما؟

٤ متى يمكنك إسقاط قيم س السالبة؟ ولماذا؟

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ **التواصل**: رمى حمد حجرًا في الوادي، فسمع صوت ارتطامه بالأرض بعد مرور ٥ ثوانٍ. تمثّل الدالة: ع = −٥ن^{٢} هذا الحدث. يمثّل ن الزمن بالثواني، ع الارتفاع بالأمتار. مثّل هذه الدالة بيانيًّا، وأوجد عمق الوادي ذاكرًا سبب حصولك على قيمة سالبة.

.....

.....

٢ **التفكير الناقد**: أجب عن الأسئلة المتعلقة بكلّ دالة.

(١) ص = ٤ س^{٢} (٢) ص = −٤س^{٢}

(٣) ص = س^{٢} + ٢ (٤) ص = −٢س^{٢}

(أ) أي من الرسوم البيانية للدوال السابقة يتجه إلى أعلى؟ وضّح إجابتك.

.....

(ب) أي من الرسوم البيانية يمر بالنقطة (٠، ٠)؟ وضّح إجابتك.

.....

(جـ) أي من الرسوم البيانية متماثل حول محور الصادات؟

.....

٣ **المجلة**: كيف يمكنك استخدام قاعدة الاقتران لمعرفة أن رسمها البياني هو قطع مكافئ؟

.....

.....

٤ أطلق جسم في الهواء. تمثّل الدالة ع = −٥ن^{٢} + ٢٥ن عملية الإطلاق، حيث يمثّل ع = الارتفاع بالمتر، ن = الزمن بالثواني.

(أ) متى يصبح الجسم على ارتفاع ٢٠ مترًا في الهواء؟ وضّح إجابتك.

.....

.....

(ب) ما الذي يحدث بعد ٢$\frac{١}{٢}$ ثانية؟

.....

.....

اختبار الوحدة السادسة

١ إذا كانت س = {أ:أ ∈ ك، أ عدد فردي، أ ⩽ ٧}، ل = {ب:ب ∈ صـ، ب^{٢} = ٤} (حيث ك مجموعة الأعداد الكلية، صـ مجموعة الأعداد الصحيحة).

(أ) ما عدد عناصر س، ل، س × ل، ل × س، س × س، ل × ل؟

(ب) اكتب كلًّا من المجموعات المذكورة في فقرة (أ) بذكر العناصر.

(جـ) مثّل كلًّا من س × ل، ل × س بمخطط بياني.

(د) مثّل ل × ل بمخطط سهمي.

٢ اكتب كلًّا من العلاقات التالية على مجموعة س = {أ، أ ∈ صـ ، −٥ ⩽ أ ⩽ ٥} (حيث صـ مجموعة الأعداد الصحيحة) بذكر العناصر.

(أ) ع$_{١}$ = {(أ، ب): أ ∈ س، ب ∈ س، أ^{٢} + ب^{٢} ⩽ ٥}

(ب) ع$_{٢}$ = {(أ، ب): أ ∈ س، ب ∈ س، |أ| + |ب| = ٢}

(جـ) ع$_{٣}$ = {(أ، ب): أ ∈ س، ب ∈ س ، ب = ٣أ}

٣ إذا كان د: س ← صـ تطبيقًا حيث س = {١، ٢، ٣، ٤، ٥}، صـ = {١، ٣، ٥، ٧، ٩، ١١}، د(س) = ٢س + ١.

(أ) أوجد د(١)، د(٢)، د(٣)، د(٤)، د(٥).

(ب) اكتب مدى التطبيق د.

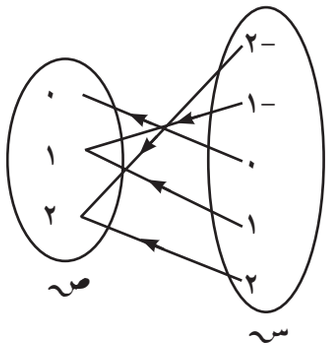
(جـ) مثّل التطبيق د بمخطط سهمي.

(د) بيّن نوع التطبيق د (شامل، متباين، تقابل).

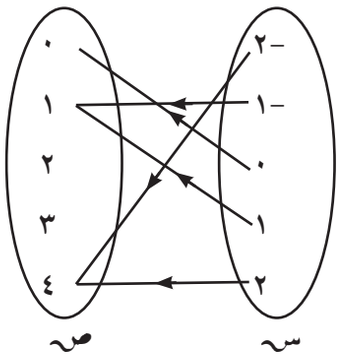
اختبار الوحدة السادسة

٤ اكتب قاعدة الاقتران التي تمثّلها كلّ من المخططات السهمية التالية:

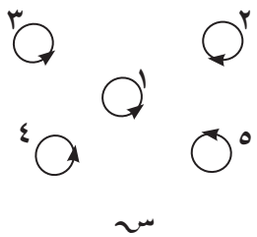
(أ)



(ب)



(جـ)



٥ في ما يلي قواعد بعض الدوال. أكمل كلًّا من الجداول.

(أ) ص = $\frac{١}{٢}$س + ٢ (ب) ص = س^{٢} − ٤ (جـ) ص = (س + ١)^{٢} − ٢

س	ص
−٦	
	٠
٠	
١	
	٣
٣	

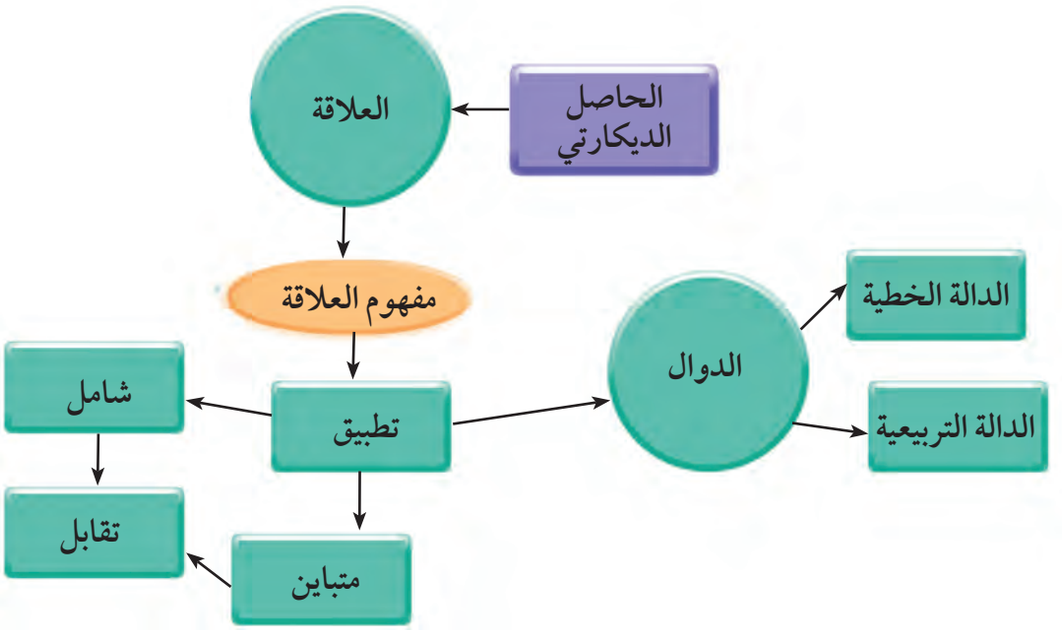
س	ص
−٢	
−١	
٠	
١	
٢	
٣	

س	ص
−٣	
−١	
	−١
١	
٢	
٤	

٦ كوّن جدولًا ومثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال التالية في الفترة [−٣، ٣]:

(أ) ص = ٢س − ١ (ب) ص = −س^{٢} + ١ (جـ) ص = ٣

مخطط تنظيمي للوحدة السادسة



ملخص الوحدة السادسة (أ): العلاقة

- إن المجموعة التي تتكوّن من جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول عنصر في المجموعة س ومسقطها الثاني عنصر في المجموعة ص تسمى حاصل الضرب الديكارتي وتكتب س × ص.
- العلاقة (ع) هي مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي س × ص أي أن ع ⊆ س × ص .
- العلاقة (ع) هي تطبيق عندما يظهر كل عنصر من عناصر س مرة واحدة في المسقط الأول في كل من الأزواج المرتبة المحددة لبيان العلاقة.
- لكل تطبيق أو دالة مجاله ومجاله المقابل والمدى.
- عندما يتساوى المدى والمجال المقابل يسمى التطبيق شاملًا.
- التطبيق الذي لا يرتبط أي عنصرين مختلفين من المجال بالعنصر نفسه في المجال المقابل يسمى تطبيقًا متباينًا.

كل تطبيق شامل ومتباين يسمى تقابلًا.

ملخص الوحدة السادسة (ب): الدوال

- الدالة هي علاقة تعطي قيمة المتغير التابع لكل قيمة متغير مستقل، ولا يمكن لأي قيمتي متغير تابع مختلفتين أن يكون لهما القيمة للمتغير المستقل نفسها.
- لتمثيل الدالة بيانيًّا يستخدم محور السينات للمتغير المستقل، ومحور الصادات للمتغير التابع.
- تكون الدالة دالة خطية إذا كان رسمها البياني خطًّا مستقيمًا، والدالة التربيعية هي دالة غير خطية حيث قيمة س فيها مضروبة في نفسها (مربعة)، ورسمها البياني قطع مكافئ بالشكل ∪ أو الشكل المقلوب ∩.

الوحدة السابعة

هندسة المثلث

Geometry of Triangle

علوم

تنسج العنكبوت شبكتها من خيوط حريرية لزجة وتكون على شكل موجات مثلثية.

تستخدم العنكبوت هذه الشبكة منزلاً لها، وهي تسمح لها بالتقاط فرائسها من الحشرات.

جغرافيا

تشكل الحدود الشرقية والشمالية والجنوبية لدولة الكويت شبه مثلث على الخريطة.

مفاهيم رياضية أساسية

متباينة المثلث: في كل مثلث، طول كل ضلع هو أصغر من مجموع طولي الضلعين الآخرين.

في المثلث **حاد الزوايا**، يكون مجموع مربعي طولي ضلعين أكبر من مربع طول الضلع الثالث.

تتقاطع **محاور المثلث** في نقطة واحدة. هذه النقطة تقع على أبعاد متساوية من رؤوس المثلث الثلاثة.

تتقاطع **منصفات زوايا المثلث** في نقطة واحدة. تقع هذه النقطة على أبعاد متساوية من أضلاعه الثلاثة.

الأعمدة المرسومة من **رؤوس المثلث** على أضلاعه الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة.

القطع المتوسطة للمثلث تتقاطع في نقطة واحدة تقسم كلًّا منها نسبة ٢ : ١ من جهة الرأس.

تسلية

أحرزت الكويت بطولة البليارد العربية الرابعة عن فئة (٩ كرات) سنة ٢٠٠٧ في الدوحة. تبدأ هذه اللعبة بضرب كرة البليارد بمجموعة كرات موضوعة بشكل مثلث.

فنون قتالية

تعبر هذه الصورة عن الوضعية الهجومية في أحد فنون القتال، وتأخذ الوضعية شكل المثلث.

مشروع الوحدة

حل المسائل

افهم
خطط
حل
تحقق

مع غروب شمس نهار حار، تحتاج إلى الخروج. إلى أين ستذهب؟ إلى المتنزه! لأجيال، لجأ الناس في المدن إلى المتنزهات للاسترخاء ومقابلة الأصدقاء، حيث يكونون محاطين بالطبيعة. سوف تضع في هذا المشروع تصميمًا لمتنزه صغير تقدمه إلى البلديّة في مدينتك. نتاج عملك سوف يكون تصميمًا مفصلًا للمتنزه.

التركيز على حل المسائل

لكل مسألة مما يلي ثلاث إجابات. حدد الإجابة الصحيحة، ثم حدد الجمل المعطاة في المسألة والتي لا تتفق مع الإجابتين الأخريين:

اختبر القواعد المستخدمة في حل المسائل

عند حل المسائل، فإنه من الأهمية أن تتحقق من مدى صحة إجابتك. مثلًا، تحقق من أن حلك يتفق مع كل الحقائق الواردة في المسألة.

١ ركض أربعة أشخاص مجتمعين مسافة ٣٥ كم. ركض ناصر ١ كم أكثر من حمد، وركض مبارك ١٠٠٠ متر أقل من ناصر، أما أحمد فركض ربع المسافة التي ركضها الآخرون مجتمعين. كم ركض كل منهم؟

إجابة ١	إجابة ٢	إجابة ٣
ناصر ٩	ناصر ٩	ناصر ١٠
حمد ١٠	حمد ٩	حمد ٩
مبارك ١٢	مبارك ١٠	مبارك ٩
أحمد ٤	أحمد ٩	أحمد ٧

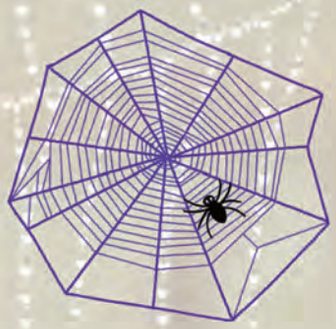
٢ بعد مسابقة الركض، تقابلوا في محل العصائر. دفع ناصر ٣ دنانير أكثر من مبارك، ودفع حمد مرة ونصف مما دفعه مبارك، أما مبارك فدفع ٣ دنانير أقل من أحمد. كم دفع كل منهم إذا كان مجموع فاتورتهم ١٩,٥٠٠ دينارًا.

إجابة ١	إجابة ٢	إجابة ٣
ناصر ١٠	ناصر ٦	ناصر ٦
حمد ١,٥٠٠	حمد ٤,٥٠٠	حمد ٣
مبارك ٦	مبارك ٣	مبارك ٦
أحمد ٦	أحمد ٦	أحمد ٤,٥٠٠

شبكات العناكب

تنسج العناكب أنواعًا مختلفة من الشبكات كالشبكة المثلثية والشبكة المدارية. ولهاتين الشبكتين نمط مثلثي.

العناكب التي تنسج شبكة مثلثية الشكل تنتظر فريستها في آخر الشبكة.



أما العناكب التي تنسج الشبكات المدارية، فيكون مدى الرؤية لديها ضعيف نسبيًّا.

تنسج العناكب شبكات جميلة ومعقدة بخيوط من الحرير اللاصق لاصطياد الفرائس. تشعر العناكب بفرائسها من خلال موجات تصدرها عند التصاقها بالشبكة.

١ علام تتغذى العناكب؟

٢ كيف تساعد الشبكة العناكب على اصطياد فرائسها؟

٣ ما هي الأشكال الهندسية التي تراها في شبكات العناكب ؟

١-٧

متباينة المثلث وأنواعه

Triangle Inequality and Types of Triangles

◄ صلة الدرس في السابق تعرفت حل المتباينات. في هذا الدرس سوف تستخدم متباينة المثلث لحل مسائل متعلقة بأطوال أضلاعه أو قياس زواياه. ►

سوف تتعلم

- استخدام متباينة المثلث.
- تحديد نوع المثلث.

من الاستخدامات

- يستخدم مصممو الخيم متباينة المثلث عند وضع تصاميم لخيمهم بهدف اختيار الشكل الأفضل.

المصطلحات الأساسية

◄ متباينة المثلث
Triangle Inequality

استكشف متباينات في مثلث

الأدوات المستخدمة: مقص، مسطرة، عيدان.

اعمل ضمن مجموعة لجمع عيدان من مختلف الأطوال (٢، ٣، ٤، ٥ و٦ سم).

١ اختر ثلاثة عيدان عدة مرات لتبين ما إذا كانت تشكل مثلثًا أو لا، وأكمل الجدول. كرر العملية عدة مرات.

طول العود			تشكل مثلث
عود ١	عود ٢	عود ٣	
٢	٣	٤	نعم
٢	٣	٥	لا
٥	٤	٣	نعم

٢ اختر مجموعة عيدان تشكل مثلثًا وقارن الأطوال. أكمل:

(أ) طول عود ١ + طول عود ٢ ..... طول عود ٣

(ب) طول عود ١ + طول عود ٣ ..... طول عود ٢

(جـ) طول عود ٢ + طول عود ٣ ..... طول عود ١

٣ اختر مجموعة عيدان لا تشكل مثلثًا، وأكمل (أ)، (ب)، (جـ)، من ٢ . هل النتائج هي نفسها؟

٤ ماذا تستنتج من ٢ و ٣ بمقارنة مجموع طولي ضلعين مع طول الضلع الثالث من مثلث؟

تعلم متباينة المثلث وأنواعه

متباينة المثلث:

مجموع طولي أي ضلعين في المثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

هذه الخاصية تسمى **متباينة المثلث**.

مثلاً في المثلث أ ب جـ يكون: ب جـ + أ ب > أ جـ

أ جـ + ب جـ > أ ب

أ ب + أ جـ > جـ ب

معلومة رياضية

إذا كان أ ب + ب جـ = أ جـ، فإن النقاط الثلاث أ، ب، جـ، على استقامة واحدة.

مثال (١)

هل يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث كما يلي؟ فسر.

(أ) ٣سم، ٧سم، ٨سم.

(ب) ٣سم، ٦سم، ١٠سم.

(أ) المعطيات: الأطوال هي ٣سم، ٧سم، ٨سم.

المطلوب: التحقق من وجود مثلث مع الأطوال المعطاة.

البرهان: باستخدام متباينة المثلث: ٣ + ٧ > ٨؛ ٨ + ٧ > ٣؛ ٨ + ٣ > ٧.

الأطوال: ٣سم، ٧سم، ٨سم يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث.

(ب) المعطيات: الأطوال هي ٣ سم، ٦ سم، ١٠ سم

المطلوب: التحقق من وجود مثلث مع الأطوال المعطاة

البرهان: ٣ + ٦ > ١٠

الأطوال ٣ سم، ٦ سم، ١٠ سم لا يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث.

ملاحظة:

يمكن الاكتفاء باختيار أكبر الأضلاع طولًا ومقارنته بمجموع طولي الضلعين الآخرين.

حاول أن تحل

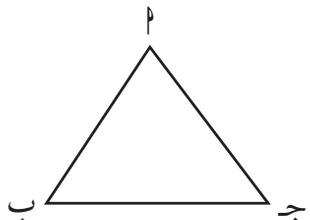
١ هل يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث ٤سم، ٦سم، ١٠سم؟ فسر.

يمكن التعرف على نوع المثلث بالنسبة إلى زواياه، بمقارنة مربع طول الضلع الأكبر بمجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين.

إذا كان ∆ أ ب جـ مثلثًا فيه $\overline{أجـ}$ **أكبر الأضلاع طولًا** فيكون المثلث ∆ أ ب جـ:

حاد الزوايا إذا كان:

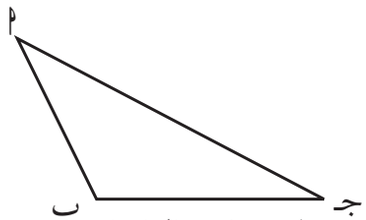
$(أجـ)^{٢} < (أب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}$



مثلث حاد الزوايا

منفرج الزاوية في ب إذا كان:

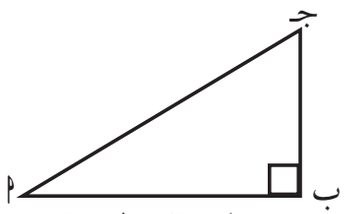
$(أجـ)^{٢} > (أب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}$



مثلث منفرج الزاوية

قائم الزاوية في ب إذا كان:

$(أجـ)^{٢} = (أب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}$



مثلث قائم الزاوية

مثال (٢)

حدد نوع المثلث أ ب جـ بالنسبة إلى زواياه.

∵ تقرأ بما أن

∴ تقرأ إذن

(أ) إذا كان أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ١١ سم ، أ جـ = ١٠ سم

المعطيات: أ ب = ٥ سم، ب جـ = ١١ سم، أ جـ = ١٠ سم.

المطلوب: تحديد نوع المثلث بالنسبة إلى زواياه.

البرهان:

$\overline{ب جـ}$ أكبر الأضلاع طولًا في المثلث أ ب جـ: $(ب جـ)^{٢} = (١١)^{٢} = ١٢١$

$(أ ب)^{٢} + (أ جـ)^{٢} = (٥)^{٢} + (١٠)^{٢}$

$= ١٠٠ + ٢٥$

$= ١٢٥$

∵ $١٢١ < ١٢٥$

أي أن: $(ب جـ)^{٢} < (أ ب)^{٢} + (أ جـ)^{٢}$

∴ المثلث أ ب جـ حاد الزوايا.

(ب) إذا كان أ ب = ٢ سم ، ب جـ = ٦ سم، أ جـ = ٧ سم.

المعطيات: أ ب = ٢ سم، ب جـ = ٦ سم، أ جـ = ٧ سم.

المطلوب: تحديد نوع المثلث بالنسبة إلى زواياه.

البرهان: $\overline{أ جـ}$ أكبر الأضلاع طولًا في المثلث أ ب جـ .

$(أ جـ)^{٢} = (٧)^{٢} = ٤٩$

$(ب أ)^{٢} + (ب جـ)^{٢} = (٢)^{٢} + (٦)^{٢}$

$= ٤ + ٣٦$

$= ٤٠$

∵ $٤٠ < ٤٩$

أي أن: $(أ جـ)^{٢} > (ب أ)^{٢} + (ب جـ)^{٢}$، ∴ المثلث أ ب جـ منفرج الزاوية.

حيث إن الضلع $\overline{أ جـ}$ الضلع الأكبر طولًا في المثلث، فتكون الزاوية ب المقابلة له الزاوية الأكبر قياسًا.

المثلث أ ب جـ منفرج الزاوية في ب.

(جـ) إذا كان أ ب = ٣ سم ، أ جـ = ٤ سم، ب جـ = ٥ سم.

المعطيات: أ ب = ٣ سم، أ جـ = ٤ سم، ب جـ = ٥ سم.

المطلوب: تحديد نوع المثلث بالنسبة إلى زواياه.

البرهان: $\overline{ب جـ}$ أكبر الأضلاع طولًا في المثلث أ ب جـ.

$(ب جـ)^{٢} = (٥)^{٢} = ٢٥$

$(أ ب)^{٢} + (أ جـ)^{٢} = (٣)^{٢} + (٤)^{٢}$

$= ٩ + ١٦ = ٢٥$

∵ $٢٥ = ٢٥$

أي أن: $(ب جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (أ جـ)^{٢}$، ∴ المثلث أ ب جـ قائم الزاوية.

حيث إن الضلع $\overline{ب جـ}$ الضلع الأكبر طولًا في المثلث، فتكون الزاوية أ المقابلة له الزاوية الأكبر قياسًا.

المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في أ.

حاول أن تحل

٢ حدد نوع المثلث بالنسبة إلى زواياه إذا كان:

(أ) س ص = ١١ سم ، ص ع = ٤ سم ، س ع = ١٢ سم.

(ب) ل م = ٧ سم ، م ن = ٦ سم ، ل ن = ٥ سم.

(جـ) أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم ، أ جـ = ١٠ سم.

تحقق من فهمك

١ مثلث منفرج الزاوية في ب، هل من الممكن أن تكون $(أ جـ)^{٢} - (أ ب)^{٢} > (ب جـ)^{٢}$؟

٢ مثلث قائم الزاوية في جـ، هل من الممكن أن تكون $(ب جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢} + (أ ب)^{٢}$؟

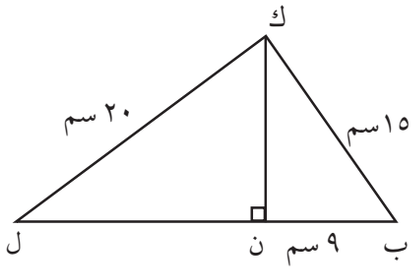
٣ أ' ، ب' ، جـ' أطوال ثلاثة أضلاع في مثلث حيث أ' + ب' > جـ' . هل تستنتج أن أ' + جـ' > ب'؟

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ في الشكل المقابل، إذا كان:

ب ن = ٩سم، ب ك = ١٥ سم، ك ل = ٢٠سم، $\overline{ك ن} \perp \overline{ب ل}$.

أثبت أن المثلث ب ك ل قائم الزاوية في ك.



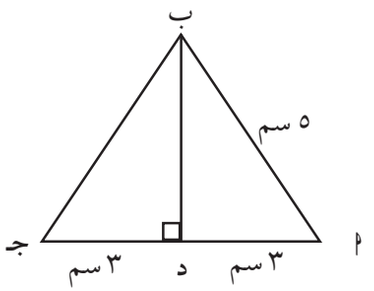
.....

.....

٢ في الشكل المقابل، إذا كان:

أ د = د جـ = ٣ سم، أ ب = ٥ سم ، $\overline{ب د} \perp \overline{أ جـ}$.

هل المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب؟



.....

.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظّم قائمة.
- كوّن جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حلّ مسألة أبسط.

٧-٢

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في المثلث
Midsegment of Triangle

سوف تتعلم

- استخدام خصائص القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث لحل مسائل هندسية.

من الاستخدامات

- يستخدم ماسحو الأراضي خاصية القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين لإيجاد طول بحيرة ما.

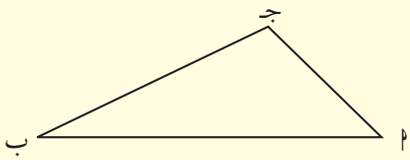
◄ صلة الدرس في هذا الدرس سوف تتعرف خصائص القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث. ►

استكشف منتصفات القطعة المستقيمة

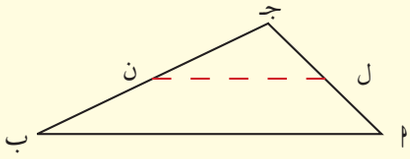
الأدوات المستخدمة: مقص، مسطرة.

يقص كل طالب في مجموعتك عددًا من المثلثات (قائمة الزاوية، حادة الزوايا، منفرج الزاوية).

ليكن مثلث أ ب جـ. اطو أ على جـ لإيجاد منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أجـ}$، وبالمثل لـ $\overline{ب جـ}$

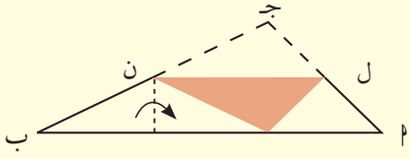


ليكن ل ، ن المنتصفين. صل بينهما لتحصل على $\overline{ل ن}$.



اطو مثلثك عند $\overline{ل ن}$.

تابع الطي كما في الرسم المرفق.



١ ما نوع الرباعي الذي يتشكل من طي المثلث ل جـ ن؟

٢ ماذا تستنتج بالنسبة إلى $\overline{ل ن}$ ، $\overline{أ ب}$؟

٣ اذكر خاصية تربط القطعة المستقيمة المشكلة من منتصفي ضلعين بالنسبة إلى الضلع الثالث في المثلث.

تعلم القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث

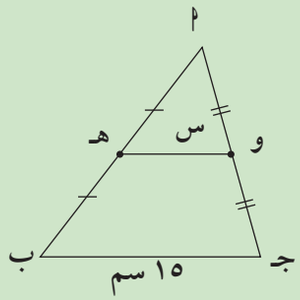
نظرية (١)

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث، وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع.

مثال (١)

أوجد قيمة س في الحالات التالية: (بالبرهان)

(أ)



(أ) المعطيات: أ و = و جـ ، أ هـ = هـ ب ،

ب جـ = ١٥ سم

المطلوب: إيجاد قيمة س.

البرهان:

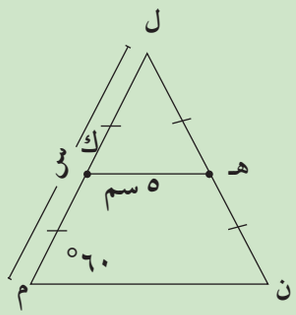
∵ و منتصف $\overline{أجـ}$ ، هـ منتصف $\overline{أب}$ (معطى)

∴ $\overline{وهـ}$ // $\overline{جـب}$ ، و هـ = $\frac{١}{٢}$ جـ ب نظرية (١)

س = $\frac{١}{٢}$ × ١٥ بالتعويض

أي أن س = ٧,٥ سم.

(ب)



(ب) المعطيات: ل ك = ك م = ل هـ = هـ ن،

ق (م̂) = ٦٠° ؛ هـ ك = ٥ سم

المطلوب: إيجاد قيمة س.

البرهان:

∵ هـ منتصف $\overline{ل ن}$ ، ك منتصف $\overline{ل م}$ (معطى)

∴ $\overline{هـ ك}$ // $\overline{ن م}$ ، هـ ك = $\frac{١}{٢}$ ن م نظرية (١)

٥ = $\frac{١}{٢}$ ن م بالتعويض

ن م = ١٠ سم

∵ ل ك = ك م = ل هـ = هـ ن (معطى)

∴ ل م = ل ن

ويكون المثلث ل ن م متطابق الضلعين؛ وبما أن إحدى زواياه قياسها ٦٠°، فيصبح متطابق الأضلاع

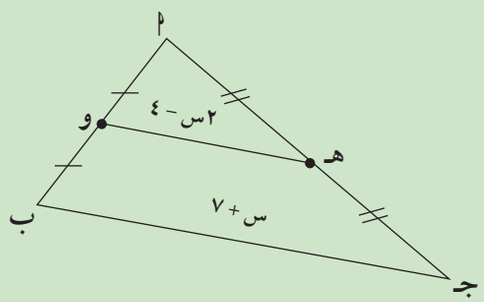
وبالتالي: س = ١٠ سم.

ملاحظة:

في المثلث متطابق الضلعين إذا كان قياس إحدى زوايا القاعدة يساوي ٦٠° فإن المثلث يكون متطابق الأضلاع.

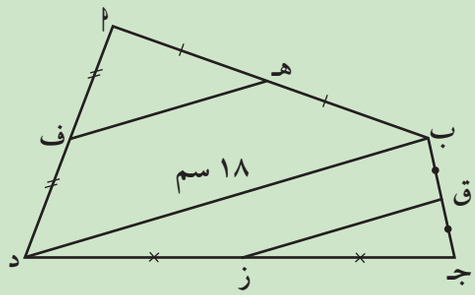
حاول أن تحل

١ في الشكل المقابل، أوجد قيمة س. (بالبرهان)



مثال (٢)

في الشكل الرباعي أ ب جـ د. إذا كان هـ ، ف ، ز، ق منتصفات الأضلاع $\overline{ب أ}$ ، $\overline{أ د}$ ، $\overline{د جـ}$ ، $\overline{جـ ب}$ على الترتيب.
ب د = ١٨ سم. أوجد هـ ف ، ق ز.



المعطيات: هـ منتصف $\overline{ب أ}$

ف منتصف $\overline{أ د}$

ز منتصف $\overline{د جـ}$

ق منتصف $\overline{جـ ب}$

ب د = ١٨ سم

المطلوب: إيجاد طول $\overline{هـ ف}$ ، $\overline{ق ز}$.

البرهان: في المثلث د ب جـ :

∵ ق منتصف $\overline{ب جـ}$	(معطى)
∵ ز منتصف $\overline{جـ د}$	(معطى)
∴ $\overline{ق ز}$ // $\overline{ب د}$ ، ق ز = $\frac{١}{٢}$ ب د	نظرية (١)
ق ز = $\frac{١}{٢} \times ١٨$	بالتعويض
ق ز = ٩ سم	

في المثلث أ ب د:

∵ هـ منتصف $\overline{ب أ}$	(معطى)
∵ ف منتصف $\overline{أ د}$	(معطى)
∴ $\overline{هـ ف}$ // $\overline{ب د}$ ، هـ ف = $\frac{١}{٢}$ ب د	نظرية (١)
هـ ف = $\frac{١}{٢} \times ١٨$	بالتعويض
هـ ف = ٩ سم	

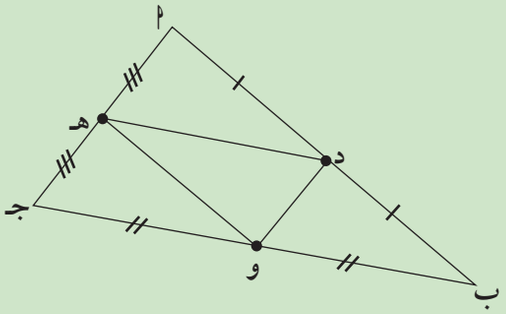
حاول أن تحل

٢ في المثال (٢)، إذا كانت أ جـ = ٢٠ سم، فأوجد ق هـ ، ز ف.

مثال (٣)

في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث فيه د، و، هـ منتصفات $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـ أ}$ على الترتيب.

إذا كان ب جـ = ١٠ سم فأوجد د هـ ، ثم أثبت أن د و جـ هـ متوازي أضلاع.



المعطيات: أ ب جـ مثلث حيث:

أ د = د ب ؛ ب و = و جـ

أ هـ = هـ جـ

ب جـ = ١٠ سم

المطلوب: (١) إيجاد د هـ.

(٢) إثبات أن د و جـ هـ متوازي أضلاع.

البرهان: (١) ∵ د منتصف $\overline{أ ب}$ ، هـ منتصف $\overline{أ جـ}$ (معطى)

∴ $\overline{د هـ}$ // $\overline{ب جـ}$ ؛ د هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ نظرية (١)

∴ د هـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ = ٥ سم بالتعويض

(٢) ∵ جـ و = ٥ سم (جـ و = و ب)

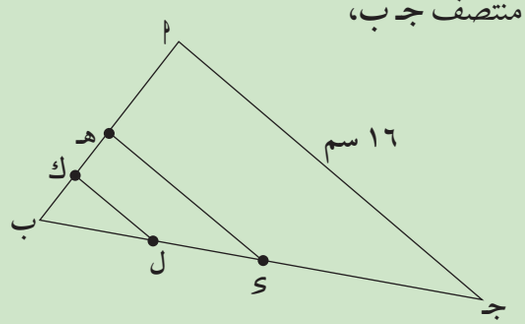
لذا يكون: د هـ = جـ و = ٥ سم

ولدينا $\overline{د هـ}$ // $\overline{جـ و}$

∴ د و جـ هـ متوازي أضلاع (رباعي فيه ضلعان متقابلان متوازيان ومتساويان في الطول).

حاول أن تحل

٣ في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث، أ جـ = ١٦ سم. هـ منتصف $\overline{أ ب}$ ، ء منتصف $\overline{جـ ب}$،
ك منتصف $\overline{ب هـ}$ ، ل منتصف $\overline{ء ب}$. أوجد طول $\overline{ك ل}$.



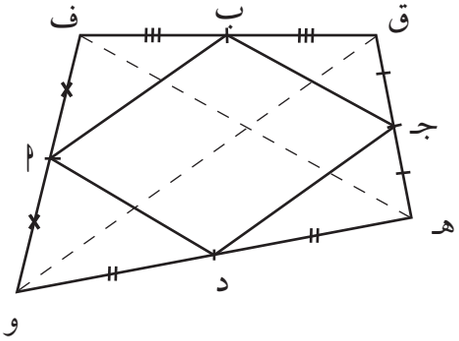
تحقق من فهمك

١ إذا وصلت المنتصفات بين كل زوجين من أضلاع في مثلث، فما علاقة محيط المثلث الذي تحصل عليه بمحيط المثلث الأساسي؟

٢ إذا كان طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين يساوي س سنتيمتر، فكم يساوي طول الضلع الثالث في المثلث؟

المرشد لحل المسائل (٧-٢)

في الشكل الرباعي المقابل، أ ، ب ، جـ ، د منتصفات الأضلاع:
$\overline{\text{ف و}}$ ، $\overline{\text{ف ق}}$ ، $\overline{\text{ق هـ}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$ على الترتيب.
حدد نوع الشكل الرباعي أ ب جـ د.



افهم

١ ما العلاقة التي تربط النقاط أ ، ب ، جـ ، د بالشكل الرباعي و ف ق هـ ؟ .....

٢ ما المطلوب إليك إيجاده؟ .....

خطط

٣ سمّ مثلثًا يكون أ ، ب منتصفين لضلعين من أضلاعه. .....

٤ سمّ مثلثًا يكون جـ ، د منتصفين لضلعين من أضلاعه. .....

.....

حل

٥ مستخدمًا القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث، أوجد العلاقة بين $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{و ق}}$ وبين $\overline{\text{د جـ}}$ ، $\overline{\text{و ق}}$.

.....

.....

٦ استنتج علاقة بين $\overline{\text{أ ب}}$ ،$\overline{\text{د جـ}}$ . .....

٧ حدد نوع الشكل الرباعي أ ب جـ د . .....

تحقق

٨ تحقق من النتيجة مستخدمًا الضلعين الآخرين (أي $\overline{\text{جـ ب}}$ ، $\overline{\text{د أ}}$) من الشكل الرباعي أ ب جـ د . .....

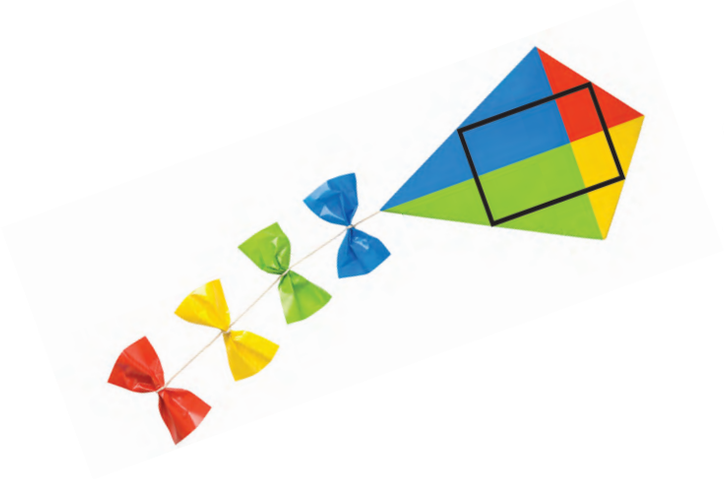
.....

حل مسألة أخرى

٩ في المعين ق ف و هـ منتصفات الأضلاع هي: أ ، ب ، جـ ، د. حدد نوع الشكل الرباعي أ ب جـ د.

.....

حل المسائل والتفكير المنطقي



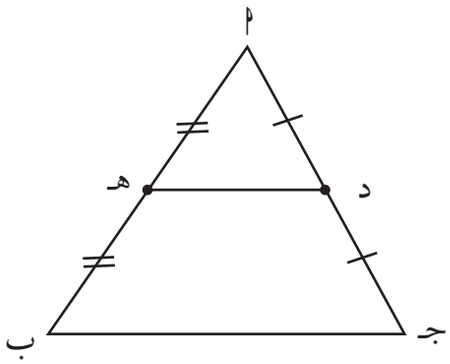
١ **التصميم**: يصمم ناصر طائرة ورقية يخطّط فيها لاستخدام شرائط للزينة لوصل منتصفات أضلاع الطائرة ببعضها. يبلغ طول كل من قطري الطائرة ٦٤ سم ، ٩٠ سم. أوجد طول شريط الزينة المستخدم.

.....

٢ مستخدمًا الرسم المقابل:

(أ) أوجد جـ ب إذا كانت د هـ = ٧ سم.

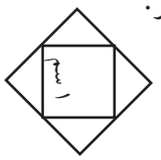
(ب) أوجد محيط المثلث ﺃ د هـ إذا كانت ﺃ ب = ١٠ سم ، ﺃ جـ = ١٣ سم.



.....

.....

٣ **أنماط**: رؤوس المربع الأصغر في الشكل المقابل هي منتصفات أضلاع المربع الأكبر.



(أ) أوجد طول ضلع المربع الكبير.

(ب) إذا رسمت مربعًا صغيرًا إضافيًّا، فكم سيكون طول ضلع المربع الأصغر.

.....

.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- كون جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٣-٧

القطعة المستقيمة الواصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر

The Segment Joining the Vertex of Right Angle to the Midpoint of the Hypotenuse

سوف تتعلم

- تحديد خواص القطعة المستقيمة التي تصل رأس زاوية قائمة بمنتصف الوتر.

من الاستخدامات

- يستخدم المهندسون قانون القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة في مثلث إلى منتصف الوتر لمعرفة طول الدعائم الحديدية المستخدمة في الجسور.

تذكر

بعض خواص المثلث المتطابق الضلعين :

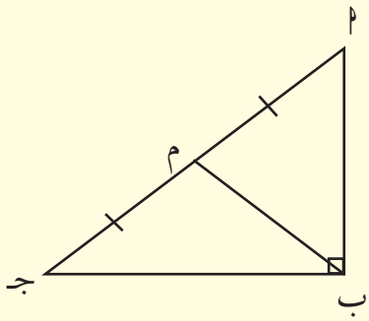
- فيه ضلعان متطابقان
- زاويتا قاعدة المثلث لهما القياس نفسه.
- منصف زاوية الرأس ينصف القاعدة ويكون عموديًّا عليها.

◄ صلة الدرس تعرفت في السابق القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث . في هذا الدرس، سوف تتعرف خصائص القطعة المستقيمة التي تصل رأس زاوية قائمة بمنتصف الوتر.►

استكشف من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر

الأدوات المستخدمة: مسطرة.

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في «ب» ، و «م» منتصف الوتر.



١ نأخذ نقطة د ∈ $\overleftarrow{ب م}$ بحيث تكون «م» منتصف $\overline{ب د}$.

٢ ارسم $\overline{أ د}$ ، $\overline{جـ د}$.

٣ ما نوع الشكل الرباعي أ ب جـ د ؟

٤ ماذا تستنتج بالنسبة إلى طولي قطري الرباعي أ ب جـ د؟

٥ ماذا تستنتج بالنسبة إلى طول القطعة المستقيمة التي تصل رأس الزاوية القائمة بمنتصف الوتر؟

تعلم القطعة الواصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر

نظرية (٢)

طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر في المثلث قائم الزاوية تساوي نصف طول الوتر.

المعطيات: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ، د منتصف $\overline{ب جـ}$.

$\overline{أ د}$ قطعة مستقيمة واصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر $\overline{ب جـ}$.

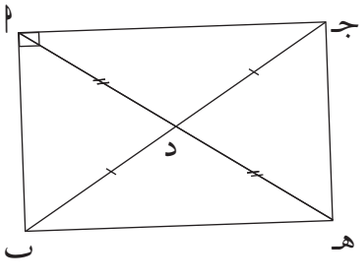
المطلوب: إثبات أن أ د = $\frac{١}{٢}$ ب جـ.

العمل: نأخذ على امتداد $\overleftarrow{أ د}$ النقطة هـ حيث $\overline{د هـ} \cong \overline{أ د}$.

نصل جـ مع هـ ثم ب مع هـ .

البرهان: ∵ د جـ = د ب (معطى)

د أ = د هـ (عملًا)



∴ الشكل الرباعي ا ب هـ جـ متوازي أضلاع (القطران ينصف كلًّا منهما الآخر).

ا ب هـ جـ مستطيل (متوازي أضلاع يتضمن زاوية قائمة).

ا هـ = ب جـ (تساوي القطرين في المستطيل).

∵ ا د = $\frac{1}{2}$ ا هـ

∴ ا د = $\frac{1}{2}$ ب جـ (وهو المطلوب)

مثال (١)

ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، ق ($\hat{ا}$) = ٦٠°،

د منتصف $\overline{ا جـ}$. أثبت أن: ا ب د مثلث متطابق الأضلاع، وأن ا ب = $\frac{1}{2}$ ا جـ .

تذكر

ا ب جـ مثلث متطابق الضلعين رأسه ا :

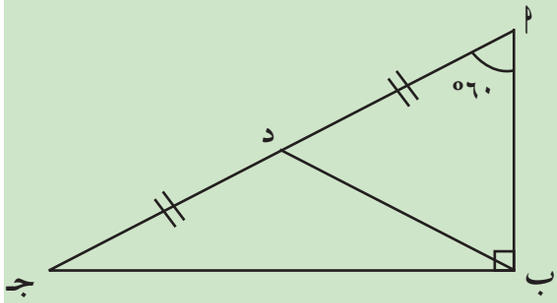
ا ب = ا جـ

ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{جـ}$)

المعطيات: ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب.

ق ($\hat{ا}$) = ٦٠°، د نقطة منتصف $\overline{ا جـ}$.

المطلوب: إثبات أن المثلث ا ب د متطابق الأضلاع وأن ا ب = $\frac{1}{2}$ ا جـ



البرهان: ∵ ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، د منتصف $\overline{ا جـ}$.

∴ ب د = $\frac{1}{2}$ ا جـ (نظرية)

ب د = د ا = د جـ (د منتصف $\overline{ا جـ}$)

ب د ا مثلث متطابق الضلعين (د ب = د ا)

ق ($\hat{ا}$) = ق ($\hat{ا ب د}$) = ٦٠° (الزوايا في القاعدة متساوية القياس)

ق ($\hat{ب د ا}$) = ١٨٠° − (٦٠° + ٦٠°) (مجموع زوايا المثلث ١٨٠°)

ق ($\hat{ب د ا}$) = ٦٠°

∴ المثلث ا ب د متطابق الأضلاع.

∴ ا ب = $\frac{1}{2}$ ا جـ .

حاول أن تحل

١ أوجد ق ($\hat{جـ}$) في المثال (١).

نتيجة (١)

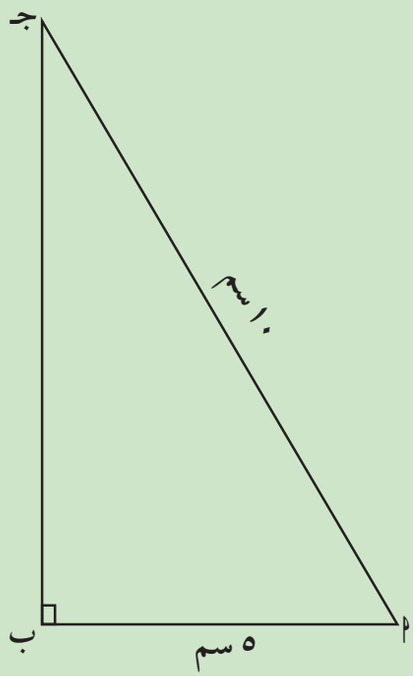
إذا كان في المثلث القائم الزاوية طول أحد ضلعي القائمة مساويًا نصف طول الوتر، فإن قياس الزاوية المقابلة لهذا الضلع ٣٠° ويسمّى المثلث ثلاثينيًّا ستينيًّا.

مثال (٢)

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب .

أ ب = ٥سم، أ جـ = ١٠ سم.

أوجد ق(جَ) .



المعطيات: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب .

أ ب = ٥ سم، أ جـ = ١٠ سم.

المطلوب: إيجاد ق(جَ) .

البرهان:

∵ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب (معطى)

∵ أ ب = ٥ سم ، أ جـ = ١٠ سم (معطى)

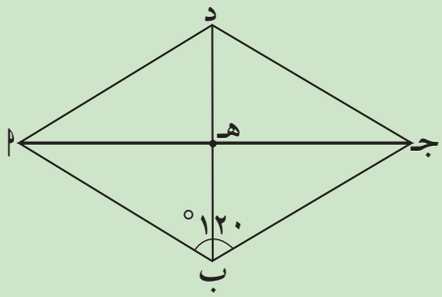
∴ أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ جـ (طول أحد ضلعي القائمة ($\overline{أ ب}$) يساوي نصف طول الوتر)

∴ ق(جَ) = ٣٠° (نتيجة ١)

حاول أن تحل

٢ يبيّن الرسم معينًا، حيث ق(بَ) = ١٢٠°.

كم مثلثًا ثلاثينيًّا ستينيًّا في الرسم؟



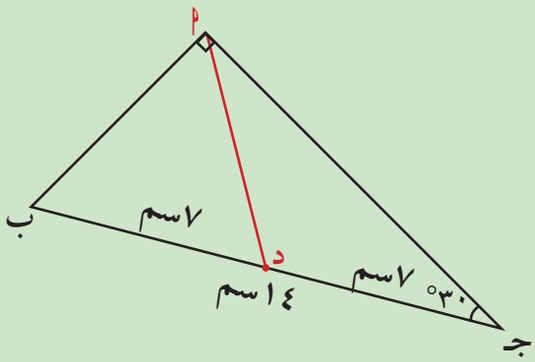
مثال (٣)

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ.

ب جـ = ١٤ سم.

ق(جـ) = ٣٠°.

أثبت أن: ب أ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ.



المعطيات: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ.

ق(جـ) = ٣٠°، جـ ب = ١٤ سم

المطلوب: إثبات أن ب أ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ.

العمل: نأخذ د منتصف $\overline{ب جـ}$، نرسم $\overline{أ د}$.

البرهان: ∵ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ (معطى)

د منتصف $\overline{ب جـ}$ (عملًا)

∴ أ د = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٤ = ٧ سم (نظرية (٢))

أ د = د ب = د جـ = ٧ سم.

ق(ب) = ١٨٠° − (٩٠° + ٣٠°) = ٦٠° (مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي ١٨٠°)

∵ أ د ب مثلث متطابق الضلعين (أ د = ب د = ٧ سم)

∴ أ د ب مثلث متطابق الأضلاع (قياس إحدى زواياه ٦٠°)

نستنتج أن أ ب = ب د = د أ = ٧ سم

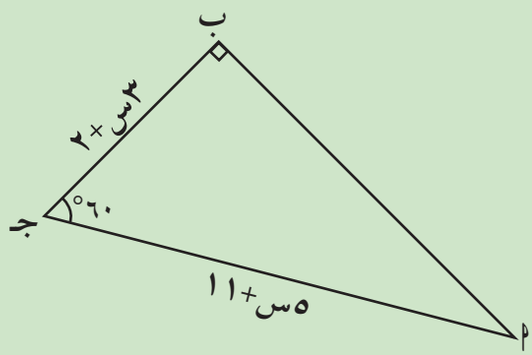
وبالتالي أ ب = $\frac{١}{٢}$ ب جـ.

نتيجة (٢)

في المثلث الثلاثيني الستيني يكون طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠° مساويًا نصف طول الوتر.

حاول أن تحل

٣ في الرسم المقابل، أوجد قيمة س.



مثال (٤)

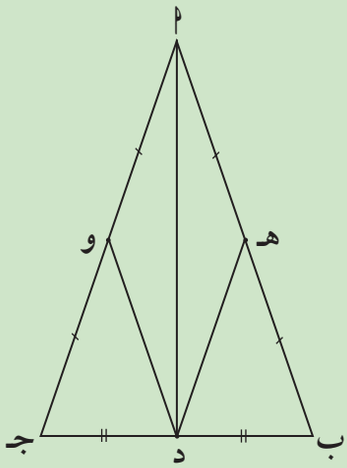
في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين ورأسه أ.

هـ نقطة منتصف $\overline{أ ب}$.

و نقطة منتصف $\overline{أ جـ}$.

د نقطة منتصف $\overline{ب جـ}$.

أثبت أن الشكل الرباعي أ هـ د و معين .



المعطيات: أ ب = أ جـ

هـ منتصف $\overline{أ ب}$ ؛ و منتصف $\overline{أ جـ}$

د منتصف $\overline{ب جـ}$.

المطلوب: إثبات أن الشكل الرباعي أ هـ د و معين.

البرهان: ∵ أ ب = أ جـ ، د منتصف $\overline{ب جـ}$ (معطى)

∴ أ د ب مثلث قائم الزاوية في د (خواص المثلث متطابق الضلعين)

هـ منتصف $\overline{أ ب}$ (معطى)

د هـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب نظرية (٢)

∴ د هـ = هـ ب = هـ أ (١)

وبالمثل في المثلث أ د جـ

د و = $\frac{١}{٢}$ أ جـ نظرية (٢)

∴ د و = و جـ = و أ (٢)

ولكن أ هـ = هـ ب = أ و = و جـ (معطى)

من (١)، (٢) نستنتج أن:

أ هـ = هـ د = د و = و أ

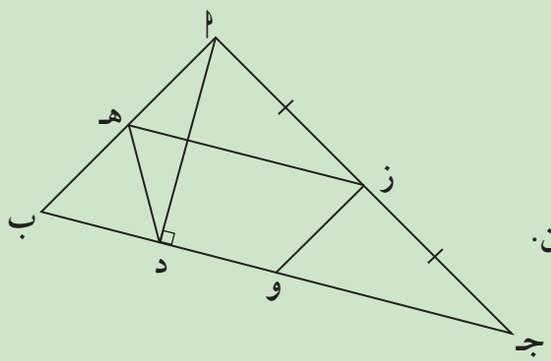
∴ يكون أ هـ د و معينًا.

حاول أن تحل

٤ أ ب جـ مثلث، $\overline{أ د} \perp \overline{ب جـ}$.

هـ ، و، ز منتصفات $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـ أ}$ على الترتيب.

أثبت أن الشكل الرباعي هـ ز و د شبه منحرف متطابق الضلعين.



تحقق من فهمك

١ إذا كانت القطعة المستقيمة الواصلة من رأس مثلث إلى منتصف الضلع المقابل تساوي نصف طول هذا الضلع، فهل يكون المثلث قائم الزاوية؟ اشرح إجابتك.

٢ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية ب. هـ منتصف $\overline{ب جـ}$ ، و منتصف $\overline{أ ب}$. $\overline{ب د}$ العمود المرسوم من ب إلى الضلع المقابل $\overline{أ جـ}$. أكمل: د هـ + د و = ... (جـ ب + أ ب)

حل المسائل والتفكير المنطقي

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- كون جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

١ ما نسبة طول القطعة المرسومة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر في المثلث القائم الزاوية إلى طول الوتر؟

.....

.....

٢ طول أحد ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية ٦ سم، وطول ضلعها الآخر ٨ سم. أوجد طول القطعة المرسومة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر.

.....

.....

٣ مثلث قائم الزاوية طول أحد ضلعي القائمة ٦ سم، وطول القطعة الواصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر ٦ سم أيضًا. احسب طول الوتر لهذا المثلث.

.....

.....

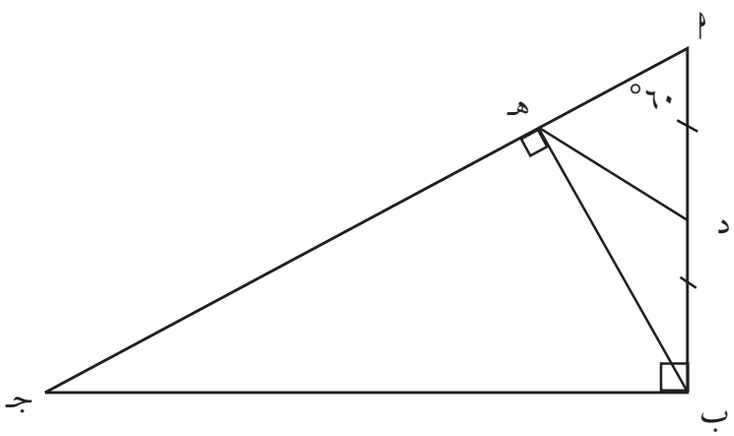
٤ مستخدمًا الرسم أدناه، حدد أي العبارات التالية خطأ.

(أ) أ هـ = هـ د

(ب) أ د = $\frac{١}{٤}$ أ جـ

(جـ) أ ب = $\frac{١}{٢}$ ب جـ

(د) هـ ب = $\frac{١}{٢}$ ب جـ



٧–٤

محاور أضلاع المثلث
Perpendicular Bisectors of a Triangle

سوف تتعلم

- إيجاد خصائص محاور أضلاع المثلث.

من الاستخدامات

- تستخدم خاصية تقاطع محاور أضلاع المثلث في نقطة واحدة في مجالات هندسة الديكور.

المصطلحات الأساسية

◄ محور القطعة المستقيمة
Perpendicular Bisector

◄ **صلة الدرس** تعرفت في السابق منتصفات الأضلاع. في هذا الدرس ستتعرف محاور الأضلاع. ►

استكشف — محاور أضلاع المثلث

الأدوات المستخدمة: مقص.

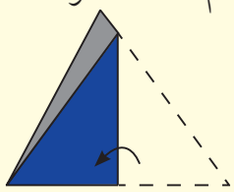
١ ارسم مثلثين أحدهما قائم الزاوية والآخر حاد الزوايا، ثم قصهما.

٢ اطو المثلث حاد الزوايا بحيث ينطبق رأسين من المثلث في كل مرة، وتتشكل فيه المنصفات العمودية (محاور) لكل ضلع. ماذا تلاحظ؟

٣ أعد الخطوة ٢ مع المثلث قائم الزاوية.

٤ ارسم مثلثًا منفرج الزاوية في وسط الورقة (لا تقصها)، ثم أعد الخطوة ٢. ماذا تلاحظ؟

٥ اذكر خاصية للمحاور في المثلث.

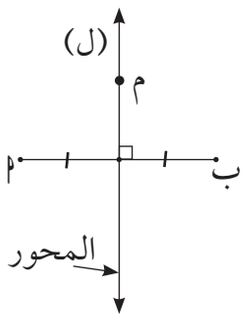


طي محور

تعلم — محاور أضلاع المثلث تتلاقى في نقطة واحدة

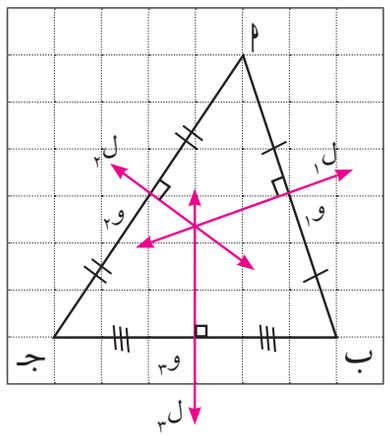
إن محور القطعة المستقيمة هو العمود المنصف لها.

فمثلاً في الشكل: المستقيم ل محور $\overline{أب}$.



خاصية: أي نقطة تنتمي إلى محور قطعة مستقيمة تقع على بعدين متساويين من طرفيها.

في الشكل المقابل م أ = م ب.



نظرية (٣)

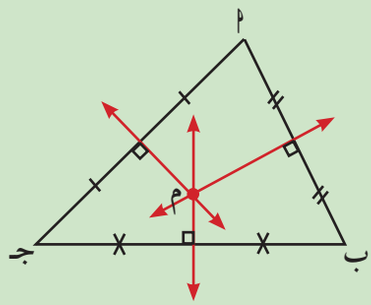
محاور الأضلاع الثلاثة في المثلث تتلاقى في نقطة واحدة.

مثال (١)

عيّن نقطة تلاقي محاور أضلاع مثلث:

(أ) حاد الزوايا **(ب) منفرج الزاوية** **(جـ) قائم الزاوية.**

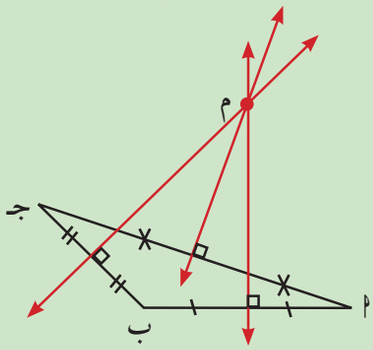
(أ) مثلث حاد الزوايا



مثلث حاد الزوايا

تقع «م» نقطة تلاقي محاور الأضلاع الثلاثة داخل المثلث.

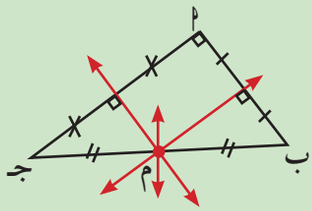
(ب) مثلث منفرج الزاوية



مثلث منفرج الزاوية في ب

تقع «م» نقطة تقاطع محاور الأضلاع الثلاثة خارج المثلث.

(جـ) مثلث قائم الزاوية



مثلث قائم الزاوية في أ

تقع «م» نقطة تقاطع محاور الأضلاع الثلاثة في منتصف الوتر $\overline{ب جـ}$

حاول أن تحل

١ **ارسم محاور الأضلاع في مثلث متطابق الأضلاع، وحدد في أي نقطة من المثلث يمر كل محور.**

نتيجة (٣)

نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث تقع على أبعاد متساوية من رؤوسه.

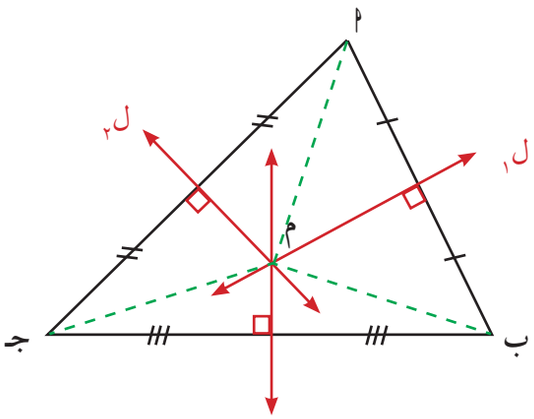
لتكن م نقطة تلاقي محاور أضلاع المثلث أ ب جـ .

لاحظ:

∵ المستقيم $ل_1$ محور $\overline{أ ب}$ ∴ م أ = م ب (١)

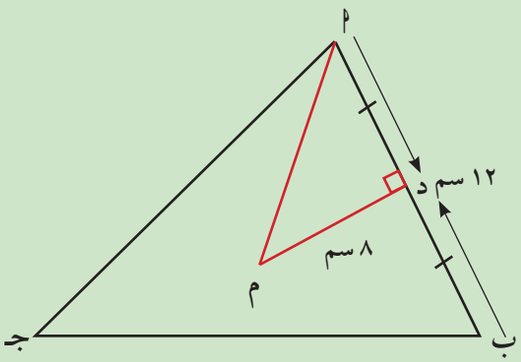
∵ المستقيم $ل_2$ محور $\overline{أ جـ}$ ∴ م أ = م جـ (٢)

من (١)، (٢) نستنتج م أ = م ب = م جـ .



مثال (٢)

أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ١٢ سم. د منتصف $\overline{ب أ}$،
م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث، م د = ٨ سم. أوجد م أ.



المعطيات: أ ب = ١٢ سم

د منتصف $\overline{أ ب}$

م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث.

م د = ٨ سم

المطلوب: إيجاد طول $\overline{م أ}$.

البرهان: أ د = د ب = $\frac{١}{٢}$ أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ = ٦ سم (د منتصف $\overline{أ ب}$)

م د = ٨ سم (معطى)

أ د م مثلث قائم الزاوية في د ($\overleftrightarrow{د م}$ محور $\overline{أ ب}$)

(م أ)^{٢} = (م د)^{٢} + (أ د)^{٢} (نظرية فيثاغورث)

(م أ)^{٢} = (٨)^{٢} + (٦)^{٢} (بالتعويض)

(م أ)^{٢} = ١٠٠ (بالتبسيط)

م أ = ١٠

∴ م أ = ١٠ سم

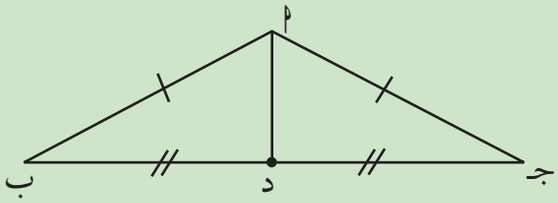
حاول أن تحل

٢ أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين فيه:

أ ب = أ جـ = ١٠ سم، ق(ب أ جـ) = ١٢٠°.

د نقطة منتصف $\overline{ب جـ}$.

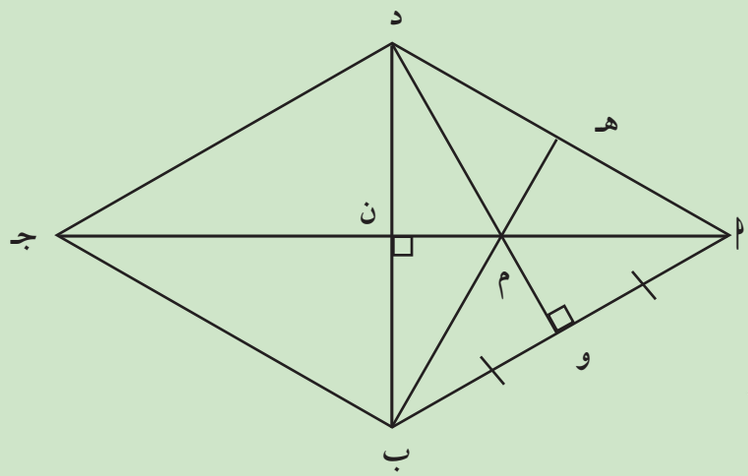
أوجد طول $\overline{أ د}$.



مثال (٣)

في الشكل، أ ب جـ د معين، $\overleftrightarrow{د و}$ محور $\overline{ب أ}$.

أثبت أن $\overleftrightarrow{ب هـ}$ محور $\overline{أ د}$.



الحل:

المعطيات: أ ب جـ د معين، $\overleftrightarrow{د و}$ محور $\overline{ب أ}$.

المطلوب: إثبات أن $\overleftrightarrow{ب هـ}$ محور $\overline{أ د}$.

البرهان: ∵ أ ب جـ د معين،

∴ القطران $\overline{أ جـ}$، $\overline{ب د}$ متعامدان وكل منهما ينصف الآخر.

∴ $\overleftrightarrow{أ ن}$ محور $\overline{ب د}$.

∵ $\overleftrightarrow{دو}$ محور $\overline{أب}$ (معطى)

∵ $\overleftrightarrow{أن} \cap \overleftrightarrow{دو} = \{م\}$

∴ $\overleftrightarrow{بهـ}$ محور $\overline{أد}$ نظرية (٣)

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، تمر محاور أضلاع المثلث أ ب د الثلاثة في رؤوس المثلث. ما نوع المثلث أ ب د؟ فسر.

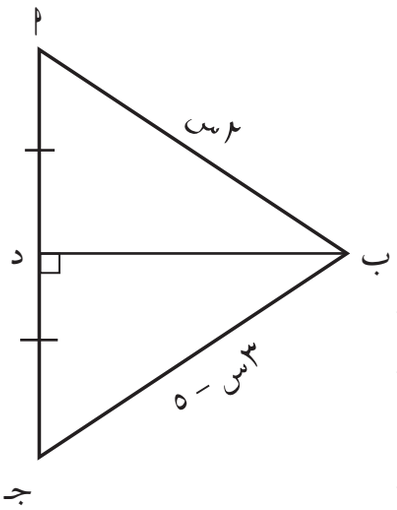
تحقق من فهمك

١ في المثلث المتطابق الضلعين، واحد فقط من محاور الأضلاع يمر برأس مقابل لهذا الضلع، حدد هذا المحور واذكر السبب.

٢ إذا وجدت نقطة متساوية البعد عن الرؤوس الثلاثة لمثلث، فهل تكون نقطة تقاطع محاور الأضلاع الثلاثة لهذا المثلث؟ اشرح إجابتك.

حل المسائل والتفكير المنطقي

مستخدمًا الرسم المقابل:



١ حدد نوع المثلث أ ب جـ .

.....

.....

٢ أوجد طول $\overline{أب}$ ، $\overline{ب جـ}$.

.....

.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- كون جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٣ أرادت وزارة التربية بناء مدرسة تقع على البعد نفسه بين ثلاثة أحياء ليست على استقامة واحدة. ساعد الوزارة في إيجاد هذا الموقع المناسب .

.....

.....

.....

.....

٧-٥

منصفات الزوايا الداخلية للمثلث
Interior Angle Bisectors of a Triangle

سوف تتعلم

- أن منصفات الزوايا الداخلية للمثلث تتلاقى في نقطة واحدة.
- أن نقطة تلاقي المنصفات هي على أبعاد متساوية من أضلاع المثلث.

من الاستخدامات

- يستخدم مهندسو الميكانيك خاصية منصفات الزوايا للمحافظة على توازن الأجسام.

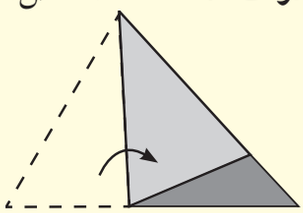
المصطلحات الأساسية

◄ منصفات الزوايا
Angle Bisectors

◄ **صلة الدرس** تعرفت في السابق على منصفات الزوايا. في هذا الدرس سوف تتعرف خاصية تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث في نقطة واحدة. ►

استكشف منصفات الزوايا الداخلية في المثلث

الأدوات المستخدمة: مقص.



طي منصف الزاوية

١ ارسم ثلاثة مثلثات (قائم الزاوية، حاد الزوايا، منفرج الزاوية) بقياس كبير لطيِّهما بشكل أفضل ثم قصهما.

٢ اطو المثلث حاد الزوايا بشكل تتكون فيه منصفات الزوايا. ماذا تلاحظ؟

٣ أعد الخطوة ٢ مع المثلثين الآخرين. ماذا تلاحظ؟

٤ اذكر خاصية لمنصفات الزوايا الداخلية للمثلث مستخدمًا (٢) ، (٣).

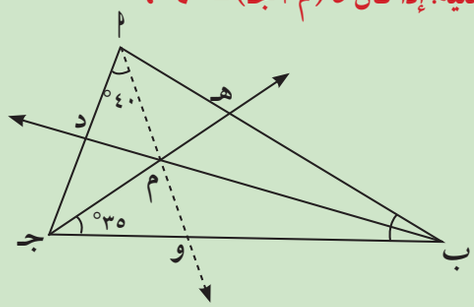
تعلم تتلاقى منصفات الزوايا الداخلية للمثلث في نقطة واحدة

نظرية (٤) منصفات الزوايا الداخلية للمثلث تتلاقى في نقطة واحدة.

مثال (١)

أ ب جـ مثلث، م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية. إذا كان ق(م $\hat{أ}$ جـ) = ٤٠°، ق(ب $\hat{جـ}$ م) = ٣٥°.

أوجد: (١) ق(م $\hat{ب}$ أ) (٢) ق(ب $\hat{م}$ جـ).



المعطيات: $\overleftarrow{أ م}$ منصف داخلي للزاوية أ.
$\overleftarrow{ب م}$ منصف داخلي للزاوية ب.
$\overleftarrow{جـ م}$ منصف داخلي للزاوية جـ.
م نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث أ ب جـ.

ق(م $\hat{أ}$ جـ) = ٤٠°

ق(ب $\hat{جـ}$ م) = ٣٥°

المطلوب: إيجاد (١) ق(م $\hat{ب}$ أ) ؛ (٢) ق(ب $\hat{م}$ جـ)

البرهان: (١) ق($\hat{أ}$) = ٢ ق(م $\hat{أ}$ جـ) = ٢ × ٤٠° = ٨٠° ($\overleftarrow{أ م}$ منصف داخلي للزاوية أ)

ق($\hat{جـ}$) = ٢ ق(ب $\hat{جـ}$ م) = ٢ × ٣٥° = ٧٠° ($\overleftarrow{جـ م}$ منصف داخلي للزاوية جـ)

ق($\hat{ب}$) = ١٨٠° − (٨٠° + ٧٠°) = ٣٠° (مجموع قياس زوايا المثلث ١٨٠°)

ق(م $\hat{ب}$ أ) = $\frac{١}{٢}$ ق($\hat{ب}$) = $\frac{١}{٢}$ × ٣٠ = ١٥° ($\overleftarrow{ب م}$ منصف داخلي للزاوية ب)

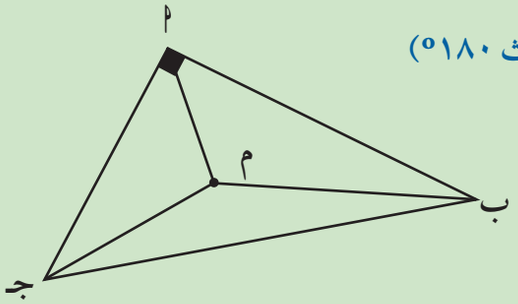
∴ ق(م $\hat{ب}$ أ) = ١٥°

(٢) ق(م بَ جـ) = ق(م بَ أ) = ٥١٥°

في المثلث م ب جـ نجد:

ق(بَ مَ جـ) = ١٨٠° − (٣٥° + ١٥°) = ١٣٠° (مجموع قياس زوايا المثلث ١٨٠°)

∴ ق(بَ مَ جـ) = ١٣٠°.



حاول أن تحل

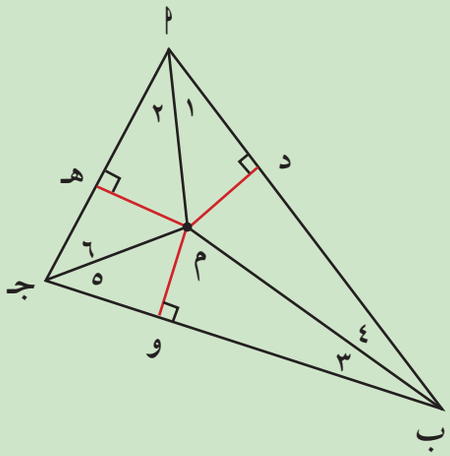
١ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ، م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية.
أوجد ق (بَ مَ جـ) .

مثال (٢)

أ ب جـ مثلث، $\overleftarrow{أم}$ ، $\overleftarrow{بم}$ ، $\overleftarrow{جـم}$ ثلاثة منصفات داخلية لزواياه الثلاث تتقاطع في نقطة م.

$\overline{م د} \perp \overline{أ ب}$ ، $\overline{م هـ} \perp \overline{أ جـ}$ ، $\overline{م و} \perp \overline{ب جـ}$.

أثبت أن م د = م هـ = م و.



المعطيات: $\overleftarrow{أم}$ منصف داخلي للزاوية أ.

$\overleftarrow{بم}$ منصف داخلي للزاوية ب .

$\overleftarrow{جـم}$ منصف داخلي للزاوية جـ.

م نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث.

$\overline{م د} \perp \overline{أ ب}$؛ $\overline{م هـ} \perp \overline{أ جـ}$؛ $\overline{م و} \perp \overline{ب جـ}$.

المطلوب: إثبات أن م د = م هـ = م و.

البرهان: نأخذ المثلثين: أ د م، أ هـ م.

ق(أ١) = ق(أ٢) ($\overleftarrow{أم}$ منصف داخلي للزاوية أ)

$\overline{أ م}$ (ضلع مشترك في المثلثين)

ق(أ دَ م) = ق(أ هـَ م) = ٩٠° (معطى)

لذلك المثلثان: أ د م، أ هـ م متطابقان

ونستنتج أن م د = م هـ. (١)

ثم نأخذ المثلثين: ب د م، ب و م.

وبالطريقة نفسها نثبت أنهما متطابقان ونستنتج أيضًا أن: م د = م و (٢)

من (١) ، (٢) نحصل على: م د = م هـ = م و (المطلوب)

نتيجة (٤) نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث تقع على أبعاد متساوية من أضلاعه الثلاثة. أي م د = م هـ = م و

حاول أن تحل

٢ مستخدمًا الرسم في المثال (٢)، أوجد طول $\overline{م و}$ إذا كان ب م = ١٣ سم، ب د = ١٢ سم.

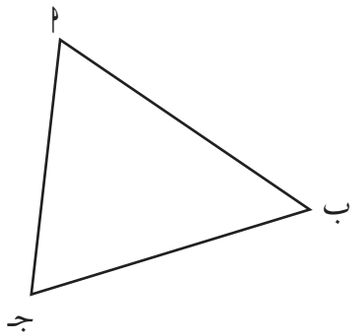
تحقق من فهمك

١ هل نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث متساوية الأبعاد من رؤوسه؟

٢ في رسم المثال (٢)، ماذا تمثل النقطة «م» بالنسبة إلى النقاط د، و، هـ؟

حلّ المسائل
افهم
خطّط
حلّ
تحقّق

ارسم دائرة داخل المثلث ا ب جـ بحيث تكون مماسة لأضلاعه الثلاثة.



افهم

١ ما المطلوب إليك إيجاده؟ .....

٢ هل يمكن للدائرة أن:

(أ) تقطع أحد أضلاع المثلث؟ .....

(ب) تمر بأحد رؤوس المثلث؟ .....

خطط

٣ ما هي الخاصية الأساسية لمركز الدائرة؟ .....

٤ هل تتساوى الأبعاد بين مركز الدائرة والأضلاع الثلاثة؟ .....

.....

٥ ما العلاقة بين هذه الأبعاد وطول نصف قطر الدائرة؟ .....

٦ ما هي النقطة التي تتساوى الأبعاد بينها و بين أضلاع المثلث؟ .....

حل

٧ ارسم منصفي الزاويتين ا، ب ولتكن م نقطة تقاطعهما. .....

.....

٨ ارسم القطعة العمودية $\overline{دم}$ من النقطة م إلى أحد أضلاع المثلث. .....

٩ ارسم الدائرة التي مركزها م وتمر بالنقطة د. .....

تحقق

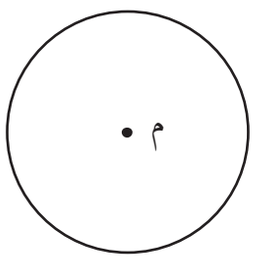
١٠ كيف تتحقق من أن الدائرة المرسومة هي مماسة للأضلاع الثلاثة؟ .....

.....

حل مسألة أخرى

١١ ارسم مثلثًا تتقاطع منصفات زواياه الداخلية في مركز الدائرة المرسومة.

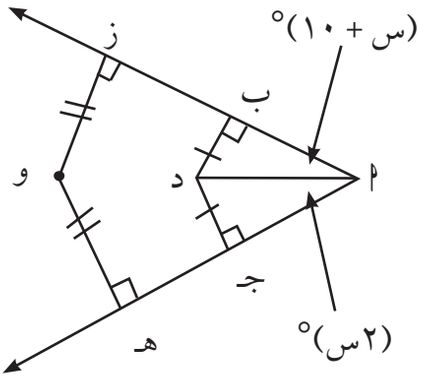
.....



حل المسائل والتفكير المنطقي

١ ارسم ثلاثة مثلثات (قائم الزاوية ، حاد الزوايا، منفرج الزاوية). ثم ارسم منصفات الزوايا الداخلية لكل منها. وحدد موقع نقطة تلاقي منصفات الزوايا.

٢ مستخدمًا الرسم المقابل:



(أ) ماذا تستنتج بالنسبة إلى النقاط أ ، د ، و ؟

.....

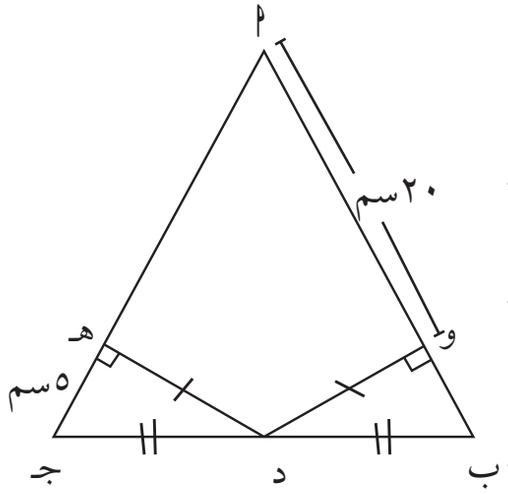
(ب) أوجد س.

.....

(جـ) أوجد ق (هـأز).

.....

٣ مستخدمًا الرسم المقابل:



(أ) أوجد أ ب.

.....

(ب) ماذا تستنتج بالنسبة إلى $\overleftarrow{أد}$ ؟

.....

(جـ) إذا كان ق (هـأد) = ٢٧° ، فأوجد ق (أبَ جـ).

.....

(د) إذا كان ب د = ٨ سم، فأوجد محيط المثلث أ ب جـ.

.....

٤ التحدي: في المثلث أ ب جـ ، $\overleftarrow{أل}$ ، $\overleftarrow{بك}$ ، $\overleftarrow{جع}$ هي على الترتيب منصفات الزوايا (بأجـ) ، (جـ بَ و) ، (ب جَ هـ) . أثبت أن هذه المنصفات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة.

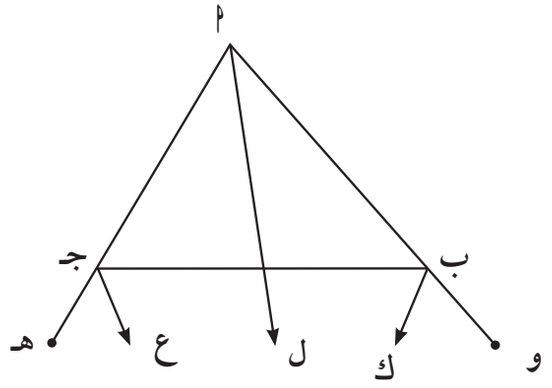
.....

.....

.....

.....

.....



إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- كون جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٦-٧

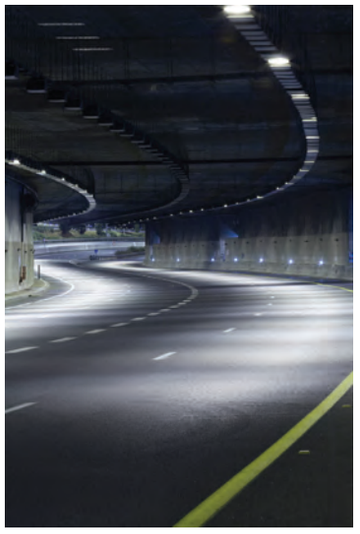
الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه
Altitudes from Vertices of a Triangle to its Sides

سوف تتعلم

- أن الأعمدة المرسومة من رؤوس مثلث على أضلاعه تتلاقى في نقطة واحدة .

من الاستخدامات

- يستخدم مهندسو التنظيم المدني خاصية الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه لمعرفة الطرق المختصرة بين الشوارع في المدن.



المصطلحات الأساسية

◄ الأعمدة
Altitudes

◄ الارتفاع
Height

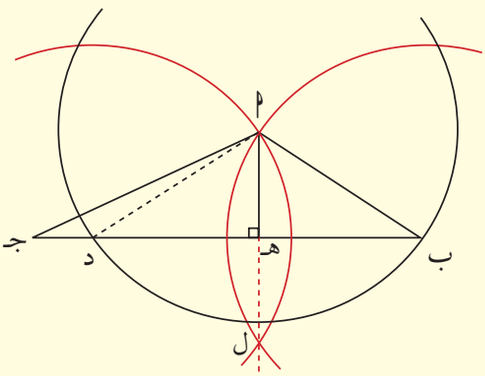
◄ **صلة الدرس** في السابق تعرفت محاور أضلاع المثلث. في هذا الدرس سوف تتعرف الأعمدة المرسومة من رؤوس مثلث على أضلاعه وخاصيتها.►

استكشف الأعمدة المرسومة من رؤوس مثلث على أضلاعه

الأدوات المستخدمة: فرجار، مسطرة.

١ ارسم مثلث أ ب جـ.

٢ ارسم دائرة بواسطة الفرجار مركزها أ وتمر بالنقطة ب. هذه الدائرة تقطع $\overleftrightarrow{ب جـ}$ في نقطة د مختلفة عن ب (انظر الشكل المقابل).



٣ ارسم قوسين من دائرتين مركزهما ب، د ويمران في أ. يتقاطع القوسان في نقطة ثانية ل.

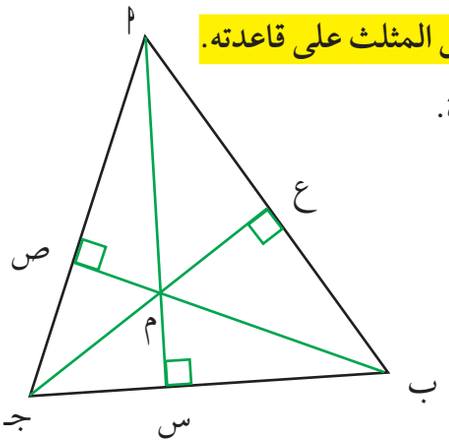
٤ $\overleftrightarrow{أ ل}$ تقطع $\overline{ب جـ}$ في هـ. تحقق من أن $\overline{أ هـ} \perp \overline{ب جـ}$.

٥ نفذ الخطوات (٢)، (٣)، (٤) باستخدام كلّ من الرأسين ب، ج.

٦ ماذا تلاحظ بالنسبة للأعمدة المرسومة؟

تعلم الأعمدة المرسومة من رؤوس مثلث على أضلاعه

ارتفاع المثلث هو طول العمود المرسوم من رأس المثلث على قاعدته.



بما أن للمثلث ثلاثة رؤوس إذًا هناك ثلاثة أعمدة.

المثلث أ ب جـ حاد الزوايا فيه:

$\overline{أ س} \perp \overline{ب جـ}$ ؛ أ س ارتفاع للمثلث.

$\overline{ب ص} \perp \overline{أ جـ}$ ؛ ب ص ارتفاع للمثلث.

$\overline{أ س}$ يقطع $\overline{ب ص}$ في م.

ارسم $\overleftarrow{جـ م}$ بحيث يقطع $\overline{أ ب}$ في ع.

هل $\overline{م ع} \perp \overline{أ ب}$؟ وهل جـ ع ارتفاع للمثلث؟

تحقق من صحة إجابتك باستخدام الأدوات الهندسية.

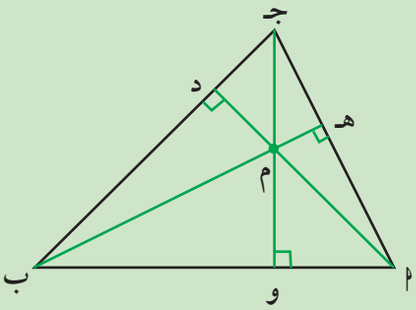
نظرية (٥) الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه تتقاطع في نقطة واحدة.

مثال (١)

أ ب جـ مثلث حاد الزوايا، ك ل ن مثلث منفرج الزاوية، س ص ع مثلث قائم الزاوية.

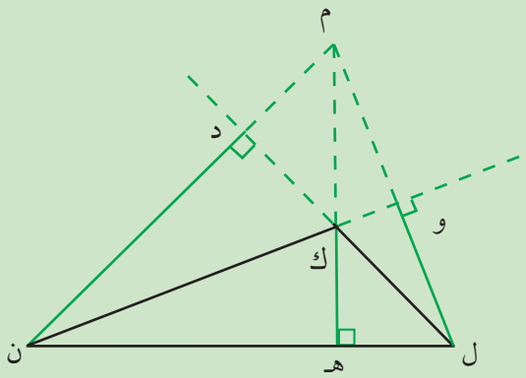
عيّن نقطة تلاقي الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه في كل حالة، وحدد موقعها.

الحل: (أ) أ ب جـ مثلث حاد الزوايا



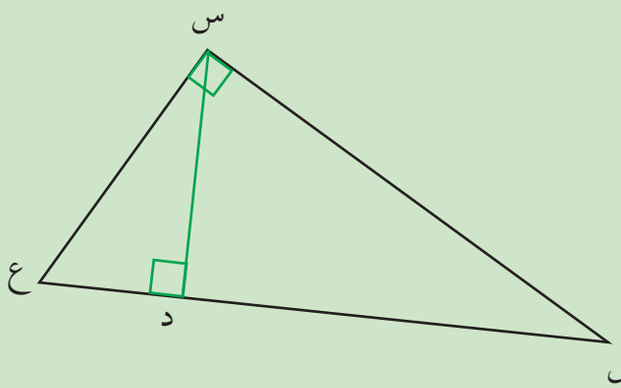
أعمدة المثلث أ ب جـ: $\overline{أد}$، $\overline{بهـ}$، $\overline{جـو}$ تتقاطع في النقطة «م» التي تقع داخل المثلث.

(ب) ك ل ن مثلث منفرج الزاوية



أعمدة المثلث ك ل ن: $\overline{كهـ}$، $\overline{لو}$، $\overline{ند}$ ، تتقاطع في النقطة «م» التي تقع خارج المثلث.

(جـ) س ص ع مثلث قائم الزاوية.



العمود من س على $\overline{صع}$ هو $\overline{سد}$

العمود من ص على $\overline{سع}$ هو $\overline{صس}$

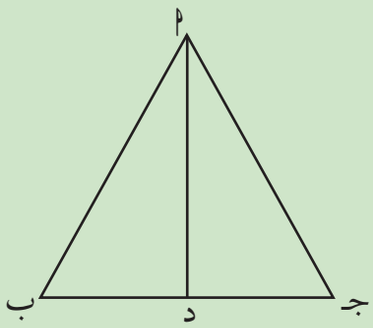
العمود من ع على $\overline{صس}$ هو $\overline{عس}$

وبالتالي الأعمدة الثلاثة في المثلث القائم الزاوية تتقاطع في النقطة س (رأس الزاوية القائمة).

حاول أن تحل

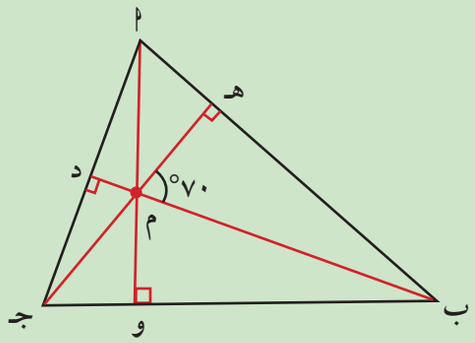
١ أ ب جـ مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ١٠ سم.

أوجد طول $\overline{أد}$ العمود النازل من أ على $\overline{جـب}$.



مثال (٢)

في الشكل المقابل ا ب جـ مثلث. م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه
ق(هـ م̂ ب)= ٧٠°.
أوجد قياس (ب ا̂ جـ).



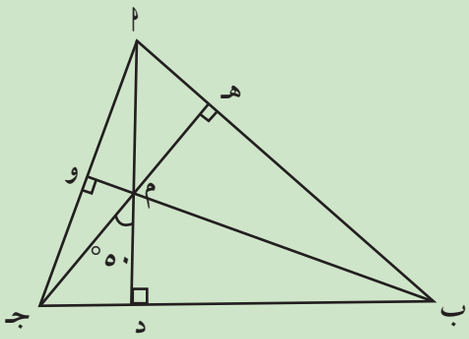
المعطيات: $\overline{ب د} \perp \overline{ا جـ}$
$\overline{جـ هـ} \perp \overline{ا ب}$
$\overline{ا و} \perp \overline{ب جـ}$
ق(هـ م̂ ب) = ٧٠°

المطلوب: إيجاد قياس الزاوية ا.

البرهان: في الشكل الرباعي ا هـ م د: ق(هـ م̂ د) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠° (زاويتان متكاملتان)
ق(ا هـ̂ م) = ق(ا د̂ م) = ٩٠° (معطى)
ق(ب ا̂ جـ) = ٣٦٠° −(٩٠° + ٩٠° + ١١٠°) (مجموع قياس زوايا الشكل الرباعي ٣٦٠°)
ق(ب ا̂ جـ) = ٧٠°

حاول أن تحل

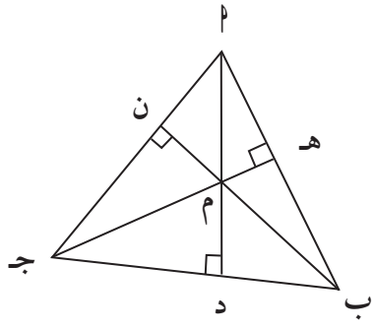
٢ ا ب جـ مثلث.
م نقطة تقاطع الأعمدة $\overline{ا د}$ ، $\overline{ب و}$ ، $\overline{جـ هـ}$ ،
ق(د م̂ جـ) = ٥٠°.
أوجد ق(ا ب̂ جـ) .



تحقق من فهمك

حدد نقطة تلاقي الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه لكل مما يلي، ثم وضح إجاباتك.

١ المثلث ا ب جـ.
٢ المثلث ب م جـ.
٣ المثلث ا د جـ.



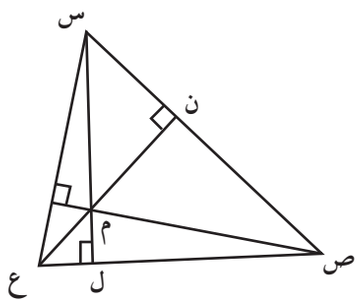
حل المسائل والتفكير المنطقي

١ من الرسم المقابل، حدد المثلث الذي تكون نقطة تلاقي الأعمدة من رؤوسه هي:

(أ) س؟ .....

(ب) م؟ .....

(جـ) ن؟ .....



٢ ∆ أ ب جـ مثلث، $\overline{ب م} \perp \overline{أ جـ}$،

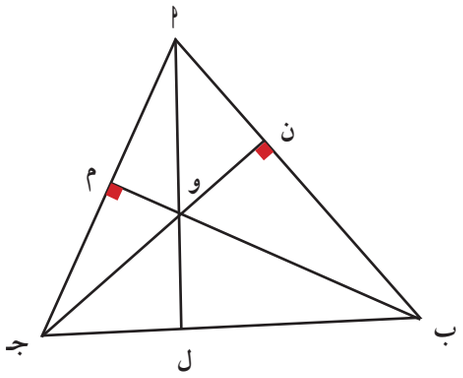
$\overline{جـ ن} \perp \overline{أ ب}$، $\overline{ب م} \cap \overline{جـ ن} = \{و\}$

إذا كان ق (∠ أ جـ ب) = ٥٠°، أوجد ق (∠ ل أ جـ).

.....

.....

.....



٣ ∆ أ ب جـ مثلث، م نقطة تقاطع الأعمدة على أضلاعه، ق (∠ جـ أ ب) = ٣٠° ، ق (∠ أ ب جـ) = ٣٥°. أوجد:

(أ) ق (∠ ب م جـ).

.....

(ب) ق (∠ م ب جـ).

.....

(جـ) ق (∠ ب جـ م).

.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- كون جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٧-٧

القطع المتوسطة للمثلث
Medians of a Triangle

سوف تتعلم

- خواص القطع المتوسطة للمثلث.

من الاستخدامات

- يستخدم رجال الإطفاء خطوطًا متقاطعة للتركيز على أماكن الحريق.

◄ **صلة الدرس** في السابق تعرفت المحاور في المثلث. في هذا الدرس سوف تتعرف القطع المتوسطة للمثلث. ►

استكشف القطع المتوسطة

الأدوات المستخدمة: فرجار، مسطرة.

أ ب جـ مثلث.

١ افتح الفرجار بطول أكبر من نصف طول $\overline{أب}$.

٢ بدون تغيير فتحة الفرجار، من أ ارسم قوسًا في كل جهة من $\overline{أب}$.

٣ بدون تغيير فتحة الفرجار ومن ب ارسم قوسًا في كل جهة من $\overline{أب}$ بحيث تتقاطع الأقواس في ٢ ٣ .

٤ صل نقاط تقاطع الأقواس (هذه القطعة المستقيمة هي محور $\overline{أب}$). سمِّ «م» نقطة تقاطع هذه القطعة مع $\overline{أب}$.

٥ صل جـ ، م. ماذا تمثل القطعة المستقيمة $\overline{جـم}$؟

تعلم القطع المتوسطة للمثلث

القطعة المتوسطة للمثلث هي القطعة المستقيمة التي تصل أي رأس للمثلث بمنتصف الضلع المقابل.

المثلث س ص ع له ثلاثة رؤوس وثلاثة أضلاع،

إذًا له ثلاث قطع متوسطة وهي:

$\overline{ع ل}$، $\overline{ص ك}$، $\overline{س ن}$.

نظرية (٦) القطع المتوسطة للمثلث تتقاطع في نقطة واحدة تقسم كلًّا منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس.

في الشكل المقابل ك ل ق مثلث فيه:

$\overline{ك ن}$ ، $\overline{ق ع}$ ، $\overline{ل ف}$ ثلاث قطع متوسطة تتقاطع في م.

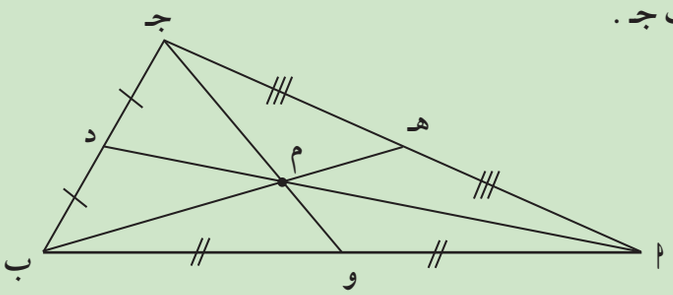
فيكون: $\frac{ك م}{م ن} = \frac{ل م}{م ف} = \frac{ق م}{م ع} = \frac{٢}{١}$

المصطلحات الأساسية

◄ القطعة المتوسطة
Median

في الشكل، $\frac{\text{جـ م}}{\text{جـ و}} = \frac{\text{ب م}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{أ م}}{\text{أ د}} = \frac{٢}{٣}$ ، حيث م نقطة تقاطع القطع المتوسطة في المثلث أ ب جـ .

المعطيات: م هي نقطة تقاطع القطع المتوسطة في المثلث أ ب جـ .



المطلوب: إثبات أن: $\frac{\text{جـ م}}{\text{جـ و}} = \frac{\text{ب م}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{أ م}}{\text{أ د}}$

البرهان: ∵ م نقطة تقاطع القطع المتوسطة في Δ أ ب جـ

∴ $\frac{\text{جـ م}}{\text{م و}} = \frac{٢}{١}$ (نظرية)

جـ م = ٢ م و

جـ و = جـ م + م و (معطى)

م و = $\frac{١}{٢}$ جـ م (نظرية ٦)

جـ و = جـ م + $\frac{١}{٢}$ جـ م (بالتعويض)

جـ و = $\frac{٣}{٢}$ جـ م (بالتبسيط)

أي: $\frac{\text{جـ م}}{\text{جـ و}} = \frac{٢}{٣}$

بالمثل نثبت أن $\frac{\text{ب م}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{أ م}}{\text{أ د}} = \frac{٢}{٣}$

مثال (١)

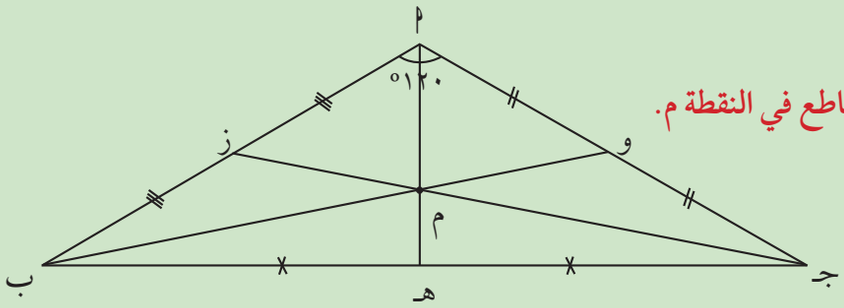
أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين.

أ ب = أ جـ = ٢٤ سم

ق(جـ $\hat{أ}$ ب) = ١٢٠°

متوسطات المثلث أ هـ ، ب و ، جـ ز تتقاطع في النقطة م.

أوجد طول: أ هـ ، م أ ، م هـ .



المعطيات: أ ب = أ جـ = ٢٤ سم

ق(جـ $\hat{أ}$ ب) = ١٢٠°

أ هـ ، ب و ، جـ ز متوسطات في المثلث

المطلوب: إيجاد طول: أ هـ ، م هـ ، م أ .

البرهان: أ هـ متوسط في مثلث متطابق الضلعين حيث رأسه أ لذا يكون أ هـ ⊥ ب جـ

ق(أ $\hat{هـ}$ جـ) = ٩٠° ($\overleftrightarrow{أ هـ}$ محور ب جـ)

ق(جـ $\hat{أ}$ هـ) = ٦٠° ($\overleftarrow{أ هـ}$ منصف الزاوية أ)

ق(أ $\hat{جـ}$ هـ) = ٣٠° (مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°)

∴ المثلث أ هـ جـ ثلاثيني ستيني.

أ هـ = $\frac{١}{٢}$ أ جـ (ضلع مقابل الزاوية ٣٠° في المثلث الثلاثيني الستيني)

أ هـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢٤ (بالتعويض)

أ هـ = ١٢ سم.

$\frac{م أ}{م هـ} = \frac{٢}{١}$ نظرية(٦)

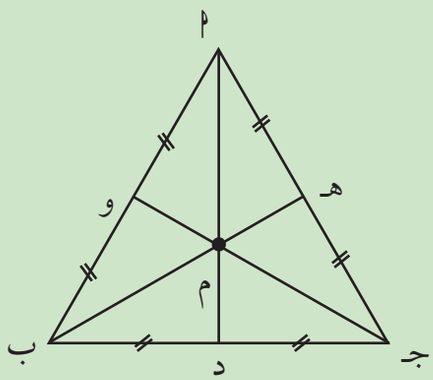
فيكون م أ = $\frac{٢}{٣}$ أ هـ

م أ = $\frac{٢}{٣}$ × ١٢ (بالتعويض)

م أ = ٨ سم

ثم م هـ = ١٢ − ٨ = ٤ سم. أو م هـ = $\frac{١}{٣}$ أ هـ

م هـ = $\frac{١}{٣}$ × ١٢ = ٤ سم



حاول أن تحل

١ أ ب جـ مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه ١٢ سم ، هـ ، د ، و منتصفات أ جـ، جـ ب، أ ب على الترتيب.

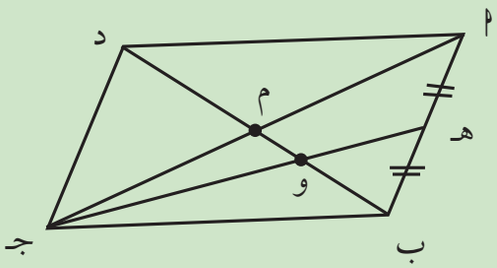
أوجد طول أ د ، م أ ، م د .

مثال (٢)

أ ب جـ د متوازي أضلاع، فيه د ب = ١٨ سم.

يتقاطع قطراه في م. النقطة هـ منتصف $\overline{أ ب}$.

أوجد طول $\overline{ب و}$ ، $\overline{و م}$.



المعطيات: م نقطة تقاطع القطرين في متوازي الأضلاع.

هـ منتصف $\overline{أ ب}$

ب د = ١٨ سم

المطلوب: إيجاد طول $\overline{ب و}$ ، $\overline{م و}$.

البرهان: م ب = م د ، م جـ = م أ (يتقاطع القطران في نقطة منتصف كليهما في متوازي الأضلاع)

$م د = م ب = \frac{١}{٢} \times ١٨$

م ب = ٩ سم (بالتعويض)

$\frac{و ب}{و م} = \frac{٢}{١}$ (نظرية (٦)، حيث إن و نقطة تقاطع القطع المتوسطة في المثلث أ ب جـ)

فيكون و ب = ٦ سم، و م = ٣ سم

حاول أن تحل

٢ في المثال (٢)، أوجد: $\frac{و ب}{و د}$.

تحقق من فهمك

١ ما وجه الاختلاف والتشابه بين القطع المتوسطة والمحاور في المثلث؟

٢ في أي نوع من المثلثات ينطبق محور واحد مع القطعة المتوسطة. فسر؟

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ ا ب جـ د متوازي أضلاع مركزه م.

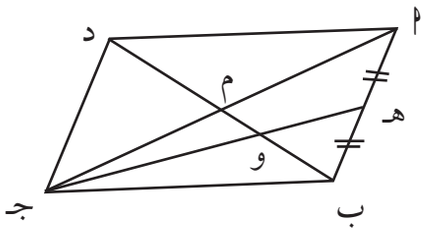
هـ منتصف $\overline{ا ب}$ ، و نقطة تقاطع $\overline{جـ هـ}$ ، $\overline{ب د}$، ب و = ١٠ سم.

أوجد طول $\overline{ب د}$.

.....

.....

.....



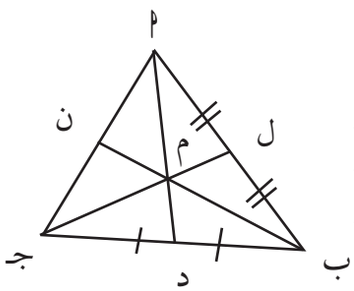
٢ (أ) أوجد «س» إذا كان ا م = ١٥ س، م د = ٥ س + ٣.

(ب) أوجد طول $\overline{ل جـ}$ إذا كان طول $\overline{ل م}$ = ٥٤ سم.

.....

.....

.....



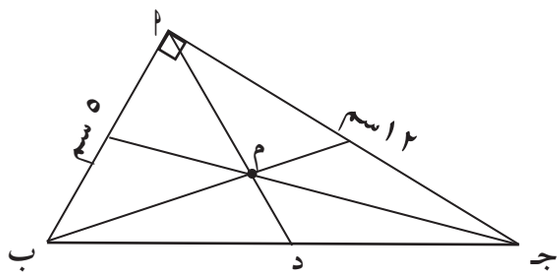
٣ ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ا . م نقطة تقاطع القطع المتوسطة.

أوجد طول كل من $\overline{م د}$ ، $\overline{م ا}$.

.....

.....

.....



إستراتيجيات حل المسائل

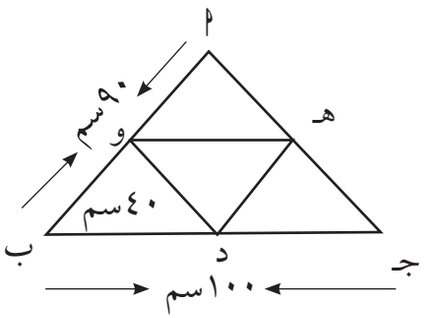
- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- كون جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

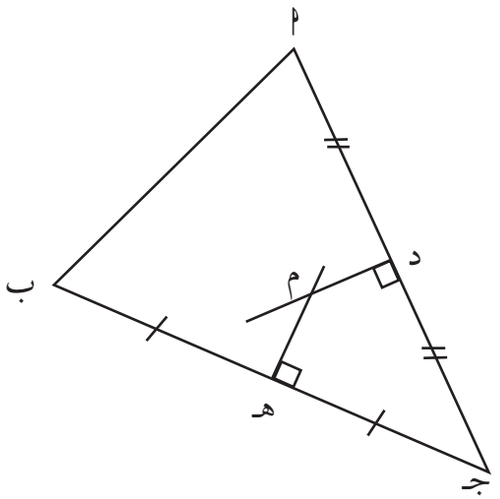
اختبار الوحدة السابعة

١ حدد نوع المثلث أ ب جـ بالنسبة إلى زواياه إذا كان: أ جـ= ٧ سم، أ ب= ٣ سم، ب جـ= ٩ سم.

٢ في الشكل المجاور، المثلث أ ب جـ فيه: هـ، و، د منتصفات الأضلاع.

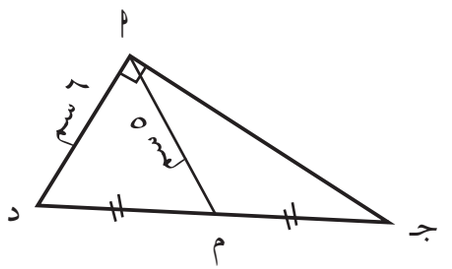
أوجد: هـ و، هـ د، أ جـ.





٣ أوجد طول $\overline{\text{م جـ}}$ في الرسم: إذا كان م هـ = ٦ سم، هـ ب= ١٠ سم.

٤ في الرسم، أوجد طول $\overline{\text{جـ د}}$، طول $\overline{\text{جـ أ}}$.

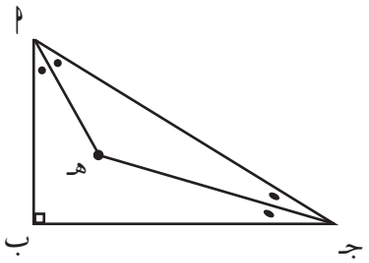


اختبار الوحدة السابعة

٥ ا ب جـ د متوازي أضلاع حيث يتقاطع قطراه في نقطة و.

نأخذ على امتداد $\overleftarrow{جـ ا}$ من جهة ا النقطة هـ بشرط ا هـ = ا جـ .

أثبت أن ا هي نقطة تقاطع القطع المتوسطة في المثلث هـ ب د.



٦ في الشكل المقابل ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب.

يتقاطع منصفا الزاويتين الداخليتين $\hat{ا}$ ، $\hat{جـ}$ في هـ.

أوجد ق (هـ $\hat{ب}$ جـ) .

٧ ا ب جـ مثلث. د نقطة تناظر ا بالنسبة إلى النقطة ب ،

هـ نقطة تناظر ا بالنسبة إلى النقطة جـ . يتقاطع $\overline{د جـ}$ ، $\overline{ب هـ}$ في النقطة م.

عيّن القطع المتوسطة الثلاث في المثلث ا د هـ . اشرح إجابتك.

٨ ا ب جـ مثلث ، د ∈ $\overline{ا ب}$.

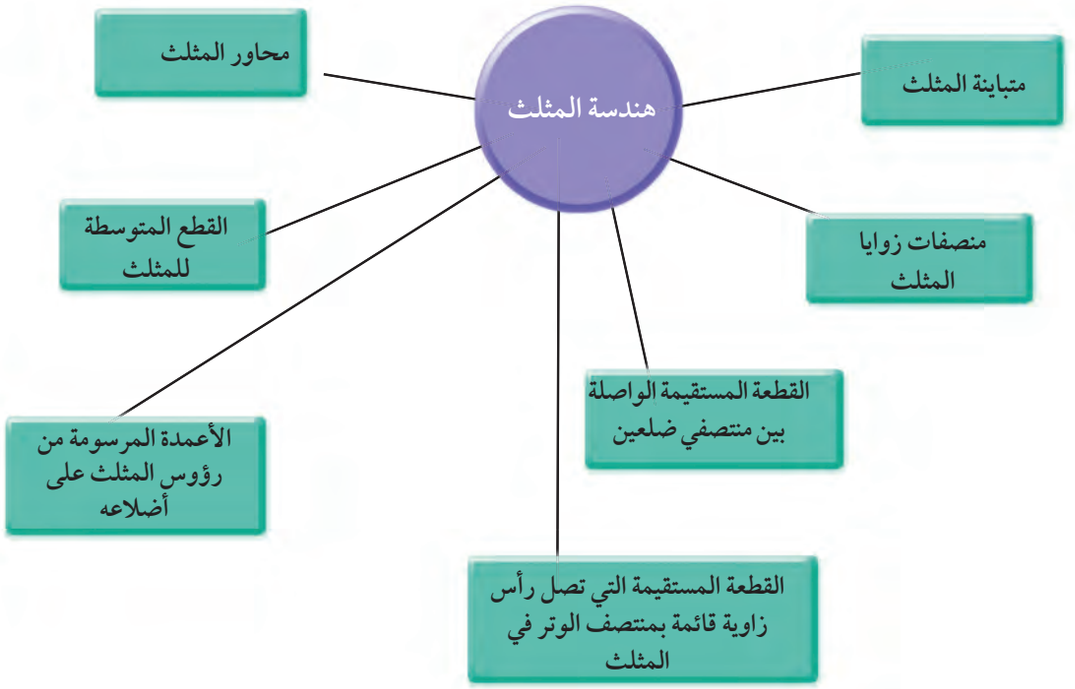
ارسم مستقيمًا موازيًا لِـ $\overline{ب جـ}$ يمر في د ويقطع $\overline{ا جـ}$ في هـ .

تتقاطع منصفات الزوايا (ا $\hat{د}$ هـ) ، (ا $\hat{هـ}$ د) في م.

تتقاطع منصفات الزوايا (ا $\hat{ب}$ جـ) ، (ا $\hat{جـ}$ ب) في ن.

أثبت أن النقاط ا ، م ، ن على مستقيم واحد.

مخطط تنظيمي للوحدة السابعة



ملخص الوحدة السابعة: هندسة المثلث

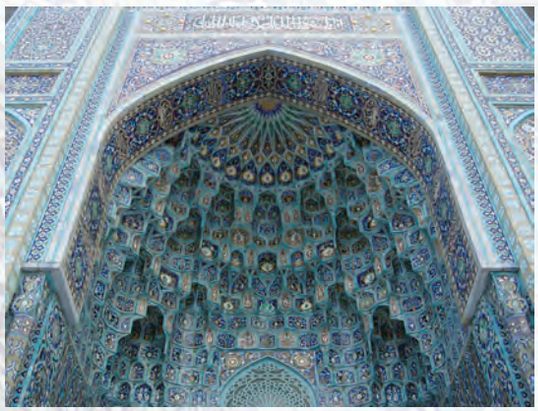
- في المثلث، مجموع طول ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث وهذه الخاصية تسمى متباينة المثلث.
- في المثلث مختلف الأضلاع، تكون الزاوية الأكبر مقابلة للضلع الأكبر.
- إذا لم تتساو زاويتان في مثلث، يكون الضلع الأكبر مقابلًا للزاوية الكبرى.
- إن القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث موازية للضلع الثالث، ويساوي طولها نصف طوله.
- إن طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر.
- في المثلث الثلاثيني الستيني يكون طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠° مساويًا لنصف طول الوتر، والعكس صحيح.
- إن محور القطعة المستقيمة هو العمود المنصف لها، وتتلاقى محاور الأضلاع الثلاثة في المثلث بالنقطة نفسها.
- إن نقطة تقاطع المحاور لأضلاع المثلث هي على أبعاد متساوية من رؤوسه.
- تتلاقى منصفات الزوايا الثلاث الداخلية للمثلث في نقطة واحدة. وتقع نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث على أبعاد متساوية من أضلاعه الثلاثة.
- إن ارتفاع المثلث هو طول العمود المرسوم من رأس المثلث على قاعدته وتتلاقى هذه الأعمدة في النقطة نفسها.
- إن القطعة المتوسطة للمثلث هي القطعة المستقيمة التي تصل أي رأس للمثلث بمنتصف الضلع المقابل. تتقاطع هذه القطع المتوسطة في نقطة واحدة وتقسم نقطة التقاطع هذه القطع المتوسطة بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس.

الوحدة الثامنة

الهندسة
Geometry

الفن

يعبّر الفن الإسلامي عن قيم الثقافة الإسلامية وطريقة نظر المسلمين إلى العالمين الروحي والمادي. تتألف هذه الزخرفة من نمط لأشكال متطابقة ومتشابهة.

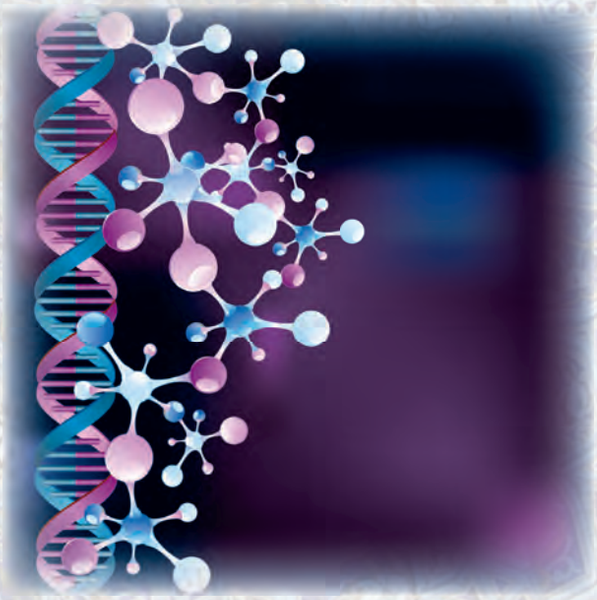


الجغرافيا

ترسم خرائط المدن والبلدان على أساس مقياس رسم صغير يبلغ أحيانًا $\frac{١}{٧٥٠٠٠٠}$. تستطيع إيجاد المسافة بين نقطتين (مدينتين - بلدين) على الخريطة باستخدام مقياس رسم. إذا أردت رسم خارطة للعالم على ورقة قياس ٢٩,٧ سم × ٤٢ سم فإنك بحاجة إلى مقياس رسم ١ إلى مئة مليون وهو مقياس صغير جدًّا.

العلوم

فحص الحمض النووي الوراثي (DNA) هو التكنولوجيا الأكثر تطورًا لمعرفة النسب. يبيِّن هذا الفحص أنماطًا متشابهة ومتطابقة بنسبة ٩٩,٩٪ وأكثر إذا كان الشخصان الخاضعان للفحص مرتبطين بيولوجيًّا، وبنسبة ٠٪ إذا لم يكن الشخصان مرتبطين.



التكنولوجيا

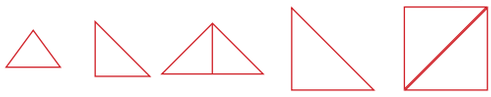
المجهر الإلكتروني هو نوع من المجاهر حيث تصل قوة التكبير فيه إلى ٢ ٠٠٠ ٠٠٠ مرة. تكون قوّة التكبير في المجهر العادي محصورة بـ ٢ ٠٠٠ مرة كحد أقصى وتعطي هذه المجاهر أشكالًا متشابهة ولكن بقياسات مختلفة.

مشروع الوحدة

حل المسائل
افهم
خطط
حل
تحقق

يسمى فن طي الورق عند اليابانيين بالأوريجامي. عند طي الورق بأشكال مختلفة تحصل على أنماط عديدة.

اطو الورقة المربعة كما هو ظاهر في الصورة أدناه أربع مرات.



افتح الورقة بعد كل طية. ما هو عدد المثلثات غير المتراكبة؟ املأ الجدول الآتي:

الطية	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة
عدد المثلثات	٢	–	–	–

اطو الورقة للمرة الخامسة. ما هو عدد المثلثات المؤلفة؟ برأيك كم سيكون عدد المثلثات عند طي الورقة للمرة السادسة؟

مد الجدول أعلاه ليحتوي إجابتك عن السؤال السابق. هل تلاحظ أي نمط؟

أفكار رياضية أساسية

إن المسافة بين نقطتين على مستقيم أفقي هي القيمة المطلقة للفرق بين الإحداثيات السينية لهاتين النقطتين.

لإيجاد المسافة بين نقطتين في مستوٍ، تحسب الجذر التربيعي لمجموع فرق مربع الإحداثيين السينيين مع فرق مربع الإحداثيين الصاديين.

لإيجاد إحداثي منتصف المسافة بين نقطتين، يمكنك جمع الإحداثي السيني للنقطتين والقسمة على ٢ وجمع الإحداثي الصادي للنقطتين والقسمة على ٢، ووضعهم في زوج مرتب.

يمكن استخدام التحويلات الهندسية كالإزاحة والتناظر والدوران للحصول على أشكال مطابقة للأشكال الأصلية.

تحصل على أشكال متشابهة عند استخدام مقاييس مكبرة أو مصغرة.

يمكن أن يكون لبعض الأشكال الهندسية خط تناظر أو تناظر دوراني.

باستخدام التحويلات الهندسية، يمكنك تغطية المستوي بأنماط جميلة.

قراءة المسألة

عندما تخطط لحل الخطوات في المسألة، يجب أن تتأكد من أنك تعرف جميع المعلومات الضرورية لحلها. في بعض الأحيان تفتقد المسألة إلى معلومة (معلومات) مهمة.

التركيز على حل المسائل

عرّف أي معلومات إضافية تحتاج إليها في كل مسألة. إذا كانت كل المعلومات اللازمة متوفرة، فقم بحل المسألة.

١ يريد ثلاثة أصدقاء بناء منزل خشبي صغير. تطوع أحمد لإحضار الخشب. يحتاج إلى ٩ م^{٢} من الخشب للسقف. أما أبعاد كل من الحيطان الأربعة فهي ٣م × ٢م. إلى كم متر مربع من الخشب يحتاج أحمد لإتمام بناء المنزل؟

٢ يريد سالم طلاء قسم من المنزل باللون الأخضر والقسم الآخر باللون الأبيض. سعر علبة الدهان الأخضر هو ديناران. أما سعر علبة الدهان الأبيض ٢,٥٠٠ دينار. كم سيتكلف سالم على طلاء المنزل؟

٣ يريد بلال مد شريط كهربائي من أحد زوايا السطح إلى وسطه. كم مترًا من الشريط سيلزمه علمًا أنه يحتاج إلى ٥ أمتار لتمديدات خارج المنزل؟ (ملاحظة: لا يباع الشريط بكسور الأمتار).

٤ اشترك الأصدقاء الثلاثة في طلاء المنزل. كان أحمد أسرع من سالم بمرتين، وسالم أبطأ من بلال بنسبة ٢٥٪. كم من الوقت استغرق طلاء المنزل؟

الوحدة الثامنة (٢)

الهندسة الإحداثية في المستوي
The Coordinate Plane

باستخدام مقياس الرسم على الخرائط، يمكنك إيجاد المسافة بين أي نقطتين على سطح الأرض. تبيّن الخريطة أعلاه المدن الرئيسية لدولة الكويت.

١ ما هو مقياس الرسم لهذه الخريطة؟

٢ أوجد المسافة التقريبية بين مدينتي الكويت والأحمدي.

٣ تبلغ المسافة بين الدوحة والجهراء نحو ١٣ كم. ما المسافة على الخريطة بين هاتين المدينتين؟

١-٨

المسافة بين نقطتين على محور
Distance Between Two Points on an-Axis

سوف تتعلم

- إيجاد البعد بين نقطتين على محور.

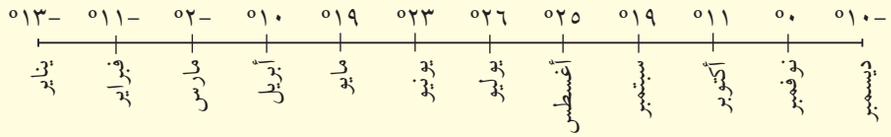
من الاستخدامات

- يستخدم العاملون بالأدوات الصحية البعد بين نقطتين لتحديد قياسات المواسير التي يحتاجون إليها.

◄ صلة الدرس في السابق، تعرفت المستوي الإحداثي. في هذا الدرس، سوف تتعرف البعد بين نقطتين على محور. ►

استكشف التغيّر في درجات الحرارة

في ما يلي معدلات درجة الحرارة (سيليزية °C) خلال أشهر السنة في مدينة وينيبيغ (Winnipeg) في كندا.



١ أوجد التغيّر الحاصل في درجة الحرارة من شهر يناير إلى شهر فبراير.

٢ بين أي شهرين كان التغيّر في درجة الحرارة هو الأكبر؟

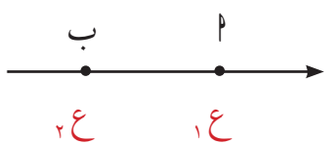
٣ بين أي زوجين من الأشهر المتتالية تساوى التغيّر في درجة الحرارة؟

٤ لإيجاد التغيّر في درجات الحرارة بين شهري أبريل وديسمبر، كانت إجابة سالم: ٢٠ درجة وإجابة إبراهيم −٢٠ درجة. كيف تفسر الفرق بين الإجابتين؟

تعلم المسافة بين نقطتين على محور

تمثّل كل نقطة على خط الأعداد بإحداثيها.

المسافة (البعد) بين نقطتين على خط الأعداد هو القيمة المطلقة للفرق بين إحداثيي هاتين النقطتين.



بالنظر إلى خط الأعداد أعلاه نلاحظ أن:

$$أ ب = |ع_{٢} - ع_{١}|$$

- $أ ب$: طول $\overline{أ ب}$
- $ع_{٢}$: إحداثي النقطة ب
- $ع_{١}$: إحداثي النقطة أ

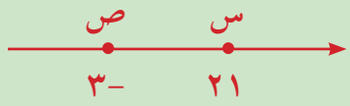
المصطلحات الأساسية

◄ المسافة (البعد)
Distance

◄ القيمة المطلقة
Absolute Value

مثال (١)

(أ) أوجد طول $\overline{س ص}$ إذا كان إحداثي ص هو −٣ وإحداثي س هو ٢١.



الحل:

س ص = |٢١ − (−٣)| = |٢٤| = ٢٤ وحدة طول

(ب) افرض أنك طرحت ٢١ من −٣ في الفقرة "أ". هل تحصل على النتيجة نفسها؟ فسِّر.

الحل:

نعم، |−٣ − ٢١| = |−٢٤| = ٢٤ وحدة طول

|س − ص| = |ص − س|

نلاحظ أن البعد بين ص ، س يساوي البعد بين س، ص.

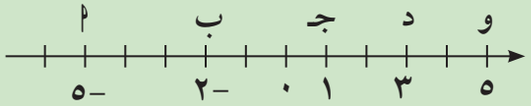
حاول أن تحل

١ أوجد طول $\overline{أ ب}$ إذا كان إحداثي أ هو −٨ وإحداثي ب هو ١١.

عندما يتساوى طولا قطعتين مستقيمتين نقول إنهما متطابقتان، ونرمز لذلك بالإشارة ≅ إذا كان أ ب = جـ د عندها نكتب $\overline{أ ب} \cong \overline{جـ د}$

مثال (٢)

سمِّ قطعتين متطابقتين مستخدمًا خط الأعداد.



الحل: أ ب = | − ٢ − (−٥)| = |٣| = ٣ وحدات طول

ب جـ = |١ − (−٢)| = |٣| = ٣ وحدات طول

بما أن أ ب = ب جـ فيكون $\overline{أ ب} \cong \overline{ب جـ}$

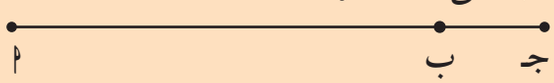
$\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب جـ}$: قطعتان مستقيمتان متطابقتان.

حاول أن تحل

٢ سمِّ قطعتين متطابقتين أخريين من المثال (٢).

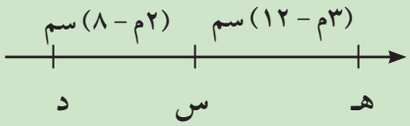
إذا وجدت نقطة ب بين نقطتين أ ،جـ بحيث إن أ، ب، جـ تنتمي إلى قطعة مستقيمة واحدة فيكون لدينا أ ب + ب جـ = أ جـ.

أي أنه إذا كانت ب تنتمي إلى $\overline{أ جـ}$ ، فإن أ ب + ب جـ = أ جـ أي أن أ، ب، جـ على استقامة واحدة.



مثال (٣)

في الشكل المقابل، إذا كانت د هـ = ٦٠ سم، فأوجد قيمة «م» ثم أوجد طول كل من $\overline{\text{د س}}$ ، $\overline{\text{س هـ}}$.



الحل: ∵ س تنتمي إلى $\overline{\text{د هـ}}$

د س + س هـ = د هـ

(٢م – ٨) + (٣م – ١٢) = ٦٠ بالتعويض

٢م + ٣م – ٨ – ١٢ = ٦٠

٥م – ٢٠ = ٦٠ بالتبسيط

٥م = ٨٠ بإضافة ٢٠ إلى كلا الطرفين

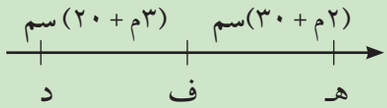
م = ١٦ بقسمة كلا الطرفين على ٥

دس = ٢م – ٨ = ٢(١٦) – ٨ = ٢٤ سم

س هـ = ٣م – ١٢ = ٣(١٦) – ١٢ = ٣٦ سم

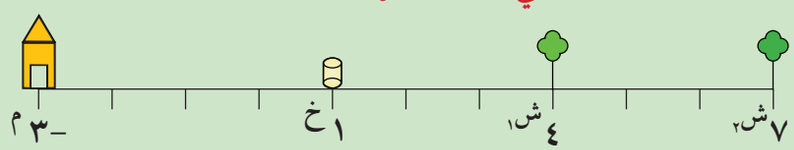
حاول أن تحل

٣ مستخدمًا الشكل المقابل، إذا كانت هـد = ٧٠ سم، فأوجد قيمة "م"، وطول كل من $\overline{\text{هـف}}$، $\overline{\text{فـد}}$.



مثال (٤)

يبيّن الشكل أدناه مخطط منزل سعود، أمامه خزان ماء وشجرتا نخيل (على مستقيم واحد). مشى سعود من منزله إلى خزان الماء حيث ملأ دلوه، أكمل سيره وسقى الشجرة الأولى ثم عاد إلى الخزان، ملأ الدلو مرة ثانية وسار حتى الشجرة الثانية سقاها ثم عاد إلى منزله. ما المسافة الكلية التي سارها سعود؟



الحل:

م خ = |١ – (–٣)| = ٤ وحدات طول

خ ش١ = |٤ – ١| = ٣ وحدات طول

خ ش٢ = |٧ – ١| = ٦ وحدات طول

ش٢ م = |–٣ – ٧| = ١٠ وحدات طول

المسافة التي سارها سعود = م خ + خ ش١ + خ ش١ + خ ش٢ + ش٢ م = ٤ + ٣ + ٣ + ٦ + ١٠ = ٢٦

سار سعود ٢٦ وحدة طول.

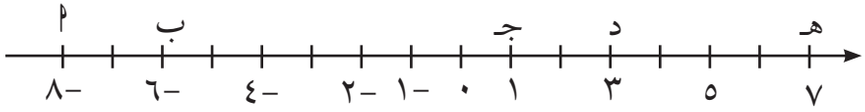
تحقق من فهمك

١ لماذا، برأيك، تمّ استخدام القيمة المطلقة للتعبير عن البعد بين نقطتين؟

٢ كيف يمكنك التأكد أن نقطة ما تقع بين نقطتين على قطعة مستقيمة واحدة.

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ مستخدمًا خط الأعداد المقابل:



(أ) أكمل:

أ جـ = ...

ب د = ...

أ د = ...

ب هـ = ...

(ب) اكتب «صح» أو «خطأ»:

$\overline{أب} \cong \overline{هـ د}$ .....

ب د < جـ د .....

أ جـ + ب د = أ د .....

أ جـ + جـ د = أ د .....

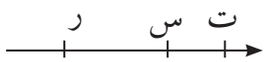
(جـ) لتكن جـ ن = ٥. أوجد إحداثي النقطة ن. .....

.....

هل هناك إحداثي آخر ممكن للنقطة ن؟ فسِّر. .....

.....

في التمرينين ٢ ٣ استخدم الشكل المقابل (اعتبر المسافات بوحدات الطول)



٢ (أ) إذا كانت ر س = ١٥ ، س ت = ٩.

فتكون رت= .....

(ب) إذا كانت س ت = ١٥، ر ت = ٤٠.

فتكون رس = ...

٣ أوجد ر س ، س ت في الحالات التالية:

(أ) ر س = ٣م + ١ ، س ت = ٢م – ٢، ر ت = ٦٤.

.....

(ب) ر س = ٨ م + ٤، س ت = ٤م + ٨، ر ت = ١٥م – ٩.

.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقّق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٨-٢

المسافة بين نقطتين في المستوي الإحداثي
Distance Between two Points In a Plane

سوف تتعلم

- إيجاد المسافة (البعد) بين نقطتين في المستوي الإحداثي.

من الاستخدامات

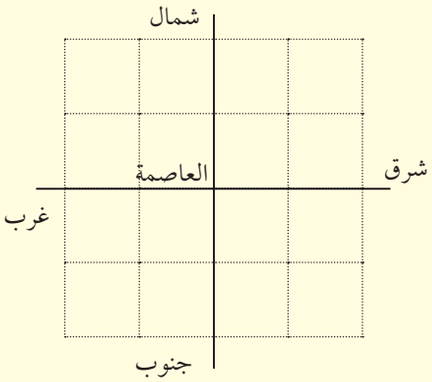
- يستخدم المساحون البعد بين نقطتين لإيجاد البعد بين القرى والمدن.

◄ صلة الدرس تعلمت سابقًا كيف تجد المسافة بين نقطتين على المحور، سوف تتعلم في هذا الدرس كيفية إيجاد البعد بين نقطتين في المستوي الإحداثي. ►

استكشف البعد في المستوي

الأدوات المستخدمة: آلة حاسبة ، مسطرة مرقمة

ينطلق أحمد في سيارته، صباح كل يوم، من المحطة أ متوجهًا إلى المحطة ب. لتكن العاصمة هي نقطة الأصل أو المركز.



موقع المحطة أ: ١ كم غرب العاصمة، ثم ٢ كم جنوب العاصمة.

موقع المحطة ب: ٢ كم شرق العاصمة، ثم ٢ كم شمال العاصمة.

كل ١ سم على الرسم يمثل ١ كم على الأرض.

(أ) إن الزوج المرتب (س$_{١}$، ص$_{١}$) يمثل المحطة أ. أوجد إحداثيات النقطة أ.

(ب) إن الزوج المرتب (س$_{٢}$، ص$_{٢}$) يمثل المحطة ب. أوجد إحداثيات النقطة ب.

(جـ) أوجد البعد بين النقطتين أ ، ب مستخدمًا المسطرة المدرجة.

(د) أوجد قيمة التعبير $\sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$ مستخدمًا الآلة الحاسبة.

(هـ) ماذا تمثل قيمة هذا التعبير؟

تعلم البعد بين نقطتين في المستوي

لتكن أ(س$_{١}$، ص$_{١}$) ، ب(س$_{٢}$، ص$_{٢}$)، نقطتين في مستوي الإحداثيات، فإن المسافة بين أ ، ب تُعطى بالقاعدة:

$$أ ب = \sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$$

مثال (١)

أوجد البعد بين النقطتين ك، ل حيث ك (٥، ٢) ، ل(−٤، −١) مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

الحل: نفرض (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) = (٥، ٢) ، (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) = (−٤، −١) فيكون

ك ل = $\sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$ استخدم القانون

ك ل = $\sqrt{(-٤ - ٥)^{٢} + (-١ - ٢)^{٢}}$ عوض

ك ل = $\sqrt{(-٩)^{٢} + (-٣)^{٢}}$ بسط

ك ل = $\sqrt{٨١ + ٩}$ = $\sqrt{٩٠}$

$\sqrt{٩٠} \simeq$ ٩,٤٨٦٨٣٢ استخدم آلة الحاسبة

البعد بين النقطتين ك ، ل مقربة إلى أقرب جزء من عشرة هي ٩,٥ وحدة طول.

حاول أن تحل

١ أوجد المسافة بين ل(١ ، −٣)، م (−٤، ٤) مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

إذا كانت القطعة المستقيمة موازية لأحد المحاور، فيمكن إيجاد طولها دون استخدام القانون العام.

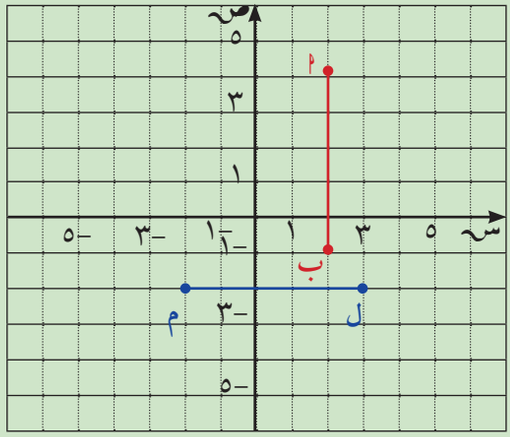
$\overline{أب}$ موازية للمحور السيني: أ ب = |س$_{ب}$ − س$_{أ}$|

$\overline{أب}$ موازية للمحور الصادي: أ ب = |ص$_{ب}$ − ص$_{أ}$|

مثال (٢)

استخدم الشكل المقابل لإيجاد النقطتين أ ، ب، ثم أوجد البعد بين النقطتين أ ، ب. ماذا تلاحظ؟

الحل:



أ(٢، ٤)، ب (٢، −١) لاحظ أن الإحداثي السيني متساوٍ

$\overline{أب}$ موازية للمحور الصادي

إذًا أ ب = |ص$_{ب}$ − ص$_{أ}$|

= |−١ − ٤|

= |−٥|

= ٥ وحدات طول

حاول أن تحل

٢ استخدم الشكل في المثال (٢) لإيجاد النقطتين ل، م ثمّ إيجاد طول $\overline{ل م}$.

مثال (٣)

ما نوع المثلث ع م ر من حيث أضلاعه وزواياه حيث: ع(٢، ٤)، م(٦، ٤)، ر(٦، ٨)؟

الحل:

في المثلث ع م ر

ع م $= \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ — استخدم القانون

$= \sqrt{(٦ - ٢)^٢ + (٤ - ٤)^٢}$

$= \sqrt{(٤)^٢ + (٠)^٢} = \sqrt{١٦} = ٤$ وحدات طول

تنويه: $\overline{ع م}$ موازية للمحور السيني

ع ر $= \sqrt{(٦ - ٢)^٢ + (٨ - ٤)^٢}$

$\therefore$ ع م $= |س_م - س_ع| = |٦ - ٢| = ٤$

$= \sqrt{١٦ + ١٦} = ٤\sqrt{٢}$ وحدة طول

م ر $= \sqrt{(٦ - ٦)^٢ + (٨ - ٤)^٢} = ٤$ وحدات طول — كذلك

المثلث ع م ر متطابق الضلعين عند م (ع م = م ر = ٤)

$\overline{م ر}$ موازية للمحور الصادي

$\therefore$ م ر $= |ص_ر - ص_م| = |٨ - ٤| = ٤$

(ع ر) $= ٤\sqrt{٢}$

$(ع ر)^٢ = ٣٢$

$(م ر)^٢ + (ع م)^٢ = ١٦ + ١٦$

$= ٣٢$

$(ع ر)^٢ = (ع م)^٢ + (م ر)^٢$

من عكس نظرية فيثاغورث المثلث ع م ر قائم الزاوية في م.

$\therefore$ المثلث ع م ر قائم الزاوية ومتطابق الضلعين عند م.

حاول أن تحل

٣ ما نوع المثلث ف هـ د من حيث أضلاعه وزواياه حيث ف (١، ١)، هـ (-٣، -٣)، د(٢، ٠)؟

تحقق من فهمك

١ في المثال (١)، إذا وجدت البعد من النقطة ل إلى النقطة ك، فهل ستحصل على الإجابة نفسها؟

٢ في المثال (٢)، هل يمكن تطبيق القانون العام لإيجاد البعد بين النقطتين أ، ب؟

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ استخدم الحساب الذهني لإيجاد البعد بين النقطتين.

(أ) أ (٠، ٣) ، ب (٠، ١٢)

(ب) جـ (٥, ١٣، ٤) ، د(٥, ١٣، ٢)

(جـ) هـ (٨، ٠) ، و(٠، ٦)

.....

.....

٢ أوجد أب، ب جـ ، أ جـ حيث: أ (١، ٠)، ب(٢، ٢) ، جـ(٤، ٣).

.....

.....

٣ إذا كان البعد بين النقطتين أ (٦، -٢) ، ب هي ١٠ وحدات طول

أوجد إحداثيي النقطة ب علمًا أن الإحداثي السيني للنقطة ب يساوي الإحداثي الصادي للنقطة أ.

.....

.....

٤ ما نوع المثلث ك ل م حيث: ك (٤، ٠) ، ل (٢ ، ٢ $\sqrt{٣}$) ، م(٠، ٠)؟

.....

.....

٥ هل أضلاع الشكل الرباعي ك ل م ن حيث: ك (-٦، ٢)، ل(-٣، ٥) م(-٦، ٦) ، ن(-٩، ٥) هي متساوية الطول؟

.....

.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقّق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٨-٣

إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة في المستوي الإحداثي
Midpoint Coordinates in a Plane

سوف تتعلم

- إيجاد إحداثيي منتصف قطعة مستقيمة في المستوي الإحداثي.

من الاستخدامات

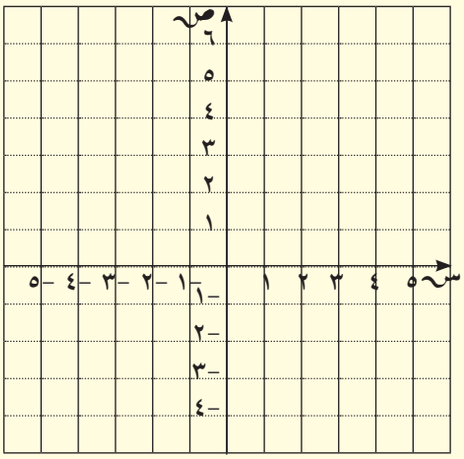
- يستخدم صانعو الخرائط المنتصف لمعرفة نصف البعد بين أي بلدين عند الحاجة إليه.

◄ صلة الدرس في السابق تعرفت المسافة بين نقطتين في المستوي الإحداثي والقطع المستقيمة. في هذا الدرس سوف تتعرف إحداثيات منتصفات القطع المستقيمة في المستوي. ►

استكشف | منتصف القطعة المستقيمة

الأدوات المستخدمة: مسطرة، ورقة رسم بياني

١ مثّل في المستوي الإحداثي النقطتين أ (١، ١)، ب (١، ٥). صل النقطتين بخط مستقيم. احسب عدد الوحدات بينهم، وعيّن النقطة م١ منتصف $\overline{أب}$. أوجد إحداثيي م١.



٢ كرِّر ١ بالنسبة إلى ب (١، ٥)، جـ (٤، ٥) وضع النقطة م٢ في منتصف $\overline{ب جـ}$. أوجد إحداثيي م٢.

٣ ارسم خطًّا موازيًا للمحور السيني يمر بالنقطة م١ ويقطع المحور الصادي في ل١. اكتب إحداثيي ل١.

٤ ارسم خطًّا موازيًا للمحور الصادي يمر بالنقطة م٢ ويقطع المحور السيني في ل٢. اكتب إحداثيي ل٢.

٥ ما علاقة إحداثيي منتصف $\overline{أ جـ}$ بإحداثيات نهايتي القطعة المستقيمة أ جـ؟

تعلم | إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

تعتبر خطوط الطول والعرض في خارطة العالم أو خطوط الشوارع من خرائط المدن أمثلة عملية عن أهمية معرفة منتصف المسافة بين نقطتين.

في المستوي الإحداثي تُعطى إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة $\overline{أب}$ بالقانون:

$$\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$$ حيث أ (س١، ص١)، ب (س٢، ص٢)

المصطلحات الأساسية

◄ منتصف قطعة مستقيمة
Midpoint of a Segment

مثال (١)

أوجد م نقطة منتصف $\overline{أب}$ حيث إن أ (٢، -٣)، ب (-٦، ١).

الحل:

نقطة المنتصف م $= \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$

$= \left(\frac{٢ + (-٦)}{٢} ، \frac{-٣ + ١}{٢} \right) = \left(\frac{-٤}{٢} ، \frac{-٢}{٢} \right) = (-٢، -١)$.

حاول أن تحل

١ أوجد إحداثيا النقطة "م" منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (١، ٢)، ب (٣، ٤).

مثال (٢)

إذا كانت م (٣، ٤) نقطة منتصف $\overline{أب}$، أ(-٤، -٦) فأوجد النقطة ب.

الحل:

نفرض أن ب $(س_٢، ص_٢)$.

م $(س، ص) =$ م $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$

عوض عن قيم س، ص كما يلي:

$٣ = \frac{-٤ + س_٢}{٢}$ ، $٤ = \frac{-٦ + ص_٢}{٢}$

$٦ = -٤ + س_٢$ ، $٨ = -٦ + ص_٢$

$س_٢ = ١٠$، $ص_٢ = ١٤$ وعليه تكون النقطة ب (١٠، ١٤).

حاول أن تحل

٢ تبعد النقطة أ ثلاث وحدات شرقًا عن نقطة الأصل، وتبعد النقطة ب عدد وحدات معينة في جهة معينة بحيث إن م منتصف $\overline{أب}$ هي $\left(\frac{٣}{٢} ، \frac{٥}{٢} \right)$. أوجد إحداثيا النقطة "ب"، وحدد جهتها من نقطة الأصل.

مثال (٣)

إذا كانت م(٢، −٣) نقطة منتصف $\overline{أب}$ وكانت ب(٢، −٤) فأوجد إحداثيا النقطة أ.

الحلّ:

نفرض أن أ (س$_١$، ص$_١$)

$$م(س، ص) = م\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}\ ،\ \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$$

بالتعويض نحصل على:

$$٢ = \frac{س_١ + ٢}{٢}\ ،\quad -٣ = \frac{ص_١ + (-٤)}{٢}$$

$$٤ = س_١ + ٢\ ،\quad -٦ = ص_١ + (-٤)$$

س$_١$ = ٢ ، ص$_١$ = −٢ والنقطة أ (٢، −٢)

حاول أن تحل

٣ إذا كانت م(٥، ٤) نقطة منتصف $\overline{أب}$ وكانت ب(٨، ٧)، فأوجد إحداثيا النقطة أ.

مثال (٤)

أراد محمد إنشاء منزل يقع في منتصف الطريق بين مزرعتين يمتلكهما في الوفرة. حدد النقطة التي تمثل المنزل إذا كان إحداثيا المزرعتين هما النقطتين (٨، ٥)، (−٤، ١) على خارطة.

الحل:

بفرض نقطة منتصف الطريق هي م

$$\text{نقطة المنتصف م} = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$$

$$= \left(\frac{٨ + (-٤)}{٢}، \frac{٥ + ١}{٢}\right)$$

$$= (٢، ٣)$$

النقطة التي تمثل المنزل هي (٢، ٣).

تحقق من فهمك

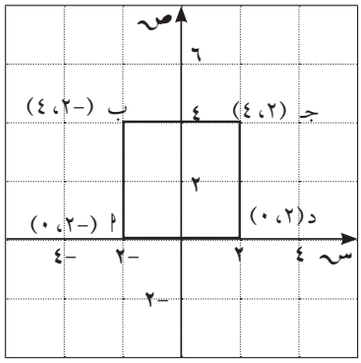
١ إذا كانت نقطة الأصل هي منتصف القطعة المستقيمة حيث يقع أحد طرفي القطعة في الربع الأول، ففي أي ربع يقع الطرف الآخر؟

٢ هل لقطري شبه المنحرف المنتصف نفسه؟

المرشد لحل المسائل (٨-٣)

حل المسائل
افهم
خطط
حل
تحقق

وضعت في قاعة المطالعة في المدرسة طاولة مربعة الشكل . أراد المشرف على القاعة وضع جهاز إنارة مثبت على عمود على الطاولة. أين ستوضع قاعدة العمود بحيث يتوزع الضوء بالتساوي على أركان الطاولة الأربعة. (يمثل الشكل المقابل أ ب جـ د مخطط الطاولة).



افهم

١ ما معطيات المسألة؟ .....

٢ ما المطلوب إليك إيجاده؟ .....

خطط

٣ اكتب قانون إيجاد نقطة منتصف $\overline{أجـ}$ حيث أ (س١، ص١) ، جـ (س٢، ص٢). .....

.....

٤ اكتب إحداثيات النقطتين أ، جـ. .....

٥ اكتب إحداثيات النقطتين ب ، د. .....

حل

٦ أوجد النقطة م١ منتصف $\overline{أجـ}$. .....

٧ أوجد النقطة م٢ منتصف $\overline{ب د}$ . .....

تحقق

٨ في المربع أ ب جـ د يتقاطع القطران في النقطة نفسها. هل هذا صحيح؟ فسِّر.

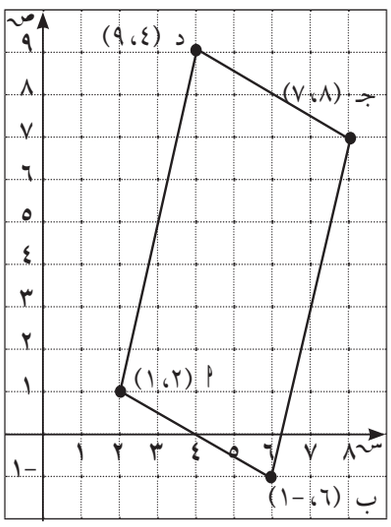
.....

حل مسألة أخرى

٩ أوجد إحداثيات منتصفي القطرين في متوازي الأضلاع أ ب جـ د المعطى، إحداثيات رؤوسه: أ (٢، ١)، ب(٦، -١)، جـ (٨، ٧)، د (٤، ٩). ماذا تلاحظ؟

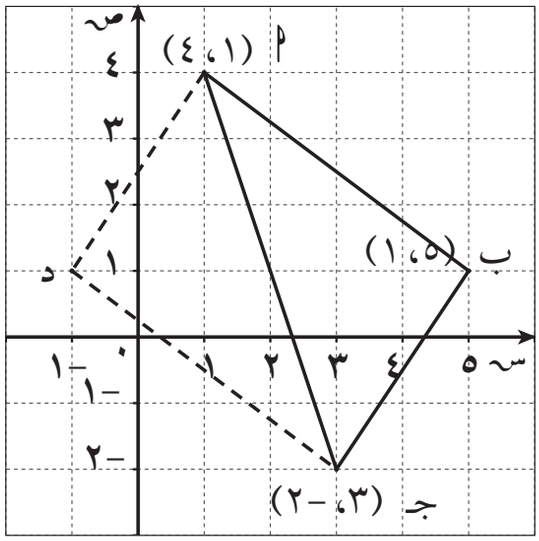
.....

.....



حل المسائل والتفكير المنطقي

١ استخدم الشكل لإيجاد النقطة د التي تكوّن الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع أ ب جـ د .



.....

.....

.....

.....

.....

.....

كن طبيعيًّا

عندما تتراود إلى مسامعنا عبارات مثل «لقد ولد ليكون فنانًا» و«لقد ولد ليكون من رياضيي الألعاب الأولمبية».... لا بد أنه يقصد بها أن هؤلاء الأشخاص يتمتعون بقدرات ومواهب خاصة.

ولعل استخدام الأشكال الهندسية والأنماط في فنون عديدة على مدى عصور خلت، يوفر مثالًا حيًّا على المواهب التي تولد مع الإنسان والتي تمكّن أشخاصًا كثيرين من استخدامها بالفطرة من دون أن يكونوا قد تلقوا أي دروس في الهندسة.

لقد وجد الحرفيون أن استخدام النمط المتكرر يتلاءم مع أعمالهم الفنية التي ترتكز في الأصل إلى التكرار. وفي العمل الفني المتكرر يتم تكرار صفوف من الخيوط الملونة المنسوجة في ملاءة ما أو إضافة صفوف من الخرز لإضفاء رونق على سترة. يتألف التصميم المتكرر عادة من شكل أساسي يتم تكراره مرات عدة. أما الاختلاف بين الأشكال، فيتمثل بتغير موقعها أو اتجاهها عبر استخدام التحويلات المختلفة.

١ ما الأشكال التي تراها في هذا التصميم؟

٢ اختر شكلًا ما، وارسم تصميمًا من خلال تكرار هذا الشكل.

٤-٨

التحويلات والتطابق
Transformations and Congruence

◄ صلة الدرس سبق ودرست أنواعًا مختلفة من المضلعات. ستستكشف في هذا الدرس ما يحدث عند قلب المضلعات أو تحريكها. ►

التحويل هو عملية تؤثر على نقاط شكل ما كلها كالإزاحة أو القلب أو التدوير.

سوف تتعلم

- تحريك نقاط شكل ما كلها للحصول على شكل مطابق.

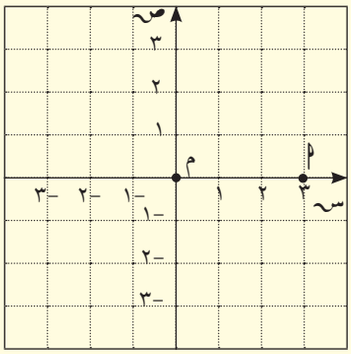
من الاستخدامات

- تشكل التحويلات أساس الأنماط المستخدمة في الفن والتصميم الهندسي.

استكشف الدوران

الدوران

الأدوات المستخدمة: ورق رسم بياني، فرجار، منقلة



١ عين النقطة أ (٣، ٠) في مستوى إحداثي.

٢ نريد تغيير موقع النقطة أ عن طريق دوران مركزه نقطة الأصل م، باتجاه عقارب الساعة، بزاوية قياسها ٩٠°.

٣ ما هما إحداثيا الموقع الجديد للنقطة أ؟

٤ كرر الخطوات ١، ٢، ٣ على النقاط ب (-٢، ١)، جـ(-١، -١).

٥ هل هناك علاقة بين إحداثيات النقاط قبل تطبيق عملية الدوران عليها وبعدها؟

٦ هل المثلث أ ب جـ وصورته بعد الدوران متطابقان؟

تعلم التحويلات والتطابق

الدوران هو تحويل يدور شكلًا حول نقطة تسمى **مركز الدوران**. **وزاوية الدوران** هي زاوية حركة الدوران. يكون الشكل الذي تم تدويره مطابقًا للشكل الأصلي.

يرمز إلى الشكل الذي تم تحويله بتسمية الرؤوس المناظرة وبأحرف مختلفة على الشكل التالي: أ تناظر أ'.

قوانين الدوران باتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل:

إذا كانت أ (س، ص) نقطة في المستوى الإحداثي فإن

أ (س، ص) ← **بالدوران ٩٠° في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل** ← أ' (ص، -س)

أ (س، ص) ← **بالدوران ١٨٠° في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل** ← أ' (-س، -ص)

أ (س، ص) ← **بالدوران ٢٧٠° في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل** ← أ' (-ص، س)

المصطلحات الأساسية

◄ تحويل
Transformation

◄ انعكاس
Reflection

◄ دوران
Rotation

◄ مركز الدوران
Center of Rotation

◄ زاوية الدوران
Angle of Rotation

مثال (١)

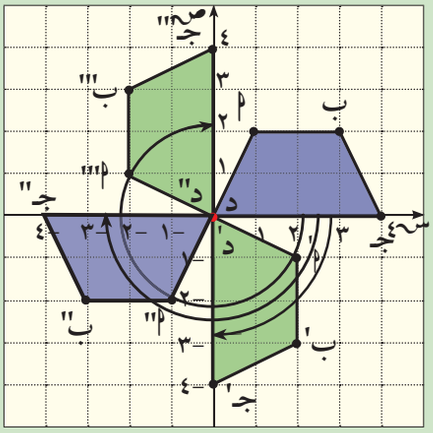
لنعتبر أن نقطة الأصل هي مركز الدوران. دوّر شبه المنحرف أ ب جـ د:

(١) ٩٠° باتجاه دوران عقارب الساعة

(٢) ١٨٠° باتجاه دوران عقارب الساعة

(٣) ٢٧٠° باتجاه دوران عقارب الساعة

استخدم جـ د موجهًا لحركة دوران شبه المنحرف.



الحل:

د(٠، ٠) هو مركز الدوران

(١) حيث إن (س، ص) ← بالدوران ٩٠° في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل ← (ص، −س)

أ(١، ٢) ← بالدوران ٩٠° في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل ← أ'(٢، −١)

ب(٣، ٢) ← بالدوران ٩٠° في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل ← ب'(٢، −٣)

جـ(٤، ٠) ← بالدوران ٩٠° في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل ← جـ'(٠، −٤)

فتكون أ' ب' جـ' د' هي صورة أ ب جـ د

أ'(٢، −١) ، ب'(٢، −٣) ، جـ'(٠، −٤) ، د'(٠، ٠)

(٢) حيث إن (س، ص) ← بالدوران ١٨٠° في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل ← (−س، −ص)

فتكون أ'' ب'' جـ'' د'' هي صورة شبه المنحرف أ ب جـ د

أ''(−١، −٢) ، ب''(−٣، −٢) ، جـ''(−٤، ٠) ، د''(٠، ٠)

(٣) حيث إن (س، ص) ← بالدوران ٢٧٠° في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل ← (−ص، س)

فتكون أ''' ب''' جـ''' د''' هي صورة شبه المنحرف أ ب جـ د

أ'''(−٢، ١) ، ب''' (−٢، ٣) ، جـ'''(٠، ٤) ، د'''(٠، ٠)

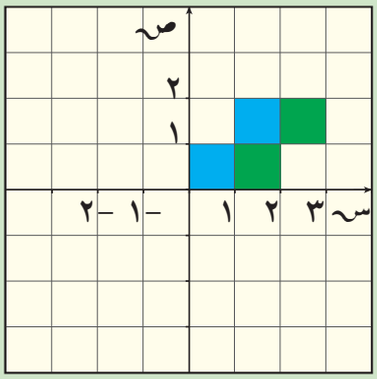
ملاحظة: من التحويلات الدوران في اتجاه عكس عقارب الساعة وسوف يتم التطرق إليه لاحقًا.

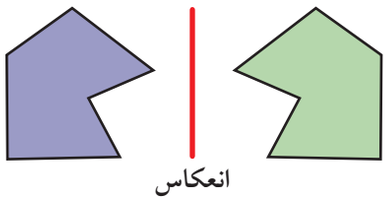
حاول أن تحل

١ دوّر الشكل المقابل باتجاه دوران عقارب الساعة حول نقطة الأصل،وأوجد إحداثيات الرؤوس المناظرة في كل حركة:

(أ) ١٨٠° (ب) ٩٠° (جـ) ٢٧٠°

(د) هل الأشكال الناتجة في (أ)، (ب)، (جـ) متطابقة مع الشكل الأصلي



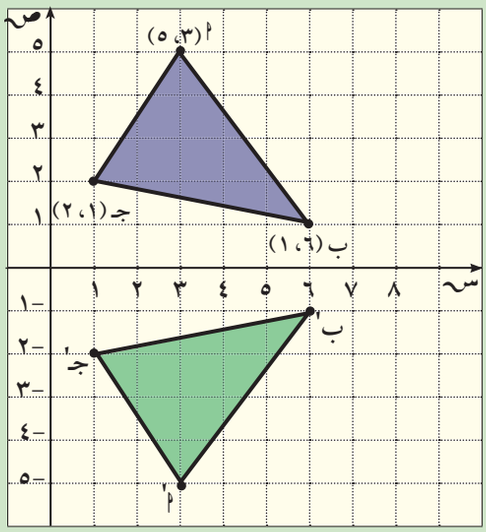


الانعكاس: لا بد أنك رأيت انعكاس صورتك في مرآة أو على سطح الماء.
في الرياضيات الانعكاس هو تحويل يقلب شكلًا حول خط (محور الانعكاس).
يكون الشكل المنعكس **مطابقًا** للشكل الأصلي.

يغيّر الانعكاس حول محور السينات إشارة كل إحداثي صادي أي أن (س، ص) $\xrightarrow{ع_{سـ}}$ (س، −ص)
يغيّر الانعكاس حول محور الصادات إشارة كل إحداثي سيني أي أن (س، ص) $\xrightarrow{ع_{صـ}}$ (−س، ص)

مثال (٢)

إحداثيات Δ أ ب جـ: أ (٣، ٥)، ب (٦، ١)، جـ (١، ٢).
(أ) اعكس Δ أ ب جـ حول محور السينات، وحدد إحداثيات Δ أ' ب' جـ'.
(ب) أثبت تطابق المثلثين أ ب جـ، أ' ب' جـ'.



الحل:

(أ) يتغير كل إحداثي صادي لأن الشكل ينعكس حول محور السينات.
مثّل النقاط أ' ب'جـ' على شبكة الإحداثيات، وصل بينها لترسم المثلث.
إحداثيات Δ أ ب جـ الصادية موجبة.
فتكون إحداثيات Δ أ' ب'جـ' الصادية سالبة.

أي أن (س، ص) $\xrightarrow{ع_{سـ}}$ (س، −ص)

أ (٣، ٥) $\xrightarrow{ع_{سـ}}$ أ'(٣، −٥)

ب (٦، ١) $\xrightarrow{ع_{سـ}}$ ب'(٦، −١)

جـ (١، ٢) $\xrightarrow{ع_{سـ}}$ جـ'(١، −٢)

(ب) في المثلثين أ ب جـ، أ' ب' جـ':

أ ب $= \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢} = \sqrt{(٦ - ٣)^٢ + (١ - ٥)^٢} = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$ المسافة بين نقطتين في المستوي

أ' ب' $= \sqrt{(٦ - ٣)^٢ + (-١ + ٥)^٢} = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$

∴ أ ب = أ' ب'

أ جـ $= \sqrt{(١ - ٣)^٢ + (٢ - ٥)^٢} = \sqrt{٤ + ٩} = \sqrt{١٣}$

أ' جـ' $= \sqrt{(١ - ٣)^٢ + (-٢ + ٥)^٢} = \sqrt{٤ + ٩} = \sqrt{١٣}$

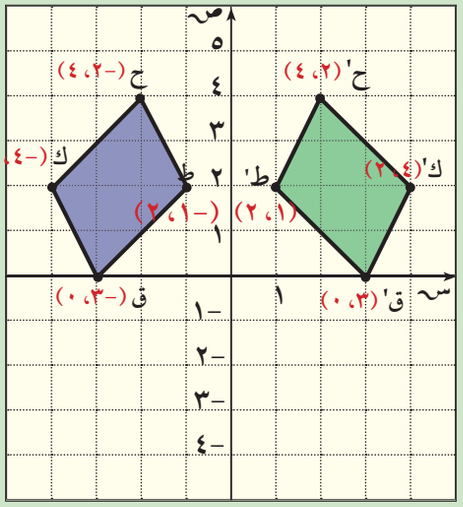
∴ أ جـ = أ' جـ'

ونثبت بالطريقة نفسها أن ب جـ = ب'جـ'

المثلثان أ ب جـ، أ' ب'جـ' متطابقان بالحالة (ض، ض، ض).

مثال (٣)

اعكس الشكل ح ط ق ك حول محور الصادات، وحدد إحداثيات ح' ط' ق' ك'.



الحل:

يتغير رمز كل إحداثي سيني لأن الانعكاس يتم حول محور الصادات.

مثّل النقاط ح'، ط'، ق'، ك'، على شبكة الإحداثيات وارسم ح' ط' ق' ك'.

الإحداثيات السينية لرؤوس ح' ط' ق' ك' موجبة.

(س ، ص) $\xrightarrow{\text{ع}_{\text{صـ}}}$ (- س ، ص)

ح (-٢، ٤) $\xrightarrow{\text{ع}_{\text{صـ}}}$ ح' (٢، ٤)

ط (-١، ٢) $\xrightarrow{\text{ع}_{\text{صـ}}}$ ط' (١، ٢)

ق (-٣، ٠) $\xrightarrow{\text{ع}_{\text{صـ}}}$ ق' (٣، ٠)

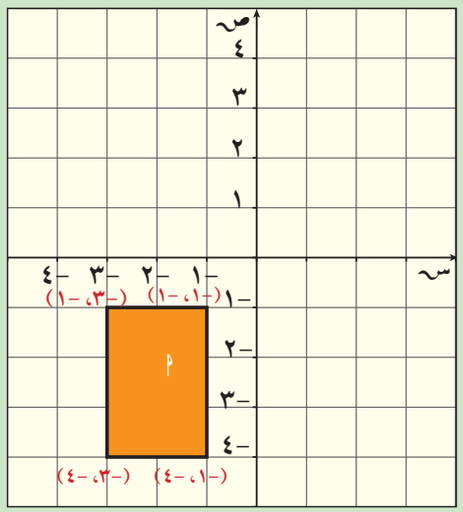
ك (-٤، ٢) $\xrightarrow{\text{ع}_{\text{صـ}}}$ ك' (٤، ٢)

حاول أن تحل

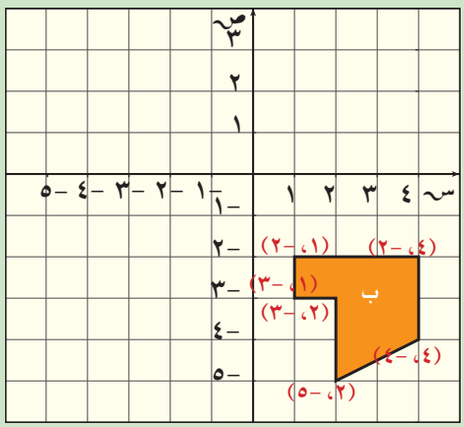
٢ يمكن مشاهدة النمط الموضح في الأواني الفخارية القديمة.

حدد إحداثيات رؤوس الشكلين أ ، ب بعد كل انعكاس.

(أ) اعكس الشكل أ حول محور السينات.



(ب) اعكس الشكل ب حول محور الصادات.



تحقق من فهمك

١ وضّح هل تتغير إحداثيات شكل بعد تدويره ٣٦٠° في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

٢ هل تتغير إحداثيات نقطة تقع على محور انعكاس بعد انعكاسها في هذا المحور.

١

(أ) (ب)

ما التحويلات، إن وجدت، التي تحوّل كل شكل أعلاه مستخدمًا تعبيرًا رياضيًّا تعلمته حديثًا؟ (دوران الكتاب واستخدام مرآة قد يساعدانك في التحديد).

٢ **المجلة**: فسّر كيف يمكن أن ينتج تحويلان مختلفان لشكل ما الصورة نفسها، أعط مثالًا على ذلك.

.....

.....

٣ **التفكير الرياضي**: هل يوجد تحويل يغيّر متوازي الأضلاع إلى شبه منحرف؟ فسّر إجابتك. .....

.....

٤ **التواصل**: فسّر الفرق بين الانعكاس والدوران. أعط رسمًا تخطيطيًّا مثالًا على ذلك.

.....

.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٨–٥

تحويلات وتشابه
Transformations and Similarity

سوف تتعلم

- تحويل شكل للحصول على شكل مشابه للشكل الأصلي لكنه ليس مطابقًا له.

من الاستخدامات

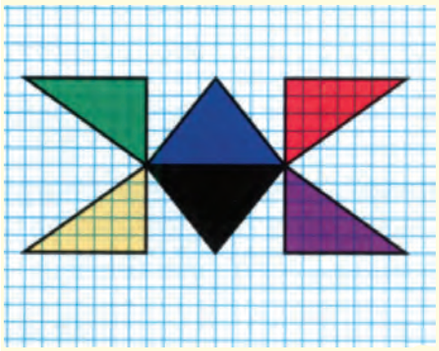
- يبتكر طابعو الصور أشكالًا مشابهة عندما يقومون بعمليات التكبير.

صلة الدرس لقد سبق أن رأيت كيف تنتج التحويلات أشكالًا متطابقة. ستستخدم في هذا الدرس تحويلًا ينتج شكلًا مشابهًا للشكل الأصلي لكنه غير مطابق له. ►

استكشف — تغير الأبعاد

أشكال أكبر أكثر فأكثر

الأدوات المستخدمة: ورق رسم بياني، مسطرة



يمثل التصميم المبين مفاهيم الفن السيوكي وهو يوضح ستة اتجاهات: الشرق (أحمر) والغرب (أصفر) والشمال (أزرق) والجنوب (أسود). فضلًا عن الاتجاه العلوي والاتجاه السفلي.

١ انسخ هذا الشكل على ورقة رسم بياني.

٢ ارسم على ورقة رسم بياني أخرى رسمًا مشابهًا لهذا التصميم مستخدمًا معامل التكبير ٢ (أي مضاعفة الأطوال).

٣ هل كل من المثلثات الستة في التصميم الذي تم تغيير أبعاده، مطابق للمثلث المناظر له في التصميم الأصلي؟ هل هو مشابه له؟ وضّح إجابتك.

تعلم — التحويلات والتشابه

يمكن تحديد إحداثيات شكل تم تغيير أبعاده في مستوي إحداثيات بضرب كل إحداثي في معامل التكبير على اعتبار أن (٠، ٠) مركز التكبير.

إذا كانت (س، ص) نقطة في المستوى الإحداثي

فإن (س، ص) $\xrightarrow{\text{تكبير معامله ك ومركزه نقطة الأصل}}$ (ك س، ك ص)

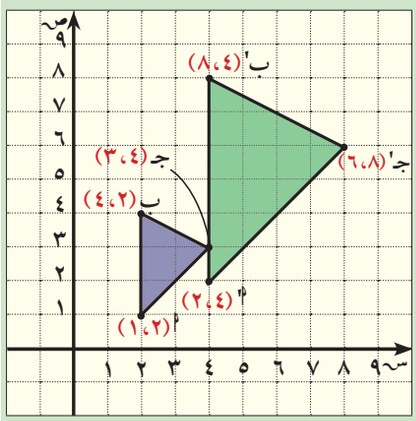
يسمى ك معامل التكبير شرط ك > ٠

مثال (١)

ارسم صورة المثلث أ ب جـ مستخدمًا التكبير الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله ٢.

الحل:

نوجد إحداثيات الرؤوس الجديدة، ثم نرسم الشكل بعد تغيير الأبعاد.



Δ أ ب جـ	(٢ × س، ٢ × ص)	Δ أ' ب' جـ'
↓	↓	↓
أ (١، ٢)	← (٢ × ١، ٢ × ٢)	← أ' (٢، ٤)
ب (٢، ٤)	← (٢ × ٢، ٢ × ٤)	← ب' (٤، ٨)
جـ (٣، ٤)	← (٢ × ٣، ٢ × ٤)	← جـ' (٦، ٨)

يؤدي معامل التكبير الأكبر من ١ إلى تكبير شكل ما، أما معامل التصغير الموجب الأصغر من ١ فيؤدي إلى تصغير شكل ما. ويستخدم نفس القانون السابق.

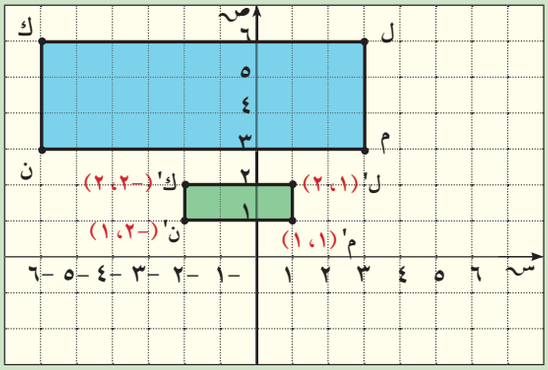
مثال (٢)

اكتب النقاط التي تمثل رؤوس الشكل ك ل م ن، ثم ارسم صورة الشكل مستخدمًا التصغير الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله $\frac{١}{٣}$.

الحل:

نوجد إحداثيات الرؤوس الجديدة، ثم نرسم الشكل بعد تغيير الأبعاد.

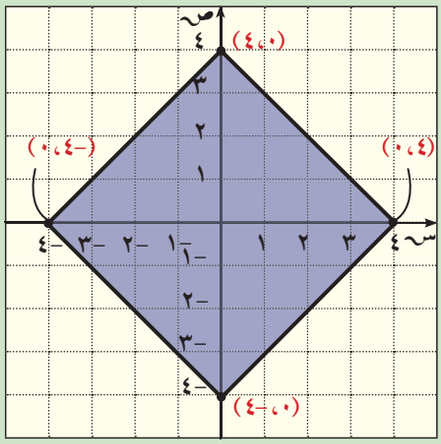
الشكل ك ل م ن	$(\frac{١}{٣} \times س، \frac{١}{٣} \times ص)$	الشكل ك' ل' م' ن'
ك (−٦، ٦)	← $(\frac{١}{٣} \times -٦، \frac{١}{٣} \times ٦)$ ←	ك' (−٢، ٢)
ل (٣، ٦)	← $(\frac{١}{٣} \times ٣، \frac{١}{٣} \times ٦)$ ←	ل' (١، ٢)
م (٣، ٣)	← $(\frac{١}{٣} \times ٣، \frac{١}{٣} \times ٣)$ ←	م' (١، ١)
ن (−٦، ٣)	← $(\frac{١}{٣} \times -٦، \frac{١}{٣} \times ٣)$ ←	ن' (−٢، ١)



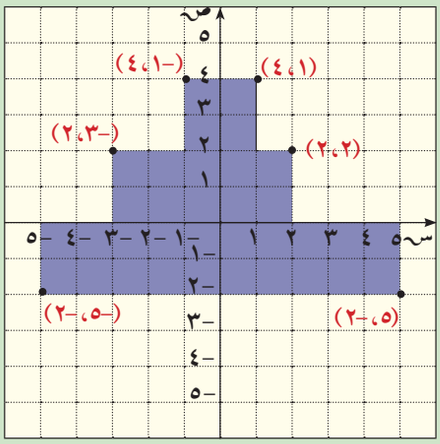
حاول أن تحل

١ أوجد النقاط التي تمثل الرؤوس الجديدة بعد تغيير أبعاد كل من الشكلين أدناه باستخدام:

(أ) تصغير معامله $\frac{١}{٢}$ ومركزه نقطة الأصل



(ب) تكبير معامله ٥ , ٢ ومركزه نقطة الأصل



مثال (٣)

تقع النقطة أ' (٤، ١٢) على مضلع ناتج من تكبير معامله ٤ ومركزه نقطة الأصل. أوجد النقطة المناظرة أ؟

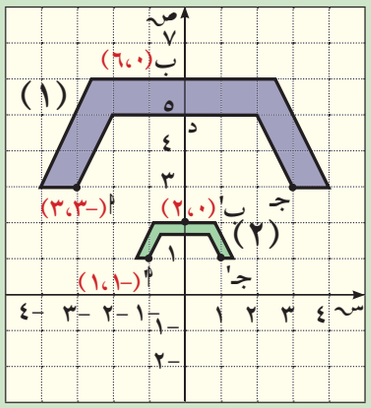
الحل:

أ'(٤ ÷ ٤، ١٢ ÷ ٤) ← أ (١، ٣) اقسم إحداثيات أ' على ٤.

إذا كان لديك شكل وصورته، وكانت إحداثيات الرؤوس المناظرة معطاة، فيمكنك إيجاد معامل التكبير أو معامل التصغير المستخدم لإيجاد الصورة على اعتبار مركز التكبير أو التصغير هو نقطة الأصل.

مثال (٤)

في الشكل المقابل: أوجد معامل (التكبير أو التصغير) المستخدم لتحويل المضلع (١) إلى المضلع (٢).



الحل:

قارن بين الإحداثيين السينيين أو الإحداثيين الصاديين للنقطتين

أ (-٣، ٣)، أ' (-١، ١).

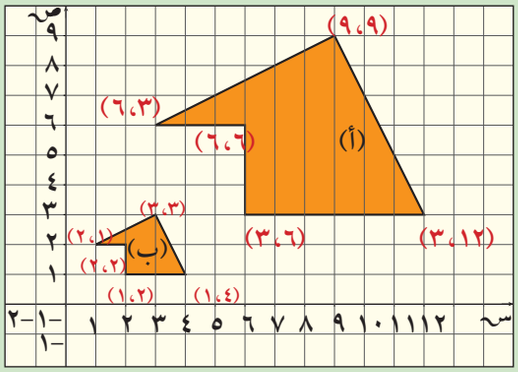
$$\frac{\text{الإحداثي السيني للنقطة أ'}}{\text{الإحداثي السيني للنقطة أ}} = \frac{-١}{-٣} = \frac{١}{٣}$$

معامل التصغير يساوي $\frac{١}{٣}$.

حاول أن تحل

٢ (أ) أوجد معامل التصغير أو التكبير المستخدم لتحويل الشكل أ إلى الشكل ب.

(ب) أوجد معامل التصغير أو التكبير المستخدم لتحويل الشكل ب إلى الشكل أ.



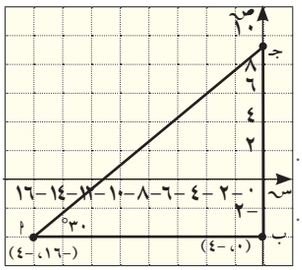
تحقق من فهمك

١ قبل رسم الشكل الذي تم تغيير أبعاده، كيف تعرف هل كان تكبيرًا أو تصغيرًا.

٢ إذا كان الشكل س صورة الشكل ص بعد تغيير أبعاده، فهل يمكن أيضًا اعتبار ص صورة الشكل س بعد تغيير أبعاده؟ وضح إجابتك.

حل المسائل والتفكير المنطقي

القياس: تمَّ تصغير المثلث أ ب جـ بمعامل $\frac{٣}{٤}$.



١ ما طول الضلع $\overline{أ ب}$ ؟

.....

.....

٢ ما إحداثيات الرأس أ؟

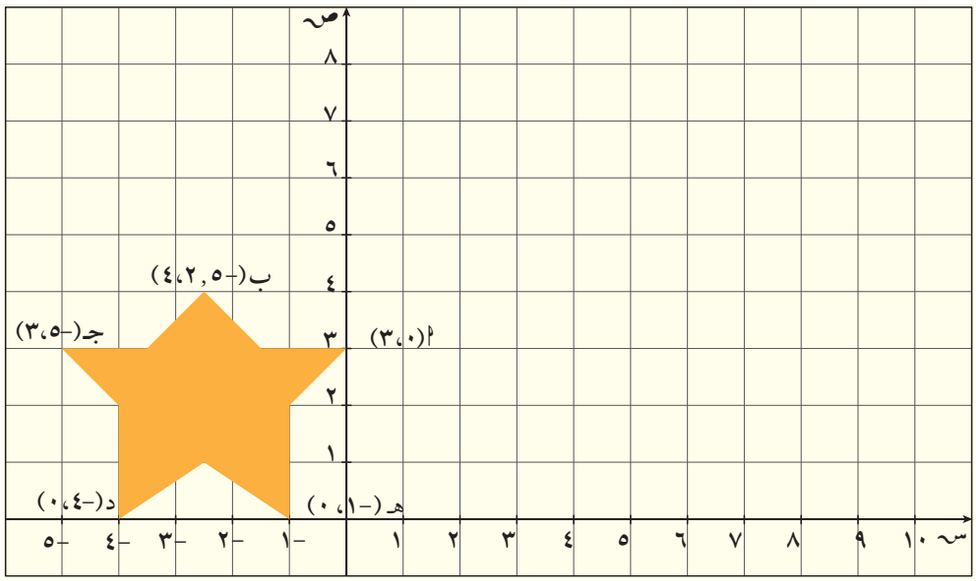
.....

.....

٣ **التفكير الناقد:** في الشكل أدناه، استخدم معامل ٢ لتكبير الشكل بعد انعكاسه في محور الصادات. ما إحداثيات الرؤوس الجديدة؟ مثِّل «التكبير» بيانيًّا.

.....

.....



إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٦-٨

التناظر (التماثل)

Symmetry

سوف تتعلم

- كيفية تعرف أنواع مختلفة من التناظر.

من الاستخدامات

- يستخدم صانعو الآلات الموسيقية الوترية مفهوم التناظر لتصميم الآلات الموسيقية بحيث تسمح للأوتار بالذبذبة بدقة متناهية.

المصطلحات الأساسية

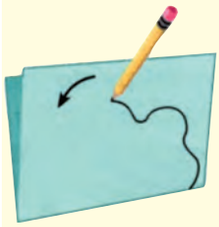
- تناظر Symmetry
- تناظر خطي Line Symmetry
- خط تناظر Line of Symmetry
- تناظر دوراني Rotational Symmetry
- تناظر نقطي Point Symmetry

صلة الدرس لقد سبق أن رأيت كيف تؤثر التحويلات على الأشكال. ستتعلم في هذا الدرس كيف يمكن للتحويلات أن توضح ما إذا كان شكل ما متماثلًا أم لا. ►

استكشف التماثل الخطي

صورة مجزأة **الأدوات المستخدمة:** ورقة قياسها ٢٢ سم × ٢٨ سم، مقص

١ اطو ورقة إلى نصفين. وعلى أحد النصفين ارسم خطًّا منحنيًا يبدأ عند خط طي الورقة وينتهي عنده.

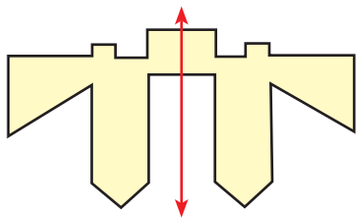


٢ قص الورقة المطوية على طول الخط الذي رسمته ،ثم قارن بين النصفين، واذكر ما الذي حدث بعد قص الشكل. ما هو خط التناظر (خط التماثل)؟

٣ اطو ورقة أخرى إلى نصفين، ثم اطوها إلى نصفين مرة أخرى. ارسم خطًّا منحنيًا يبدأ عند أحد جزءي الورقة وينتهي عند الجزء الثاني. قصّ على طول الخط. كم خط تناظر وجدت؟

تعلم التناظر

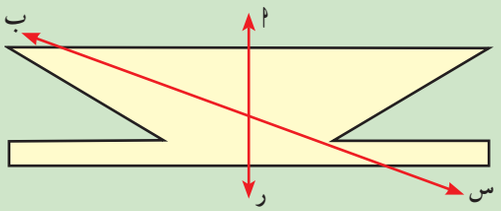
يكون لشكل ما خط تناظر، إذا كان ينطبق نصفاه تطابقًا تامًّا بعد عملية التحويل.



يكون لشكل ما تناظر خطي، إذا كان له خط تناظر يقسمه إلى نصفين متطابقين. والتناظر الخطي مبني على عملية الانعكاس.

مثال (١)

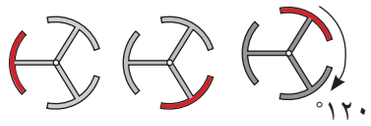
ما الخط الذي يمثل خط تناظر في الشكل إلى اليسار؟



الحل:

$\overleftrightarrow{أر}$ **خط تناظر لأنه يقسم الصورة إلى نصفين متطابقين.**

إذا تم تدوير شكل حول نقطة داخله لدورة أقل من ٣٦٠° وبقي الشكل نفسه، فيكون له **تناظر دوراني** فمثلاً إذا دار الشكل نصف دورة أي بزاوية قياسها ١٨٠° وانطبق على نفسه، فيصبح للشكل **تناظر دوراني حول نقطة**.



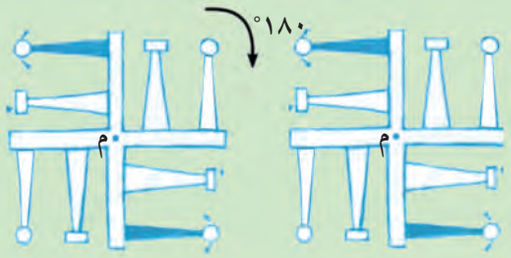
مثال (٢)

هل لهذه القطعة تناظر دوراني حول نقطة؟

الحل:

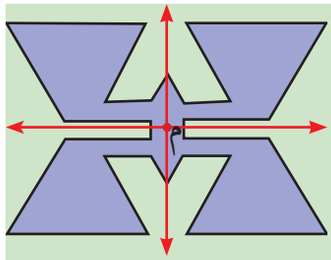
دوِّر الشكل ١٨٠° حول النقطة م.

نعم، للشكل تناظر دوراني حول نقطة.



مثال (٣)

ما أنواع التناظر التي تراها في الشكل إلى اليسار؟



الحل:

للشكل خطا تناظر. تحقق من خطوط التناظر.

للشكل تناظر دوراني (١٨٠°) حول النقطة م. تحقق من التناظر الدوراني.

حاول أن تحل

ما أنواع التناظر التي يتضمنها رمز الإعصار الموضح إلى اليسار؟

تحقق من فهمك

١ اذكر العلاقة بين شكل له خط تناظر والانعكاس.

٢ ما عدد خطوط التناظر في دائرة؟ وضح إجابتك.

٣ إذا كان لشكل خط تناظر، فهل من الضروري أن يكون له تناظر دوراني حول نقطة؟ وضح إجابتك.

◄ الربط بالعلوم

بحسب مقياس بوفورت لتأثيرات الرياح، فإن الإعصار يحدث عندما تبلغ سرعة الريح ١١٧ كم/ ساعة أو أكثر. يساوي رقم بوفورت الذي يمثل الإعصار ١٢.

حل المسائل والتفكير المنطقي

يبين الرسم نمطًا لشكل حيوان الكنغر.

١ **الأنماط**: هل توجد أشكال متشابهة؟ أشكال متطابقة؟ فسِّر إجابتك.

.....

.....

٢ **التواصل**: ما نوع التناظر، إن وجد، في النمط بأكمله؟ فسِّر إجابتك.

.....

.....

٣ **التفكير الرياضي**: كيف يمكنك تحويل «كنغر» من الصف الأعلى إلى الصف الأسفل؟

.....

.....

٤ **اختر إستراتيجية**: ارسم شكلًا له أربعة خطوط تناظر.

.....

.....

٥ (أ) قياسات الزوايا اللازمة لكي يدور مثلث متطابق الأضلاع حول نقطة داخله، وينطبق على نفسه؟

.....

.....

(ب) ما عدد خطوط التناظر لمثلث متطابق الأضلاع؟

.....

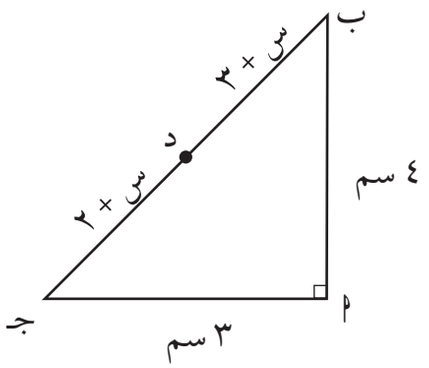
.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

اختبار الوحدة الثامنة

١ (أ) أوجد قيمة «س» في الرسم المقابل.



(ب) إذا وضعنا هذا المثلث على شبكة إحداثيات حيث أ تتطابق مع نقطة الأصل، فأوجد إحداثيات النقطة ب والنقطة جـ .

(جـ) أوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$ مستخدمًا الإحداثيات في (ب).

٢ م$\left(\frac{١}{٢}، \frac{١}{٣}\right)$ منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (١، ٢). أوجد إحداثيات النقطة «ب».

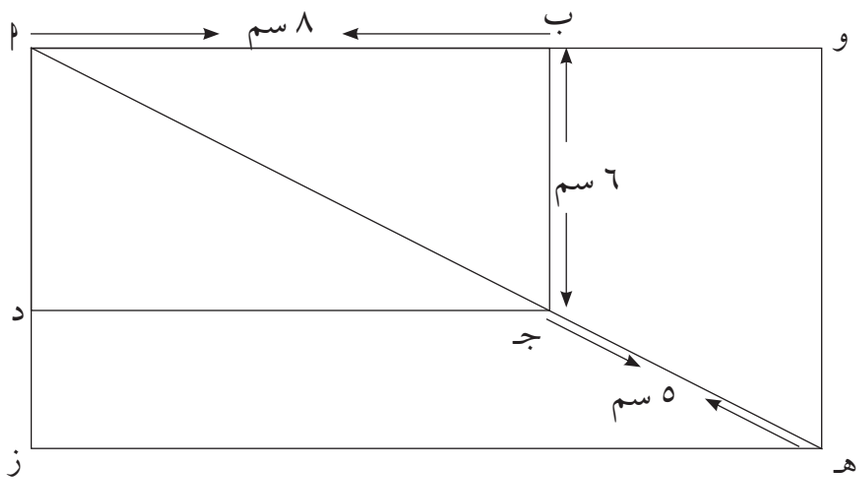
٣ أوجد قيمة «س» إذا كانت م (٤، ٢) منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (٢، ٢س)، ب(س، −٨).

٤ في الرسم المقابل المستطيل أ و هـ ز هو تكبير للمستطيل أ ب جـ د . النقاط أ، جـ، هـ على مستقيم واحد.

(أ) احسب طول أ جـ.

(ب) أوجد معامل التكبير.

(جـ) احسب طول $\overline{\text{أ و}}$ ، $\overline{\text{أ ز}}$.

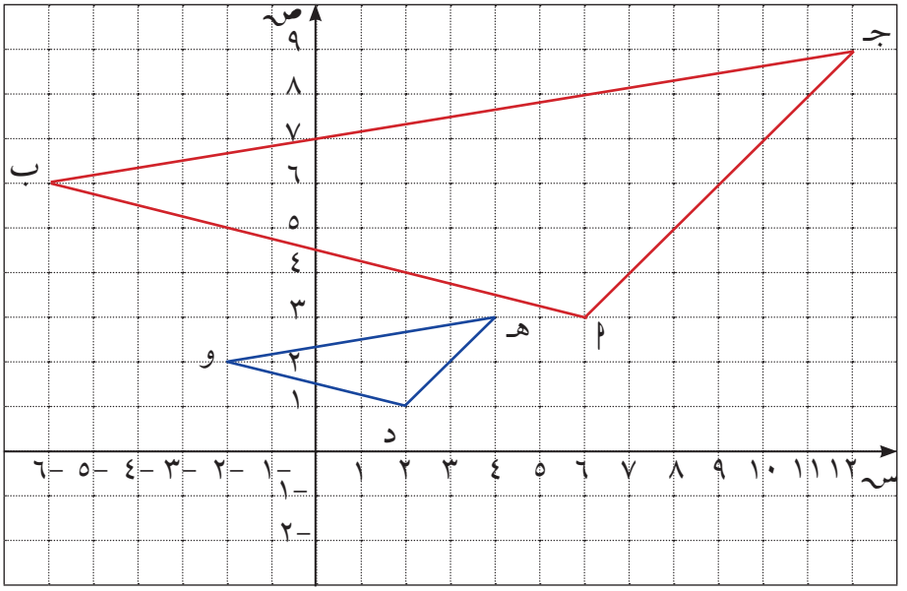


اختبار الوحدة الثامنة

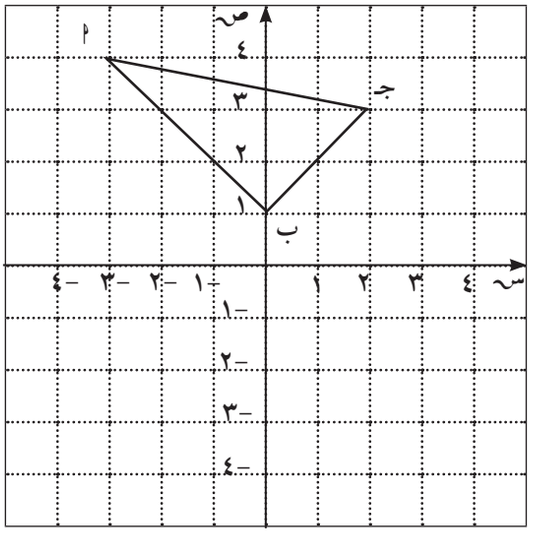
٥ في الرسم أدناه:

(أ) ما هو معامل التصغير بين المثلثين ا ب جـ ، د هـ و.

(ب) هل هناك علاقة بين إحداثيات رؤوس المثلثين؟ إذا وجدت ما هي؟



٦ في الشكل أدناه:



(أ) حدد النقاط التي تمثل رؤوس المثلث ا ب جـ.

(ب) ارسم ا' ب'جـ' صورة المثلث ا ب جـ بدوران زاوية ٢٧٠° باتجاه دوران عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

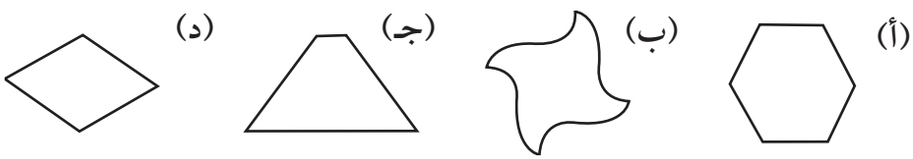
(جـ) أثبت أن المثلثين ا' ب'جـ' ، ا ب جـ متطابقان.

(د) ارسم ا" ب"جـ" صورة المثلث ا ب جـ بدوران زاوية ١٨٠° باتجاه دوران عقارب الساعة حول نقطة الأصل .

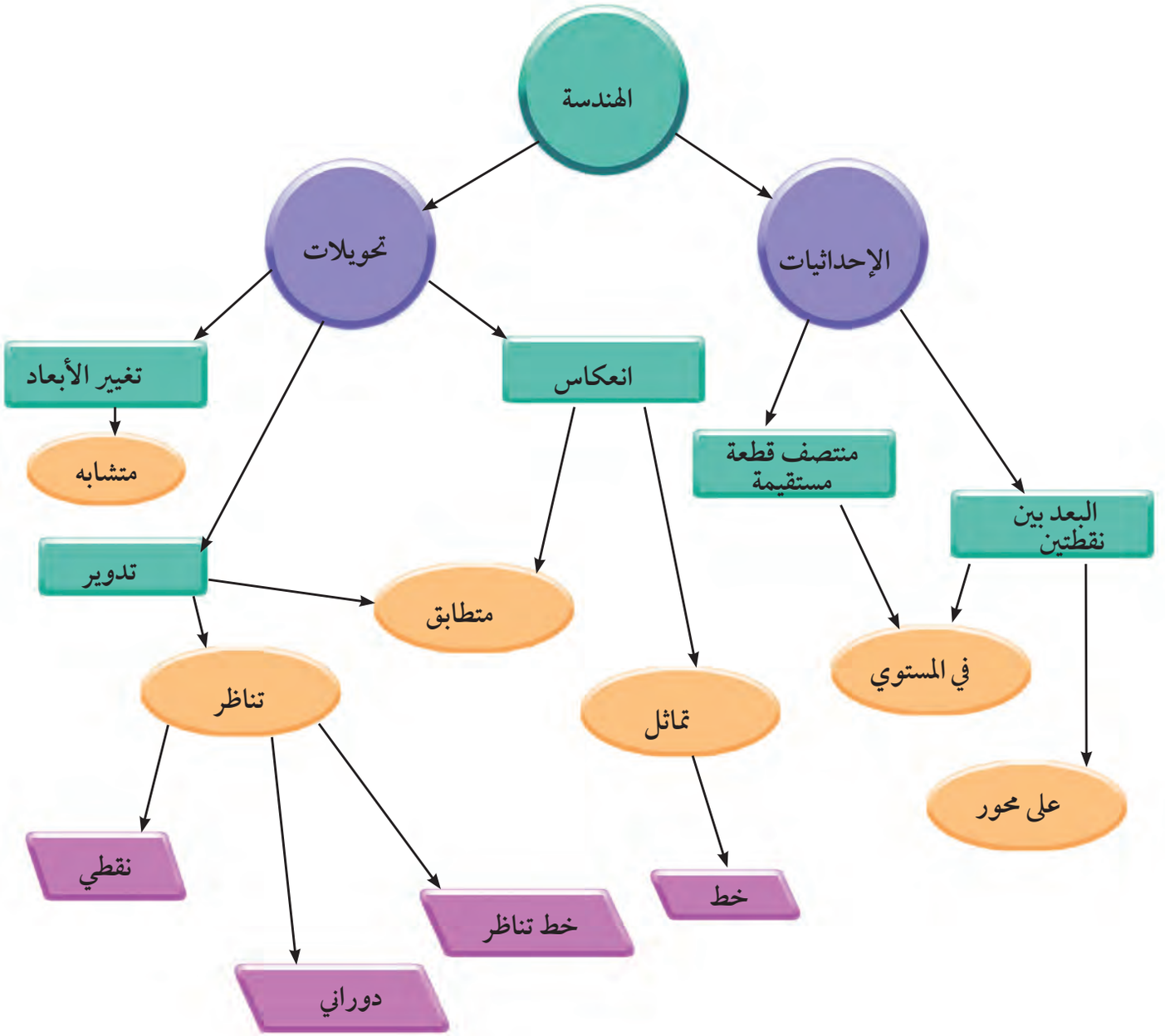
(هـ) أثبت أن المثلثين ا" ب"جـ" ، ا ب جـ متطابقين.

٧ حدد، لكل من الرسوم أدناه إذا وُجد، خط تناظر أو تماثل دوراني.

(أ) (ب) (جـ) (د)



مخطط تنظيمي للوحدة الثامنة



ملخص الوحدة الثامنة(أ): الهندسة الإحداثية في المستوي

- المسافة بين نقطتين على محور هي القيمة المطلقة للفرق بين إحداثيا هاتين النقطتين.
- عندما يتساوى طولا قطعتين مستقيمتين نقول إنهما متطابقتان ونرمز لهما بالإشارة ≅.
- استخدم القاعدة أ ب = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ لإيجاد البعد بين النقطتين أ(س١، ص١)، ب(س٢، ص٢).
- إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أ ب}$ هي $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$ حيث أ(س١، ص١)، ب(س٢، ص٢).

ملخص الوحدة الثامنة (ب): التحويلات

- التحويل هو تغيير في الشكل، قد يكون انعكاسًا، أو إزاحة، أو دورانًا، أو تغيير أبعاد.
- يغيّر الانعكاس في محور السينات إشارة كل إحداثي صادي.
- يغيّر الانعكاس في محور الصادات إشارة كل إحداثي سيني.
- الدوران باتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل بزاوية:

إذا كانت أ نقطة في المستوى الإحداثي فإن:

أ(س،ص) $\xleftarrow[\text{حول نقطة الأصل}]{\text{بالدوران ٩٠° في اتجاه عقارب الساعة}}$ أ' (ص، −س)

أ(س، ص) $\xleftarrow[\text{حول نقطة الأصل}]{\text{بالدوران ١٨٠° في اتجاه عقارب الساعة}}$ أ' (−س، −ص)

أ(س، ص) $\xleftarrow[\text{حول نقطة الأصل}]{\text{بالدوران ٢٧٠° في اتجاه عقارب الساعة}}$ أ' (−ص، س)

- يمكن تغيير أبعاد شكل ما باستخدام معامل التكبير أو معامل التصغير.
- تتغير إحداثيات شكل في مستوي إحداثيات بضرب كل إحداثي في معامل التكبير (التصغير) على اعتبار أن نقطة الأصل (٠، ٠) مركز التكبير (التصغير) باستخدام القاعدة التالية:

(س، ص) $\xleftarrow[\text{ومركزه نقطة الأصل}]{\text{تكبير (تصغير) معامله ك}}$ (ك س، ك ص) حيث ك > ١ ، (٠ < ك < ١)

- يكون للشكل تناظر إذا انطبق على نفسه بعد التحويل، وأنواع التناظر الثلاثة هي: تناظر خطي، تناظر دوراني، تناظر نقطي.

الوحدة التاسعة

النسبة والتناسب
Ratio and Proportion

التسلية

في لعبة كرة القدم، متوسط التهديف لفريق هو نسبة مجموع أهدافه إلى عدد المباريات. أما متوسط التهديف للاعب فهو نسبة عدد أهدافه إلى عدد المباريات التي شارك فيها.

الدراسات الاجتماعية

تشكل أبعاد معبد لقدماء اليونان مستطيلًا ذهبيًّا. المستطيلات التي تساوي النسبة بين طولها وعرضها ١,٦١٨ تسمى المستطيلات الذهبية لأن شكلها ممتع للعين.

شعوب العالم

كان النظام المالي البدائي في جزر المحيط الهادي يعتبر أن ١٠ قطع من جوز الهند تساوي في القيمة صفًا واحدًا من أسنان الحوت البيضاء.

العلوم

ضغط الدم هو نسبة الضغط الانقباضي على الضغط الانبساطي. وحدة قياس ضغط الدم هي المليمتر زئبق في حالة الاسترخاء (أي عندما يكون الإنسان ساكنًا مستريحًا). القياس الطبيعي لضغط الدم الانقباضي للبالغ، متوسط العمر، يتراوح بين ٦٠ و٩٠ ملم زئبق، أما الانبساطي فيتراوح بين ٩٠ و١٤٠ ملم زئبق. إذًا، المتوسط ١٢٠ ملم زئبق انقباضي و٨٠ ملم زئبق انبساطي، وتقرأ ١٢٠/ ٨٠ ملم زئبق، أما العامة فتسميه ١٢٠ فوق أو على ٨٠ ملم زئبق. يستخدم لقياس ضغط الدم الجهاز الإلكتروني في المنزل أو الجهاز اليدوي في عيادة الطبيب وهو يعرف بجهاز قياس الضغط الزئبقي وهو الأدق. الجدول التالي يصف حالات المرضى بحسب معدل ضغط الدم:

تصنيف ضغط الدم للبالغين (بالمليمتر زئبق)		
عمود ضغط الدم	عمود الانقباضي	عمود الانبساطي
مستوى طبيعي	أقل من ١٢٠	أقل من ٨٠
مستوى ما قبل المرضي	١٢٠ - ١٣٩	٨٠ - ٨٩
المرحلة الأولى من فرط ضغط دموي (متوسط الشدة)	١٤٠ - ١٥٩	٩٠ - ٩٩
المرحلة الثانية من فرط ضغط دموي (شديد)	أكثر من ١٦٠	أكثر من ١٠٠

أفكار رياضية أساسية

النسبة هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه.

المعدل هو نسبة بين كميتين تستخدم فيهما وحدات قياس مختلفة.

معدل الوحدة هو مقارنة مع وحدة واحدة.

النسب المتساوية تقارن بين الكميات نفسها.

التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر.

مقياس الرسم هو النسبة للقياسات على الرسم إلى القياسات الحقيقية للأشياء.

النسبة المئوية هي نسبة تقارن عددًا إلى ١٠٠.

النسبة المئوية التزايدية هي النسبة المئوية لكمية تزايدية.

النسبة المئوية التناقصية هي النسبة المئوية لكمية تناقصية.

مشروع الوحدة

حل المسائل
افهم
خطط
حل
تحقق

صمم لوحة جدارية كبيرة واكتب عليها رسالة إيجابية. سوف تعمل على الورق أو على الحاسوب لتصميم هذه اللوحة الجدارية. سوف يبلغ المشروع درجته القصوى ببناء الجدار المفضل الذي حاز على تصويت الطلاب في غرفة الفصل.

التركيز على حل المسائل

تحديد المعلومات الناقصة:

تقييم المعلومات مهارة مهمة جدًّا لحل المسائل، وعلى الرغم من ذلك، فإنه في بعض الأحيان لا تعطى بعض المعلومات المهمة. ومن المهم أن تكون قادرًا على قراءة المسألة وفهم ما إذا كانت كل المعلومات المطلوبة لحل المسألة معطاة أم لا.

حدد المعلومات الإضافية التي سوف تحتاج إليها لحل المسألة.

بعض المسائل لا تتضمن معلومات ناقصة.

١ تريد فاتن شراء جهاز تسجيل بالتقسيط. أعطت البائع دفعة أولى ٢٨ دينارًا، واتفقت معه على دفع ٤٠ دينارًا كل شهر حتى تسدد الثمن كاملًا. اكتب المعادلة التي توضح المدة التي تحتاج إليها فاتن لدفع المبلغ كله.

٢ اتبعت سعاد الأسلوب نفسه لشراء مجموعة من أجهزة الراديو بعد أن دفعت ٤٠ دينارًا دفعة أولى وسوف تدفع ٧,٥٠٠ دنانير لمدة ٦ شهور. اكتب المعادلة موضحًا كلفة أجهزة الراديو.

٣ أهدت سعاد رفيقاتها أقراصًا مدمجة. العلبة التي تحتوي ١٠ أقراص مدمجة ثمنها ٢ دينار، أما العلبة التي تحتوي ٢٥ قرصًا ثمنها ٤,٧٥٠ دنانير. اكتب معادلة لإيجاد المبلغ المطلوب لشراء ٤٥ قرصًا مدمجًا.

٤ للمساعدة في دفع ثمن المشتريات، باعت سعاد جهاز تسجيلها القديم لصديقتها ليلى بمبلغ ١٠٥ دنانير. لتغطية المبلغ الذي تدين به ليلى لسعاد، سوف تدفع ليلى بعضًا من الأقساط المتوجبة لسعاد. اكتب المعادلة موضحًا عدد الأقساط التي تحتاج ليلى إلى دفعها.

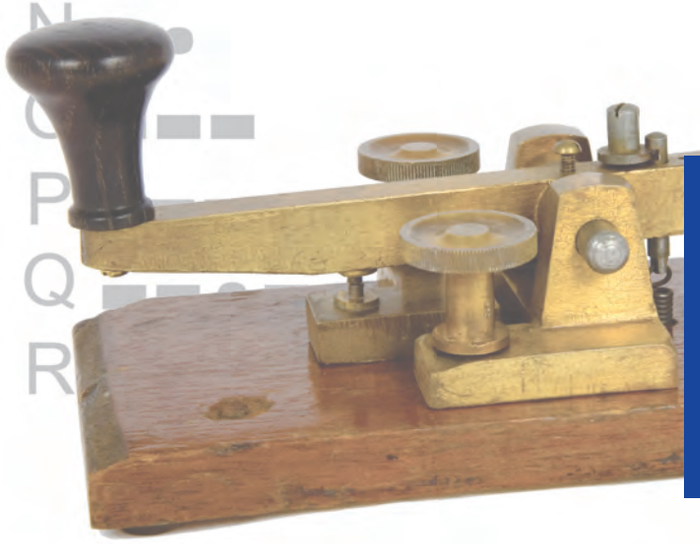
مشاركة في المعلومات

اختلفت طرق التواصل بين الناس مع مرور الزمن، فمن دق الطبول، والإرشادات الدخانية، ولغة الإشارات، إلى وسائل الاتصال السلكية واللاسلكية، التي تتيح للناس التواصل بسرعة ومن مسافات بعيدة. " Tele " كلمة إغريقية تعني «بعيد، على مسافة».

باختراع التلغراف عام ١٨٣٧، أصبحت سرعة التواصل توازي سرعة الضوء تقريبًا (٢٩٩ ٠٠٠ كم/ س أو ٨٣ ٠٥٦ متر/ ثانية).

أتاح اختراع ألكسندر غراهام بيل للهاتف وصول الصوت، الذي أصبح أكثر فعّالية من إرسال الرسائل عبر شيفرة «مورس». ثمّ تلا ذلك اختراعات كثيرة، كالراديو، والتلفزيون، والإنترنت، التي كانت نتاج الرغبة في وصول الأفكار والمعلومات سريعًا إلى جميع أنحاء العالم.

مع بدء الألفية الجديدة قد نرى وسائل اتصالات جديدة أكثر سرعة و فعالية.



١. ما أهمية أن يتم الاتصال بشكل سريع؟

٢. ما أجهزة الاتصال المختلفة التي تستخدمها؟

٣. ما وسائل الاتصال الممكنة التي يمكن أن تشاهدها في المستقبل؟

٩–١

ارتباط التناسبات والرسومات البيانية
Relating Proportions and Graphs

سوف تتعلم

- كيفية التمييز بيانيًّا بين العلاقات المتناسبة وغير المتناسبة.
- كيفية الربط بين ثابت التناسب والميل.

من الاستخدامات

- يجب أن يستخدم المهندسون المعماريون التناسبات في تصميمات أسطح المباني.

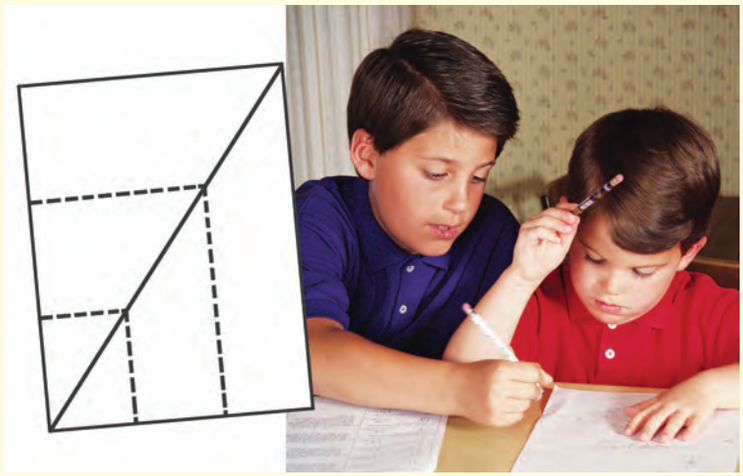
المصطلحات الأساسية

- ثابت التناسب
  Constant Of Proportionality
- الميل
  Slope

◄ **صلة الدرس** تعلمت سابقًا أن نسبتين متساويتين تكوِّنان تناسبًا، في هذا الدرس سوف تتعلم التناسبات من خلال الرسوم البيانية. ►

استكشف التناسبات

المستطيلات **الأدوات المستخدمة:** شريط متري، ورق بمقاس معين.



١ أحضر ورقًا مقاس ٢٠ سم × ٣٠ سم وارسم قطره. عين عشوائيًّا ثلاث نقاط متباعدة على هذا القطر، وارسمها بعناية حتى لا تخرج عن الخط.

٢ أنشىء ٣ مستطيلات كما هو مبيّن في الجدول المقابل، تكون نقطة القطر المختارة هي الرأس الأعلى إلى جهة اليمين لكل مستطيل.

المستطيل	١	٢	٣
الطول	٣	٦	١٢
العرض	٢	٤	٨

٣ نظم مخطط انتشار بيانات الجدول.

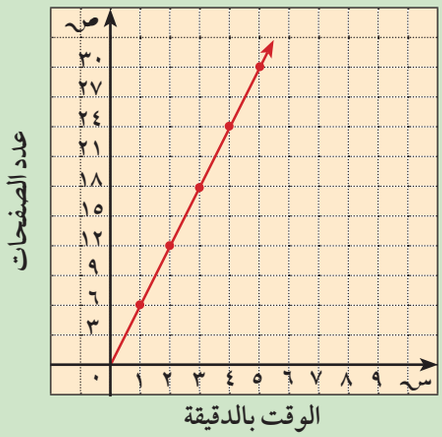
٤ أوجد الميل بين مجموعة من أزواج نقاط. صف أي أنماط تجدها.

تعلم ارتباط التناسبات والرسومات البيانية

في جدول النسب المتساوية، تجد أن أي نسبتين متساويتين تكوِّنان تناسبًا. يمكن أيضًا استنتاج علاقات أخرى من الجدول.

مثال (١)

يوضح الرسم البياني الوقت الذي يستغرقه إرسال نسخ من الورق عبر جهاز فاكس عندما يكون ذا جودة وسرعة عاليتين في الطبع. المعدل هو عدد الصفحات مقسومًا على عدد الدقائق. ما المعدل لكل زوج من الأعداد؟



هل تعلم؟

استخدم الفاكس (نسخ في وقت قصير) لنقل الصور في الثلاثينيات. كان الفاكس يستخدم موجات الراديو أكثر من خطوط الهاتف.

الحل:

في التمثيل البياني: ص = عدد الصفحات، س = عدد الدقائق

$$\frac{\text{٦ صفحات}}{\text{١ دقيقة}} = \text{٦ صفحات/ دقيقة.}$$

$$\frac{\text{١٢ صفحة}}{\text{٢ دقيقة}} = \text{٦ صفحات/ دقيقة.}$$

بالمثل $\frac{١٨}{٣} = ٦$، $\frac{٢٤}{٤} = ٦$ و $\frac{٣٠}{٥} = ٦$

نلاحظ أن $\frac{ص}{س} = ٦$ **وهو قيمة ثابتة.**

المعدل لكل زوج هو ٦ صفحات/ دقيقة.

إذا تفحصت قيم س، ص على الرسم البياني لمثال (١) تجد أن قيمة $\frac{ص}{س}$ متساوية لكل زوج من الأعداد.

$\frac{ص}{س} = \frac{٦}{١} = \frac{١٢}{٢} = \ldots = ٦$، لاحظ أن $\frac{ص}{س}$ أو ٦ هي ميل المستقيم وأن الخط يمر بنقطة الأصل.

القيمة $\frac{ص}{س}$ تسمى ثابت التناسب وعادة يرمز له بالحرف م.

مثال (٢)

(أ) استخدم المعدل السابق (ثابت التناسب). كم صفحة يمكن إرسالها في ٨ دقائق؟ وكم صفحة ترسل في ٢٠ دقيقة؟

الحل:

عدد الصفحات في ٨ دقائق = المعدل (ثابت التناسب) × عدد الدقائق

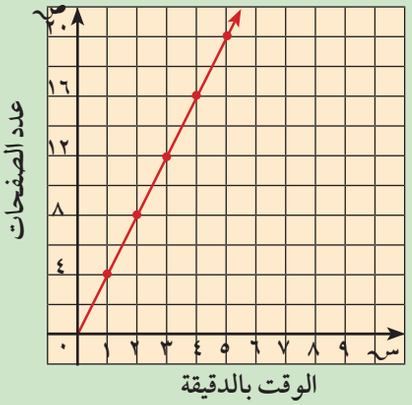
= ٦ × ٨ = ٤٨ صفحة

عدد الصفحات في ٢٠ دقيقة = المعدل × عدد الدقائق

= ٦ × ٢٠ = ١٢٠ صفحة

(ب) اكتب معادلة لوصف العلاقة.

ص = ٦س تصف عدد الصفحات ص التي ترسل في س دقيقة.



حاول أن تحل

١ يوضح الرسم البياني الوقت الذي يستغرقه إرسال نسخ من الورق عبر جهاز فاكس عندما يكون ذا جودة عالية في الطبع.

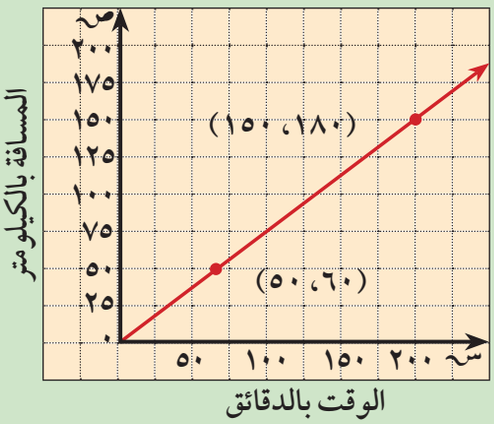
(أ) ما المعدل لكل زوج من الأعداد؟

(ب) كم صفحة يمكن إرسالها في ١٠ دقائق؟ في ٢٠ دقيقة؟

(جـ) اكتب معادلة لوصف العلاقة.

مثال (٣)

المسافة ص كيلومتر التي تقطعها سيارة في س دقيقة موضحة في الرسم البياني التالي:



(أ) كوّن جدول قيم للرسم البياني، ثم أوجد ثابت التناسب م.

الحل:

الوقت بالدقائق (س)	٦٠	١٢٠	١٨٠	٢٤٠	٣٠٠
المسافة بالكيلومتر (ص)	٥٠	١٠٠	١٥٠	٢٠٠	٢٥٠

ثابت التناسب م = $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٥}{٦}$ لكل نسبة

(ب) أوجد الميل لأي نقطتين على الخط. ما علاقة الميل بقيمة ثابت التناسب م؟

تذكر

الميل يمكن إيجاده بالقانون

$$\text{م} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

حيث $\text{س}_١ \neq \text{س}_٢$

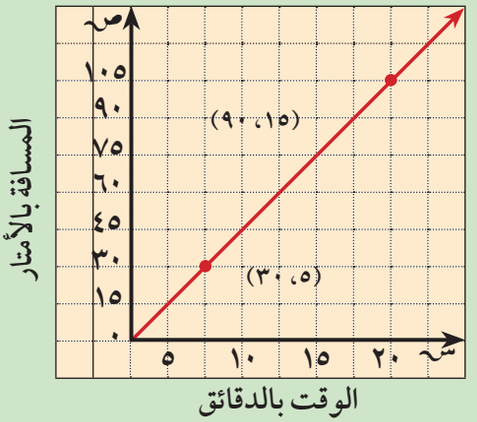
الحل:

$$\text{الميل} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

باستخدام النقطتين (٦٠، ٥٠)، (١٨٠، ١٥٠)

$$\text{الميل} = \frac{١٥٠ - ٥٠}{١٨٠ - ٦٠} = \frac{١٠٠}{١٢٠} = \frac{٥}{٦}$$، الميل هو $\frac{٥}{٦}$

الميل = ثابت التناسب م.



حاول أن تحل

٢ المسافة ص بالأمتار التي يقطعها زورق صغير في س دقيقة موضحة في الرسم البياني المقابل.

(أ) كوّن جدول قيم للرسم البياني، ثم أوجد قيمة ثابت التناسب م.

(ب) أوجد الميل باستخدام إحداثيات أي نقطتين على الخط

ما العلاقة التي تربط قيمة الميل بقيمة ثابت التناسب م؟

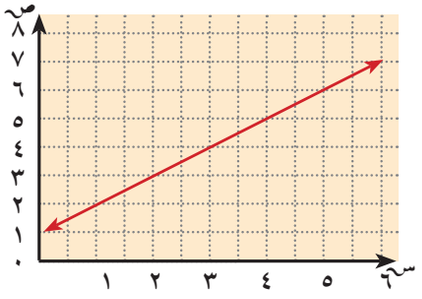
تحقق من فهمك

١ كيف يساعد الرسم البياني في إيجاد نسب متساوية؟

٢ إذا كان هناك دائمًا كميتان متناسبتان، فماذا تعرف عن الميل عندما تمثل الكميات بيانيًّا؟

حل المسائل والتفكير المنطقي

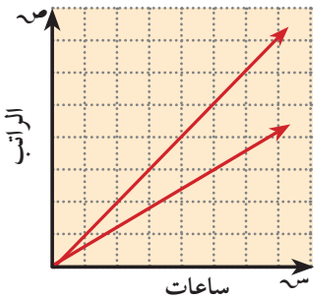
١ التواصل: هل يظهر الرسم البياني أدناه علاقة تناسب؟ فسر.



.....

.....

٢ التفكير الناقد: يقارن الرسم البياني المقابل بين معدلات الراتب لوظيفتين مختلفتين داخل شركة لمعدات الحاسوب.



ماذا يمثل التقاء الخطين عند بداية المحور الأفقي للساعات؟

.....

.....

ماذا يمثل التقاء الخطين عند بداية المحور الرأسي للراتب؟

.....

.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٩-٢

استخدام معدلات الوحدة
Using Unit Rates

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد معدلات الوحدة، واستخدام قوانين هذه المعدلات لحل مسائل التناسب.

من الاستخدامات

- يجب أن يكون لدى المصورين القدرة على استخدام قواعد المعدلات لتحديد السرعة التي يحتاجون إليها للفيلم.

◄ صلة الدرس لقد عرفت أن المعدلات هي النسب التي تقارن كميات ذات وحدات مختلفة، وأن معدلات الوحدة تقارن بوحدة واحدة. في هذا الدرس سوف تتعلم كيف تفيد معدلات الوحدة بصفة خاصة في حل التناسبات. ►

استكشف معدلات الوحدة

كم صورة في ثانية واحدة؟ **الأدوات المستخدمة:** آلة حاسبة

إن جهاز عرض صور يعرض ١٩٢ صورة من فيلم قديم صامت في ١٢ ثانية.

١ أكمل الجدول.

صور	١٦	٣٢	٦٤	١٢٨	١٩٢
ثوانٍ					١٢

٢ اكتب تناسبًا وحله لإيجاد عدد الصور التي يمكن عرضها في ثانية واحدة.

٣ ماذا يمثل معكوس ضربي الإجابة في البند رقم (٢)؟

٤ كيف يمكنك استخدام إجابتك في البند رقم (٢) لإيجاد الوقت الذي يستغرقه عرض ٤٨ صورة؟ ٨٠ صورة؟ أي عدد من الصور؟

تعلم استخدام معدلات الوحدة

المعدلات هي النسب التي تقارن كميات ذات وحدات مختلفة. ونكرر أن معدل الوحدة هو مقارنة كمية بوحدة واحدة. بعض الأمثلة عن معدلات الوحدات هي ٥٥ كيلومترًا كل ساعة، ٢٤ صورة في كل دورة فيلم، ٥ دنانير لكل ساعة رعاية أطفال.

يمكن استخدام معدلات الوحدة لحل التناسبات وتكوين قوانين المعدلات.

بمجرد إيجاد معدل الوحدة قم بتخزينه في ذاكرة الآلة الحاسبة، وهكذا يمكنك استعادته عندما تحتاج إليه.

مثال (١)

قررت شركة سينمائية تصوير فيلم وثائقي. استخدمت هذه الشركة بشير مساعد مصور ليعمل في الفيلم مدة ١٢ أسبوعًا. في نهاية الأسابيع الخمسة الأولى سوف يتقاضى بشير مبلغ ٢٢٥ دينارًا. كم سيكون أجره في نهاية الأسبوع الثاني عشر على هذا المعدل؟

الحل:

معدل الوحدة لأسبوع واحد = $\frac{٢٢٥}{٥}$ = ٤٥

سوف يحصل على ٤٥ دينارًا كل أسبوع.

ما يتقاضاه في ١٢ أسبوع = ٤٥ × ١٢ = ٥٤٠ اضرب معدل الوحدة بعدد الأسابيع.

سوف يحصل بشير على ٥٤٠ دينارًا.

حاول أن تحل

١ استخدمت الشركة نفسها عبدالله مساعد مخرج. حصل على مبلغ ٣٠٠ دينار في نهاية الأسابيع الخمسة الأولى. كم يكون المبلغ الذي سيناله في نهاية الأسبوع التاسع؟

مثال (٢)

علبة زبدة فستق وزنها ٤٥٤ جرامًا ثمنها ٧٢٠ فلسًا، وعلبة زبدة فستق أخرى وزنها ٣٤٠ جرامًا ثمنها ٥٨٠ فلسًا.

أيّ علبة يكون ثمنها أفضل للشراء؟

الحل:

ثمن جرام واحد من زبدة الفستق التي وزنها ٤٥٤ جرامًا = $\frac{٧٢٠ \text{ فلسًا}}{٤٥٤ \text{ جرامًا}}$ = ١,٥٨٦ فلس.

استخدم معدل الوحدة لإيجاد عبارة تربط الثمن والوزن من زبدة الفستق في العلبة الأولى.

ليكن و = وزن زبدة الفستق، س = الثمن فيكون س = ١,٥٨٦ × و

نجد ثمن العلبة الثانية التي وزنها ٣٤٠ جرامًا.

س = ١,٥٨٦ × ٣٤٠ = ٥٣٩,٢٤ فلسًا.

هذا الثمن أصغر من ٥٨٠ فلسًا، إذًا الأفضل شراء العلبة الأولى.

حاول أن تحل

٢ ثمن علبة تنظيف وزنها ١,٣ كجم يساوي ١,٧٥٠ دينار، وثمن علبة تنظيف أخرى وزنها ٢,١٠٠ كجم يساوي ٢,٦٠٠ دينار. أيهما من الأفضل شراؤها؟

الترابط بالمستهلك

غالبًا ما تباع كميات كبيرة بمعدلات منخفضة في المحال. لكن، في بعض الأحيان، فإن بعض المحال تعرض معدل الوحدة لسهولة المقارنة. لكن لوحظ أن معدلات الوحدة هذه تتأثر بالتخفيضات وببطاقات الخصم.

معلومة مفيدة

يمكنك في مثال (٢) إيجاد ثمن جرام واحد لكل علبة ومقارنة الأثمان.

مثال (٣)

معدل حركة الفيلم في آلة التصوير يقاس بعدد الصور في الثانية. معدل العرض المثالي هو ٢٤ صورة في الثانية. استخدم القاعدة: ف = ٢٤ن.

(أ) كم عدد الصور التي تعرض في ٢٠ ثانية؟

الحل:

ف = ٢٤ن — اكتب معادلة المعدل.

ف = ٢٤(٢٠) — عوض عن ن بـ ٢٠.

ف = ٤٨٠ — اضرب.

يمكن عرض ٤٨٠ صورة في ٢٠ ثانية.

(ب) كم من الوقت يستغرق عرض فيلم يتضمن ١٠٠٠ صورة؟

الحل:

ف = ٢٤ن

١٠٠٠ = ٢٤ن — عوض عن ف بـ ١٠٠٠.

ن = ٤١,٦٧ — اقسم كل طرف على ٢٤.

يستغرق عرض فيلم يتضمن ١٠٠٠ صورة نحو ٤٢ ثانية.

حاول أن تحل

٣ (أ) لتقديم حركة بطيئة في عرض الصور، يجب أن يكون معدل آلة التصوير أكثر من معدل العرض. افرض أن معدل آلة التصوير هو ٤٨ صورة في الثانية. استخدم القاعدة ف = ٤٨ن. كم عدد الصور التي يمكن عرضها في ٦٠ ثانية؟ وكم من الوقت يستغرق عرض ١٢٠٠ صورة؟

(ب) تسجل آلة تصوير فيديو نحو ٣٠ صورة كل ثانية. هذا المعدل يستخدم عندما يكون الفيديو جاهزًا. ما القانون الذي يستخدم لتعيين الوقت الذي يستغرقه تسجيل ٩٠٠٠ صورة؟ وما هو هذا الوقت؟

هل تعلم؟

إذا كان معدل آلة التصوير أكثر من معدل العرض فهذا يخلق حركة بطيئة، أما إذا كان أقل من معدل العرض فهذا يخلق حركة سريعة.

تحقق من فهمك

١ كيف يمكن تحويل المعدلات إلى معدلات وحدة؟

٢ ما التناسب الذي يتكافئ مع قانون المعدل م = ١٥ت؟

٣ ما العمليات التي تساعدك في قانون المعدل؟

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ **التواصل**: في إحدى ناطحات السحاب يقع الطابق ١٠٢ على ارتفاع ٣٨٢ مترًا والطابق ٥١ على ارتفاع ١٩١ مترًا. هل ارتفاع الطوابق متناسب ؟ فسر. .....

.....

٢ **المجلة**: أعط مثالين من مواقف حياتية تشمل إيجاد معدلات وحدة.

.....

٣ **التفكير الناقد**: لتصوير أحد الأفلام استخدمت آلة تصوير تستطيع التقاط ٩٦ صورة في الثانية. ما الفرق بين عدد الصور التي تستطيع آلة التصوير هذه التقاطها وعدد الصور التي تستطيع آلة تصوير عادية التقاطها في ٢٠ ثانية إذا كان المعدل ٢٤ صورة في الثانية؟ .....

٤ **التفكير الناقد**: يوجد في إحدى المدارس الكبرى نحو ١٠ آلاف طالب، والنسبة بين عدد الطلاب وعدد المدرسين ١:٢٥.

(أ) كم عدد المدرسين في هذه المدرسة؟ .....

(ب) تريد المدرسة أن تخفض النسبة بين عدد الطلاب وعدد المدرسين إلى ١:٢٣. كيف تستطيع المدرسة تحقيق ذلك؟ .....

٥ أيهما أفضل للشراء:

(أ) ١٥ حافظة بطاقات ثمنها ٠,٧٥٠ دينار أو ٨٠ حافظة من النوع نفسه ثمنها ٣,٥٠٠ دنانير؟

.....

(ب) $\frac{١}{٤}$ كيلوجرام بن ثمنه ٠,٥٤٠ دينار أو كيلوجرام من النوع نفسه ثمنه ٢,٣٠٠ دينار؟

.....

(جـ) ٢٠ أسطوانة حاسوب ثمنها ٣,٩٠٠ دنانير أو ١٢ أسطوانة من النوع نفسه ثمنها ٢,٦٠٠ دينار؟

.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية
- استخدم التفكير المنطقي
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط

٣-٩

حل المسائل باستخدام المعدلات والتناسبات

Problem Solving Using Rates and Proportions

◄ صلة الدرس تعلمت كيفية حساب معدلات الوحدة والتناسبات. في هذا الدرس سوف تستخدم هذه المفاهيم لحل المسائل. ►

سوف تتعلم

- كيفية حل المسائل باستخدام المعدلات والتناسبات.

من الاستخدامات

غالبًا ما تستخدم الممرضات التناسبات عندما تقوم بتجهيز المحاليل التي تدخل الوريد.

استكشف المعدلات والتناسبات

استخدمت آلة تصوير فائقة السرعة لتصوير مشهد ارتطام نموذج مصغر لقطار مدته $\frac{٣}{٤}$ الثانية. تلتقط آلة التصوير هذه ٨٠٠ صورة في الثانية. دام عرض المشهد بواسطة جهاز عرض ٦ ثوانٍ.

١ ما عدد الصور التي التقطتها آلة التصوير؟

٢ ما عدد الصور التي عرضها جهاز العرض في الثانية؟

٣ (أ) ما الزمن اللازم لتلتقط آلة التصوير ٢٠٠٠ صورة؟

(ب) ما الزمن اللازم ليعرض جهاز العرض هذه الصور؟

تعلم حل المسائل باستخدام المعدلات والتناسبات

مهارة حل المسائل أمر هام جدًّا في حل المسائل التي ترتبط بالمعدلات والتناسبات. غالبًا ما يكون من الأفضل تقسيم المسألة إلى خطوات مختلفة.

مثال

تصوير انفجار ذي تأثيرات خاصة بواسطة آلة تصوير ذات سرعة كبيرة، (معدل ٩٦٠ صورة كل ثانية)، يستغرق فقط $\frac{١}{١٢}$ من الثانية. عند عرض الفيلم الحقيقي استغرق المشهد ٥ ثوانٍ ليظهر بطريقة أضخم.

كم عدد الصور التي التقطت؟ وكم صورة يجب أن تعرض كل ثانية؟

الحل:

لدينا مدة الانفجار والسرعة التي صور بها الفيلم، ونريد أن نجد السرعة التي يعرض بها ليستغرق ٥ ثوانٍ.

أوجد عدد الصور التي التقطت في الفيلم، ثم استخدم الإجابة لإيجاد معدل العرض.

عدد الصور التي التقطت = $\frac{١}{١٢}$ ثانية × ٩٦٠ صورة/ ثانية = ٨٠ صورة.

يجب أن تعرض ٨٠ صورة في ٥ ثوانٍ.

عدد الصور التي تعرض كل ثانية = $\frac{٨٠}{٥}$ = ١٦ صورة بالثانية. اقسم.

يجب أن يكون معدل العرض ١٦ صورة في الثانية.

حاول أن تحل

١ صورت مؤثرات خاصة صغيرة لانهيار جسر بواسطة آلة تصوير ذات سرعة عالية (معدل ٢٤٠ صورة كل ثانية) في $\frac{١}{٢}$ ثانية. عندما يعرض ذلك في الفيلم الحقيقي لا بد أن يستغرق المشهد ٤ ثوانٍ، كم عدد الصور التي التقطت؟ وكم صورة يجب أن تعرض في الثانية؟

٢ تجمع النحلة العاملة رحيقًا كافيًا طوال أيام حياتها (نحو شهرين) لتصنع $\frac{١}{٢٠}$ كيلوجرام من العسل.

(أ) كم كيلوجرامًا من العسل سنحصل عليه من رحيق تم تجميعه بواسطة مستعمرة نحل تحتوي على ٢٠٠٠٠ نحلة عاملة؟

(ب) كم عدد علب العسل التي يمكن إنتاجها إذا كانت كل علبة تزن $\frac{١}{٢}$ كجم؟

تحقق من فهمك

١ هل يمكنك عمل تناسب من المثال أعلاه؟

٢ لماذا أدركنا أنه يجب تقسيم المسألة إلى خطوات أصغر؟

المرشد لحل المسائل (٩-٣)

قد يظهر الأشخاص أو الأشياء في الفيلم السينمائي بشكل أصغر أو أكبر من الحقيقة. إذا كان هناك شخص طوله ١٥٢ سنتيمترًا يقف بجوار لوحة إعلانية ارتفاعها ٢٤٤ سنتيمترًا، وتظهر اللوحة الإعلانية بارتفاع ٤٦ سنتيمترًا في الفيلم، فكم سيكون طول الشخص عند ظهوره في الفيلم؟

افهم

١ ما الشيء الذي يقف بجواره الشخص البالغ طوله ١٥٢ سنتيمترًا؟ .....

٢ ما ارتفاع اللوحة الإعلانية في الفيلم؟ .....

٣ هل سيظهر الشخص أكبر أم أصغر من اللوحة الإعلانية في الفيلم؟ .....

٤ ما المطلوب إليك إيجاده؟ .....

خطط

٥ ما النسبة التي تقارن الطول الحقيقي للشخص بالطول الحقيقي للوحة الإعلانية؟ .....

(أ) $\frac{١٥٢}{٢٤٤}$ (ب) $\frac{٢٤٤}{١٥٢}$ (جـ) $\frac{١٥٢}{٤٦}$

٦ افرض أن س تمثل طول الشخص في الفيلم، فما النسبة التي تقارن طول الشخص في الفيلم إلى طول اللوحة الإعلانية في الفيلم؟ .....

(أ) $\frac{٤٦}{س}$ (ب) $\frac{س}{٢٤٤}$ (جـ) $\frac{س}{٤٦}$

حل

٧ اكتب تناسبًا مستخدمًا النسب المتساوية التي تمثل طول الشخص إلى طول اللوحة الإعلانية.

.....

٨ حل التناسب لإيجاد س واكتب الإجابة. .....

تحقق

٩ كيف يمكنك التحقق من صحة إجابتك؟ .....

حلّ مسألة أخرى

١٠ يبلغ طول طفل ١٢٢ سنتيمترًا. يقف إلى جانب عمود ارتفاعه ٢١٤ سنتيمترًا. إذا كان العمود سيظهر بارتفاع ١٠٧ سنتيمترات في الفيلم؛ فكم سيكون طول الطفل عند ظهوره في الفيلم؟ .....

٩–٤

مقياس الرسم والنماذج

Scale Drawing and Models

سوف تتعلم

- كيفية استخدام المقاييس وإنشاء مقاييس للرسم.

من الاستخدامات

غالبًا ما يصنع فنانو المؤثرات الخاصة نماذج بمقياس رسم للمباني، والأشخاص، والحيوانات، والآليات لأفلامهم.

المصطلحات الأساسية

- مقياس رسم
Scale Drawing
- مضلعات متشابهة
Similar Polygons

صلة الدرس تعلمت كيف تتعامل مع النسب والتناسبات. والآن سوف تستخدم هذه المفاهيم لتفهم كيفية صنع النماذج والرسومات باستخدام مقياس الرسم.

استكشف المقياس

تشابك المستطيلات

الأدوات المستخدمة: ورق رسم بياني، لوحة رسم

١ ارسم مستطيلًا على لوحة الرسم أو على ورقة رسم بياني. قس الطول والعرض.

٢ اضرب الطول في عدد معين، واضرب العرض في العدد نفسه.

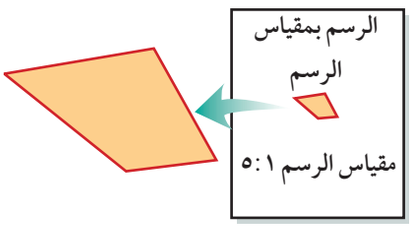
٣ ارسم مستطيلًا آخر بالقياسات التي حصلت عليها، أي له الشكل نفسه ولكن ليس بالمقاس نفسه.

٤ أوجد النسبة بين الطولين والنسبة بين العرضين لكل من المستطيلين. ماذا تلاحظ؟

٥ ارسم عدة مستطيلات بالطريقة نفسها بحيث يكون لها الشكل نفسه ولكن ليست بالمقاس نفسه. أوجد النسب لطولين والنسب لعرضين بين كل مستطيلين. ماذا تلاحظ؟

تعلم المقياس، مقياس الرسم، النماذج

يوضح الشكل المقابل **مقياس رسم** شكل شيء معين لكن ليس بمقاسه الحقيقي.



مقياس الرسم هو النسبة بين المقاسات في الرسم والمقاسات الحقيقية.

يُكتب الطول في الرسم دائمًا قيمة أولى في النسبة.

الأبعاد في الرسم هي تصغير أو تكبير بالنسبة نفسها أو بمقياس الرسم. إذا كانت القيمة الأولى للنسبة هي الأصغر، فإن مقياس الرسم يسمى تصغيرًا. أما إذا كانت القيمة الأولى للنسبة هي الأكبر، فإن مقياس الرسم يسمى تكبيرًا.

غالبًا ما يستخدم مقياس الرسم عندما نفحص الكائنات الميكروسكوبية.

مثال (١)

تعرف أكبر بكتيريا اكتشفت بواسطة علماء الكائنات الدقيقة باللولؤة الكبريتية من ناميبيا Thiomargarita namibiensis وطولها ٠,٧٥ مم تقريبًا. يراد صنع رسم لهذا النوع من البكتيريا بمقياس رسم ١٠٠ مم:١ مم. ما طول البكتيريا في الرسم؟

الحل:

$$\text{مقياس الرسم} = \frac{\text{الطول في الرسم}}{\text{الطول الحقيقي}}$$

$$\frac{\text{١٠٠ مم}}{\text{١ مم}} = \frac{\text{س مم}}{\text{٠,٧٥ مم}}$$

١س = ١٠٠ × ٠,٧٥ استخدم الضرب التقاطعي.

س = ٧٥ اضرب.

طول البكتيريا في الرسم ٧٥ مليمترًا.

غالبًا ما يستخدم مقياس رسم في التصميمات الهندسية للمباني والأشكال. عند صنع مقياس الرسم، فإنه من المهم اختيار مقياس رسم مناسب.

مثال (٢)

افرض أنك تريد صنع تصميم بمقياس رسم لنموذج مدينة ذي أبعاد ٦ أمتار × ١١ مترًا. اختر مقياس رسم يسمح لك بالرسم على لوحة من الورق أبعادها ٢٤ سم × ٤٢ سم.

الحل:

نعلم أن مقياس الرسم = $\frac{\text{الطول في الرسم}}{\text{الطول الحقيقي}}$

فإذا استخدمنا ٤ سم لكل ١ متر

يكون مقياس الرسم = $\frac{\text{٤ سم}}{\text{١ متر}}$

حيث إن:

الطول في الرسم =مقياس الرسم × الطول الحقيقي.

لذلك عندما يكون الطول الحقيقي ١١ مترًا

فإن الطول في الرسم = $\frac{\text{٤ سم}}{\text{١ متر}}$ × ١١ م = ٤٤ سم.

وهذا غير ملائم لأبعاد الورقة.

هل تعلم؟

صنع نماذج للصور المتحركة يتطلب قدرًا كبيرًا من التفاصيل حتى تبدو حقيقية على الشاشة.

نحاول أن نستخدم ٣,٥ سم لكل ١ متر.

فيكون مقياس الرسم = $\frac{\text{٣,٥ سم}}{\text{١ متر}}$

لذلك عندما يكون الطول الحقيقي ٦ أمتار

فإن الطول في الرسم= $\frac{\text{٣,٥ سم}}{\text{١ متر}}$ × ٦ م = ٢١ سم

وكذلك عندما يكون الطول الحقيقي ١١ مترًا

فإن الطول في الرسم= $\frac{\text{٣,٥ سم}}{\text{١ متر}}$ × ١١ م = ٣٨,٥ سم

معلومة مفيدة

لتقدير مقياس الرسم يمكنك أن تستفيد من:

$\frac{\text{أصغر طول في الرسم}}{\text{أصغر طول حقيقي}}$

بالتالي إذا استخدمنا مقياس رسم ٣,٥ سم لكل ١ متر تكون أبعاد الرسم ٢١ سم × ٣٨,٥ سم

وهي مناسبة لأبعاد اللوحة.

حاول أن تحل

١ افرض أنك تريد صنع تصميم هندسي لحديقة أبعادها ٤٠ م × ٥٠ م. اختر مقياس رسم يسمح لك بالرسم على لوحة أبعادها ٨ سم × ١٠ سم.

٢ تم صنع نموذجين للمركب عينه: النموذج الأول استخدم فيه مقياس الرسم ١ : ٢٤٠٠، والنموذج الآخر استخدم فيه مقياس الرسم ١ : ٣٠٠٠. أي النموذجين سيكون أكبر؟ فسر إجابتك.

تحقق من فهمك

١ ما ميزات استخدام مقياس الرسم؟

٢ ماذا يحدث للرسم عند تغيير مقياس الرسم من ١ سم: ١٠ أمتار إلى ١ سم: ٤٠ مترًا؟ وعند تغييره إلى ١ سم: ٢ متر؟

٣ كيف يمكن لمقياس الرسم المستخدم في رسم شكل أو عمل خريطة أن يساعدنا في إيجاد المقاس الحقيقي أو المسافة الحقيقية؟

٤ كيف تستطيع إيجاد مقياس الرسم لخريطة غير مطبوع عليها مقياس الرسم؟

٥ ما أهمية أن ترسم خريطة طريق مستخدمًا مقياس الرسم؟

٦ ما أوجه الشبه بين الأشكال المرسومة بمقياس الرسم والأشكال المتشابهة؟

الحساب الذهني

في بعض الأحيان يمكنك أن تستخدم الحساب الذهني لضرب مقياس الرسم في المسافة التقريبية على الخريطة.

غذاؤك... هويتك

ما هو طعامك المفضل؟ وما هي المكونات التي يتضمنها؟ هل مذاقه حلو أم مالح؟

هل يتكون معظمه من الخضراوات، أم من الفاكهة أم من الخبز، أم من اللحوم، أم شيء آخر؟ هل طعامك صحّيّ؟ هل يعطيك الطاقة اللازمة أم أنه يقلل من قدرتك الجسدية؟

هل يحتوي على بعض المكونات التي قد تسبب لك حساسية؟ كان ممكنًا الإجابة عن بعض من هذه التساؤلات كان مقبلًا قبل عام ١٩٩٠ وليس كلها.

منذ عام ١٩٩٠، بعد اكتشاف المعلومات الغذائية وتأثير التعليم، بدأت مطاعم الوجبات السريعة بتقديم معلومات غذائية عن الأطعمة مثل الهامبورجر، والبطاطا وغيرها. المعلومات الغذائية أيضًا مطلوبة للأصناف التي نشتريها من محلات البقالة. يحتاج كل شخص إلى كميّة معينة من المواد الغذائية يوميًّا متوقفًا على كمية السعرات الحرارية التي يحتاج إليها الشخص. الكمية المطلوبة من كل مادة غذائية هي القيمة اليومية للحصول على ٢٠٠٠ سعرة حرارية.

قراءة البيانات على الأطعمة الجاهزة لمعرفة فوائدها الغذائية يمكنها أن تساعدك في أن تقرر نوعية الطعام الذي لا بد أن تأكله لكي يمدك بالطاقة اللازمة للقيام بنشاطاتك المختلفة.

١ صف غذاءك المفضل، وأعط وصفًا تفصيليًّا قدر الإمكان عن القيمة الغذائية لمكوناته.

٢ لماذا يكون من المهم تنظيم قائمة توضح مكونات الطعام؟

٥–٩

حل مسائل باستخدام النسب المئوية
Solving Problems Using Percents

سوف تتعلم

- كيفية استخدام التناسبات والمعادلات لحل مسائل النسب المئوية.

من الاستخدامات

- يحل المستهلكون مسائل النسب المئوية عند تسوقهم؛ وذلك لصنع اختيارات غذائية.

◄ **صلة الدرس** تعلمت في السابق أن تحول النسبة المئوية إلى كسور اعتيادية وعشرية، والآن سوف تتعلم طرائق مختلفة لحل مسائل النسب المئوية. ►

استكشف النسبة المئوية

يبيّن الجدول أدناه الأنشطة التي تقوم بها في اليوم الواحد والوقت الذي تستغرقه في كل نشاط.

النشاط	النوم	المذاكرة	الطعام	الرياضة	مشاهدة التلفاز	العمل
الوقت من ٢٤ ساعة	٨	٢	٣	١	٤	٦
النسبة						
النسبة المئوية						

١ اكتب النسبة التي تقارن بين مقدار الوقت الذي تقضيه في كل نشاط خلال ٢٤ ساعة.

٢ حول كل نسبة إلى نسبة مئوية.

٣ استخدم التناسب لإيجاد مقدار الوقت الذي تستغرقه في النوم في الأسبوع، في السنة.

٤ ما الطريقة الأخرى التي يمكنك استخدامها لإيجاد مقدار الوقت الذي تستغرقه نائمًا في الأسبوع الواحد؟

تعلم حل مسائل باستخدام النسب المئوية

يمكن حل مسائل عن النسبة المئوية باستبدال المعلومات المعطاة في التناسب أدناه.

يمكن حل مسائل النسبة المئوية أيضًا بكتابة معادلة.

مثال:

ما العدد الّذي يمثل ٢٠ ٪ من ٢٥٠٠؟

$$\text{النسبة المئوية} \rightarrow \frac{٢٠}{١٠٠} = \frac{\text{س}}{٢٥٠٠} \leftarrow \frac{\text{جزء}}{\text{كل}}$$

$$١٠٠\,\text{س} = ٥٠\,٠٠٠$$

بالضرب التقاطعي.

$$\text{س} = ٥٠٠$$

بقسمة طرفي المعادلة على ١٠٠.

معلومة

النسبة المئوية ٢٠٪ تساوي الكسر $\frac{٢٠}{١٠٠} = \frac{٢}{١٠} = \frac{١}{٥}$

مثال (١)

يجب أن يتناول الأشخاص الذين تتراوح أعمارهم ما بين ١١ و٢٤ سنة وجبات غذائية تحتوي على ١٢٠٠ ملجم من الكالسيوم يوميًّا. يحتوي كوب من السبانخ المطهية على ٢٧٦ ملجم من الكالسيوم أي ٢٣٪ من كمية الكالسيوم المطلوبة يوميًّا. يمكن استخدام أي عدد من هذه الأعداد الثلاثة لإيجاد تناسب أو معادلة.

(أ) ما العدد الذي يساوي ٢٣٪ من الـ ١٢٠٠؟

الحل:

طريقة التناسب: الجزء / الكل ← $\frac{\text{س}}{١٢٠٠} = \frac{٢٣}{١٠٠}$ ← النسبة المئوية عوِّض في التناسب.

$١٠٠\text{س} = ٢٧٦٠٠$ استخدم الضرب التقاطعي.

$\text{س} = ٢٧٦$ اقسم كلًّا من جانبي المعادلة على ١٠٠.

طريقة المعادلة:

العدد	الذي يعادل	٢٣٪	من	١٢٠٠	
↓	↓	↓	↓	↓	
س	=	٢٣٪	×	١٢٠٠	اكتب المعادلة.
س	=	٠,٢٣	×	١٢٠٠	حوِّل ٢٣٪ إلى صورتها العشرية.
س	=	٢٧٦			اضرب.

تذكر

الصورة العشرية لِـ ٢٣٪ هي ٠,٢٣

تذكر

تُحل مثل هذه التناسبات باستخدام الضرب التقاطعي.

(ب) ما النسبة المئوية التي يمثلها العدد ٢٧٦ من العدد ١٢٠٠؟

الحل:

سوف نستخدم طريقة التناسب:

الجزء / الكل ← $\frac{٢٧٦}{١٢٠٠} = \frac{\text{س}}{١٠٠}$ ← النسبة المئوية عوِّض في التناسب.

$١٢٠٠\text{س} = ٢٧٦٠٠$ استخدم الضرب التقاطعي.

$\text{س} = ٢٣$ اقسم كلًّا من الطرفين على ١٢٠٠.

٢٧٦ هي ٢٣٪ من ١٢٠٠.

(جـ) ما العدد الذي ٢٣٪ منه هو ٢٧٦؟

الحل:

سوف نستخدم طريقة المعادلة.

٢٧٦ هو ٢٣٪ من أي عدد؟

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

٢٧٦ = ٢٣٪ × س — اكتب معادلة.

٢٧٦ = ٠,٢٣ × س — حوِّل ٢٣٪ إلى الصورة العشرية.

١٢٠٠ = س — اقسم كلًّا من الطرفين على ٠,٢٣.

٢٧٦ هو ٢٣٪ من ١٢٠٠.

حاول أن تحل

١ **حل كلًّا من المسائل الآتية بالطريقة التي تختارها.**

(أ) ما النسبة المئوية للعدد ٢٠ من ١٦٠؟

(ب) ما العدد الذي يساوي ٤٥٪ من العدد ٨٠؟

(جـ) ما العدد الذي ٨٠٪ منه هو ٧٢؟

الحساب الذهني

فكر: عندما تترجم، فكر في أن ٥٠٪ من ٢ هو ١. بدِّل كلًّا من هذه الأعداد بالأعداد التي في المسألة باستخدام متغير للقيمة التي تريد إيجادها.

يمكن أيضًا استخدام المعادلات والتناسبات لحل مسائل تتضمن نسبًا مئوية أكبر من ١٠٠ أو أصغر من ١.

مثال (٢)

قدّر سعر لوحة فنية أثرية بـ ١ ٤٥٠ دينارًا قبل عرضها في المزاد العلني. بيعت هذه اللوحة بـ ٨٨٥٪ من السعر المقدّر لها.

ما السعر الذي بيعت به؟

الحل:

حل مثال (٢) باستخدام طريقة المعادلة.

ما العدد الذي يمثل ٨٨٥٪ من ١٤٥٠؟

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

س = ٨٨٥٪ × ١٤٥٠ — اكتب المعادلة

س = ٨,٨٥ × ١٤٥٠ — اكتب النسبة المئوية في الصورة العشرية

س = ١٢٨٣٢,٥ — اضرب

٨٨٥٪ من ١٤٥٠ هو ١٢ ٨٣٢,٥. بيعت اللوحة الفنية بـ ١٢ ٨٣٢,٥ دينارًا.

فكرة مفيدة

لحل المسائل

إذا كنت ستحل هذه المسألة باستخدام التناسب، فإن الجزء سيكون أكبر من الكل لأن النسبة المئوية أكبر من ١٠٠.

حاول أن تحل

٢ **إذا كانت النسبة المئوية للمادة الفعّالة في محلول لإبادة الحشرات هي ٠,١٢٥٪، فما كمية المحلول الذي يحتوي على ٤ جرامات من هذه المادة الفعّالة؟**

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ **التواصل:** إذا كان العدد ١٨ يمثل ١٢٥٪ من عدد ما، فهل هذا العدد أكبر أم أصغر من ١٨؟ ولماذا؟

.....

.....

٢ **التفكير الناقد:** ماذا يكون ٥٠٪ من ٦٠٪ من عدد ما؟

.....

.....

٣ **التحضير للاختبار:** أضف ٢٠٪ من عدد إلى العدد نفسه فتحصل على عدد جديد. ما النسبة المئوية التي يجب أن تطرحها من العدد الجديد للحصول على العدد الأصلي قبل إضافة الـ ٢٠٪؟

(أ) $١٦\frac{٢}{٣}$٪ (ب) ٢٠٪

(جـ) ٢٥٪ (د) ليس أي مما سبق صحيحًا

.....

.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٦-٩

تقدير النسب المئوية
Estimating Percents

سوف تتعلم

- كيفية تقدير النسب المئوية للأعداد، وإيجاد النسبة المئوية لعدد من عدد آخر.

من الاستخدامات

- يحتاج الموظفون أن يعرفوا تقريبًا قيمة النسبة المئوية المقدرة على فواتيرهم.

كل فاتورة بقيمة ١٠٠ دينار تستوجب ١٥ دينارًا بدل خدمة.

◄ **صلة الدرس** في كثير من الأحيان، عندما نستخدم النسب المئوية قد لا نحتاج إلى إجابة دقيقة. في هذا الدرس سوف تتعلم كيفية تقدير النسب المئوية. ►

استكشف تقدير النسب المئوية

كم تدفع بدل خدمة؟

«بدل الخدمة» تعطى عادة مقابل الخدمة التي تقدمها المطاعم.
إذا بلغت قيمة فاتورة في مطعم ٨ دنانير، فإن بدل الخدمة الجيدة غالبًا ما يكون ١٥٪ من قيمة الفاتورة، وفي بعض الحالات ٢٠٪ مقابل الخدمة الممتازة.

١ (أ) أوجد ١٠٪ من الفاتورة. كيف يمكنك إيجاد ٥٪ منها؟
(ب) كيف يمكنك إيجاد ١٥٪ من الفاتورة، و٢٠٪ منها؟

٢ قدِّر بدل خدمة مناسبًا للمبالغ التالية مع توضيح:
(أ) ٢٣,٧٨٠ دينارًا مع الخدمة الجيدة.
(ب) ٣٧,٤٥٠ دينارًا مع خدمة ممتازة.

٣ بلغت قيمة فاتورة عشاء تناوله زوجان ٣٢ دينارًا، وقد تركا ٨ دنانير بدل خدمة. ما النسبة المئوية لبدل الخدمة الذي تركاه؟ وهل هي مناسبة؟ ولماذا؟

٤ يستخدم عمر عادة عملية القسمة لحساب بدل الخدمة على فواتيره. ما الطرائق التي يمكن أن يستخدمها لهذه العملية؟ ولماذا هي مناسبة؟

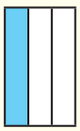
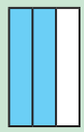
تعلم تقدير النسب المئوية

عند تقدير النسب المئوية، غالبًا ما يساعدك استخدام أعداد مناسبة. لإيجاد النسبة المئوية للعدد ١٦ من ٣٠، فكر في النسبة في صورة ١٦ من ٣٢ أو ١٥ من ٣٠. كل زوج من الأعداد المناسبة يعطي التقدير نفسه $\frac{١}{٢}$ أو ٥٠٪.

معلومة

في القسمة يفضل تقدير المقسوم والمقسوم عليه نحو أكبر قيمة أو أصغر قيمة معًا.

يمكن أن يساعدك استخدام الكسور الاعتيادية التي تعطي قيمًا قريبة لنسب مئوية معطاة.

$\frac{١}{٤} = ٪٢٥$	$\frac{١}{٢} = ٪٥٠$	$\frac{٣}{٤} = ٪٧٥$	$\frac{١}{٣} = ٪٣٣\frac{١}{٣}$ 
$\frac{٢}{٣} = ٪٦٦\frac{٢}{٣}$ 	$\frac{١}{٥} = ٪٢٠$	$\frac{٢}{٥} = ٪٤٠$	$\frac{٣}{٥} = ٪٦٠$
$\frac{٤}{٥} = ٪٨٠$	$\frac{١}{١٠} = ٪١٠$	$\frac{٣}{١٠} = ٪٣٠$	$\frac{٧}{١٠} = ٪٧٠$

مثال (١)

قدّر ٢٤٪ من ٨١ .

الحل:

٢٤٪ قريبة من ٢٥٪، ٨١ قريبة من ٨٠. اختر أعدادًا مناسبة.

$٢٥٪ = \frac{١}{٤}$ حوِّل النسبة المئوية إلى كسر اعتيادي.

$\frac{١}{٤} \times ٨٠ = ٢٠$ أوجد $\frac{١}{٤}$ الـ ٨٠.

٢٤٪ من ٨١ حوالى ٢٠.

حاول أن تحل

١ (أ) قدِّر ٧٤,٥ ٪ من ٢٣٩.

(ب) قدِّر ٦٦٪ من ٨٩.

الحساب الذهني

إذا كنت تعرف الكسور الاعتيادية التي توازي قيمتها تقريبًا قيمة النسبة المئوية، فتقديرك غالبًا ما يكون أسهل.

مثال (٢)

إذا علمت أن حاجة الإنسان الراشد من مادة البوتاسيوم هي ٤٠٠٠ ملجم يوميًّا. إذا كانت كل علبة عصير برتقال من ٥٠٠ ملجم تحتوي على ١١٪ من البوتاسيوم، قدّر كمية مليجرامات البوتاسيوم في كل علبة؟

١١٪ قريبة من ١٠٪ = $\frac{١}{١٠}$، $\frac{١}{١٠}$ من ٥٠٠ هو ٥٠.

تحتوي علبة عصير البرتقال نحو ٥٠ ملجم من البوتاسيوم.

حاول أن تحل

٢ كما سبق وعلمت أن الإنسان يحتاج إلى ٤٠٠٠ ملجم من البوتاسيوم يوميًّا. إذا كان كل ٣٤٠ مليلترًا من عصير الجريب فروت يحتوي على ٢٪ من حاجة الإنسان إلى هذه المادة، قدّر كمية مليجرامات هذه المادة في عصير الجريب فروت؟

معلومة

نرمز إلى تقريبًا بالرمز ≈

مثال (٣)

قام بعض من الطلاب في إحدى الرحلات المدرسية بشراء وجبات غداء مكونة من الخضار، اختار ٢٣ طالبًا أو ما يعادل ٩٪ من إجمالي عدد الطلاب أن يتناولوا السمك. قدر العدد الإجمالي للطلاب الذين اختاروا وجبات مكونة من الخضار.

الحل:

٩٪ هي نحو ١٠٪ أو $\frac{١}{١٠}$.

لذلك ٢٣ = $\frac{١}{١٠}$ س

س = ١٠ × ٢٣

س = ٢٣٠

إذًا عدد الطلاب الكلي = ٢٣٠ طالبًا تقريبًا.

عدد الطلاب الذين قاموا بشراء وجبات مكونة من الخضار = ٢٣٠ – ٢٣ = ٢٠٧ طلاب.

حاول أن تحل

٣ (أ) سجل فريق كرة سلة ٦٣ رمية من أصل ١٩٠. ما النسبة المئوية للرميات التي سجَّلها الفريق؟

(ب) إن ٤٨٪ تقريبًا من الطلبة أو ١٢٥ طالبًا ذهبوا في رحلة مدرسية؛ قدّر عدد طلاب المدرسة الكلي.

الحساب الذهني

فكر: ما العدد الذي $\frac{١}{١٠}$ منه يساوي ٢٣؟

عند إيجاد النسب المئوية لمنطقة ما، غالبًا ما تستخدم التقديرات.

مثال (٤)

قدر النسبة المئوية للمنطقة المظللة.

الحل:

هي تقريبًا ٥٥٪ لأنها أكثر قليلًا من الـ ٥٠٪.

حاول أن تحل

٤ قدر النسبة المئوية للمنطقة المظللة.

تحقق من فهمك

١ ما المواقف التي يكون من الأنسب فيها تقدير النسبة المئوية؟

٢ فسر كيف أن تقديرك لـ ١٠٪ من عدد ما يساعدك في تقدير ٥٪ من العدد، وتقدير ١٥٪ من العدد نفسه؟ أعط أمثلة.

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ **التفكير الناقد:** لاحظ مدرب كرة المضرب أن أنور عندما تكون ضربات إرساله الأولى ناجحة بنسبة ٨٥٪، فإنه يفوز في المباراة. وفي المباراة الحالية كانت ٧٣ ضربة إرسال من ٩٨ ناجحة؟ برّر إجابتك.

.....

.....

٢ **المجلة:** أي النسب المئوية، في اعتقادك، تعد الأسهل في استخدامها عند التقدير؟ فسر اختياراتك.

.....

.....

٣ **التواصل:** قدر كلًّا مما يأتي، ووضح كيف أوجدت تقديرك.

(أ) ١٤٨٪ من ٩٧ (ب) ٩٠,٠٪ من ٤٢٣٠

.....

.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

حل المسائل باستخدام النسب المئوية
Problem Solving Using Percents

السعر صحيح

عندما تشاهد الإعلانات في الصحف والمجلات وعلى التلفاز ترى عدة نماذج عن الإستراتجية المتبعة لجذب الزبائن.

يعلنون مثلًا عن:

مبيعات «العودة إلى المدرسة»، مبيعات «مهرجان التسوق»...

وتُعطى تخفيضات لتشجيع الشراء بالجملة.

تعطي بعض الشركات «بطاقات خصم» لتشجيعك على شراء منتجاتهم بدلًا من منتجات الشركات المنافسة أو لتعريفك على منتجاتهم الجديدة. تعتمد بعض الشركات على إستراتجية معينة في تسعير السلع لدفعك إلى الشراء، مثلًا ثمن المبيع البالغ ٩٩,٩٨٠ دينارًا، أو ٩٩,٩٩٠ دينارًا هو أكثر استقطابًا للزبائن من ثمن المبيع البالغ ١٠٠ دينار.

تمنح بعض الشركات بطاقات تخولك الشراء الآن والدفع لاحقًا. أسعار بعض المنتجات تبقى دائمًا مخفضة، ولكن هل أسعار التخفيضات في الواقع هي أسعار جيدة للشراء؟

١ لماذا تضع الشركة خصمًا على المشتريات بالجملة؟

٢ كيف يمكن لشركة أن تغطي مصاريف الخصومات والبطاقات التي تمنحها لمشتريات إنتاجها؟

٣ لماذا باعتقادك سعر ٩٩,٩٩٠ دينارًا هو أكثر استقطابًا من سعر ١٠٠ دينار؟

٧-٩

النسبة المئوية التزايدية
Percent Increase

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد النسبة المئوية لتزايد عدد.
- كيفية إيجاد الناتج أو القيمة الأصلية إذا أعطيت النسبة المئوية للزيادة.

من الاستخدامات

يحسب مدير أحد المحال التجارية السعر القطاعي(المفرق) للسلع معتمدًا على التكلفة الكلية (سعر الجملة) والنسبة المئوية المضافة.

المصطلحات الأساسية

◄ النسبة المئوية للتزايد
Percent Increase

◄ صلة الدرس تعلمت في السابق النسبة المئوية، والآن سوف تتعلم إيجاد النسبة المئوية للتزايد. ►

استكشف النسبة المئوية التزايدية

هكذا هي الضريبة! **الأدوات المستخدمة:** آلة حاسبة

١ ما نسبة الضريبة الجمركية في الدولة التي تعيش فيها؟ وإذا لم يكن هناك ضريبة محددة استخدم ٦,٥٪.

٢ إذا كان ثمن جهاز حاسوب ١٨٠,٧٥٠ دينارًا، فما قيمة الضريبة الجمركية المتوجب دفعها؟

٣ أضف الضريبة الجمركية على السعر الأصلي، وخزن الناتج على الآلة الحاسبة.

٤ ما النسبة المئوية للضريبة الجمركية على ثمن الجهاز؟

٥ أضف ١٠٠٪ على النسبة المئوية للضريبة الجمركية. والآن حاول إيجاد هذه النسبة من ثمن الجهاز. ماذا يمثل هذا العدد؟

٦ قارن بين هذه القيمة والقيمة المخزّنة على الآلة الحاسبة، وفسر لماذا هما متساويتان.

تعلم النسبة المئوية التزايدية

يشتري متجر بضائع بسعر الجملة ولكنه يبيعها بسعر أعلى، وهذا يسمى سعر المبيع بالمفرق. فرق السعر بين سعر الجملة والسعر القطاعي يمكن أن يستخدمه صاحب المتجر لدفع العمالة والنفقات وتحقيق الأرباح. الفرق بين سعر الجملة والسعر القطاعي عادة ما يمثل بنسبة مئوية تسمى **النسبة المئوية التزايدية**.

لإيجاد القيمة النهائية أضرب القيمة الأصلية في (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد).

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

لذلك، يمكنك القسمة لإيجاد القيمة الأصلية إذا كنت تعلم القيمة النهائية.

مثال

بعد التوسعات الجديدة في إحدى المدارس المتوسطة، ازداد عدد الطلاب المسجلين فيها إلى ٤٩٥ طالبًا أي بنسبة ١٢ ٪ زيادة عن السنة الماضية. ما عدد الطلاب الذين سجلوا السنة الماضية؟ تحقق من إجابتك باستخدام الآلة الحاسبة.

الحل:

عدد الطلاب الذين سجلوا السنة الماضية = س (العدد الأصلي)

وهذا العام = ٤٩٥ (العدد النهائي)

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد).

هناك ١٢٪ زيادة في عدد الطلاب هذا العام عن العام السابق. هذا يعني أن

١٠٠٪ + ١٢٪ = ١١٢٪ من عدد الطلاب المسجلين في العام الماضي.

٤٩٥ هي ١١٢٪ من أي عدد؟

٤٩٥ = ١,١٢ × س — اكتب المعادلة.

$\frac{٤٩٥}{١,١٢} = \frac{١,١٢ س}{١,١٢}$ — اقسم الطرفين على ١,١٢.

س = ٤٤١,٩٦

كان هناك ٤٤٢ طالبًا مسجلًا في العام الماضي.

يمكنك التأكد من الإجابة مستخدمًا الآلة الحاسبة.

٤٩٥ – ٤٤٢ = ٥٣ طالبًا زيادة. هل ٥٣ هي ١٢٪ من ٤٤٢؟

٥٣ ÷ ٤٤٢ = ٠,١١٩٩٠٩٥٠٢

٠,١١٩٩ قريبة جدًّا من ١٢٪.

حاول أن تحل

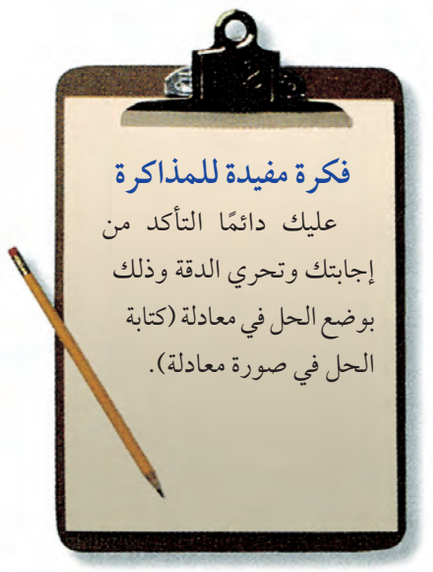
١ بلغ عدد المشتركين في جريدة محلية هذا العام ٦٢٠٠ مشترك، وبنسبة ٣٥٪ زيادة عن العام الماضي. قدّر عدد المشتركين في العام الماضي؟

تحقق من فهمك

١ لماذا يمكنك إيجاد الثمن النهائي بعد زيادة ٤٠٪ بالضرب في ١,٤؟

٢ ماذا تعني زيادة ١٠٠٪؟ ما الطرائق الأخرى التي يمكن أن تصف بها زيادة ١٠٠٪؟ وماذا يعني أن الزيادة أكبر من ١٠٠٪؟

٣ هل من الممكن أن تكون ٥٠٪ زيادة على عدد، أصغر من ١٪ زيادة على عدد آخر؟ فسّر.



فكرة مفيدة للمذاكرة

عليك دائمًا التأكد من إجابتك وتحري الدقة وذلك بوضع الحل في معادلة (كتابة الحل في صورة معادلة).

هل تعلم؟

في دولة الكويت، يصل عدد محطات الإذاعة إلى ١٨ محطة بين عامة وخاصة، والأمر عينه ينطبق على عدد محطات التلفزة الذي يصل أيضًا إلى ١٨. أما عدد مستخدمي شبكة الإنترنت فقد شهد نموًّا فاق الـ ٦٠٠٪ في العشر سنوات الماضية ليبلغ نحو ١٢٠٠٠٠٠ مستخدم.

افرض أن راتب مدير إحدى الشركات في السنة ٢٠ ٠٠٠ دينار، وينفق ٢٥٪ منه على إيجار المنزل. إذا زاد الراتب ١٠٪ وزاد إيجار المنزل ٥٪، فما النسبة المئوية من الراتب الجديد التي سوف ينفقها على إيجار المنزل الجديد؟

افهم

١ كم يبلغ الراتب السنوي؟ .....

٢ ما النسبة المئوية من الراتب التي تنفق على الإيجار؟ .....

٣ ما النسبة المئوية للزيادة في الراتب؟ .....

٤ ما النسبة المئوية للزيادة في إيجار المنزل؟ .....

خطط

٥ اكتب معادلة لتوجد قيمة الإيجار قبل أي زيادة في الإيجار أو الراتب.

.....

٦ أي معادلة تستخدمها لتوجد الراتب الجديد؟ افرض أن س = الراتب الجديد.

(أ) س = ٢٠٠٠٠ × ١٠٠٪ × ١٠٪ (ب) س = ٢٠٠٠٠ × (١٠٠٪ + ١٠٪)

حل

٧ كم يكون الراتب بعد الزيادة؟ .....

٨ كم كان إيجار المنزل قبل الزيادة؟ .....

٩ كم يكون إيجار المنزل بعد الزيادة؟ .....

١٠ اكتب النسبة بين تكاليف الإيجار الجديد والراتب الجديد. .....

١١ اكتب النسبة التي في البند (١٠) نسبة مئوية مقربًا لأقرب عدد صحيح للنسبة المئوية.

.....

تحقق

١٢ اكتب معادلة أخرى يمكنك استخدامها لإيجاد الراتب بعد الزيادة.

.....

حل مسألة أخرى

١٣ افرض أن مدخول إحدى العائلات ٣٠ ٠٠٠ دينار في السنة وتنفق منه ٢٠٪ على إيجار المنزل. إذا زاد المدخول ٤٪ وزاد إيجار المنزل ٩٪، فما النسبة المئوية من المدخول الجديد التي تنفقها العائلة على إيجار المنزل الجديد؟

.....

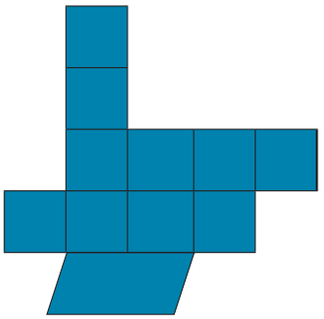
حل المسائل والتفكير المنطقي

١ **التواصل**: قارن بين الطريقتين اللتين نوجد بهما التكلفة الكلية بعد إضافة أرباح المبيعات. أي الطريقتين تفضل؟ ولماذا؟

.....

.....

٢ **اختيار إستراتيجية**: ارسم شكلًا بحيث يكون ٥٠٪ أكبر مساحة من هذا الشكل.



.....

.....

٣ **التفكير الناقد**: يحتوي ١٢ جرامًا من شراب على ١٠٪ من عصير الفواكه.

(أ) كم جرامًا من عصير الفواكه يحتوي هذا الشراب؟

(ب) أعلن عن شراب جديد يحتوي على ٢٠٪ زيادة من عصير الفواكه، فكم تكون كمية عصير الفواكه في الشراب الجديد؟

(جـ) ما النسبة المئوية لعصير الفواكه في الشراب الجديد؟

.....

.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٨–٩

النسبة المئوية التناقصية
Percent Decrease

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد النسبة المئوية لتناقص عدد.
- كيفية إيجاد الناتج أو العدد الأصلي إذا أعطيت النسبة المئوية للتناقص.

من الاستخدامات

يقيس صانعو المكبرات الصوتية لآلة الجيتار، باستخدام النسبة المئوية، نسبة تشويش الضوضاء على نقاء الصوت عن طريق استخدام أنظمة تحسين وتنقية لها.

صلة الدرس تعلمت النسبة المئوية للتزايد. الآن سوف تتعلم النسبة المئوية للتناقص.

استكشف — النسبة المئوية للتناقص

ما نسبة الجزء من الكل؟

(أ) ٠,٦

(ب) $\frac{٦}{١٠}$

(جـ) $\frac{٦٠}{١٠٠}$

١ قارن عدد الأجزاء غير المظللة في الأشكال السابقة بالنسبة إلى الشكل الكلي. كيف تستخدم الطرح لإيجاد عدد هذه الأجزاء؟

٢ لماذا يمكنك استخدام الطرح؟

٣ اكتب كلًّا من النسب المئوية التالية كمطروح من الكل:

(أ) ٩٥٪ (ب) ٢٪ (جـ) ٥٠٪ (د) $٦٦\frac{٢}{٣}$٪ (هـ) ٣٧,٥٪

تعلم — النسبة المئوية للتناقص

خفض أصحاب متجر أسعار البضاعة لتحسين المبيعات. مقدار التناقص بين سعر البيع بالمفرق (القطاعي) وسعر البيع بالجملة جعل البضائع أكثر جاذبية للعملاء.

عادة ما يسمى مقدار التناقص أو الخصم **النسبة المئوية للتناقص** أو النسبة المئوية للخصم.

المصطلحات الأساسية

- نسبة مئوية للتناقص
  Percent Decrease

لإيجاد القيمة النهائية أضرب القيمة الأصلية في (١٠٠٪ – النسبة المئوية للتناقص).

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ – النسبة المئوية للتناقص)

مثال (١)

يعمل جاسم في محل بيع أدوات مكتبية ويحصل على خصم ٢٠٪ على مشترياته. إذا كان سعر البيع بالمفرق لأحد شرائط التسجيل هو ٧,٩٩٠ دنانير، فكم سيدفع جاسم بعد الخصم؟

الحل:

الطريقة الأولى:	الطريقة الثانية:
أوجد كمية الخصم على الشريط.	أولًا: اطرح النسبة المئوية للخصم من ١٠٠٪.
٢٠٪ من ٧,٩٩٠ هو مقدار الخصم.	١٠٠٪ − ٢٠٪ = ٨٠٪.
٠,٢ × ٧,٩٩ = ١,٥٩٨ ≈ ١,٦.	سيدفع جاسم ٨٠٪ من ثمن الشريط.
اطرح مقدار الخصم من ثمن الشريط.	٨٠٪ من ٧,٩٩٠ هو السعر بعد الخصم.
٧,٩٩ − ١,٦ = ٦,٣٩	٠,٨ × ٧,٩٩٠ = ٦,٣٩٢ ≈ ٦,٣٩.
سيكلف الشريط ٦,٣٩٠ دنانير.	سيكلف الشريط ٦,٣٩٠ دنانير.

حاول أن تحل

١ سعر البيع بالمفرق لحقيبة لحمل الأقراص المدمجة قطرها ٩ سم هو ١٢,٨٧٠ دينارًا. لدى سعاد بطاقة خصم ٥٪، كم ستدفع لشراء الحقيبة؟

ملاحظة

يمكن إكمال الطريقة الثانية باستخدام التناسب:

$$\frac{٧,٩٩٠}{١٠٠٪} = \frac{\text{س دنانير}}{٨٠٪}$$

$$\text{س} \times ١٠٠٪ = ٧,٩٩٠ \times ٨٠٪$$

$$\text{س} = \frac{٧,٩٩٠ \times ٨٠}{١٠٠}$$

$$\text{س} = ٦,٣٩٢$$

مثال (٢)

سعر بيع بنطلون هو ٢٩,٩٥٠ دينارًا. إذا كان سعره الأصلي ٤٠ دينارًا، فما تقريبًا نسبة الخصم؟

الحل:

٤٠ − ٢٩,٩٥٠ = ١٠,٠٥٠	أوجد مقدار الخصم.
ما النسبة المئوية لـ ١٠,٠٥٠ من ٤٠؟	أوجد النسبة المئوية للخصم.
١٠,٠٥٠ = س × ٤٠	اكتب المعادلة.
١٠,٠٥٠ ÷ ٤٠ = س	اقسم الطرفين على ٤٠.

س = ٠,٢٥١٢٥ ≈ ٠,٢٥ = ٢٥٪

النسبة المئوية للخصم هي ٢٥٪.

حاول أن تحل

٢ في المهرجان السنوي للعودة إلى المدارس خُفِّض سعر البنطلون من ٣٠,٩٩٠ دينارًا إلى ٢٤,٩٩٠ دينارًا، فما تقريبًا النسبة المئوية للخصم؟

الترابط والتداخل بالمهنة

باعتبارها واحدة من المزايا الإضافية الخاصة بهم، معظم موظفي البيع بالتجزئة يحصلون على خصم على المشتريات، عادة ما يتراوح من ١٠٪ إلى ٤٠٪ من السعر القطاعي.

إذا كنت تعلم مقدار الخصم والسعر النهائي، فيمكنك إيجاد السعر الأصلي.

مثال (٣)

أعلن متجر عن خصم ١٢,٥٪ على جميع الأدوات الرياضية، وكان سعر بيع كرة القدم واللباس الرياضي بعد الخصم هو ٦٩,٩٧ دينارًا؛ فما سعرهما الأصلي؟

الحل:

سعر البيع = السعر الأصلي × (١٠٠٪ – النسبة المئوية للخصم)

= السعر الأصلي × (١,٠٠ – ٠,١٢٥) حوِّل النسب المئوية إلى كسور عشرية.

٦٩,٩٧ = س (١ – ٠,١٢٥) اكتب معادلة.

٦٩,٩٧ = س (٠,٨٧٥) اطرح.

٦٩,٩٧ ÷ ٠,٨٧٥ = س

اقسم الطرفين على ٠,٨٧٥

س = ٧٩,٩٦٥٧١

السعر الأصلي هو ٧٩,٩٧٠ دينارًا.

حاول أن تحل

٣ سعر تلفزيون ملون بعد الخصم هو ٢٦٩,٩٦٠ دينارًا. إذا كانت نسبة الخصم ٣,٥٪، فما سعره الأصلي؟

هل تعلم؟

في كثير من أنحاء العالم، لمّا يستخدم الناس كلمة كرة القدم فإنهم يقصدون سوكر Soccer. أما رياضة ركل الكرة من داخل المرمى أو من خارجه، فتسمّى رياضة «كرة القدم الأميركية» American Football.

تحقق من فهمك

١ لماذا يمكنك إيجاد قيمة منتج بعد خصم ٣٠٪ عن طريق الضرب في ٧٠٪؟

٢ لماذا يمكنك الحصول على ١٥٠٪ نسبة مئوية للتزايد، في حين لا يمكنك الحصول على ١٥٠٪ نسبة مئوية للتناقص؟

٣ حسبت دلال النسبة المئوية للتناقص من ١٢٠ إلى ١٠٠ مستخدمة الطريقة التالية:
النسبة المئوية للزيادة من ١٠٠ إلى ١٢٠ هي ٢٠٪.
إن النسبة المئوية للتناقص من ١٢٠ إلى ١٠٠ هي ٢٠٪، هل هذا صحيح؟ فسّر.

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ **التفكير الناقد:** تعمل جميلة في محل لبيع الزهور، وهي سوف تحصل على ١٠٪ تخفيضًا على كل المشتريات فضلًا عن خصم قدره ٥٪ على المبيعات في هذا الأسبوع، وبالتالي سوف تحصل جميلة على النوعين من الخصم. إذا اشترت زهورًا بمبلغ ١٥ دينارًا، فأي الترتيبات الآتية سوف يعطيها سعرًا أفضل؟

(أ) تأخذ ١٠٪ خصمًا، ثم بعد ذلك تأخذ ٥٪ خصمًا على المبلغ المتبقي.

(ب) تأخذ ٥٪ خصمًا، ثم بعد ذلك تأخذ ١٠٪ خصمًا على المبلغ المتبقي.

(جـ) تأخذ ١٥٪ خصمًا.

.....

.....

٢ **التواصل:** هل تخفيض قدره ٢٥٪ على حاجيّات بمبلغ ٤٠ دينارًا مساوٍ لتخفيض قدره ٤٠٪ على حاجيّات بمبلغ ٢٥ دينارًا؟ وضِّح.

.....

.....

٣ **المجلة:** قارن بين الطريقتين اللتين استخدمتهما في مثال (١) لإيجاد سعر منتج مع التخفيضات. أي طريقة تفضل؟ ولماذا؟

.....

.....

٤ **التواصل:** تقول لوحة الإعلان «اشترِ درزنًا من القطع تحصل على ١٥٪ خصمًا على طلبك» وأنت تريد شراء ١٠ أقراص مدمجة فقط لتهديها إلى شخص ما. إذا كان سعر القرص المدمج الواحد ٠,٧٥٠ دينار، فأوجد:

(أ) كم سيكون ثمن ١٠ قطع؟ كم سيكون ثمن ١٢ قطعة؟

(ب) كم عدد القطع التي ستشتريها؟ فسّر.

.....

.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٩-٩

تطبيقات على تغير النسبة المئوية
Applications of Percent Change

سوف تتعلم

- استخدام النسبة المئوية للتزايد والتناقص وتطبيقها.

من الاستخدامات

يستخدم تغير النسبة المئوية في أعمال البورصة عند هبوط أو ارتفاع سعر الأسهم.

المصطلحات الأساسية

◄ دمج النسب المئوية
Combining Percents

◄ صلة الدرس لقد تعاملت مع النسبة المئوية في صور مختلفة، والآن سوف تتعلم كيفية استخدام النسب المئوية ودمجها وتطبيقاتها. ►

استكشف دمج النسب المئوية

كيف وصلت إلى هنا؟

ناقش المواقف التالية. في أي منها يمكنك استعادة الكمية الأصلية؟

١ رفع محل مجوهرات أسعار المجوهرات كلها بنسبة ٥٠٪، ثم بعد الزيادة عمل تخفيضًا بنسبة ٥٠٪ على سعر المبيع.

٢ خفض متجر أسعاره بنسبة ٥٠٪، وفي آخر موسم التخفيض أدخل صاحب المتجر شيفرة على الحاسوب لزيادة الأسعار ٥٠٪.

٣ يحصل خالد على ٢٥٪ زيادة على ساعة العمل، لكن ساعات عمله انخفضت بنسبة ٢٠٪.

٤ خفضت إحدى الشركات أعمالها بنسبة ٥٠٪، وحاليًا زاد الملاكون الجدد الأعمال بنسبة ١٠٠٪.

تعلم تطبيقات على تغير النسبة المئوية

عادة ما يحتاج المستهلكون إلى دمج النسبة المئوية للتزايد والنسبة المئوية للتناقص.

مثال (١)

رفعت إحدى شركات الطيران أسعارها بنسبة ١٥٪، ثم منحت هذه الشركة موظفيها خصمًا يبلغ ١٥٪. فكم ستدفع إحدى الموظفات في هذه الشركة ثمنًا لتذكرة كان سعرها ١٧٩ دينارًا قبل الـ ١٥٪ الزيادة؟

الحل:

ثمن التذكرة بعد الزيادة = السعر الأصلي × (١٠٠٪ + ١٥٪).

١٧٩ × ١,١٥ = ٢٠٥,٨٥

ثمن التذكرة بعد الخصم = السعر بعد الزيادة × (١٠٠٪ − ١٥٪).

٢٠٥,٨٥ × ٠,٨٥ = ١٧٤,٩٧٢٥

ستدفع الموظفة ١٧٤,٩٧٠ دينارًا تقريبًا ثمنًا لتذكرتها.

مثال (٢)

يكلف استئجار قارب في اليوم الواحد ٣٥ دينارًا يضاف إليها نظير الخدمة، وكان هناك عرض ٢٠٪ خصمًا مسبقًا على الاستئجار خلال أسبوعين. قارن سعر التذكرة في الحالات التالية:

(أ) ٢٠٪ خصمًا قبل إضافة ١٠٪ نظير خدمة.

الحل:

التكلفة بعد خصم ٢٠٪ = السعر الأصلي × (١٠٠٪ − ٢٠٪)

= ٣٥ × ٠,٨٠ = ٢٨

التكلفة بعد إضافة ١٠٪ = السعر بعد الخصم × (١٠٠٪ + ١٠٪)

= ٢٨ × ١,١ = ٣٠,٨

وبالمثل ٢٠٪ خصمًا بعد إضافة ١٠٪ زيادة نظير الخدمة.

٣٥ × ١,١ = ٣٨,٥٠ أولًا أضف ١٠٪ زيادة نظير الخدمة.

٣٨,٥٠ × ٠,٨٠ = ٣٠,٨٠ ثم اعمل خصمًا ٢٠٪.

نلاحظ أن الكلفة واحدة في الحالتين وهي ٣٠,٨٠٠ دينارًا.

(ب) ٢٠٪ خصمًا قبل إضافة ٥ دنانير نظير الخدمة.

الحل:

٣٥ × ٠,٨٠ = ٢٨ أولاً اعمل خصمًا ٢٠٪.

٢٨ + ٥ = ٣٣ ثم أضف ٥ دنانير نظير الخدمة.

وبالمثل ٢٠٪ خصمًا بعد إضافة ٥ دنانير نظير الخدمة.

٣٥ + ٥ = ٤٠ أولًا أضف ٥ دنانير نظير الخدمة.

٤٠ × ٠,٨٠ = ٣٢ ثم اعمل خصمًا ٢٠٪.

الكلفة ٣٣ دينارًا إذا تم تطبيق الخصم قبل إضافة نظير الخدمة، والكلفة ٣٢ دينارًا إذا طُبق الخصم بعد إضافة نظير الخدمة.

حاول أن تحل

١ دفع موسى في شهر يوليو فاتورة كهرباء قيمتها ٢٥ دينارًا، ولكن فاتورة شهر أغسطس كان بها زيادة ٢٠٪ عن فاتورة يوليو، ومع انخفاض درجات الحرارة أصبحت فاتورة شهر سبتمبر أصغر بـ ٢٠٪ من فاتورة شهر أغسطس، فكم سيدفع موسى قيمة فاتورة شهر سبتمبر؟

٢ بلغ سعر التذكرة الواحدة لحضور حفلة موسيقية ١١,٥٠٠ دينارًا، ويضاف إليها نظير الخدمة. إذا تمَّ تطبيق ٢٠٪ خصمًا، فما سعر التذكرة:

(أ) قبل إضافة ٢٠٪ نظير خدمة؟

(ب) قبل إضافة ١٠ دنانير نظير خدمة؟

فكرة مفيدة

لحل المسائل

سوف تدفع ٨٠٪ (٤ دنانير) من الـ ٥ دنانير، من قيمة تكلفة الخدمة إذا طبق الخصم بعد الإضافة.

إذا زاد شيء أو نقص، فأنت في حاجة إلى أن تعرف ما نسبة التزايد أو التناقص وهذا يستدعي الرجوع إلى العدد الأصلي.

مثال (٣)

لوحظ في بيان عن أرباح مصنع أنها تناقصت ٤٪ عن سنتين مضت. إذا كان بيان أرباح المصنع نقص إلى ٢٣٢٥ دينارًا، فكم كانت في الأصل؟ وما النسبة المئوية المطلوبة لكي تعود الأرباح إلى ما كانت عليه؟

الحل:

إذا تناقصت الأرباح ٤٪ فهي تصل إلى ٩٦٪ من قيمتها السابقة، فنوجد القيمة السابقة.

$٠,٩٦ \times س = ٢٣٢٥$ — اكتب معادلة.

$س = \frac{٢٣٢٥}{٠,٩٦٠}$ — اقسم الطرفين على ٠,٩٦.

$س = ٢٤٢١,٨٧٥$ — القيمة السابقة كانت ٢٤٢١,٨٧٥ دينارًا.

تناقصت الأرباح بمقدار $٢٤٢١,٨٧٥ - ٢٣٢٥ = ٩٦,٨٧٥$ دينارًا.

لإيجاد النسبة المئوية للتزايد المطلوبة لإعادة الأرباح إلى مستواها السابق، أوجد النسبة المئوية لـ ٢٣٢٥ لتكون ٩٦,٨٧٥.

$٢٣٢٥ \times س = ٩٦,٨٧٥$ — اكتب معادلة.

$س = \frac{٩٦,٨٧٥}{٢٣٢٥}$ — اقسم الطرفين على ٢٣٢٥.

$س = ٠,٠٤٢$

$٠,٠٤٢ = ٤\frac{١}{٥}٪$ — حوِّل الكسر العشري إلى نسبة مئوية.

إذًا سوف تحتاج إلى $٤\frac{١}{٥}$٪ زيادة لإعادة الأرباح إلى مستواها السابق.

تحقق من إجابتك.

انخفضت الأرباح إلى ٢٣٢٥ دينارًا. إذا زادت بنسبة $٤\frac{١}{٥}$٪، فهل ستعود إلى ٢٤٢١,٨٧٥ دينارًا؟

$٢٣٢٥ \times ٠,٠٤٢ = ٩٧,٦٥$ — حول $٤\frac{١}{٥}$٪ إلى ٠,٠٤٢.

$٢٣٢٥ + ٩٧,٦٥ = ٢٤٢٢,٦٥$ — بسبب التحويلات والتقريب، الرقم ليس دقيقًا ولكنه أقرب ما يكون إلى ٢٤٢١,٨٧٥.

حاول أن تحل

٣ إذا زادت نفقات نوف ٢٥٪ عن العام الماضي لتصل إلى ١٤٥٠ دينارًا، فما النسبة المئوية للتناقص التي تجعل نفقات نوف تعود إلى مستواها السابق؟

فكرة مفيدة — لحل المسائل

حل مسألة أبسط من السابقة لإيجاد النسبة المئوية للتزايد التي تعكس نسبة مئوية للتناقص.

مثلًا، إذا تناقصت الرواتب ٤٠٪ من ١٠٠ دينار إلى ٦٠ دينارًا، فما زالت تحتاج إلى $٦٦\frac{٢}{٣}$٪ زيادة لكي ترجع إلى مستواها السابق.

تحقق من فهمك

١ وضح لماذا السلعة المعلنة في الشكل إلى اليمين ليست مجانية.

٢ هل ٤٠٪ للتناقص يلغي ٤٠٪ للتزايد؟ ولماذا؟

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ **تفكير رياضي**: وجد جاسم عرضًا في أحد مكاتب شركة سياحية، ويتمثل هذا العرض بخصم ٢٨٪ من ٢٢٥ دينارًا ثمن رحلة إلى أحد البلدان، علمًا أن المكتب يأخذ ١٠٪ ربحًا. هل سيكون الأفضل لجاسم أن يطرح المكتب قيمة الخصم ثم يعود ويضيف قيمة الربح، أو يضيف الربح ثم يقوم بطرح الخصم؟

.....

.....

٢ **التواصل**: ما هو الأفضل للزبائن، حساب التخفيضات بطريقة متتالية أو جمع التخفيضات كلها مرة واحدة، ومن ثم حساب الثمن النهائي؟ فسر.

.....

.....

٣ انخفضت المبيعات بنسبة ٢٠٪ لتصل إلى ٧ ٠٠٠ دينار. أي نسبة زيادة تعيد المبيعات إلى حالها قبل الانخفاض؟

.....

.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

اختبار الوحدة التاسعة

١ اصنع رسمًا بيانيًّا لتكاليف التذاكر لتوضح أن دفع مبلغ ٦ دنانير ثمنًا لـ ٥ بطاقات، ودفع مبلغ ٤ , ٢ دينار ثمنًا لبطاقتين لهما المعدل نفسه.

٢ إذا كانت نسبة أطوال أضلاع مثلث هي ٣:٤:٥، ومحيط المثلث ٨٤ سم، فما طول كل ضلع من أضلاع المثلث؟

٣ أيهما أفضل: شراء أنبوب معجون أسنان يزن ١٢٥ جرامًا ثمنه ٠ , ٧٥٠ دينار، أم أنبوب آخر يزن ١٨٠ جرامًا ثمنه ٠ , ٩٠٠ دينار؟ أعط معدلات الوحدة للتحقق من صحة إجابتك.

٤ بلغ متوسط طول لاعب كرة سلة في أحد الفرق الرياضية المحترفة مترين وخمسة سنتيمترات تقريبًا. ويكون ارتفاع السلة ثلاثة أمتار وخمسة سنتيمترات. إذا كان متوسط طول طالب في المرحلة المتوسطة هو ١٦٥ سم، فبكم يجب أن يكون ارتفاع السلة حتى يستطيع طالب في المرحلة المتوسطة اللعب، وتكون النسبة بين طوله وارتفاع السلة المنخفضة هي النسبة نفسها بين طول اللاعب المحترف وارتفاع السلة؟

٥ هناك ١٠ طلاب في الصف السادس، ١٥ طالبًا في الصف السابع، ٢٥ طالبًا في الصف الثامن كوّنوا ناديًا للعمل المسرحي.

ما النسبة المئوية لأعضاء النادي من طلاب الصف السادس؟

ما النسبة المئوية لأعضاء النادي من طلاب الصف السابع؟

ما النسبة المئوية لأعضاء النادي من طلاب الصف الثامن؟

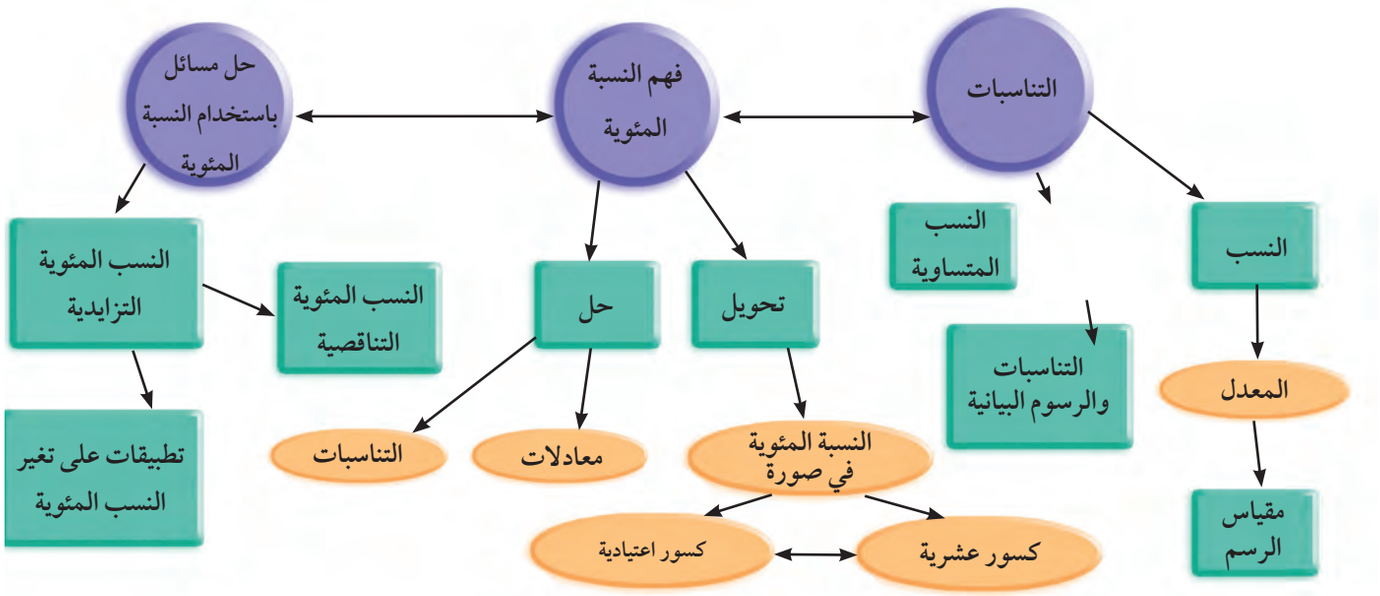
٦ يبيع متجر بأسعار زائدة عن سعر الجملة بنسبة ٦٠٪؛ فما هي أكبر نسبة مئوية للتخفيض يمكنه وضعها أثناء التنزيلات من دون أن يبيع منتجاته بسعر أقل من سعر الجملة؟

٧ أكلت سلوى معكرونة وسلطة. وقد تناولت في وجبتها كلها ٤٥٠ سعرة حرارية و١٥ جرامًا من الدهون. إذا كان كل جرام من الدهن يعطيها ٩ سعرات حرارية، فما النسبة المئوية للسعرات التي حصلت عليها من الدهون مقارنة بالوجبة كلها؟

٨ بين عامي ٢٠٠٨ و٢٠١١، زادت الطلبات على القروض الشخصية في أحد المصارف بنسبة ٣٠٠٪ بحيث وصل عدد الطلبات إلى ١٠٠٠٠ طلب. كم كان عدد طلبات القروض الشخصية في عام ٢٠٠٨؟

٩ هل هناك فرق بين العبارات التالية؟ أرباحي هي ٢٠٠٪ أكثر مما كانت عليه في العام الماضي؛ الأرباح الخاصة بي زادت بنسبة ٢٠٠٪ عن العام الماضي.

مخطط تنظيمي للوحدة التاسعة



ملخص الوحدة التاسعة (أ): التناسب

- النسب المتساوية هي إيجاد نسبة مساوية لنسبة معلومة. يمكنك إيجاد نسبة أخرى مساوية لها عن طريق ضرب كل من حدّي النسبة في العدد نفسه أو قسمة حدّي النسبة على العدد نفسه غير الصفري.
- التناسب هو معادلة تنص على أن هناك نسبتين متساويتين.
- إذا كانت النسبتان تكوِّنان تناسبًا، فإن ناتجي الضرب التقاطعي يكونان متساويين إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن $أ \times د = ب \times جـ$.
- حل التناسبات هو إيجاد العدد الناقص وذلك باستخدام النسب المتكافئة أو الحساب الذهني أو الضرب التقاطعي.
- معدلات الوحدة يمكن استخدامها لحل مسائل التناسبات وتكوين قواعد المعدل.
- الرسم بمقياس رسم يبيّن الشكل الحقيقي للأشياء ولكن ليس بالمقاسات الحقيقية. مقياس الرسم يعطي النسبة بين المقاسات في الرسم والمقاسات للشيء الحقيقي. إذا كان الحد الأول في النسبة صغيرًا، فإن الرسم يكون تصغيرًا للشكل الأصلي. أما إذا كان الحد الأول في النسبة كبيرًا، فذلك يكون تكبيرًا للشكل الأصلي.

ملخص الوحدة التاسعة (ب): فهم النسب المئوية

- النسبة المئوية هي نسبة تقارن عددًا إلى ١٠٠ . النسبة المئوية تعني أجزاء من الـ ١٠٠ أو جزءًا من كل ١٠٠ .
- يستخدم التقدير لإيجاد نسب مئوية في مواقف حياتية.
- يمكن أن تحل مسائل النسبة المئوية باستخدام التناسب أو كتابة معادلة.

ملخص الوحدة التاسعة (جـ): حل مسائل باستخدام النسبة المئوية

- الفرق بين سعر المبيع بالمفرق وسعر الجملة يمكن أن يمثل بالنسبة المئوية التزايدية.
- لإيجاد النسبة المئوية التزايدية، اطرح سعر الجملة من سعر المبيع بالمفرق واقسم الفرق على سعر الجملة.
- يخفض أحيانًا أصحاب المتاجر أسعار البضائع. مقدار التخفيض أو الخصم يمكن أن يمثل بالنسبة المئوية التناقصية.
- لإيجاد النسبة المئوية التناقصية، اطرح سعر البيع من سعر المبيع بالمفرق واقسم الفرق على سعر المبيع بالمفرق الأصلي.

الوحدة العاشرة

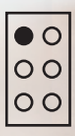
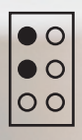
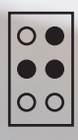
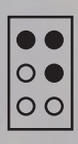
العد والاحتمال
Counting and Probability

شعوب العالم

بعدما نالت المرأة الكويتية الحق في التصويت والترشح للانتخابات، وبعد ٤٤ عامًا من النضال من أجل الحصول على حقوقها السياسية، حملت الانتخابات النيابية في العام ٢٠٠٩ مفاجأة سارة إذ فازت أربع نساء بمقاعد برلمانية وأصبحن أعضاء في مجلس الأمة الكويتية.

الفنون والآداب

اخترع الضرير لويس برايل (١٨٠٩ - ١٨٥٢) نظامًا يتيح للمكفوفين القراءة والكتابة عن طريق اللمس. يمكن كتابة $٦^{٢} = ٦٤$ رمزًا بهذا النظام. تم تكييف طريقة بريل للكتابة في العديد من اللغات ومنها العربية:

أ 
ب 
جـ 
د 

العلوم

بعد إجراء تجارب عدة على مجموعات متنوعة من الهررة كالهر السيامي والهر الفارسي، قام مربو الحيوانات بتطوير سلالة من الهررة لتحسين نوعيتها. وتتميز هذه السلالة بوبرها الطويل.

أفكار رياضية أساسية

يمكنك عد الطرائق الممكنة لوقوع حدث ما باستخدام **الشجرة البيانية** أو **مبدأ العد**.

التبديل أو **الترتيب** هو اختيار أشياء بترتيب ما. أما التوفيقة فهي اختيار أشياء من دون ترتيب.

الاحتمال أو **الاحتمال النظري** لحدث ما هو إمكانية وقوع هذا الحدث.

الاحتمال التجريبي هو عدد مرات وقوع الحدث مقسومًا على عدد التجارب. يحتسب الاحتمال الهندسي بالمقارنة بين المساحات والأطوال أو قياسات أخرى.

الاحتمال المشروط هو احتمال وقوع الحدث «ب» علمًا أن الحدث «أ» قد وقع قبله.

من الممكن أن تكون الأحداث مستقلة أو مرتبطة.

مشروع الوحدة

حل المسائل

افهم
خطط
حل
تحقق

ابتكر لعبة تتضمن تباديل أو توافيق. استخدم ما تعرفه عن الاحتمالات لتجعل اللعبة مسلية. قد ترغب في استخدام البطاقات وقطع النقود والدوارات والمكعبات المرقمة أو يمكنك اختيار أعداد أو أشياء موضوعة داخل قبعة. وربما ترغب في أن تكون اللعبة مخصصة لعدد معين من اللاعبين أو أن تكون لعبة فردية.

التحقق من معقولية الإجابة

في معظم الأحيان نستعين بآلات حاسبة لحل مسائل تتضمن أعدادًا كبيرة. لكن من السهل إدخال أعداد غير صحيحة أو إسقاط الأقواس أو رقم عند نقل الإجابة من شاشة الآلة الحاسبة. لذا، من المهم التأكد من معقولية الإجابة. ويساعد التقدير والتفكير السليم على القيام بذلك.

التركيز على حل المسائل

ينتمي أحمد إلى جمعية تنمية البيئة. إليك بعض المواقف التي واجهها. اذكر ما إذا كان تقدير كل إجابة قريبًا ما يكفي أو أصغر بكثير أو أكبر بكثير من الإجابة الفعلية ووضّح السبب:

١ تقاس مساحات الأدغال أو المناطق الشجرية بالكيلومترات المربعة. لنفترض أن مساحة منطقة مربعة تساوي ٤٠٠٠ م^{٢}، فما طول كل ضلع منها؟

الإجابة: ٦٣,٢٥ م

٢ يبلغ ارتفاع شجرة ٤٥ مترًا، وقطرها ٣,٦ أمتار. يمثل الجزء من الشجرة الذي يمكن استخدامه كخشب $\frac{٤}{٥}$ من حجمها الكلي. ما حجم خشب الشجرة القابل للاستخدام؟

الإجابة: ٣٦٦ م^{٣}

٣ تفيد بعض التقارير أن الغابات المطيرة تُزال بمعدل ٤٠ م^{٢} كل دقيقة. ما عدد الأمتار المربعة التي تزال بحسب هذا المعدل في شهر واحد؟

الإجابة: ١٧٢٨٠٠٠ م^{٢}

٤ يسمى الورق المعاد تدويره بمخلفات المستهلك ويكلف إنتاج ١٠٠٠ ورقة من الورق الذي يعاد تدويره بنسبة ١٠٠٪ ٣٥٠ فلسًا. ويكلف إنتاج ١٥٠٠ ورقة من الورق الذي يعاد تدويره بنسبة ٢٠٪ ٤٥٠ فلسًا. بكم تزيد كلفة إنتاج الورق المعاد تدويره ١٠٠٪ عن الورق الذي يعاد تدويره ٢٠٪؟

الإجابة: ٠,٠٥ فلوس

الوحدة العاشرة (٢)

العد
Counting

يشجعك آلاف المتفرجين في الملعب وملايين الأشخاص في أنحاء العالم.

تنطلق صفارة البداية، فتبدأ بشد عضلات جسمك كلّها، حتى إن رئتيك تحاولان بشدة استنشاق بعض الهواء وقبل أن تدرك ذلك، تجد نفسك وأنت تجتاز خط النهاية وتفوز بالبطولة. أنت الفائز في بطولة الألعاب الأولمبية أو دورة الألعاب الآسيوية. ستتعالى نغمات النشيد الوطني لبلدك أمام العالم بأسره عند منحك الميدالية الذهبية.

برأيك، ما الذي سيذكره الناس دومًا عن الألعاب الآسيوية أو الأولمبية؟

أهو الرياضي الذي لوى كاحله ومنع الفريق من ربح الميدالية الذهبية؟

أهو العداء الذي فاز ٤ مرات ولم يتأهل إلى هذه الدورة؟

من الممكن أن يُنتسى هؤلاء لكن الجميع سيتذكرون عطاءهم وشجاعتهم ومثابرتهم لنيل أفضل الميداليات ورفع اسم بلدهم.

١ في عام ١٩٩٢ اشتركت ٢٧٠٨ سيدات في الألعاب الأولمبية في ألعاب القوى، وارتفع هذا العدد في العام ١٩٩٦ إلى ٣٧٧٩. ما النسبة المئوية لهذه الزيادة؟

٢ في إحدى دورات الألعاب الأولمبية تمكن أحد اللاعبين (٦٤ كجم) من رفع ١٨٧ كجم. كم مرة يساوي ذلك وزنه؟

١٠-١

الشجرة البيانية ومبدأ العد
Tree Diagrams and The Counting Principle

سوف تتعلم

- استخدام الشجرة البيانية وتطبيق طرائق العد.

من الاستخدامات

- يستخدم تجار السيارات طرائق العد لتحديد أنواع السيارات المتوفرة لديهم وأعداد ها.

المصطلحات الأساسية

- ◄ الشجرة البيانية
  Tree Diagram
- ◄ مبدأ العد
  Counting Principle

◄ صلة الدرس قد يكون العدّ في بعض الحالات صعبًا. أنت تعلم كيف تستخدم الضرب لإيجاد عدد الوحدات المربعة في المستطيلات. يمكن استخدام طريقة مشابهة عند عدّ اختيارات عدة. ►

استكشف الشجرة البيانية

الطريق إلى المدرسة

١ ما وسائل المواصلات المختلفة التي يمكنك استخدامها للذهاب إلى المدرسة والعودة إلى المنزل؟

٢ لنفترض أنك تستطيع استخدام كل يوم وسيلة واحدة فحسب من بين الوسائل التي وجدتها للذهاب إلى المدرسة، فما عدد الطرائق المختلفة التي يمكنك استخدامها للذهاب إلى المدرسة؟

٣ لنفترض أنك تستطيع استخدام كل يوم وسيلة واحدة فحسب من بين الوسائل التي وجدتها للعودة إلى المنزل، فما عدد الطرائق التي يمكنك استخدامها للعودة إلى المنزل؟

٤ نظِّم قائمة أو اعمل رسمًا توضح فيه الوسائل التي يمكنك استخدامها للذهاب إلى المدرسة والعودة إلى المنزل، فكم عدد الوسائل الممكنة؟

تعلم الشجرة البيانية ومبدأ العد

يرغب خالد في الذهاب إلى الكويت لمشاهدة دورة الألعاب الرياضية، لكنه لم يجد خط طيران مباشرًا من بيروت. لكن لديه الخيار ليعاود الطيران من إحدى المدن التالية: دمشق وعمان والرياض ويمكنه أن يختار بين شركتي طيران: ا، ب. يمكنك إظهار الخيارات المتوفرة لدى خالد بعمل جدول.

مدينة الترانزيت	الشركة (ا)	الشركة (ب)
دمشق	✗	✗
عمان	✗	✗
الرياض	✗	✗

يمكنك عد خيارات في الجدول. ويمكنك اعتماد طرائق أخرى لإيجاد هذه المعلومات. ومن بين هذه الطرائق، استخدام مخطط الشجرة البيانية. يوضح مخطط الشجرة البيانية التالي فروعًا لكل خيار متوفر، ويمثل كل فرع من الشجرة ناتجًا ممكنًا.

المدينة	شركة الطيران	الاختيار
دمشق	أ	عبر دمشق على متن الشركة أ
	ب	عبر دمشق على متن الشركة ب
عمان	أ	عبر عمان على متن الشركة أ
	ب	عبر عمان على متن الشركة ب
الرياض	أ	عبر الرياض على متن الشركة أ
	ب	عبر الرياض على متن الشركة ب

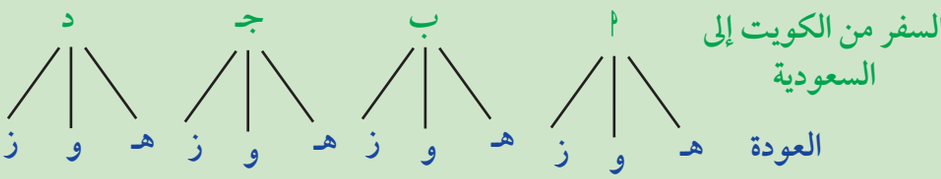
هل تعلم؟

في الكويت ٧ مطارات تشمل مطارين مدنيين. وتعتبر الخطوط الجوية الكويتية أكبر شركة طيران في الكويت، فقد سافر ٢٠٨٤٦٠٠ مسافر على متنها في عام ٢٠٠١.

مثال (١)

يستطيع أحمد أن يختار بين ٤ شركات طيران ليسافر من الكويت إلى السعودية، أن يعود على متن ٣ شركات طيران. ارسم شجرة بيانية. كم زوجًا مختلفًا من الرحلات يمكنه السفر والعودة على متنها؟

الحل:



يوجد ١٢ زوجًا مختلفًا من الرحلات للسفر إلى السعودية والعودة إلى الكويت.

فكرة مفيدة

لحل المسائل

استخدم مبدأ العد أوّلًا، ثم حلل لترى هل كان يلزم تنظيم قائمة أو صنع شجرة بيانية لملاحظة الخيارات الفردية.

حاول أن تحل

١ يختار سالم أثناء سفره إحدى الدرجات الثلاث: الدرجة الأولى، رجال الأعمال، الاقتصادية. سافر سالم من الكويت إلى بيروت وعاد إلى الكويت. ارسم شجرة بيانية. ما عدد الاختيارات المختلفة للسفر والعودة؟

لن تحتاج إلى تنظيم قائمة أو صنع شجرة بيانية. لا بد أنك لاحظت في المثال ١ أن عدد شركات الطيران هو:

٤ × ٣ = ١٢ خيارًا

في الذهاب — في العودة

مبدأ العد

إذا كان يمكن حدوث حدث ما بـ (م) طريقة ويمكن حدوث حدث آخر بـ (ن) طريقة، بالتالي يمكن لهذين الحدثين أن يحدثا معًا بـ (م × ن) طريقة.

ويصلح مبدأ العد كذلك لأكثر من موقفين.

مثال (٢)

يمكن تصميم بطاقة دعوة باستخدام ٤ نصوص مختلفة و٧ ألوان مختلفة و٥ هوامش مختلفة. ما عدد الاختيارات المختلفة المتوفرة لصنع البطاقة؟

الحل:

باستخدام مبدأ العد، لديك ٤ × ٧ × ٥ أي ١٤٠ خيارًا لتصميم بطاقة الدعوة.

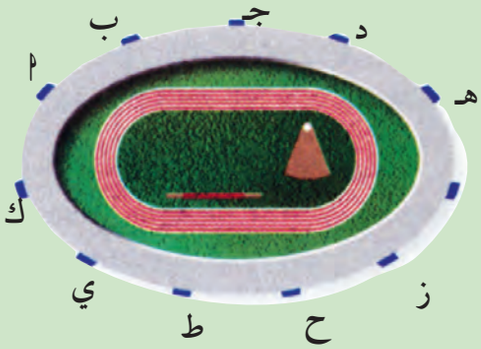
حاول أن تحل

٢ لدى أحد المحلات ١٠ أنواع من الورق المستخدم لتغليف الهدايا و١٢ لونًا من أشرطة الزينة و٣ أنواع من العقد. ما عدد الاختيارات المختلفة المتوفرة لتغليف الهدايا؟

تأكد من أنك فهمت المسألة قبل استخدام مبدأ العد.

مثال (٣)

يسع مدرج للألعاب الأولمبية ١٠٠ ٨٣ مقعد. تشير تذكرتك عليك الدخول عبر البوابات الشمالية. تقع البوابات أ، ب، جـ، د، هـ في الجهة الشمالية والبوابات و، ز، ح، ط، ي، ك في الجهة الجنوبية. بكم طريقة مختلفة يمكنك أن تدخل عبر بوابة شمالية، وتخرج عبر أي بوابة؟



الحل:

في المدرج ٥ بوابات شمالية و٦ بوابات جنوبية. تتوفر ٥ طرائق لدخول المدرج.

وتتوفر ٥ + ٦ = ١١ بوابة ممكنة للخروج منه.

باستخدام مبدأ العد، لدينا ٥ × ١١ = ٥٥ طريقة للدخول عبر بوابة شمالية والخروج من أي بوابة.

حاول أن تحل

٣ يستخدم العلماء الذين يجرون أبحاثًا عن الحيوانات بطاقة تعريف يضعونها حول عنق كل من الحيوانات لدراسة عاداتها تتضمن أحد أحرف الهجاء، وعددًا كليًّا أقل من مئة. كم شيفرة مختلفة ممكنة يمكن وضعها على كل بطاقة تعريف؟

تحقق من فهمك

١ أعط مثالًا على حالة يمكن استخدام مبدأ العد فيها، ومثالًا لا يمكن استخدام مبدأ العد فيه.

٢ لنفترض أنه لديك ٤ أنواع من صلصة الفطائر، وت نوع من الطبقات العلوية. كم عدد الفطائر المختلفة التي تتضمن نوعًا واحدًا من الصلصة ونوعًا واحدًا من الطبقة العلوية؟

٣ ما أوجه الشبه والاختلاف بين حالة تتضمن ٤ اختيارات يليها اختياران اثنان وبين الحالة المعاكسة، أي اختياران يليهما ٤ اختيارات؟ أعط مثالًا على ذلك.

المرشد لحلّ المسائل (١٠-١)

باختيارك كلمة واحدة من كلّ قائمة في ما يلي، كم جملة مختلفة يمكن تكوينها؟

الأداة	الاسم	الصفة
كان إن	الروبوت الرجل	قوي سريع بطيء كبير قصير

افهم

١ كم كلمة توجد في كل قائمة؟

(أ) الأداة ..... (ب) الاسم ..... (ج) الصفة .....

٢ كم كلمة تختارها من كلّ قائمة؟ .....

خطط

٣ كيف يمكنك استخدام مبدأ العد لإيجاد عدد الجمل؟ .....

.....

٤ اكتب تعبيرًا لإيجاد عدد الجمل. .....

حل

٥ بسط التعبير في البند رقم (٤). كم جملة يمكن تكوينها؟ .....

تحقق

٦ ما الطريقة الأخرى لإيجاد الإجابة؟ أيهما أسهل؟ فسّر إجابتك.

.....

حل مسألة أخرى

٧ يمكن طلب القميص المدرسي عن طريق اتحاد الطلاب، كم زيًّا مختلفًا يمكن تكوينه؟

اللون	الأكمام	المقاس	الطراز	التصميم
أزرق أصفر	قصيرة طويلة	صغير وسط كبير كبير جدًّا	قميص قطني قميص كنزة	الاسم الاسم والشعار

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ **التواصل:** (أ) كم شخصًا مختلفًا يمكن تشكيله من كتاب الأقنعة؟

.....

(ب) كيف يمكنك تغيير المعطيات إذا أردت القول أنه:يمكن تشكيل ١٠٠٠ شخص مختلف؟

.....

.....

٢ في إحدى دورات كرة المضرب العالمية اشترى المنظمون ٥٤٠ صندوقًا. يحتوي كل صندوق على ٢٤ علبة وفي كل علبة ٣ كرات. ما عدد كرات التنس التي اشتراها المنظمون؟

.....

.....

٣ يتدرب ناصر يوميًا على لعبة كرة القدم.

يختار ثيابه وفق الجدول المقابل. كم زيًّا مختلفًا يمكن أن يرتدي ناصر للتدريب؟

قميص	بنطلون	جوارب
أخضر	أبيض	أخضر
أزرق	أسود	أبيض
أحمر		مخطط

.....

.....

٤ توجد ٤ طرقات تسمح للانتقال من المدينة أ إلى المدينة ب.

وتوجد ٣ طرقات للانتقال من المدينة ب إلى المدينة جـ.

(أ) ما عدد اختيارات الطرقات الممكنة للذهاب من أ إلى جـ؟

(ب) أقفلت إحدى الطرقات بين أ، ب للقيام ببعض الأشغال. ما عدد الاختيارات الممكنة للذهاب من أ إلى جـ؟

(جـ) أعيد فتح الطريق بين أ، ب وأقفلت بدلًا منها طريق بين ب، جـ.

ما عدد الاختيارات الممكنة للذهاب من أ إلى جـ؟

.....

.....

.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

١٠-٢

التباديل والترتيبات
Permutations and Arrangements

سوف تتعلم

- تطوير طرائق العد في حالات يكون فيها الترتيب هامًّا.

من الاستخدامات

- عند تحديد ترتيب المتبارين في فريق رياضي، على المدرب أن يدرك الترتيبات الممكنة التي يمكنه تشكيلها.

المصطلحات الأساسية

- ◄ ترتيب Arrangement
- ◄ تبديل Permutation
- ◄ مضروب Factorial

◄ صلة الدرس لقد سبق أن تعلمت عن الأشجار البيانية ومبدأ العد. ستوسع في هذا الدرس هذين المفهومين حول مواقف عد يكون الترتيب فيها مهمًّا.►

استكشف التباديل

الوقوف في الصف **الأدوات المستخدمة:** بطاقات تأشير لكل مجموعة مدون عليها ما يلي: أ، ب، جـ، د.

على كل طالب في المجموعة أن يأخذ بطاقة واحدة: أ أو ب أو جـ أو د.

١ إذا اصطف الطالب الذي يحمل البطاقة أ بمفرده، فبكم طريقة يمكنه أن يصطف؟

٢ إذا اصطف الطالبان اللذان يحملان البطاقتين أ، ب، فبكم طريقة يمكنهما أن يصطفا؟

٣ إذا أضيف الطالب الذي يحمل البطاقة جـ، فبكم طريقة يمكن لـ ٣ طلاب أن يصطفوا؟

كيف تربط ذلك بعدد الطرائق الممكنة التي يمكن لطالبين أن يصطفا بها؟

٤ أضف الطالب الذي يحمل البطاقة د. بكم طريقة يمكن لـ ٤ طلاب أن يصطفوا؟ كيف تربط ذلك بعدد الطرائق الممكنة التي يمكن لـ ٣ طلاب أن يصطفوا بها؟

٥ خمّن عدد الطرائق المختلفة التي يمكن أن يقف فيها ٥ طلاب في صف واحد.

تعلم التباديل والترتيبات

عند معاينة الاختيارات المتوفرة المختلفة، غالبًا ما تمعن النظر في **الترتيب** الذي وضع فيه الأشخاص أو الحروف أو الأعداد أو الأشياء الأخرى. **التبديل** هو ترتيب يكون فيه موقع الأشياء مهمًّا. التبديل أ ب جـ مختلف عن التبديل جـ ب أ ويمكن أن يساعد مبدأ العد على تحديد عدد الاختيارات أو التباديل.

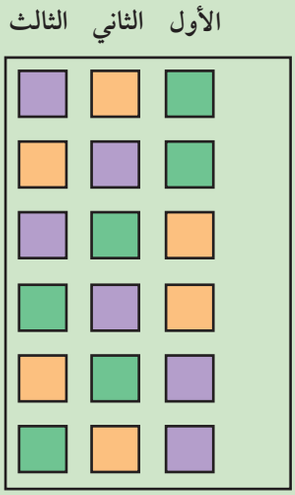
مثال (١)

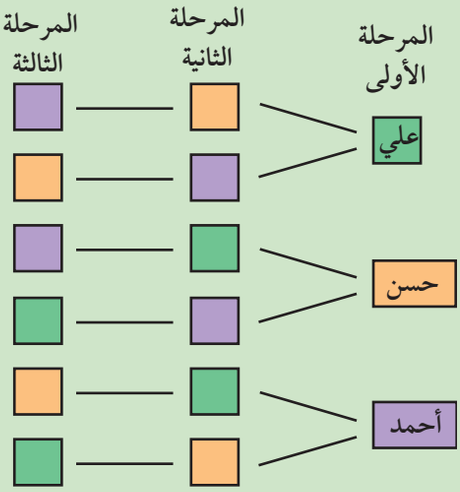
في سباق التتابع ٤ × ١٠٠ م رجال، يتألف أحد الفرق من: علي وحسن وأحمد ومصطفى. قرّر المدرب أن يركض مصطفى في المرحلة الأخيرة. بكم ترتيب مختلف يمكنه اختيار علي وحسن وأحمد لعدو المراحل الثلاث الأولى في سباق التتابع؟

الحل:

بالنسبة إلى العداء الأول هناك ثلاث إمكانيات. عند اختياره يبقى خياران أمام العداء الثاني. عند تحديد الخيار يبقى خيار واحد أمام العداء الثالث.

الطرائق الممكنة





باستخدام مبدأ العد، عدد الاختيارات الكلي = ٣ × ٢ × ١ = ٦ طرائق.

يمكن للمدرب استخدام ٦ طرائق ممكنة مختلفة لترتيب العدائين الثلاثة.

حاول أن تحل

١ يمكن للسباحين أن يتباروا في ٨ خطوط في سباق الـ ٢٠٠م فراشة. كم عدد الطرائق المختلفة التي يمكن بها ترتيب السباحين في الخطوط المختلفة؟

تستخدم الصورة الأسية لكتابة حاصل الضرب عندما تكون العوامل كلها متساوية: ٣ × ٣ × ٣ × ٣ = $٣^{٤}$.

أما المضروب فيستخدم لكتابة حاصل الضرب عندما تكون العوامل أعدادًا صحيحة (موجبة) متتالية تنتهي بالعدد ١ .

يكتب مضروب ٤ على شكل ٤! ويعني ٤ × ٣ × ٢ × ١.

ن! = ن (ن−١) (ن−٢) .... × ٢ × ١ .حيث ن عدد صحيح موجب

مضروب الصفر يساوي ١ ٠! = ١

مثال (٢)

اختير ٨ أشخاص لحمل الشعلة الأولمبية عبر المدينة. بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب حاملي الشعلة؟

الحل:

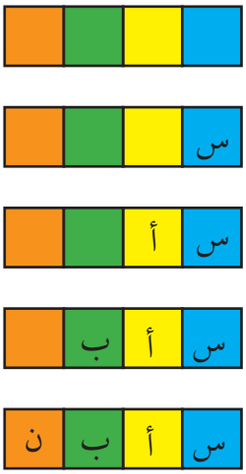
اختر ٨ أشخاص، وأوجد الطرائق المختلفة التي يمكن تنظيمهم بها:

٨ ! = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٤٠ ٣٢٠

لدينا ٤٠ ٣٢٠ طريقة مختلفة لترتيب حاملي الشعلة.

تحتاج أحيانًا إلى اختيار أشياء بترتيب معيّن، كاختيار أسماء أول ثلاثة جمال في سباق الهجن أو اعتماد عدد سري يسمح بفتح المحفظة. **عندما يكون ترتيب الأشياء مهمًا دون تكرار يدعى الاختيار تبديلًا.**

كتبت عزة أحرف كلمة "السبعون" كل حرف على بطاقة. أرادت معرفة عدد الكلمات الممكن كتابتها باستخدام ٤ أحرف فقط من السبعة المكونة لكلمة "السبعون". لذلك أخذت ورقة وقسمتها إلى ٤ أقسام.



اختارت حرفًا من ٧ ووضعته في الخانة الأولى، وليكن س. ثم اختارت حرفًا من الأحرف ٦ المتبقية للخانة الثانية، وليكن أ.

بقي مع عزة ٥ بطاقات. اختارت حرفًا منها للخانة الثالثة، وليكن ب.

أخيرًا اختارت حرفًا من ٤ للخانة الباقية، وليكن ن. هكذا اكتملت الكلمة.

تم اختيار الحرف الأول من بين ٧ أحرف. هناك ٦ اختيارات ممكنة للحرف الثاني أي ٧ × ٦ اختيارات لأول حرفين كذلك هناك ٥ اختيارات ممكنة للحرف الثالث

و٤ اختيارات للحرف الرابع أي ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = ٨٤٠ اختيارًا.

ويمكن كتابتها على الصورة $\frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٣ \times ٢ \times ١} = \frac{!٧}{!٣} = \frac{!٧}{!(٤ - ٧)}$

وبصورة عامة يعطى اختيار م عنصر من بين ن عنصر مختلف (م ⩽ ن) ومن دون تكرار أي عنصر منها ، حيث ترتيب العناصر مهم بالقانون: $ل^{ن}_{م} = \frac{!ن}{!(ن - م)}$

فمثلًا نكتب: $ل^{٧}_{٤} = \frac{!٧}{!(٤ - ٧)}$

مثال (٣)

من المثال (٢)، بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار ٣ من حاملي الشعلة وترتيبهم للمرور وراء بعضهم أمام المنصة الرسمية؟

الحل:

هناك ٨ من حاملي الشعلة، علينا اختيار ٣ منهم. ترتيب حاملي الشعلة مهم ولا يمر أحدهم مرتين. إذًا الاختيار تبديل.

لإيجاد عدد الطرائق نستخدم القانون $ل^{ن}_{م} = \frac{!ن}{!(ن - م)}$

$ل^{٨}_{٣} = \frac{!٨}{!(٣ - ٨)} = ٣٣٦$

لاحظ أن:

$ل^{٨}_{٣} = ٨ \times ٧ \times ٦$

حاول أن تحل

٢ (أ) احسب ٤!

(ب) احسب (٧ – ٣)!

(جـ) تجري محطة إذاعية مسابقة أفضل شاعر. يتم تسمية الشعراء العشرة الأفضل، وعلى المستمعين تحديد الترتيب الصحيح للشعراء الخمسة الأفضل ليتمكنوا من الربح. بكم طريقة مختلفة يمكن لأحد المستمعين اختيار ٥ شعراء من القائمة التي تضم الشعراء العشرة وترتيبها؟

مثال (٤)

لنفترض أنه عليك اختيار من بين مجموعة من ١٠ سيارات، بعض السيارات التي ستشارك في الاستعراض وترتيبها.
كم ترتيبًا يمكنك تشكيله إذا اخترت:
(أ) ٤ سيارات؟
(ب) ٥ سيارات؟
(جـ) ٧ سيارات؟

الحل:

الطريقة الأولى: استخدام القانون.

$$\text{(أ) } {}^{١٠}ل_{٤} = \frac{!١٠}{!(٤ - ١٠)} = \frac{!١٠}{!٦} = ٥٠٤٠$$

$$\text{(ب) } {}^{١٠}ل_{٥} = \frac{!١٠}{!(٥ - ١٠)} = \frac{!١٠}{!٥} = ٣٠٢٤٠$$

$$\text{(جـ) } {}^{١٠}ل_{٧} = \frac{!١٠}{!(٧ - ١٠)} = \frac{!١٠}{!٣} = ٦٠٤٨٠٠$$

الطريقة الثانية: استخدام الآلة الحاسبة.

تتضمن عادة الآلات الحاسبة العلمية مفتاح المضروب !.

(أ) إذا تم اختيار ٤ سيارات، بالتالي، لم يتم اختيار ٦ سيارات: ١٠ ! ÷ ٦ ! = ٥٠٤٠

لدينا ٥٠٤٠ طريقة لاختيار ٤ سيارات وترتيبها.

(ب) إذا تم اختيار ٥ سيارات بالتالي، لم يتم اختيار ٥ سيارات:

١٠ ! ÷ ٥ ! = ٣٠٢٤٠

لدينا ٣٠٢٤٠ طريقة لاختيار ٥ سيارات وترتيبها.

(جـ) إذا تم اختيار ٧ سيارات، بالتالي، لم يتم اختيار ٣ سيارات:

١٠ ! ÷ ٣ ! = ٦٠٤٨٠٠

لدينا ٦٠٤٨٠٠ طريقة لاختيار ٧ سيارات وترتيبها.

حاول أن تحل

٣ (أ) ما عدد الطرائق المختلفة الممكنة لاختيار ٧ طلاب من ٩ طلاب وترتيبهم للإشراف على صالة الأنشطة؟

(ب) يفتح الباب إذا ضغطت على ٤ مفاتيح مختلفة بالترتيب الصحيح من بين ٧ مفاتيح مختلفة. بكم طريقة مختلفة يمكنك القيام بذلك؟

(جـ) إذا كان عليك اختيار ٣ طلاب وترتيبهم من بين ٥ طلاب لمشروع الفصل، فما عدد الترتيبات المختلفة التي يمكنك تشكيلها ؟

ما عدد الترتيبات الممكنة إذا كان عليك اختيار ٤ طلاب؟ و٥ طلاب؟

تحقق من فهمك

١ وضح ما الذي تعنيه ٥!.

٢ ما أوجه الاختلاف بين عدد الطرائق الممكنة لاختيار ٢٠ شخصًا من بين ٤٠ وترتيبهم، وعدد الطرائق الممكنة لترتيب ٤٠ شخصًا؟

المرشد لحلّ المسائل (١٠-٢)

عند الأستاذ أحمد ١٠ مجموعات في حصة الرياضيات. غدًا الاثنين ستقوم ثلاث مجموعات منها بتسليم تقارير مشاريعها. بكم طريقة مختلفة يمكن للأستاذ أحمد اختيار هذه المجموعات وترتيبها؟

افهم

١ كم مجموعة في الفصل؟ .....

٢ كم مجموعة ستسلم التقارير يوم الاثنين؟ .....

٣ ما المطلوب إليك إيجاده؟ .....

خطط

٤ كم مجموعة لن تسلّم التقارير يوم الاثنين؟ .....

.....

٥ استخدم المضروب لكتابة عدد طرائق ترتيب:

(أ) المجموعات كلّها. .....

(ب) المجموعات غير المختارة. .....

٦ استخدم المضروب لكتابة تعبير يوضح عدد الطرائق المختلفة التي يمكن أن يستخدمها أحمد لاختيار المجموعات وترتيبها.

.....

حل

٧ بكم طريقة مختلفة يستطيع أحمد اختيار المجموعات وترتيبها؟ .....

.....

٨ اكتب جملة تعطي الإجابة النهائية. .....

تحقق

٩ أعد كتابة التعبير في السؤال رقم ٦ باستخدام العوامل بدلًا من المضروب. .....

.....

حل مسألة أخرى

١٠ عند الأستاذة صبا ٧ مجموعات في حصة الرياضيات. يوم الاثنين القادم ستقوم ٤ مجموعات منها بتسليم تقارير مشاريعها. بكم طريقة مختلفة يمكن للأستاذة صبا اختيار هذه المجموعات وترتيبها؟

.....

.....

٣-١٠

التوافيق والمجموعات
Combinations and Groups

سوف تتعلم

- كيفية تحديد الخيارات غير المرتبطة بترتيب على أنها توافيق، وتطبيق طرائق العد في حالات يكون فيها الترتيب غير مهم.

من الاستخدامات

- عند اختيار أعضاء اللجان في المجلس نستخدم التوافيق حيث يكون الترتيب غير مهم عند الاختيار.

المصطلحات الأساسية

◄ التوافيق
Combination

◄ **صلة الدرس** لقد سبق أن تعلمت عن الخيارات التي يكون الترتيب فيها مهمًّا. ستتعلم في هذا الدرس أن الترتيب في التوافيق قد لا يكون مهمًّا في حالات عدة. ►

استكشف التوافيق

ما الفرق الذي يحدثه ذلك؟

في دورة الألعاب الأولمبية الصيفية للعام ٢٠٠٨، شارك كل من العداء (أ) و(ب) و(ج) و(د) في سباق العدو ٤ × ٤٠٠ متر تتابع للرجال.

١ بكم طريقة يمكن اختيار العداء الأول لبدء السباق والعداء الرابع لينهي السباق؟

٢ اذكر الترتيبات المختلفة للعداء الأول والعداء الرابع. هل الترتيب مهم في هذه الاختيارات؟

٣ طلبت محطة تلفزيونية أن يظهر عداءين معًا في مقابلة. ما عدد الاختيارات المختلفة التي يمكن تشكيلها باستخدام عداءين من الفريق؟ نظّم قائمة.

٤ ما أوجه الاختلاف بين اختيار عضوين من الفريق للمقابلة واختيار العداء الأول والعداء الرابع؟

تعلم التوافيق والمجموعات

لنفترض أن مدرستك تجري انتخابات لاتحاد الطلاب وأن المرشحين هم: كامل وخالد وفهد ونادر. ينتخب الحائز على أكبر عدد من الأصوات رئيسًا للاتحاد وينتخب الشخص الذي يليه نائبًا له. ما عدد النواتج الممكنة للانتخاب؟

في هذه الحالة يكون الترتيب مهمًّا، لذلك لدينا ٤ × ٣ = ١٢ ناتجًا ممكنًا.

لنفترض أن الطالبين اللذين نالا أكبر عدد من الأصوات أصبحا عضوين في اتحاد الطلاب، بصرف النظر عن أي منهما نال أكبر عدد من الأصوات. كيف يؤثر ذلك على النتائج؟

الرئيس	نائب الرئيس
كامل	خالد
كامل	فهد
كامل	نادر
خالد	كامل
خالد	فهد
خالد	نادر
فهد	كامل
فهد	خالد
فهد	نادر
نادر	كامل
نادر	خالد
نادر	فهد

أعضاء الاتحاد	
كامل	خالد
كامل	فهد
كامل	نادر
~~خالد~~	~~كامل~~
خالد	فهد
خالد	نادر
~~فهد~~	~~كامل~~
~~فهد~~	~~خالد~~
فهد	نادر
~~نادر~~	~~كامل~~
~~نادر~~	~~خالد~~
~~نادر~~	~~فهد~~

الناتج خالد/ كامل هو نفسه كامل/ خالد، لذا يمكن حذفه. والناتج فهد/ كامل هو نفسه كامل/ فهد، لذا يمكن حذفه وهكذا . بالتالي ينخفض عدد النواتج من ١٢ إلى ٦ .

عندما لا يكون الترتيب مهمًّا، ينخفض عدد النواتج. تسمى المجموعة المختارة التي تضم عددًا من الأشياء، بغض النظر عن ترتيبها، **توفيقة** من الأشياء.

مثال (١)

يريد ٥ طلاب (أحمد، خالد، نادر، جابر، حمد) تأليف فريق يضم طالبين لكتابة مقالات صحفية. لإجراء القرعة، تكتب أسماء المرشحين كلها على بطاقات وتخلط لإجراء سحب اسمين معًا. ما عدد التوافيق المختلفة التي يمكن تشكيلها من طالبين اثنين؟

الحل:

نظِّم قائمة:

أحمد، خالد	خالد، نادر	نادر، جابر	جابر، حمد
أحمد، نادر	خالد، جابر	نادر، حمد	
أحمد، جابر	خالد، حمد		
أحمد، حمد			

يمكن تشكيل ١٠ توافيق ممكنة لاختيار طالبين من بين ٥ طلاب.

حاول أن تحل

١ من مثال (١) إذا تقرر تشكيل الفريق من ٣ طلاب لكتابة المقالات الصحفية، ما عدد التوافيق الممكنة في هذه الحالة؟

في بعض الحالات لا يكون ترتيب العناصر مهمًّا. كاختيار ٣ طلاب ممثلين للصف أو اختيار ٤ كتب مطالعة لقراءتها خلال العطلة الصيفية.

في حاول أن تحل ١ ، اختيار ٣ طلاب لكتابة المقالات الصحفية لا يحتاج إلى ترتيب. أي أن ترتيب ٣ طلاب (٣!) نعتبرهم اختيارًا واحدًا إذا لم يكن الترتيب مهمًّا.

إذًا نقسم عدد التباديل على ٣! لمعرفة عدد المجموعات من ٣ طلاب

أي $\frac{{}^{٥}ل_{٣}}{٣!} = \frac{٥!}{(٥-٣)!\ ٣!} = ١٠$

وبصورة عامة اختيار م عنصر من بين ن عنصر مختلف (م ⩽ ن) دون تكرار أي منها، وحيث ترتيب العناصر غير مهم يسمى توفيقًا ويعطى بالقانون:

$$\binom{ن}{م} = \frac{{}^{ن}ل_{م}}{م!} = \frac{ن!}{م!\,(ن-م)!}$$

ويقرأ (ن فوق م).

إذًا $\binom{٥}{٣} = \frac{{}^{٥}ل_{٣}}{٣!} = \frac{٥!}{٣!\,(٥-٣)!}$

فكرة مفيدة لحل المسائل

إذا كان مجموع الأعداد في المقام لا يساوي العدد الذي يمثل البسط فهذا دليل على أن ثمة خطأ ما.
(فمثلًا $\frac{٥!}{٢!\times ٣!}$ نلاحظ ٥ = ٢ + ٣)

قانون:

$$\binom{ن}{ن} = \binom{ن}{صفر} = ١ \quad ، \quad \binom{ن}{١} = ن$$

تفسير

$\binom{ن}{ن} = ١$: يمكن اختيار «ن» عنصر من بين «ن» عنصر مع إهمال الترتيب بطريقة واحدة.

$\binom{ن}{صفر} = ١$: يمكن اختيار «صفر» عنصر من بين «ن» عنصر بطريقة واحدة.

$\binom{ن}{١} = ن$: يمكن اختيار عنصر واحد من بين «ن» عنصر بِـ «ن» طريقة مختلفة.

مثال (٢)

في الألعاب الأولمبية لعام ٢٠٠٨، اختير ٣ لاعبي جمباز من كل منتخب من فرق الدول المشاركة، وكان منتخب الكويت يضم ٦ لاعبين، بكم طريقة يمكن تكوين فريق من ٣ لاعبين كويتيين؟

الحل:

بما أن الترتيب غير مهم في عملية الاختيار، فعدد طرائق تكوين الفريق يعطى بقانون التوافيق:

$$\binom{٦}{٣} = {}_{٣}ن^{٦} = \frac{!٦}{!٣ \times !٣} = ٢٠$$

وباستخدام الآلة الحاسبة:

$$\frac{!٦}{!٣ \times !٣} = ٦ \; !\; \div \; (\; ٣ \; !\; \times \; ٣ \; !\;) \; = \; ٢٠$$

لدينا ٢٠ طريقة لاختيار فريق من ٣ أعضاء من بين لاعبي منتخب الكويت.

حاول أن تحل

٢ كم فريقًا من ٤ لاعبين يمكن تشكيله من مجموعة من ٦ لاعبين؟

مثال (٣)

في أحد المعارض ٢٠ لوحة فنية، بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة من ؟

(أ) ٣ لوحات (ب) ١٧ لوحة

اكتب إجابتك على شكل مضروب. ماذا تلاحظ؟

الحل:

(أ) عدد الطرائق لاختيار ٣ لوحات هو $\binom{٢٠}{٣} = \frac{!٢٠}{!١٧ \times !٣} = ١١٤٠$

(ب) عدد الطرائق لاختيار ١٧ لوحة هو $\binom{٢٠}{١٧} = \frac{!٢٠}{!٣ \times !١٧} = ١١٤٠$

اختيار ١٧ لوحة هو نفسه اختيار ٣ لوحات. فعدد الطرائق في الحالتين هو نفسه.

تحقق من فهمك

١ فيم تختلف التوافيق عن التباديل؟ لماذا توجد توافيق أقل من التراتيب عند الاختيار من مجموعة ما؟

٢ كيف يرتبط اختيار ٢ من ٧ باختيار ٥ من ٧؟ ولماذا؟

٣ أوجد ${}_{٤}ن_{٠}$ ، ${}_{٤}ن_{٤}$. ماذا تلاحظ؟

حلّ المسائل
افهم
خطّط
حلّ
تحقّق

بكم طريقة ممكنة يمكنك اختيار ٣ كتب من بين مجموع الكتب: كتاب تاريخ أو قصة قصيرة أو كتاب جغرافيا أو كتاب رياضيات أو مجلّة ثقافية؟

افهم

١ حوّط عدد الكتب التي ستختارها.

٢ ضع خطًّا تحت الكتب التي يمكن اختيارها.

٣ هل المطلوب منك هو كيفية تجميع الكتب أم عدد الطرائق الممكن بها التجميع؟

خطط

٤ اكتب كلًّا مما يلي مستخدمًا المضروب.

(أ) عدد طرائق اختيار العناصر كلّها وترتيبها.

(ب) عدد طرائق ترتيب العناصر المختارة.

(جـ) عدد طرائق ترتيب العناصر غير المختارة.

٥ أيّ من الصيغ التالية يبين عدد طرق اختيار الكتب؟

(أ) $\frac{!٥}{!٣}$

(ب) $\frac{!٥}{!٣ \times !٢}$

(جـ) $\frac{!٣ \times !٢}{!٥}$

(د) $\frac{!٣}{!٢}$

حل

٦ بكم طريقة يمكنك اختيار ٣ كتب من المجموعة؟

تحقق

٧ تحقق من إجابتك بتنظيم قائمة تضم أنواع الكتب التي يمكن اختيارها، وارمز إليها بالأحرف التالية: أ، ب، ج، د، هـ .

حل مسألة أخرى

٨ بكم طريقة يمكنك صنع فطيرة من اللحم تعلوها ٤ طبقات من النكهات المختلفة، علمًا أن الطبقات المتوفرة هي: الطماطم والجبن والبصل والمخلّل والخسّ، والصلصة والتوابل؟

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ **التفكير الناقد:** بكم طريقة يمكنك تقديم وجبة خفيفة لفريق من ١٠ سباحين إذا كان لديك ١٢ وجبة خفيفة مختلفة، و بحيث يأخذ كل سباح وجبة واحدة؟

.....

.....

٢ **اختر إستراتيجية:** بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة مكونة من صفر إلى ١٢ شيئًا من بين ١٢ شيئًا؟

.....

.....

٣ **التفكير الرياضي:** بكم طريقة يمكنك أن تختار ٣ لاعبين من بين ١٠ لاعبين لفريق كرة السلة، ثمّ اختيار ٣ لاعبين من بين اللاعبين السبعة الباقين لفريق آخر؟

.....

.....

٤ تريد اختيار مجموعة من بين ١٠ طلاب. ما عدد طلاب المجموعة التي ستختارها بحيث تكون عدد الخيارات أكبر ما يمكن؟

.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

الفرصة والاحتمال
Chance and Probability

يوم ميلاد سعيد

كم يوم مولد للفرد الواحد؟ لكل فرد يوم مولد واحد فحسب. أما الأيام الأخرى من السنوات المتتالية التي نحتفل فيها بأيام المولد فهي الذكرى السنوية لذلك اليوم.

ومما لا شك فيه أن العديد من الأشخاص يتشاركون يوم المولد نفسه. إذا كان يوم مولدك يقع في ١١ نوفمبر / تشرين الثاني، فإنه يتوافق مع تاريخ استقلال دولة الكويت. وإذا كان يقع في ٢٦ فبراير / شباط، فإنه يتوافق مع تاريخ التحرير.

اليوم الذي يحتفل فيه أفراد مختلفون بأيام مولدهم يمتلئ أحيانًا بالتطابقات.

هل ولدت بمفردك أو شاركك أخ أو أخت يوم مولدك؟ عند ولادتك من الممكن أن يكون لديك:

- فرصة واحدة من ٨٠ أن تكون توأمًا (لأخ أو أخت لك)
- فرصة واحدة من ٤٠٠ ٦ أن تكون توأمًا (لزوج من إخوتك)
- فرصة واحدة من ٠٠٠ ٥١٢ أن تكون توأمًا (لثلاثة إخوة آخرين لك)
- فرصة واحدة من ٠٠٠ ٩٦٠ ٤٠ أن تكون توأمًا (لأربعة إخوة آخرين لك)

١ هل تشارك أحد المشاهير يوم مولدك؟

٢ تحتفل دولة الكويت بذكرى الاستقلال والعيد الوطني في ٢٥ فبراير. هل هذا التاريخ يصادف في اليوم نفسه من كل عام؟ ولماذا؟

٣ أي مما يلي له فرصة أكبر للحدوث، أن تولد كتوأم ثنائي أم كتوأم خماسي؟

١٠-٤

الاحتمال
Probability

سوف تتعلم

- حساب الاحتمال.

من الاستخدامات

- يستخدم الاحتمال لتوقع المكان الذي سيحدث فيه الإعصار.

المصطلحات الأساسية

- تجربة Experiment
- نواتج Outcomes
- فضاء العينة Sample Space
- حدث Event
- احتمال Probability

صلة الدرس لقد سبق أن استخدمت طرائق لعد النواتج الممكنة. ستتعلم في هذا الدرس حساب فرصة حدوث ناتج ما.

استكشف الاحتمال

إنه أمر مؤكد

١ ارسم خط أعداد يشبه الخط الموضح أدناه:

صفر ٠,١ ٠,٢ ٠,٣ ٠,٤ ٠,٥ ٠,٦ ٠,٧ ٠,٨ ٠,٩ ١

سم على خط الأعداد النقاط التي تبين فرصة حدوث الأحداث التالية، علمًا أن الصفر يدل على أن الحدث مستحيل وأن الـ ١ يدل على أن الحدث مؤكد.

(أ) الحصول على ٦ عند رمي مكعب مرقم مرة واحدة.

(ب) الحصول على كتابة عند رمي قطعة نقود معدنية مرة واحدة.

(جـ) اختيار زوج من الجوارب من درج يحوي زوجين من الجوارب وذلك من دون النظر داخله.

(د) سحب بطاقة تتضمن حرفًا من مجموعة ١٠ بطاقات تتضمن أول ١٠ أحرف من حروف الهجاء العربية.

(هـ) الحصول على عدد أكبر من ٦ عند رمي مكعب مرقم مرة واحدة.

(و) الحصول على كتابة أو صورة عند رمي قطعة نقود معدنية مرة واحدة.

٢ علل كيفية تصنيفك للأحداث وتمثيلها على خط الأعداد، وهل وضع كل شخص في مجموعتك النقاط بالترتيب نفسه؟

٣ صف الأحداث التي استطعت وضعها في صفر أو في ١.

تعلم الاحتمال

نفرض أنك ترمي قطعة نقود معدنية عشوائيًّا **للتجربة**. يمكن أن تظهر قطعة النقود الصورة أو الكتابة فهما نتيجتان متساويتان في الفرص أو **نواتج** ممكنة.

تمثل مجموعة النواتج الممكنة كلها في تجربة ما **فضاء العينة**. وغالبًا ما نهتم بفرصة حدوث **حدث** معين، ويسمى ذلك **احتمال** الحدث.

يمكن كتابة الاحتمال على شكل كسر عشري أو كسر أو نسبة أو نسبة مئوية.

$$\text{ل (الحدث)} = \frac{\text{عدد النواتج في الحدث}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

أمثلة

١ يلعب فهد وخالد لعبة باستخدام مكعب مرقم. إذا رمى فهد المكعب المرقم وحصل على ٣ أو أكثر يفوز في اللعبة.

ما النواتج في فضاء العينة؟ ما النواتج المحققة للحدث «٣ أو أكثر»؟ ما احتمال الحدث «٣ أو أكثر»؟

> **تذكر:**
> عندما نقول مكعبًا مرقمًا نعني مكعبًا مرقمًا: من ١ – ٦

الحل:

فضاء العينة: ٦ نواتج ← ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦

الحدث «٣ أو أكثر»: ٤ نواتج ← ٣، ٤، ٥، ٦

احتمال حصول فهد على «٣ أو أكثر» في رميته $\frac{٤}{٦}$ أو $\frac{٢}{٣}$.

٢ تحاول أسيل تخمين يوم مولد صديقتها إسراء. ما احتمال أن تخمن الشهر الصحيح في محاولتها الأولى؟ (لنفترض أن الاحتمالات متساوية ليوم مولد أي شخص في أي شهر).

الحل:

في السنة ١٢ شهرًا بالتالي يساوي عدد نواتج فضاء العينة ١٢. يمكن أن يكون فيه مولد إسراء في خلال شهر واحد فقط وبالتالي يساوي عدد نواتج الحدث ١.

ل (تخمين الشهر الصحيح) = $\frac{١}{١٢}$

حاول أن تحل

١ ما النواتج في فضاء العينة في كل مما يلي؟ وما احتمال الحدث؟

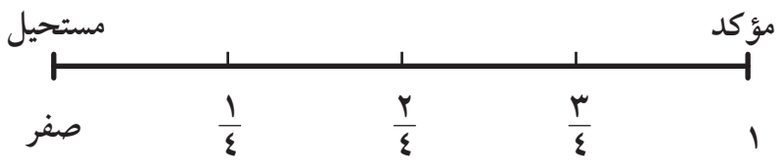
(أ) إذا رمى أحمد مكعبًا مرقمًا وحصل على ٥ أو أكثر، يفوز في اللعبة.

(ب) عند اختيار سمكة واحدة من سلة تحوي أربع سمكات وهي (زبيدي، نقرور، صبور، هامور) والحصول على سمكة زبيدي.

يكتب احتمال وقوع حدث ما دائمًا على شكل عدد بين الصفر وواحد.

إذا كان عدد النواتج في الحدث يساوي الصفر فإن الحدث يسمى **«الحدث المستحيل»** واحتماله يساوي صفرًا.

إذا كان عدد النواتج في الحدث يساوي عدد النواتج في فضاء العينة فإن الحدث يسمى **«الحدث المؤكد»** واحتماله يساوي يساوي ١.



مثال (٣)

لنفترض أنك أدرت الدوارة إلى اليسار، ما احتمال أن يتوقف مؤشرها عند اللون:

(أ) الأحمر (ب) الأحمر أو الأزرق

(جـ) الأخضر (د) غير الأحمر

الحل:

(أ) ل (أحمر) = $\frac{٢}{٥}$

(ب) ل (أحمر أو أزرق) = ١ (مؤكد)

(جـ) ل (أخضر) = صفر (مستحيل)

(د) ل (غير الأحمر) = $\frac{٣}{٥}$

يمكنك أن تلاحظ أن احتمال الحصول على اللون الأحمر زائد احتمال الحصول على لون غير اللون الأحمر هو ١ .

مجموع احتمال وقوع حدث واحتمال عدم وقوعه يساوي ١ .

حاول أن تحل

٢ عند رمي مكعب مرقم من ١ – ٦ مرة واحدة، أوجد احتمال الحصول على:

(أ) عدد أولي (ب) عدد غير أولي

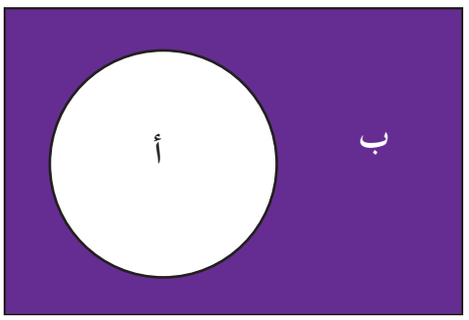
(جـ) عدد أكبر من ٥ (د) عدد أصغر من ٧

(هـ) كسر بين ١ و٢

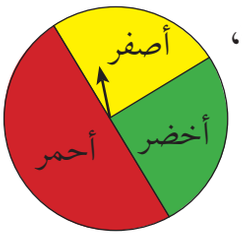
تحقق من فهمك

١ اذكر الفرق بين فضاء العينة والحدث. هل يمكن أن يكون الحدث يساوي فضاء العينة؟

٢ في الشكل أدناه، إذا كان الحدثان أ، ب يمثلان الإمكانيات كلها في فضاء عينة، ما الذي تعرفه عن ل (ب)؟ ولماذا؟



حلُّ المسائلِ
افهمْ
خطِّطْ
حُلَّ
تحقَّقْ



إذا كانت مساحة كل من القطاعين الأخضر والأصفر من الدوّارة تساوي $\frac{١}{٤}$ مساحة الدوّارة، فما احتمال عدم توقف مؤشر الدوّارة عند اللون الأخضر؟

افهم

١ كم قطاعًا في الدوّارة؟ .....

٢ أيّ القطاعات لها المساحة نفسها؟ .....

٣ أيّ كسر من المساحة يمثل اللون الأحمر؟ .....

خطط

٤ كيف تجعل مساحة القطاع الأحمر مساوية لمساحة القطاع الأخضر؟ .....

.....

٥ كيف يمكن أن توجد احتمال الحدث: .....

(أ) ل (الحدث) = $\frac{\text{عدد نواتج الحدث}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$ ؟ (ب) ل (الحدث) = $\frac{\text{عدد الأحداث}}{\text{عدد الأحداث في فضاء العينة}}$ ؟

٦ اذكر نواتج الحدث متساوية الفرص.

.....

٧ اذكر النواتج كلها التي ليست خضراء.

.....

حل

٨ اكتب احتمال عدم توقف مؤشر الدوارة عند اللون الأخضر على شكل كسر. .....

.....

تحقق

٩ كيف يمكنك استخدام الطرح لإيجاد الإجابة؟ .....

.....

حل مسألة أخرى

١٠ إذا كانت مساحة كل من القطاعات البيضاء والسوداء يساوي $\frac{١}{٥}$ مساحة الدوّارة، فما احتمال عدم توقف مؤشر الدوارة عند اللون الأسود؟

.....

.....

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ في أحد الاختبارات تختار غدير إجابتها عشوائيًّا (دون التدقيق في السؤال). ما احتمال أن تختار الإجابة الصحيحة:
(أ) في سؤال اختيار من متعدد مع أربع إجابات؟

.....

.....

(ب) في سؤال صح أو خطأ؟

.....

.....

التفكير الناقد: أجب مستخدمًا: «دائمًا»، «أحيانًا»، «مستحيل».

٢ يساوي احتمال الحدث المؤكد ١ . .....

٣ يساوي احتمال الحدث المستحيل ١ . .....

٤ **المجلة:** وضّح لم احتمال وقوع حدث لا يمكن أن يكون أكبر من ١ . أعطِ مثالًا على حدث احتمال وقوعه يساوي ١ .

.....

.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٥-١٠

الاحتمال التجريبي والاحتمال الهندسي
Experimental and Geometric Probability

سوف تتعلم

- استخدام التجارب لإيجاد الاحتمالات.

من الاستخدامات

- يستخدم صانعو الأطعمة اختبارات السوق والاحتمال لتحديد ما إذا كان المنتج سيلقى رواجًا.

المصطلحات الأساسية

- ◄ احتمال نظري
  Theoretical Probability
- ◄ احتمال تجريبي
  Experimental Probability
- ◄ محاولة
  Trial
- ◄ احتمال هندسي
  Geometric Probability

◄ **صلة الدرس** لقد سبق أن تعلمت كيف تحسب الاحتمالات. سترى في هذا الدرس ما إذا كان الحدث الممكن وقوعه يحدث فعلًا. ►

استكشف الاحتمال التجريبي

رمي النقود المعدنية **الأدوات المستخدمة:** قطع نقود معدنية.

١ أثناء عملك مع الطلاب في مجموعتك، حدد من منهم يحين موعد يوم مولده أخيرًا، فمثلًا ولد الطلاب في مجموعة الأيام ١٢ و٣ و٢٤ و١٩ ويعتبر يوم ٢٤ التاريخ الأخير لأيام المولد. نسمي هذا العدد (ن).

٢ سوف ترمي قطعة نقود معدنية (ن) مرة (٢٤ مرة للمثال السابق). اذكر عدد المرات التي تتوقع أن تحصل فيها على صورة.

٣ ارم قطعة نقود (ن) مرة. سجّل عدد مرات الحصول على الصورة. هل هذا هو العدد الذي توقعته؟

٤ اقسم عدد مرات الحصول على الصورة على عدد مرات رمي قطعة النقود. قرب النتيجة إلى أقرب واحد من مائة معتبرًا أنه الاحتمال.

٥ ما الاحتمال الأكبر الذي حصلت عليه مجموعة؟ وما الاحتمال الأصغر ؟

٦ اكتب النتائج باستخدام علامات العد (عدد الصور الكلي وعدد الرميات الكلي). اقسم لإيجاد احتمال طلاب الفصل كلهم. هل هو قريب من توقعك؟

تعلم الاحتمال التجريبي، الاحتمال الهندسي

أحيانًا قد يكون من السهل حساب الاحتمال الفعلي أو **الاحتمال النظري** لحدث ما. عندما ترمي مكعبًا مرقمًا، يكون احتمال ظهور كل وجه $\frac{١}{٦}$. لكن في حالات أخرى، قد تحتاج إلى تقدير الاحتمال عبر بيانات استطلاع ما أو البيانات التجريبية. ويسمى الاحتمال المحتسب وفق هذه الطريقة **الاحتمال التجريبي** .

تتمثل الطريقة الفضلى لإدراك مفهوم الاحتمال التجريبي باستخدامه في حالة يكون فيها الاحتمال النظري معلومًا، والمقارنة بينهما.

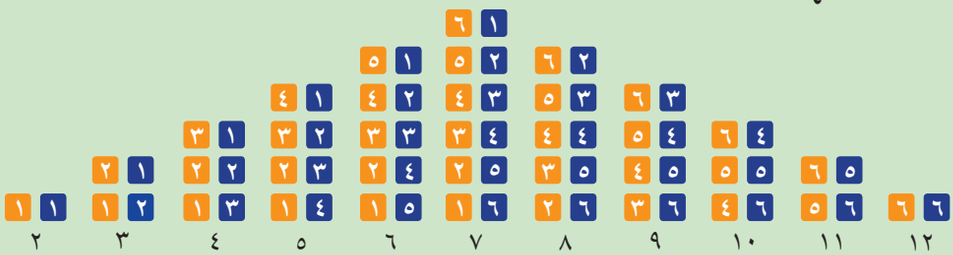
تسمى كل مرة تقوم فيها بتجربة **محاولة** .

مثال (١)

(أ) ما الاحتمال النظري للحصول على المجاميع الممكنة عند رمي مكعبين مرقمين؟

الحل:

باستخدام مبدأ العد، تبين أن عدد النواتج الممكنة ٦ × ٦ = ٣٦. يمكن رسم مخطط أو تنظيم قائمة لملاحظة المجاميع الممكنة كلها.



الاحتمالات النظرية											
المجموع	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
عدد المرات	١	٢	٣	٤	٥	٦	٥	٤	٣	٢	١
الاحتمال	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{١}{١٨}$	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{١}{١٨}$	$\frac{١}{٣٦}$
النسبة المئوية	٪٢,٨	٪٥,٦	٪٨,٣	٪١١,١	٪١٣,٩	٪١٦,٧	٪١٣,٩	٪١١,١	٪٨,٣	٪٥,٦	٪٢,٨

(ب) لإيجاد الاحتمالات التجريبية، ارمِ مكعبين مرقمين ٥٠ مرة، وسجل المجاميع التي حصلت عليها.

الحل:

حصل أحد الطلاب على النتائج التالية:

الاحتمالات التجريبية											
المجموع	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
عدد المرات	٢	٤	٣	٥	٧	٨	٩	٥	٤	٣	صفر
الاحتمال	$\frac{١}{١٨}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٧}{٣٦}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{صفر}{٣٦}$
النسبة المئوية	٪٤	٪٨	٪٦	٪١٠	٪١٤	٪١٦	٪١٨	٪١٠	٪٨	٪٦	صفر٪

(جـ) قارن بين النسب المئوية للنتائج التجريبية هذه والنسب المئوية النظرية للمجاميع من ٢ إلى ١٢.

الحل:

تتقارب النسب المئوية للاحتمالات التجريبية والنظرية، وكان من الممكن أن تتقارب النتائج إلى حد أكبر لو أجرى الطالب عددًا أكبر من المحاولات.

حاول أن تحل

١ (أ) عند رمي قطعتي نقود معدنيتين متمايزتين، ما الاحتمال النظري للحصول على صورتين؟ وصورة واحدة فقط؟ وعدم الحصول على صورة؟

(ب) لإيجاد الاحتمال التجريبي، ارمِ قطعتي نقود معدنيتين ٥٠ مرة، سجّل عدد مرات حدوث كل نتيجة.

(جـ) قارن بين النسب المئوية للنتائج التجريبية التي حصلت عليها، والنسب المئوية النظرية.

يمكن اعتماد طريقة أخرى لتحديد الاحتمال، وذلك باستخدام نماذج هندسية والمقارنة بين المساحات أو الأطوال أو قياسات أخرى، وهذا ما يعرف بـ الاحتمال الهندسي.

مثال (٢)

وضعت هدية صغيرة عشوائيًّا في قالب حلوى. فرص تواجد الهدية في أي جزء من قالب الحلوى متكافئة. ما احتمال أن تتواجد الهدية تحت الأطراف الحمراء؟

الحل:

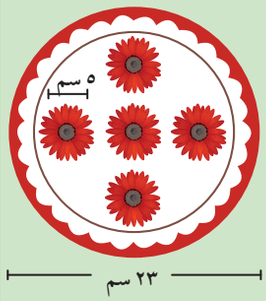
مساحة المستطيل الكبير = ٩١ سم × ٦١ سم = ٥ ٥٥١ سم^{٢}.

مساحة المستطيل الداخلي = ٧٦ سم × ٤٦ سم = ٣ ٤٩٦ سم^{٢}.

مساحةالأطراف الحمراء = ٥ ٥٥١ − ٣ ٤٩٦ = ٢ ٠٥٥ سم^{٢}.

احتمال أن تكون الهدية تحت جزء من الأطراف الحمراء يساوي $\frac{٢\,٠٥٥}{٥\,٥٥١}$.

٢ ٠٥٥ ÷ ٥ ٥٥١ = ٠,٣٧٠ أي ٣٧٪.



حاول أن تحل

٢ وضعت هدية صغيرة عشوائيًّا في قالب حلوى. فرص تواجدها في أي جزء من قالب الحلوى متكافئة. ما احتمال أن تكون الهدية تحت إحدى الزهور؟

تحقق من فهمك

١ اذكر الفرق بين الاحتمال النظري والاحتمال التجريبي. هل الاحتمالات التي يذكرها الأطباء نظرية أم تجريبية؟ هل الاحتمال الهندسي نظري أم تجريبي؟

٢ قال فهد إن الاحتمال التجريبي يمكن أن يكون أكبر من ١، هل هذا صحيح؟ وإذا كان كذلك، فأعطِ مثالًا.

٣ لنفترض أن المدقق في جودة المنتجات أجرى اختبارًا على ٢٠ صندوق شمع. وجد شموعًا معيبة في ١ منها، واعتبر أن المعمل قد فشل في الاختبار. هل هذا عادل؟

معيار الجودة

إذا تخطت النسبة المئوية للعيوب ٦٪، فإن المنتج يفشل في الاختبار.

المرشد لحلّ المسائل (١٠-٥)

حلّ المسائل
افهم
خطّط
حلّ
تحقّق

قام خالد باستطلاع طلاب فصله حول يوم مولد كل منهم. ثم نظّم البيانات في مخطط الساق والأوراق المبين إلى اليسار.

الأوراق	الساق
١٣ ٥٧٧ ٨٨٩	٠
١ ١٣٥ ٦٧٧ ٧٨٩	١
٠٠١ ٢٢٣ ٤٦٦ ٧٨٩	٢
٠٠١	٣

(أ) ما احتمال أن يكون أحد الطلاب قد ولد بتاريخ ١٧؟

(ب) ما احتمال أن يكون أحد الطلاب قد ولد بعد تاريخ ٢٩؟

(جـ) ما احتمال أن يكون أحد الطلاب قد ولد بتاريخ ٤؟

افهم

١ ماذا تمثل كل إجابة؟ .....

خطط

٢ ما عدد نواتج فضاء العينة؟ .....

٣ اكتب عدد الطلاب الذين ولدوا في كل من التواريخ المذكورة. .....

(أ) يوم ١٧ (ب) يوم ٣٠ أو ٣١ (جـ) يوم ٤

٤ كم طالبًا لم يولد في تاريخ ٤؟ .....

حل

٥ اكتب احتمال أن يكون أحد الطلاب قد ولد في كل من التواريخ المذكورة: .....

(أ) يوم ١٧ (ب) بعد يوم ٢٩ (جـ) يوم ٤

تحقق

٦ اكتب كلّ احتمال في السؤال رقم ٥ على شكل نسبة مئوية. .....

(أ) يوم ١٧ (ب) بعد يوم ٢٩ (جـ) يوم ٤

حل مسألة أخرى

٧ أضف يومي مولد آخرين: التاسع، والتاسع والعشرين إلى مخطط الساق والأوراق السابق. ثم أجب عن الأسئلة التالية:

(أ) ما احتمال أن يكون أحد الطلاب قد ولد بتاريخ ٢٥؟ .....

(ب) ما احتمال أن يكون أحد الطلاب قد ولد بعد تاريخ ١٦؟ .....

(جـ) ما احتمال ألا يكون أحد الطلاب قد ولد بتاريخ ١٠؟ .....

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ **التحضير للاختبار**: قدّر احتمال أن يكون أحد الأشخاص قد ولد في شهر مايو.

(أ) ٨,٥٪ (ب) ١٢٪ (جـ) $\frac{١١}{١٢}$ (د) ١,٦٠٪

.....

٢ **التواصل**: أعطي ٦٠٠ مريض من أصل ١٠٠٠ دواء جديدًا. أما العدد المتبقي منهم فأعطي له دواء ليس له أي تأثير. من الأشخاص الذين أخذوا الدواء الفعلي، تحسنت حالة ٣٠٠ منهم مقارنة بـ ٥٠ شخصًا من الذين أخذوا الدواء الآخر. هل يمكنك القول أن الدواء فعال؟ ولماذا؟

معيار فعالية الدواء
يعتبر الدواء فعالًا إذا كانت نتائجه إيجابية بنسبة لا تقل عن ٩٠ ٪ خلال فترة ١٠ أشهر.
FDA Regulations

.....

.....

٣ وضعت أمينة ٥ كرات حمراء اللون، و٣ كرات خضراء اللون في كيس. دون النظر في داخله، سحبت أمينة كرة منه، دونت لونها على ورقة ثم أعادتها إلى الكيس. كررت العملية ٥٠ مرة وحصلت على ٢٩ كرة حمراء. قارن بين الاحتمال النظري والاحتمال التجريبي لسحب كرة حمراء.

.....

.....

٤ **التفكير الناقد**: إذا كان الاحتمال النظري لوقوع حدث ما يساوي ١، فهل يمكن للاحتمال التجريبي أن يكون أصغر من ١؟

.....

.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

اختبار الوحدة العاشرة

١ هل يمكن أن تمثل النسبة $\frac{٥}{٤}$ احتمالًا؟ فسِّر.

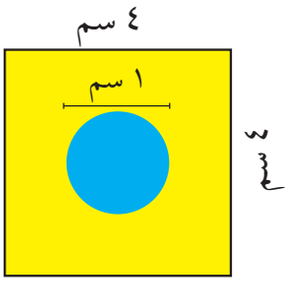
٢ تلعب مها وصديقتها لعبة بمكعب مرقم، تربح مها إذا دحرجت المكعب وحصلت على عدد أكبر من ٤.
ما احتمال أن تفوز صديقتها باللعبة؟

٣ في عبوة بذور لعدة أنواع من الأزهار وهي ٥٠ بذرة أقحوان، ٨٠ بذرة دوار الشمس، ١٠٠ بذرة زهرة سوسن، و٤٠ بذرة قرنفل، أوجد احتمال أن تختار عشوائيًّا بذرة قرنفل.

٤ في مسابقة، كانت الجوائز ١٠٠ دينار، ٧٥ دينارًا، ٢٥ دينارًا، ٢٥ دينارًا، ٢٥ دينارًا، ٢٥ دينارًا.

(أ) إذا اخترت جائزة عشوائيًّا، فما احتمال أن تفوز بـ٧٥ دينارًا؟

(ب) إذا منحت جائزة الـ ١٠٠ دينار فعلًا، فما فرصتك في الفوز بـ ٧٥ دينارًا؟



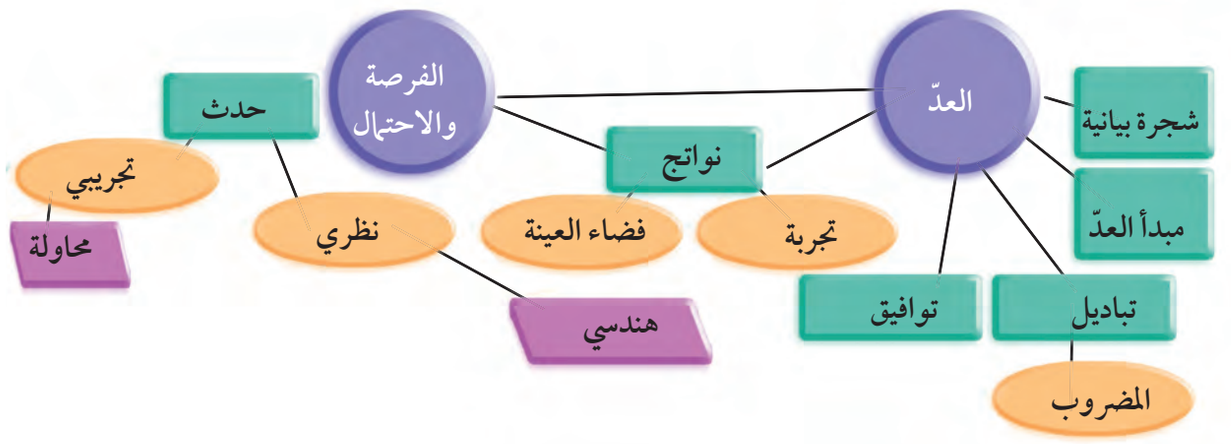
٥ بكم طريقة يمكننا أن نرتب ١٠ كتب على أحد رفوف المكتبة؟

٦ بكم طريقة يمكننا أن نختار ٣ أنواع من السكاكر من أصل ١٠ أنواع؟

٧ أوجد احتمال أن يصيب أحمد الهدف الدائري من الرسم المقابل.

٨ يحتوي صندوق على ٣ كرات: واحدة زرقاء، واحدة حمراء، واحدة خضراء. ارسم شجرة بيانية للنواتج الممكنة إذا أردنا أن نسحب كرتين واحدة تلو الأخرى دون إعادة الكرة الأولى.

مخطط تنظيمي للوحدة العاشرة



ملخص الوحدة العاشرة (أ) : العدّ

- ينص مبدأ العد على أنه إذا كان يمكن وقوع حدث ما بـ م طريقة، ويمكن لحدث آخر أن يقع بـ (ن) طريقة، فإن هذين الحدثين يمكن أن يقعا معًا بـ م × ن طريقة. يمكنك أيضًا استخدام جدول أو شجرة بيانية كي تعدّ.
- يستخدم اصطلاح المضروب لكتابة حاصل ضرب أعداد صحيحة متتالية. ٤! يساوي مضروب ٤ ويعني ٤ × ٣ × ٢ × ١ . يعرّف صفر ! على أنه يساوي ١ .
- التبديل أو الترتيب هو اختيار مرتب من الأشياء. يمكنك استخدام مبدأ العد أو المضروب لحساب التباديل.
- التوفيق هو اختيار من الأشياء غير المرتبة. عدد التوافيق يساوي عدد التباديل مقسومًا على عدد الطرائق الممكنة لترتيب الأشياء المختارة.

ملخص الوحدة العاشرة (ب): الفرصة والاحتمال

- فضاء العينة هو مجموعة النواتج الممكنة كلها أو نواتج تجربة ما. والحدث هو ناتج أو مجموعة من النواتج.
- الاحتمال أو الاحتمال النظري لحدث ما هو : ل (حدث) = $\frac{\text{عدد النواتج في الحدث}}{\text{عدد نواتج فضاء العينة}}$.
- يساوي مجموع احتمال وقوع حدث ما واحتمال عدم وقوعه ١ .
- يحسب الاحتمال التجريبي باستخدام بيانات استبيان أو تجارب معينة. ويساوي عدد مرات وقوع الحدث مقسومًا على عدد المحاولات.
- يحسب الاحتمال الهندسي باستخدام النماذج الهندسية وبالمقارنة بين المساحات أو الأطوال أو أي مقاييس أخرى.

أودع في مكتبة الوزارة تحت رقم (٩٧) بتاريخ ٣١/ ٥/ ٢٠١٥م

شركة مطابع الرسالة - الكويت