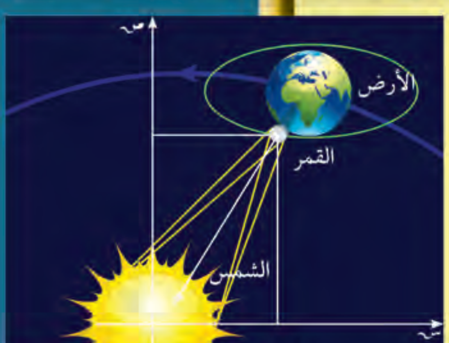
وزارة التربية

الرياضيات

كتاب الطالب



الصفّ العاشر
الفصل الدراسي الثاني
١٠

الطبعة الثانية

وزارة التربية

الرياضيات

الصـــفّ العــاشــر
الفصل الدراسي الثاني

كتاب الطالب

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. إبراهيم حسين القطان (رئيسًا)

أ. حصة يونس محمد علي
أ. فتحية محمود أبو زور

الطبعة الثانية
١٤٣٨ - ١٤٣٩ هـ
٢٠١٧ - ٢٠١٨ م

فريق عمل دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف العاشر

أ. رضيّة ناصر القطان (رئيسًا)

أ. السعيد فوزي إبراهيم | **أ. نجوى محمد وسيم**

أ. مجدي محمد الكواوي | **أ. منيرة علي العدواني**

دار التّربَويّون House of Education ش.م.م. وبيرسون إديوكيشن ٢٠١٢

الطبعة الأولى ٢٠١٢م

الطبعة الثانية ٢٠١٤م

٢٠١٦م

٢٠١٧م

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح
أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

مقدمـــة

الحمدلله رب العالمين، والصلاة والسلام على سيد المرسلين، محمد بن عبدالله وصحبه أجمعين.

عندما شرعت وزارة التربية في عملية تطوير المناهج، استندت في ذلك إلى جملة من الأسس والمرتكزات العلمية والفنية والمهنية، حيث راعت متطلبات الدولة وارتباط ذلك بسوق العمل، وحاجات المتعلمين والتطور المعرفي والعلمي، بالإضافة إلى جملة من التحديات التي تمثلت بالتحدي القيمي والاجتماعي والاقتصادي والتكنولوجي وغيرها، وإن كنا ندرك أن هذه الجوانب لها صلة وثيقة بالنظام التعليمي بشكل عام وليس المناهج بشكل خاص.

ومما يجب التأكيد عليه، أن المنهج عبارة عن كم الخبرات التربوية والتعليمية التي تُقدم للمتعلم، وهذا يرتبط أيضًا بعمليات التخطط والتنفيذ، والتي في محصلتها النهائية تأتي لتحقيق الأهداف التربوية، وعليه أصبحت عملية بناء المناهج الدراسية من أهم مكونات النظام التعليمي، لأنها تأتي في جانبين مهمين لقياس كفاءة النظام التعليمي، فهي من جهة تمثل أحد المدخلات الأساسية ومقياسًا أو معيارًا من معايير كفاءته من جهة أخرى، عدا أن المناهج تدخل في عملية إنماء شخصية المتعلم في جميع جوانبها الجسمية والعقلية والوجدانية والروحية والاجتماعية.

من جانب آخر، فنحن في قطاع البحوث التربوية والمناهج، عندما نبدأ في عملية تطوير المناهج الدراسية، ننطلق من كل الأسس والمرتكزات التي سبق ذكرها، بل إننا نراها محفزات واقعية تدفعنا لبذل قصارى جهدنا والمضي قدمًا في البحث في المستجدات التربوية سواء في شكل المناهج أم في مضامينها، وهذا ما قام به القطاع خلال السنوات الماضية، حيث البحث عن أفضل ما توصلت إليه عملية صناعة المناهج الدراسية، ومن ثم إعدادها وتأليفها وفق معايير عالمية استعدادًا لتطبيقها في البيئة التعليمية.

ولقد كانت مناهج العلوم والرياضيات من أول المناهج التي بدأنا بها عملية التطوير، إيمانًا بأهميتها وانطلاقًا من أنها ذات صفة عالمية، مع الأخذ بالحسبان خصوصية المجتمع الكويتي وبيئته المحلية، وعندما أدركنا أنها تتضمن جوانب عملية التعلم ونعني بذلك المعرفة والقيم والمهارات، قمنا بدراستها وجعلها تتوافق مع نظام التعليم في دولة الكويت، مركزين ليس فقط على الكتاب المقرر ولكن شمل ذلك طرائق وأساليب التدريس والبيئة التعليمية ودور المتعلم، مؤكدين على أهمية التكامل بين الجوانب العلمية والتطبيقية حتى تكون ذات طبيعة وظيفية مرتبطة بحياة المتعلم.

وفي ضوء ما سبق من معطيات وغيرها من الجوانب ذات الصفة التعليمية والتربوية تم اختيار سلسلة مناهج العلوم والرياضيات التي أكملناها بشكل ووقت مناسبين، ولنحقق نقلة نوعية في مناهج تلك المواد، وهذا كله تزامن مع عملية التقويم والقياس للأثر الذي تركته تلك المناهج، ومن ثم عمليات التعديل التي طرأت أثناء وبعد تنفيذها، مع التأكيد على الاستمرار في القياس المستمر والمتابعة الدائمة حتى تكون مناهجنا أكثر تفاعلية.

د. سعود هلال الحربي

الوكيل المساعد لقطاع البحوث التربوية والمناهج

المحتوَياتُ

الوحدة السادسة

هندسة الدائرة
Geometry of a Circle

مشروع الوحدة: أهمية الدائرة في تصميم الزينة والزخارف الهندسية

١ مقدمة المشروع: منذ قرون عديدة، استخدم الفنانون بساطة الدائرة ورونقها في التزيين. بعضهم صنع أنماطًا في الدائرة مستفيدًا من عدم وجود بداية لها أو نهاية. وبعضهم الآخر استفاد من كثرة خطوط التناظر فيها لينتج خدعًا بصرية.

٢ الهدف: ابحث عن بعض التقنيات المستخدمة خلال العصور الماضية لإنتاج الفن الدائري عندما استخدم الفنانون الدائرة كأفضل طريقة لبلوغ أهدافهم في التزيين.

٣ اللوازم: أوراق رسم، شبكة مربعات، أقلام تلوين، قلم، فرجار.

٤ أسئلة حول التطبيق:

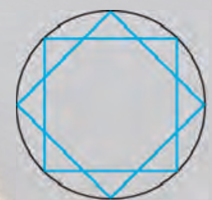
أ عيّن نقطة الأصل على شبكة مربعات (دون رسم المحاور).

ب ارسم ٤ دوائر مراكزها (٠، ٥)، (٥، ٠)، (−٥، ٠)، (٠، −٥) بنصف قطر يساوي ٥$\sqrt{٢}$. مستخدمًا المراكز نفسها، ارسم ٤ دوائر بنصف قطر يساوي ٤$\sqrt{٢}$.

صل بين المراكز الأربعة لتشكل مربعًا ولوّنه بالأحمر.

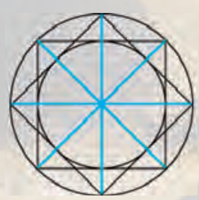
صل بين نقاط تقاطع الدوائر الكبرى والدوائر الصغرى ولوّن الشكل بالأخضر. امح الأقواس، ولوّن تصميمك.

ج اتبع الخطوات التالية لتصميم نمط من الفن الإسلامي من القرن الرابع عشر.

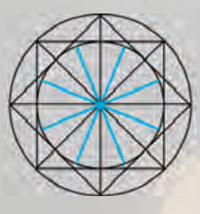


الخطوة ١: ارسم دائرة ومربعًا رؤوسه على الدائرة، ثم ارسم قطريه. ارسم الشكل الناتج عن دوران المربع بزاوية ٤٥° حول مركز الدائرة.

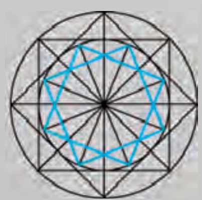
الخطوة ٢: ارسم دائرة داخلية محاطة بالمربعين.



الخطوة ٣: ارسم في كل مربع جميع الأقطار.



الخطوة ٤: ارسم منصفات الزوايا المركزية، ثم عين نقاط التقاطع الثماني لهذه المنصفات مع الدائرة الداخلية.



الخطوة ٥: اجمع هذه النقاط لتحصل على مربعين محاطين بالدائرة الصغرى كما يبين الرسم، ثم لون لتحصل على التصميم المطلوب.

٥ التقرير: ضع تقريرًا مفصلًا حول تنفيذ المشروع مستفيدًا من دروس الوحدة، واعرض التصاميم التي حصلت عليها.

دروس الوحدة

الدائرة	مماس الدائرة	الأوتار والأقواس	الزوايا المركزية والزوايا المحيطية	الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس
٦−١(أ)	٦−١(ب)	٦−٢	٦−٣	٦−٤

الوحدة السادسة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت إيجاد محيط دائرة ومساحتها.
- تعلمت إثبات تطابق المثلثات وخصائص العناصر المتناظرة وتشابه المثلثات وبعض القطع المميزة في المثلث.
- تعلمت خصائص المثلث قائم الزاوية، ومنها نظرية فيثاغورث.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تستخدم العلاقة بين المماس ونصف قطر الدائرة المار بنقطة التماس لحل المسائل.
- سوف تستخدم العلاقة بين مماسين من نقطة واحدة في حل مسائل حياتية.
- سوف تستخدم الأوتار المتطابقة والأقواس والزوايا المركزية لحل مسائل في الدائرة.
- سوف تتعرف خصائص المستقيمات والقطع المستقيمة التي تمر بمركز الدائرة والتي لا تمر بمركز الدائرة.
- سوف تتعرف العلاقة بين الزاوية المركزية والزاوية المحيطية المشتركة في القوس نفسه.
- سوف تتعرف العلاقة بين الزاوية المماسية والقوس المحصور بين ضلعيها.
- سوف تتعرف العلاقة ما بين الزاوية المماسية والزاوية المحيطية والقوس المشترك بينهما.
- سوف تتعرف العلاقة بين وترين متقاطعين في الدائرة والعلاقة بين طول المماس وطول القطع.
- سوف تتعرف خصائص الشكل الرباعي الدائري.

أضف إلى معلوماتك

تتميز الأوتار المتقاطعة عند نقطة داخل الدائرة أو خارج الدائرة بعلاقات محددة تربط بين أطوال أجزائها. يمكنك إيجاد هذه العلاقات باستخدام ما تعلمته سابقًا عن المثلثات المتطابقة والمثلثات المتشابهة. المعارف التي سوف تكتسبها من هذه الوحدة لها تطبيقات عديدة في التصوير، والهندسة المعمارية، والهندسة المدنية، والصور المتحركة.

المصطلحات الأساسية

مماس الدائرة - أوتار - أقواس - زاوية مركزية - زاوية محيطية - أوتار متقاطعة - القاطع - رباعي دائري - زاويتان متقابلتان - زاويتان متكاملتان.

٦–١ (أ)

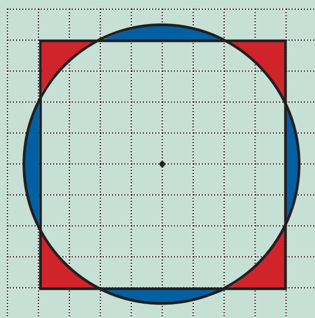
الدائرة
The Circle

هل تعلم؟

عُرفت الدائرة منذ القدم. استخدم الأقدمون الدولاب والأسطوانة لضخ المياه وطحن الحبوب ودحرجة الأشياء الثقيلة.

في مصر طرح الفراعنة مسألة تربيع الدائرة، أي إنشاء مربع مساحته تساوي مساحة رقعة تحدها دائرة معطاة، حتى أنهم اقترحوا أفكارًا حول حل هذه المسألة.

شغلت هذه المسألة الباحثين في الرياضيات لمدة طويلة حتى العام ١٨٨٢ عندما أثبت العالم الرياضي الألماني فردينان فون ليندمان استحالة هذا الإنشاء.

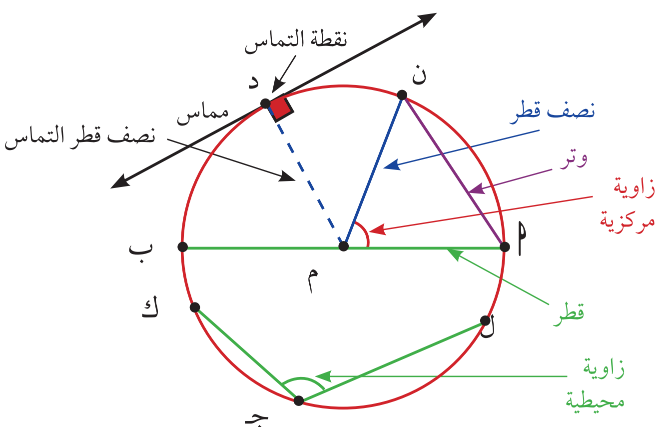


هل يمكن أن تتساوى مساحات الرقع الزرقاء مع مساحات الرقع الحمراء؟

تعريف الدائرة

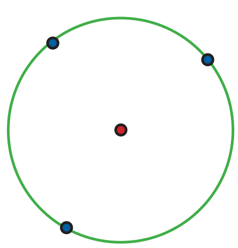
الدائرة هي مجموعة نقاط المستوى التي تبعد كل منها عن نقطة ثابتة م في المستوى بعدًا ثابتًا.

تسمى النقطة الثابتة **مركز الدائرة** ويسمى البعد الثابت طول نصف القطر ويرمز إليه عادة بالرمز **نق**.



نظرية (١)

كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.



مثال (١)

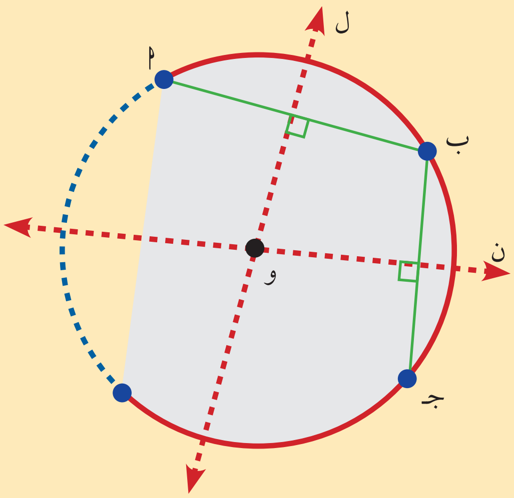
علم الآثار: وجد عالم آثار قطعًا صغيرة من جرة خزفية بالإضافة إلى قطعة كبيرة دائرية الشكل من فوهة الجرة. كيف تستطيع مساعدة العالم لإعادة ترميم الجرة، وذلك بإيجاد مركز وطول نصف قطر القطعة الدائرية الكبيرة؟

الحل:

المعطيات: جزء من فوهة الجرة الدائرية.

المطلوب: إيجاد مركز الدائرة وطول نصف قطرها.

العمل: نأخذ ٣ نقاط ٲ، ب، جـ على قوس الدائرة المرسومة والتي تمثل جزءًا من فوهة الجرة.
نرسم محورًا لكل من ٲب ، ب جـ ، اللذان يتقاطعان في نقطة و.



البرهان: ∵ و ل محور ٲب

∴ وب = وٲ (١)

∵ و ن محور ب جـ

∴ وب = وجـ (٢)

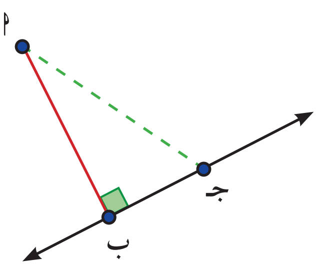
من (١)، (٢) نستنتج أن النقطة و هي مركز الدائرة.

∴ طول وٲ = طول نصف قطر الدائرة.

حاول أن تحل

١ استخدم المفهوم السابق في مثال (١) لإثبات برهان نظرية (١) وتحديد مركز الدائرة المحيطة بمثلث قائم الزاوية.

استنتاج



في الشكل المقابل، ٲب ⊥ ب جـ

بفرض أن المستقيم ٲجـ يمر بالنقطة ٲ عموديًّا على ب جـ.

يصبح مجموع قياسات زوايا Δٲب جـ أكبر من ١٨٠° (ق (بَ) + ق (جـَ) = ١٨٠°)

وهذا يتناقض مع النظرية: مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ٲجـ ليس عموديًّا على ب جـ.

استنتاج ١: من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بهذه النقطة وعمودي على المستقيم المعلوم.

لاحظ أنه في Δٲب جـ، ٲب < ٲجـ مهما كان موضع النقطة جـ على المستقيم (جـ لا تنطبق على ب).

استنتاج ٢: أقصر بعد بين نقطة ومستقيم هو البعد العمودي.

كلما ابتعدت جـ عن ب على المستقيم أصبح طول ٲجـ أكبر.

٦-١ (ب)

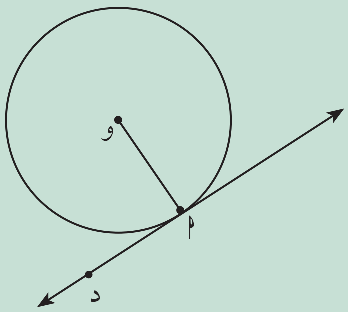
مماس الدائرة
Tangent of the Circle

سوف تتعلم

- استخدام العلاقة بين المماس ونصف قطر الدائرة المار بنقطة التماس
- استخدام العلاقة بين مماسين من نقطة واحدة خارج الدائرة

عمل تعاوني

- استخدم الفرجار لرسم دائرة مركزها و.
- من نقطة د خارج الدائرة ارسم مستقيمًا يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة فقط ولتكن أ.
- ارسم القطعة وأ.



١ ما قياس الزاوية دأو؟

٢ قارن نتيجتك بنتائج زملائك في الفصل.

٣ ضع تخمينًا حول العلاقة بين المستقيم الذي يقطع الدائرة في نقطة واحدة ونصف قطر الدائرة المار في هذه النقطة.

المماس للدائرة هو مستقيم في المستوي يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة.

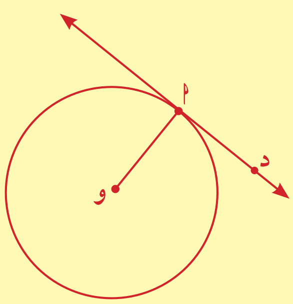
نقطة التقاطع تسمى نقطة التماس.

$\overleftrightarrow{\text{أد}}$ مماس.

$\overrightarrow{\text{أد}}$ شعاع مماس.

$\overline{\text{أد}}$ قطعة مماسية

$\overline{\text{أو}}$ نصف قطر التماس

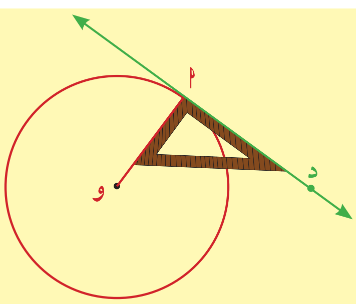


نظرية (٢)

المماس عمودي على نصف قطر التماس.

إذا كان مستقيم مماسًّا لدائرة، فإنه يكون متعامدًا مع نصف القطر المار بنقطة التماس.

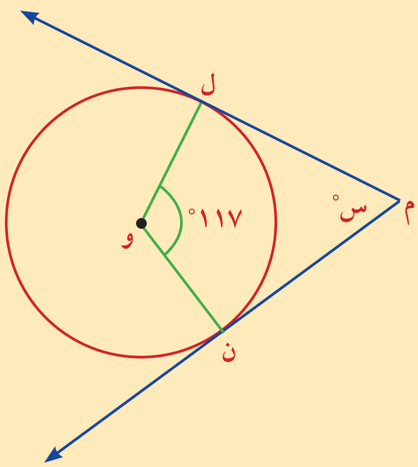
أي أن $\overline{\text{وأ}} \perp \overleftrightarrow{\text{دأ}}$.



مثال (٢)

في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ مماسان للدائرة التي مركزها و.

أوجد قياس الزاوية ل مَ ن.



الحل:

المعطيات: $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ مماسان للدائرة التي مركزها و.

المطلوب: إيجاد قياس الزاوية ل مَ ن

البرهان:

∵ $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس

و ل نصف قطر التماس

∴ ق(م لَ و) = ٩٠°

وبالمثل: ق(م نَ و) = ٩٠° نظرية

ل م ن و شكل رباعي

∴ ق(لَ) + ق(نَ) + ق(مَ) + ق(وَ) = ٣٦٠°

٩٠° + ٩٠° + س° + ١١٧° = ٣٦٠° بالتعويض

٢٩٧° + س° = ٣٦٠° بالتبسيط

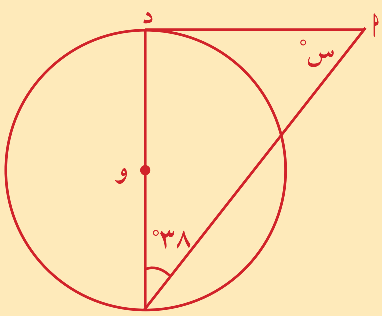
س° = ٦٣°

∴ ق(ل مَ ن) = ٦٣°

حاول أن تحل

٢ في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ مماس للدائرة التي مركزها و.

أوجد قيمة س°.



مثال (٣) تطبيق حياتي

يمثل المخطط إطاري الدراجة.

أوجد المسافة بين محوري هذين الإطارين.

إذا كان أد = ٣٢ سم ، ب جـ = ٤٠ سم ، أب = ٩٦ سم.

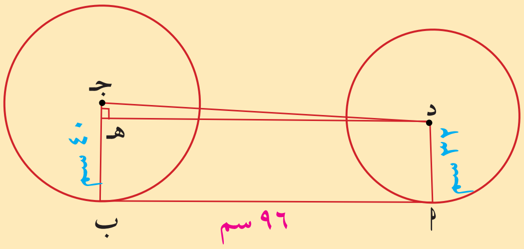
الحل:

المعطيات:

دائرة مركزها جـ، نق = ٤٠ سم

دائرة مركزها د، نق = ٣٢ سم

أب مماس للدائرتين، أب = ٩٦ سم



المطلوب: إيجاد المسافة د جـ بين محوري الإطارين.

العمل: نرسم دهـ ⊥ جـ ب.

البرهان: دأ ⊥ أب ، جـ ب ⊥ أب لماذا؟

∴ الشكل دأب هـ مستطيل.

المثلث د هـ جـ قائم الزاوية في هـ

بتطبيق نظرية فيثاغورث:

(دجـ)^2 = (دهـ)^2 + (هـ جـ)^2

(دجـ)^2 = (٩٦)^2 + (٨)^2 = ٩ ٢٨٠

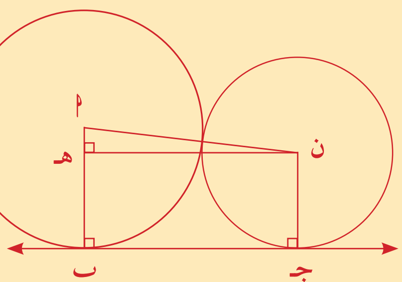
دجـ ≃ ٩٦,٣٣ باستخدام الآلة الحاسبة

المسافة بين محوري الإطارين تساوي ٩٦,٣ سم تقريبًا.

معلومة:
محور الإطار هو المحور الذي يدور حوله الإطار.

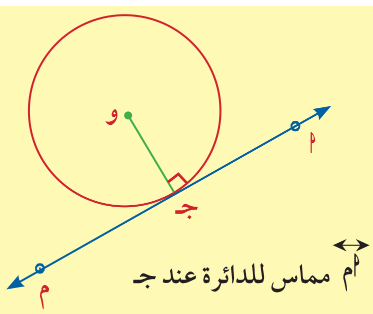
حاول أن تحل

٣ يمثل الشكل المقابل مقطعًا لأسطوانتين في معمل الورق.
أوجد طول ب جـ إذا كانت الدائرتان متماستين
وطول نصف قطريهما ٥٠ سم، ٤٠ سم على الترتيب.



نظرية (٣)

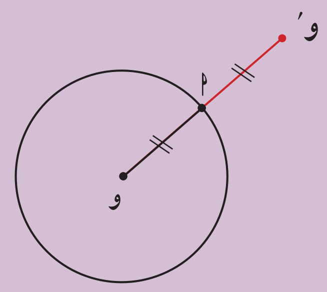
المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماسًا لهذه الدائرة عند هذه النقطة.



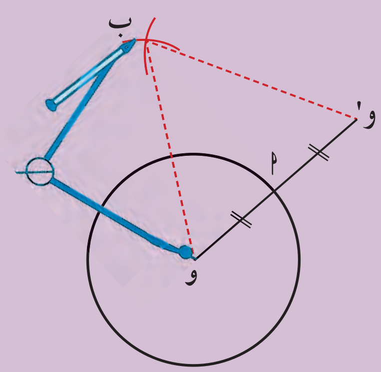
مشروع

دائرة مركزها و، أ نقطة على الدائرة. مستخدمًا الفرجار والمسطرة أنشئ مماسًّا للدائرة عند أ.

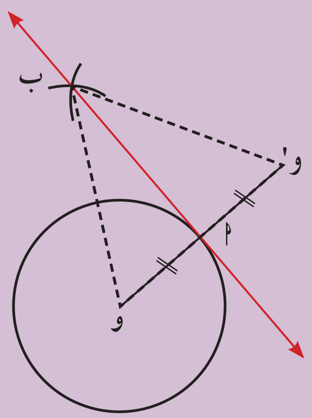
الطريقة الأولى:



نرسم نصف قطر وليكن $\overline{\text{وأ}}$ ثم نحدد و′ انعكاس للنقطة و في أ.

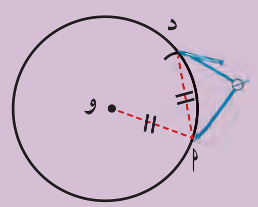


نرسم من و، و′ قوسين بفتحة أكبر من نحه، يتقاطع القوسان في ب.

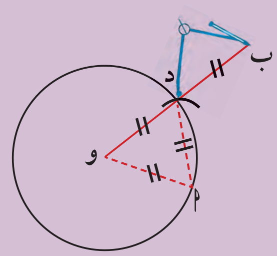


نرسم المستقيم المار بالنقطتين أ، ب. فنحصل على مماس للدائرة.

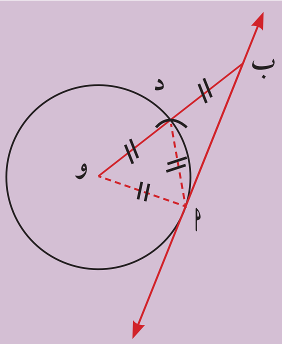
الطريقة الثانية:



نرسم نصف قطر وليكن $\overline{\text{وأ}}$ نركز سن الفرجار عند أ وبفتحة تساوي وأ نرسم قوسًا يقطع الدائرة في د فيكون أد = وأ



نحدد النقطة ب انعكاس للنقطة و في د



نرسم المستقيم المار بالنقطتين ب، أ فنحصل على مماس للدائرة.

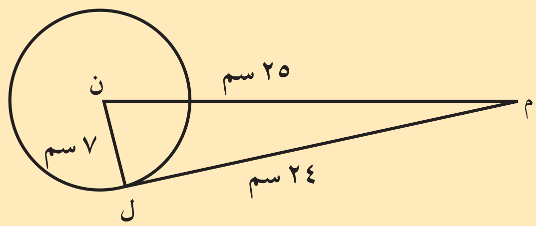
تحقق:

في كل من الطريقتين، أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة.

مثال (٤)

في الشكل المقابل، ن ل = ٧ سم ، ل م = ٢٤ سم ، ن م = ٢٥ سم.

أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة التي مركزها ن.



الحل:

المعطيات: ن ل = ٧ سم ، ن م = ٢٥ سم ، م ل = ٢٤ سم

المطلوب: إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماسًّا للدائرة التي مركزها ن

البرهان: باستخدام عكس نظرية فيثاغورث

(ن ل)^٢ + (ل م)^٢ $\overset{?}{=}$ (ن م)^٢

(٧)^٢ + (٢٤)^٢ $\overset{?}{=}$ (٢٥)^٢ بالتعويض

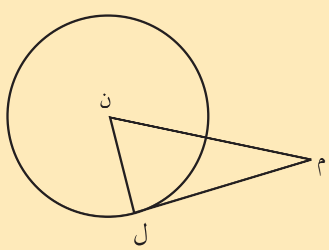
٦٢٥ = ٦٢٥ بالتبسيط

نستنتج أن المثلث م ل ن قائم في ل.

∴ $\overline{\text{م ل}} \perp \overline{\text{ن ل}}$

∴ م ل مماس للدائرة في النقطة ل. نظرية

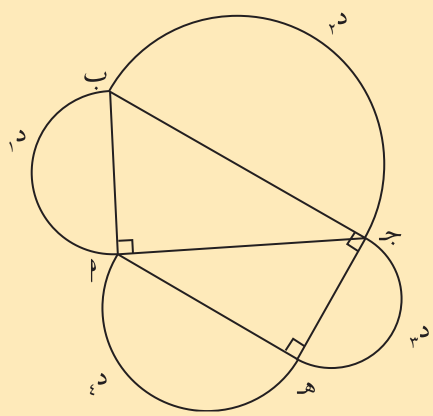
حاول أن تحل



٤ في الشكل المقابل، إذا كان ن ل = ٤ ، ل م = ٧ ، ن م = ٨،

فهل $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة؟ فسِّر إجابتك.

مثال (٥)



في الشكل المقابل د$_١$، د$_٢$، د$_٣$، د$_٤$ أنصاف دوائر أقطارها على الترتيب

$\overline{\text{أب}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{جـ هـ}}$ ، $\overline{\text{هـ أ}}$.

حدّد المماسات لأنصاف الدوائر، وفسِّر إجابتك

الحل:

المعطيات:

د$_١$، د$_٢$، د$_٣$، د$_٤$ أنصاف دوائر أقطارها على الترتيب

$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ هـ}}$ ، $\overline{\text{هـ أ}}$.

المطلوب:

تحديد المماسات لأنصاف الدوائر مع تفسير الإجابة.

البرهان:

جـ أ ⊥ أ ب معطى ، أ ب قطر لنصف الدائرة د$_{١}$

∴ جـ أ مماس لنصف الدائرة د$_{١}$.

كذلك جـ هـ ⊥ هـ أ معطى ، هـ أ قطر لنصف الدائرة د$_{٤}$

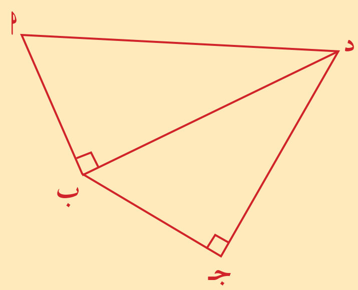
∴ جـ هـ مماس لنصف الدائرة د$_{٤}$

وبالمثل يمكن إثبات أن أ هـ مماس لنصف الدائرة د$_{٣}$ كذلك يمكن إثبات أن هـ جـ مماس لنصف الدائرة د$_{٢}$.

كذلك ب جـ مماس لنصف الدائرة د$_{٣}$.

معلومة مفيدة:

المماس لدائرة يكون مماسًّا لنصف هذه الدائرة الذي يحوي نقطة التماس.



حاول أن تحل

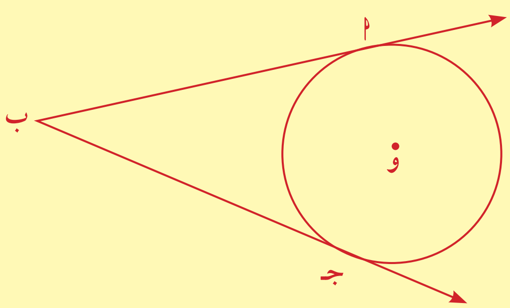
٥ أكمل النص التالي:

..... مماس للدائرة التي تمر برؤوس المثلث .....

نظرية (٤)

القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

أ ب ≅ جـ ب



المعطيات:

دائرة مركزها و.

أ، جـ نقطتان على الدائرة.

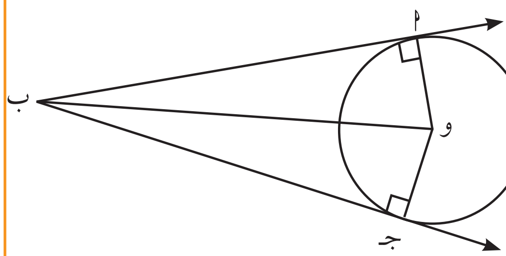
ب نقطة خارج الدائرة حيث ب أ ، ب جـ مماسان للدائرة.

المطلوب: إثبات تطابق ب أ ، ب جـ .

العمل: نرسم و أ ، و جـ ، و ب.

البرهان:

∵ $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ مماس للدائرة ، ∴ $\overline{\text{جـ و}}$ نصف قطر التماس $\overline{\text{جـ ب}} \perp \overline{\text{جـ و}}$



المثلث وجـ ب قائم الزاوية جـ — نظرية

ب جـ = $\sqrt{(\text{وب})^2 - \text{نق}^2}$ — نظرية فيثاغورث

وبالمثل المثلث وأ ب قائم الزاوية أ

بأ = $\sqrt{(\text{وب})^2 - \text{نق}^2}$

∴ ب جـ = بأ

برهان آخر:

في المثلثين ب أ و ، ب جـ و:

ب و = ب و — ضلع مشترك

ق(ب$\hat{\text{أ}}$ و) = ق(ب$\hat{\text{جـ}}$ و) = ٩٠° — نظرية

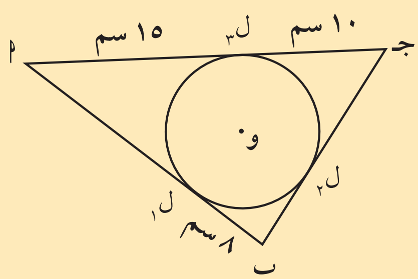
وأ = وجـ = نق

∴ Δبأو ≅ Δب جـ و — لماذا؟

∴ الأضلاع المتناظرة متطابقة ∴ ب أ = ب جـ

مثال (٦)

في الشكل المقابل، أوجد محيط المثلث أب جـ.



الحل:

المعطيات:

دائرة مركزها و

$\overline{\text{بأ}}$ مماس للدائرة في ل١ حيث ب ل١ = ٨ سم

$\overline{\text{ب جـ}}$ مماس للدائرة في ل٢.

$\overline{\text{أجـ}}$ مماس للدائرة في ل٣ حيث جـ ل٣ = ١٠ سم، أل٣ = ١٥ سم.

المطلوب: إيجاد محيط المثلث أ ب جـ.

البرهان:

أل٣ = أل١ = ١٥ سم — نظرية

جـ ل٢ = جـ ل٣ = ١٠ سم — نظرية

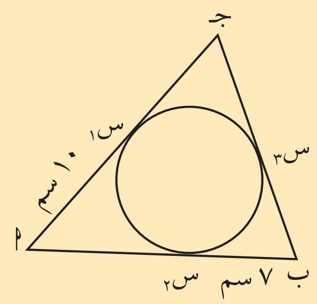
ب ل١ = ب ل٢ = ٨ سم — نظرية

محيط المثلث = أب + ب جـ + جـأ

= أل$_1$ + ل$_1$ب + ب ل$_2$ + ل$_2$جـ + جـ ل$_3$ + ل$_3$أ

= ١٥ + ٨ + ٨ + ١٠ + ١٠ + ١٥ = ٦٦

محيط المثلث = ٦٦ سم.



حاول أن تحل

٦ في الشكل المقابل إذا كان محيط المثلث أب جـ = ٥٠ سم، فأوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$.

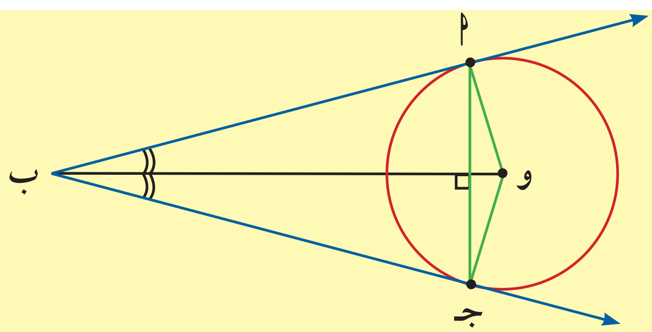
نتائج النظرية

Δب أجـ متطابق الضلعين من النظرية السابقة.

١ $\overrightarrow{\text{ب و}}$ منصف الزاوية أ$\hat{\text{ب}}$جـ

٢ $\overrightarrow{\text{وب}}$ منصف الزاوية أ$\hat{\text{و}}$جـ

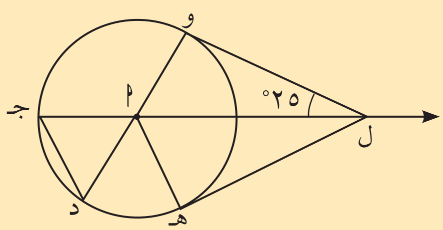
٣ $\overline{\text{وب}} \perp \overline{\text{أجـ}}$



مثال (٧)

في الشكل المقابل، أوجد ق(أ$\hat{\text{د}}$جـ)، ق(هـ$\hat{\text{أ}}$ د)

إذا كانت $\overline{\text{ل و}}$ ، $\overline{\text{ل هـ}}$ تمسان الدائرة حيث $\overline{\text{ود}}$ قطر للدائرة.



الحل:

$\overleftrightarrow{\text{ل هـ}}$ مماس للدائرة

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{ل هـ}} \perp \overline{\text{هـأ}}$ نظرية

ق(ل$\hat{\text{هـ}}$أ) = ٩٠°

$\overleftrightarrow{\text{ل جـ}}$ منصف الزاوية (و$\hat{\text{ل}}$هـ) نتيجة للنظرية ٤

$\therefore$ ق(أ$\hat{\text{ل}}$هـ) = ق(أ$\hat{\text{ل}}$و) = ٢٥°

ومنه ق(هـ$\hat{\text{أ}}$ل) = ١٨٠° − (٩٠° + ٢٥°) = ٦٥°

$\therefore$ ق(ل$\hat{\text{أ}}$و) = ٦٥°

ل أ منصف الزاوية (و أ̂ هـ) — نتيجة ٢ للنظرية ٤

ق(د أ̂ جـ) = ق(و أ̂ ل) = ٦٥° — زاويتان متطابقتان بالرأس

أ د = أ جـ = نق ∴ △ أ د جـ متطابق الضلعين

ق(أ د̂ جـ) = ق(أ جـ̂ د)

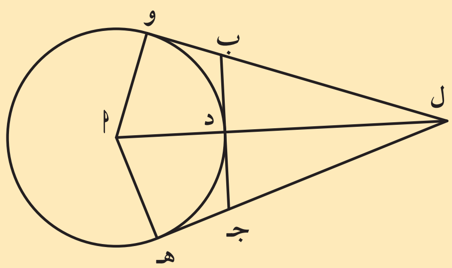
ق(أ د̂ جـ) = $\frac{١٨٠° - ٦٥°}{٢}$ = ٥٧,٥°

ق(هـ أ̂ د) = ١٨٠° − (ق(ل أ̂ هـ) + ق(د أ̂ جـ))

= ١٨٠° − (٦٥° + ٦٥°) = ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠°

حاول أن تحل

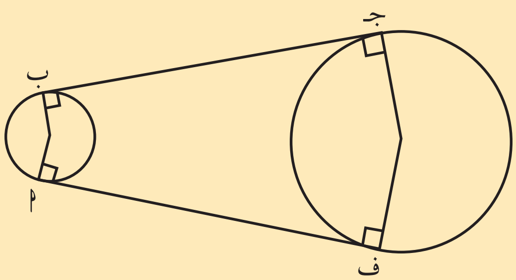
٧ في الشكل المقابل ل و ، ل هـ مماسان للدائرة، ب جـ مماس للدائرة عند النقطة د، أثبت أن المثلث ل ب جـ متطابق الضلعين.



مثال (٨) تطبيقات حياتية

يمثل الرسم المقابل دولاب (إطار) دراجة.

برهن أن ب جـ = أ ف.



الحل:

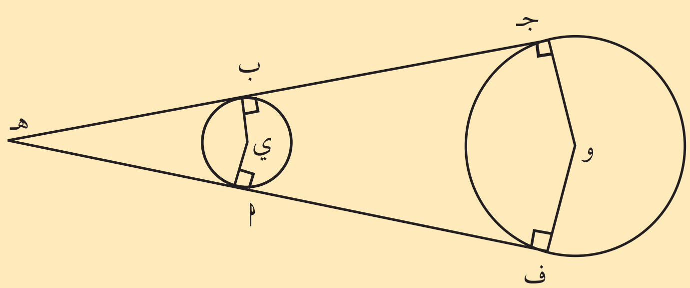
و جـ ، ي ب عموديان على ب جـ.

و ف ، ي أ عموديان على ف أ

المطلوب: إثبات أن ب جـ = أ ف

العمل:

نمد جـ ب ، ف أ حتى يتقاطعا في هـ.



البرهان:

∵ و جـ ⊥ ب جـ ، ي ب ⊥ ب جـ — معطى

∴ ب جـ مماس مشترك للدائرتين وبالمثل ف أ مماس مشترك للدائرتين — نظرية

هـ جـ ، هـ ف قطعتان مماستان للدائرة التي مركزها و ∴ هـ جـ = هـ ف — نظرية

كذلك هـ ب ، هـ أ قطعتان مماستان للدائرة التي مركزها ي ∴ هـ ب = هـ أ

هـ جـ - هـ ب = هـ ف - هـ أ   بطرح المعادلتين

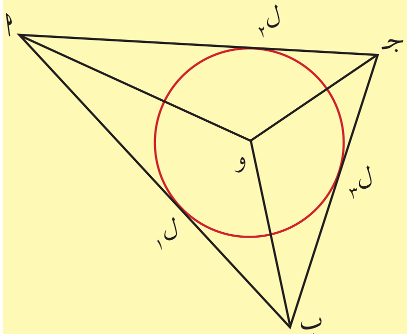
ب جـ = أ ف.

حاول أن تحل

٨ من المثال السابق بفرض أن الدائرتين متطابقتان.

أثبت أن ب جـ = أ ف إذا لم يتقاطع $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ مع $\overleftrightarrow{\text{أ ف}}$.

الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة) (Inscribed Circle of a Triangle)



هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.

مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث Circum Center.

فكِّر:

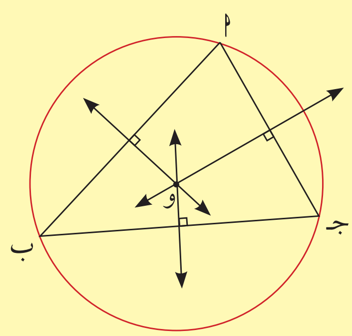
المثلثان أ و ل١، أ و ل٢ متطابقان.   لماذا؟

ق(ل١ أ̂ و) = ق(ل٢ أ̂ و)

∴ $\overleftrightarrow{\text{و أ}}$ منصف الزاوية أ̂.

أثبت بالطريقة نفسها أن كلًّا من $\overleftrightarrow{\text{و ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و جـ}}$ منصف للزاوية ب̂، جـ̂ على الترتيب.

الدائرة المحيطة لمثلث (الخارجة) (Circumscribed Circle of a Triangle)



هي دائرة تمر برؤوس المثلث الثلاثة.

مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث (نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث).

فكِّر:

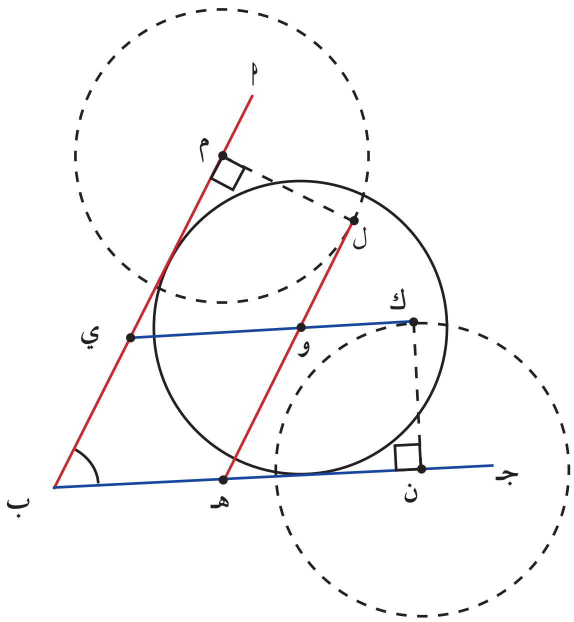
و ب = و جـ   لماذا؟

و ب = و أ   لماذا؟

ماذا تستنتج؟

تدريب توضيحي (١):

أب جـ زاوية قياسها ٦٠°. أنشئ دائرة مركزها و ، طول نصف قطرها ٢ سم بحيث تكون مماسة لشعاعي الزاوية $\overleftarrow{\text{بأ}}$، $\overleftarrow{\text{بجـ}}$.



الحل:

المعطيات: ق(أبَ جـ) = ٦٠°

المطلوب: إنشاء دائرة مركزها و، طول نصف قطرها = ٢ سم بحيث تكون مماسة لشعاعي الزاوية

العمل: من نقطة م تنتمي إلى $\overleftarrow{\text{بأ}}$ نرسم $\overline{\text{مل}}$ عمودية على $\overleftarrow{\text{بأ}}$ طولها ٢ سم. من ل نرسم $\overleftarrow{\text{لهـ}}$ // $\overline{\text{بأ}}$

من نقطة ن تنتمي إلى $\overleftarrow{\text{بجـ}}$ نرسم ن ك عمودية على $\overleftarrow{\text{بجـ}}$ طولها أيضًا ٢ سم.

من ك نرسم ك ي // $\overleftarrow{\text{بجـ}}$

ل هـ ∩ $\overleftarrow{\text{كي}}$ = {و}. وهي مركز الدائرة.

نرسم الدائرة التي مركزها و وطول نصف قطرها ٢ سم.

تدريب (٢):

أب جـ زاوية قياسها ٧٥°. أنشئ دائرة مركزها و، طول نصف قطرها ٣ سم بحيث تكون مماسة لشعاعي الزاوية $\overleftarrow{\text{بأ}}$ ، $\overleftarrow{\text{بجـ}}$.

الحل:

٦ ـ ٢

الأوتار والأقواس
Chords and Arcs

عمل تعاوني (استخدم الأدوات الهندسية)

في الشكل المقابل وم ≅ ون.

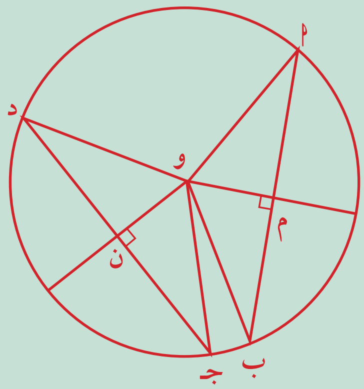
١ قارن بين طولي أب ، جـ د. ماذا تلاحظ؟

٢ قارن بين قياس الزاويتين أوب، جـ و د. ماذا تلاحظ؟

٣ أ أعد رسم الشكل المقابل بحيث يكون وم < ون.

ب قارن بين أب، جـ د؛ ق(أوب)، ق(جـ و د).

جـ ماذا تلاحظ؟



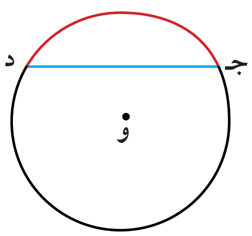
سوف تتعلم

- استخدام الأوتار المتطابقة والأقواس والزوايا المركزية.
- خصائص الخطوط المستقيمة التي تمر بمركز الدائرة.

الوتر (Chord) هو قطعة مستقيمة ينتمي طرفاها إلى دائرة.

يبيّن الشكل المقابل الوتر جـ د والقوس (Arc) جـ د المناظر لهذا الوتر.

تتمحور النظرية التالية على العلاقة بين الزوايا المركزية في دائرة والأوتار والأقواس التي تحصرها.



نظرية (١)

في دائرة أو في دوائر متطابقة:

١ **للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.**

٢ **الأوتار المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة.**

٣ **للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة.**

إثبات نظرية (١)

١ **المعطيات:** دائرة مركزها و، ق(أوب) = ق(جـ و د)

المطلوب: إثبات أن أب ≅ جـ د.

البرهان: المثلثان أوب ، جـ ود فيهما:

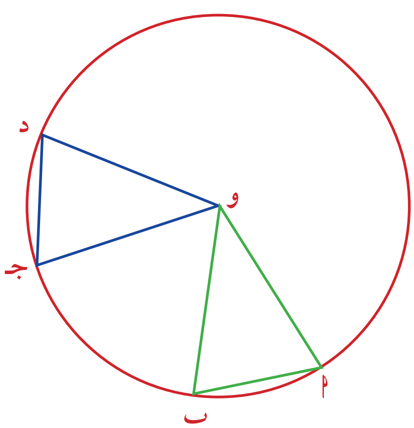
وأ = وجـ = نق

وب = ود = نق

ق(أوب) = ق(جـ و د) معطى

المثلثان متطابقان (ض. ز. ض)

أب ≅ جـ د تطابق الأضلاع المتناظرة



٢ **المعطيات:** $\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{جـ د}}$

المطلوب: إثبات أن $\overset{\frown}{\text{أب}} \cong \overset{\frown}{\text{جـ د}}$

البرهان:

$\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{جـ د}}$ ∴ Δأوب $\cong \Delta$جـ و د. لماذا؟

∴ ق($\widehat{\text{أ و ب}}$) = ق($\widehat{\text{جـ و د}}$) لماذا؟

باستخدام القانون ل = $\text{هـ}^{\text{د}}$ نق

طول القوس = قياس الزاوية المركزية (بالراديان) × طول نصف القطر.

نستنتج أن $\overset{\frown}{\text{أب}} \cong \overset{\frown}{\text{جـ د}}$.

٣ **المعطيات:** $\overset{\frown}{\text{أب}} \cong \overset{\frown}{\text{جـ د}}$

المطلوب: ق($\widehat{\text{أ و ب}}$) = ق($\widehat{\text{جـ و د}}$)

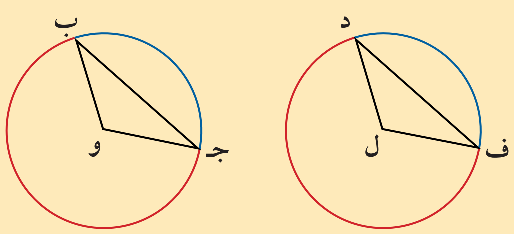
البرهان: $\overset{\frown}{\text{أب}} \cong \overset{\frown}{\text{جـ د}}$

∴ طول $\overset{\frown}{\text{أب}}$ = طول $\overset{\frown}{\text{جـ د}}$

ق($\widehat{\text{أ و ب}}$) × نق = ق($\widehat{\text{جـ و د}}$) × نق بالقسمة على نق

ق($\widehat{\text{أ و ب}}$) = ق($\widehat{\text{جـ و د}}$)

مثال (١)



في الشكل المقابل الدائرتان متطابقتان، $\overset{\frown}{\text{ب جـ}} \cong \overset{\frown}{\text{د ف}}$. ماذا تستنتج؟

الحل:

باستخدام النظرية السابقة

ق($\widehat{\text{جـ و ب}}$) = ق($\widehat{\text{ف ل د}}$)

$\overline{\text{ب جـ}} \cong \overline{\text{د ف}}$

حاول أن تحل

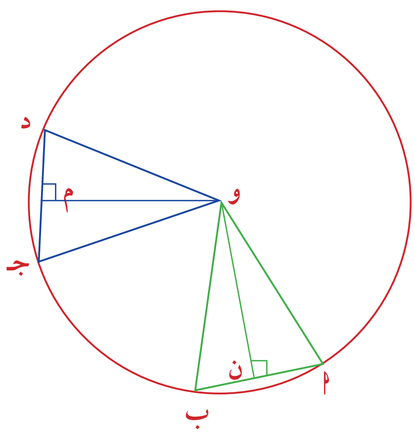
١ في الرسم أعلاه، إذا كان $\overline{\text{ب جـ}} \cong \overline{\text{دف}}$ ، فماذا تستنتج؟

تبيّن النظرية التالية العلاقة بين وترين وبُعد كل منهما عن مركز الدائرة.

نظرية (٢)

١ الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.

٢ الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.



إثبات نظرية (٢)

١ **المعطيات:** $\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{جـ د}}$.

المطلوب: $\overline{\text{ون}} \cong \overline{\text{وم}}$.

البرهان:

وأ = وجـ = وب = ود = نق

أب = جـ د | معطى

∴ Δ وأب ≅ Δ وجـ د | (ض. ض. ض)

مساحة المثلث وأب = مساحة المثلث وجـ د.

∴ $\frac{\text{ون} \times \text{أب}}{٢} = \frac{\text{وم} \times \text{جـ د}}{٢}$

∵ أب = جـ د

∴ ون = وم

٢ **المعطيات:** $\overline{\text{ون}} \cong \overline{\text{وم}}$.

المطلوب: $\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{جـ د}}$.

البرهان:

Δ ونأ ≅ Δ وم د | بضلع ووتر

∴ Δ وأب ≅ Δ وجـ د | لماذا؟

من التطابق ينتج أن:

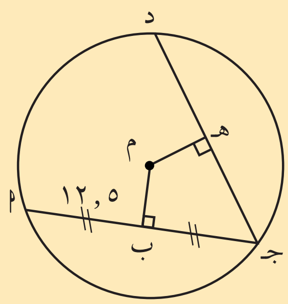
أب = جـ د

معلومة علمية:

إذا تطابق مثلثان فإن الأعمدة المرسومة من الرأس إلى القاعدة المناظرة تكون متطابقة.

مثال (٢)

في الشكل المقابل ليكن م مركز الدائرة. م ب = م هـ ، أوجد طول $\overline{\text{جـ د}}$. فسّر.



الحل:

المعطيات:

$\overline{\text{جـ د}}$ ، $\overline{\text{جـ أ}}$ وتران في الدائرة.

ب منتصف $\overline{\text{جـ أ}}$. ب أ = ١٢,٥ .

هـ ∈ $\overline{\text{جـ د}}$ حيث $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ د}}$ ، م هـ = م ب.

المطلوب: إيجاد طول $\overline{\text{جـ د}}$.

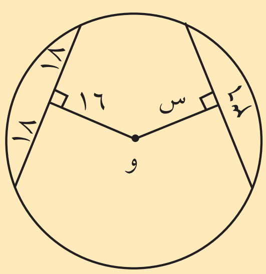
البرهان:

أب = ب جـ = ١٢,٥	معطى
أب + ب جـ = أجـ	
٢٥ = أجـ	بالتعويض
∵ م هـ = م ب	معطى
∴ جـ د = أجـ	نظرية
جـ د = ٢٥	بالتعويض

حاول أن تحل

٢ دائرة مركزها و.

أوجد قيمة س في الشكل المقابل، وفسّر إجابتك.



في الدائرة، للمنصف العمودي على الوتر خواص هندسية مهمة.

نظرية (٣)

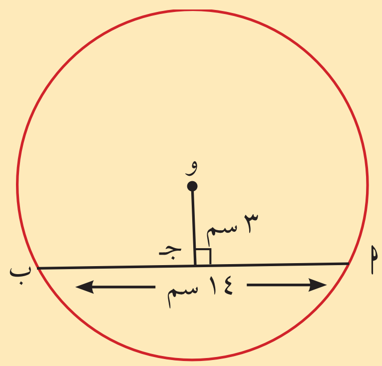
١ القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلًّا من قوسيه.

٢ القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) في دائرة يكون عموديًّا على هذا الوتر.

٣ العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة.

مثال (٣)

أ في الشكل المقابل، أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و.



الحل:

المعطيات:

$\overline{\text{ﺃب}}$ وتر في دائرة مركزها و. ﺃب = ١٤ سم. $\overline{\text{وجـ}} \perp \overline{\text{ﺃب}}$. وجـ = ٣ سم

المطلوب: إيجاد طول نصف قطر الدائرة

العمل: نرسم $\overline{\text{و ب}}$

البرهان:

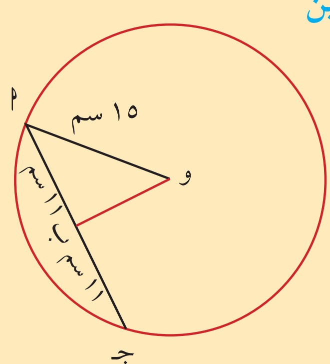
ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ﺃب = $\frac{١}{٢}$ (١٤) = ٧ سم — القطر العمودي على وتر ينصفه

(وب)^{٢} = (وجـ)^{٢} + (جـ ب)^{٢} = (٣)^{٢} + (٧)^{٢} = ٥٨ — نظرية فيثاغورث

وب = $\sqrt{٥٨}$ ≈ ٧,٦ سم — الجذر التربيعي لكلا الطرفين

طول نصف قطر الدائرة يساوي حوالى ٧,٦ سم.

ب في الشكل المقابل أوجد البعد بين مركز الدائرة والوتر.



الحل:

المعطيات: و مركز الدائرة.

وﺃ نصف قطر الدائرة، وﺃ = ١٥ سم. $\overline{\text{ﺃجـ}}$ وتر في الدائرة.

ب $\in \overline{\text{ﺃجـ}}$، ب ﺃ = ب جـ = ١١ سم.

المطلوب: إيجاد البعد بين مركز الدائرة و والوتر $\overline{\text{ﺃجـ}}$.

البرهان:

$\overline{\text{وب}} \perp \overline{\text{ﺃب}}$ — القطر الذي ينصف الوتر (ليس القطر) هو عمودي على الوتر

(وب)^{٢} + (١١)^{٢} = (١٥)^{٢} — نظرية فيثاغورث في Δوبﺃ

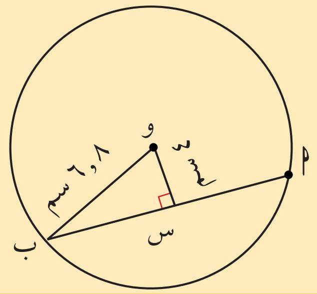
(وب)^{٢} = ١٠٤

وب ≃ ١٠,٢ سم — الجذر التربيعي لكلا الطرفين

البعد بين مركز الدائرة والوتر ≃ ١٠,٢ سم.

حاول أن تحل

٣ استخدم الشكل المقابل لإيجاد:

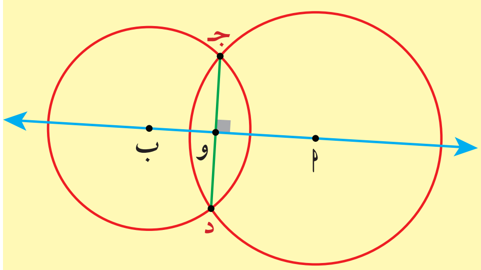


أ طول الوتر $\overline{\text{أب}}$.

ب المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{أب}}$.

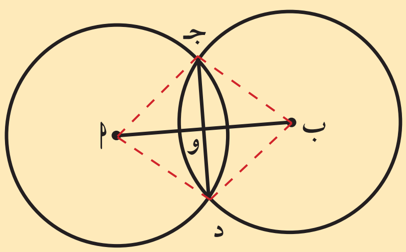
نتيجة

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًّا على الوتر المشترك بينهما وينصفه.



مثال (٤)

يمثل الشكل المقابل دائرتين متطابقتين. $\overline{\text{جـ د}}$ وتر مشترك. إذا كان أ ب = ٢٤ سم، نق = ١٣ سم. فما طول $\overline{\text{جـ د}}$؟



الحل:

المعطيات: دائرتان متطابقتان مركزاهما أ، ب.

جـ د وتر مشترك.

أب = ٢٤، طول نصف قطر كل من الدائرتين = ١٣ سم.

المطلوب: إيجاد طول جـ د

العمل: نرسم $\overline{\text{أجـ}}$، $\overline{\text{أد}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$.

البرهان:

في الشكل أدب جـ فيه أ د = د ب = ب جـ = جـ أ = نق = ١٣ سم

∴ أ د ب جـ معين.

والقطران $\overline{\text{أب}}$، $\overline{\text{جـ د}}$ متعامدان وينصف كل منهما الآخر.

في Δ أوجـ، ق(أ و̂ جـ) = ٩٠° ∴ Δ أوجـ قائم الزاوية و.

(وجـ)^{٢} = (أجـ)^{٢} − (وأ)^{٢} نظرية فيثاغورث

(وجـ)^{٢} = (١٣)^{٢} − $(\frac{٢٤}{٢})^{٢}$ = ٢٥

وجـ = ٥

جـ د = ٢ × جـ و (و منتصف $\overline{\text{جـ د}}$)

= ٢ × ٥ = ١٠ سم.

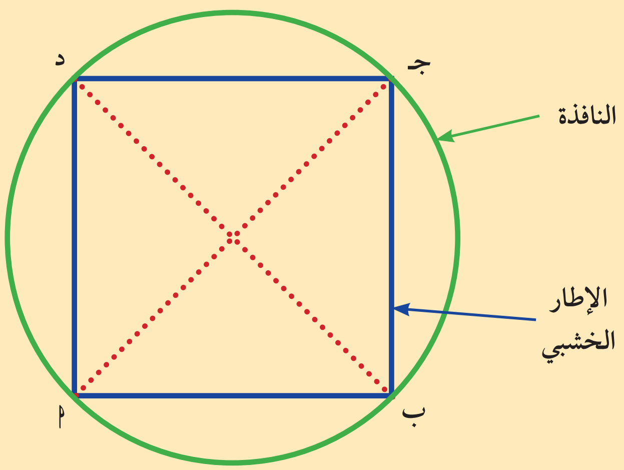
طول جـ د يساوي ١٠ سم.

حاول أن تحل

٤ في مثال (٤)، إذا كان جـ د = ١٤ سم، ن هـ = ١٣ سم ، فأوجد طول $\overline{\text{أب}}$.

مثال (٥) تطبيقات حياتية

يريد راشد وضع إطار خشبي مربع الشكل داخل نافذة دائرية الشكل بحيث تلامس رؤوس المربع النافذة.
إذا كان طول قطر دائرة النافذة = ١,٦ متر، فما طول ضلع المربع الخشبي؟
ثم أوجد طول العمود النازل من مركز الدائرة على أحد أضلاع المربع.



الحل:

المعطيات: لدينا دائرة طول قطرها ١,٦ م.

مربع تقع رؤوسه على الدائرة

المطلوب: إيجاد طول ضلع المربع.

إيجاد طول العمود النازل من مركز الدائرة على أحد الأضلاع

البرهان:

ليكن المربع أ ب جـ د.

طول قطر الدائرة يساوي طول قطر المربع.

∴ أجـ = ١,٦ م.

ولكن أجـ = أب $\sqrt{٢}$ (العلاقة بين طول ضلع مربع وطول قطره)

$\therefore \text{أب} = \dfrac{\text{أجـ}}{\sqrt{٢}} = \dfrac{١,٦}{\sqrt{٢}} \simeq ١,١٣$.

طول ضلع المربع يساوي ١,١٣ متر تقريبًا.

∴ طول العمود النازل من مركز الدائرة على أحد أضلاع المربع = $\dfrac{١}{٢}$ × طول ضلع المربع لماذا؟

$= \dfrac{١}{٢} \times \dfrac{١,٦}{\sqrt{٢}}$

$= ٠,٥٦٦$ م.

حاول أن تحل

٥ في مثال (٥) أعلاه، أوجد طول نصف قطر الدائرة إذا كان طول ضلع المربع يساوي ١,٥ متر.

الزوايا المركزية والزوايا المحيطية
Central and Inscribed Angles

دعنا نفكر ونتناقش

١ في السداسي المنتظم المقابل (شكل ١)، أثبت أن قياس القوس أب يساوي ٦٠°.

٢ أ ما قياس الزاوية المركزية أمب؟ (يمكنك استخدام المنقلة).

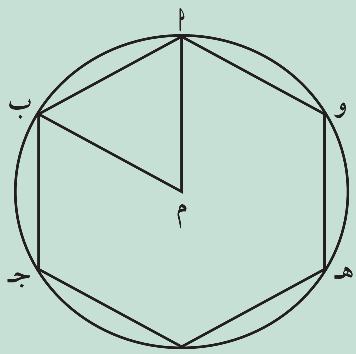
ب ما قياس كل من الزوايا المحيطية: أوب؟ أهـب؟ أدب؟ أجب؟ ماذا تلاحظ؟

٣ في الشكل الخماسي المنتظم (شكل ٢)، أثبت أن قياس القوس أب يساوي ٧٢°.

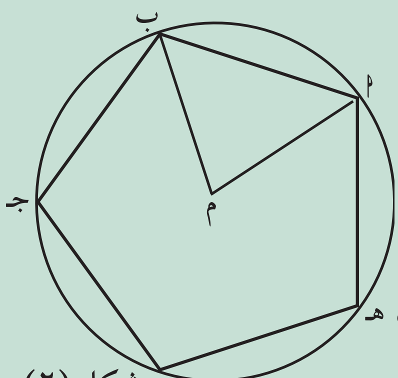
٤ أ ما قياس الزاوية المركزية أمب؟

ب ما قياس كل من الزوايا: أهـب؟ أدب؟ أجب؟ ماذا تلاحظ؟

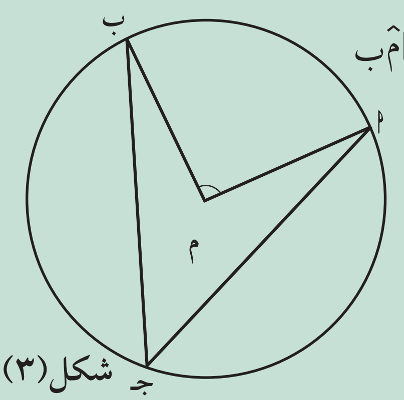
٥ في الشكل (٣) هل توجد علاقة بين قياس الزاوية أمب وقياس الزاوية أجب وقياس القوس أب؟



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

سوف تتعلم

- الزاوية المركزية.
- الزاوية المحيطية.
- الزاوية المماسية على الدائرة.
- العلاقة بين قياس الزاوية المركزية وقياس الزاوية المحيطية المشتركة في القوس نفسه.
- العلاقة بين قياس الزاوية المماسية وقياس القوس المحصور بين ضلعيها.

الأدوات المستخدمة:
مسطرة، منقلة، فرجار

١ – الزاوية المركزية والزاوية المحيطية Central Angle and Inscribed Angle

تعريف:

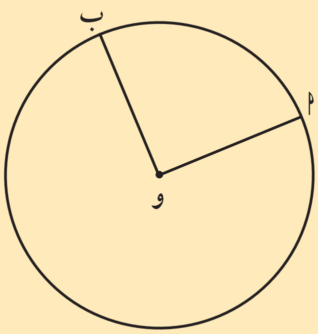
١ الزاوية التي رأسها مركز الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى **بالزاوية المركزية**.

٢ الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى **بالزاوية المحيطية**.

نظرية (١)

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة.

مثال (١)



في الشكل المقابل دائرة مركزها و. إذا كان ق(⌒أب) = ٩٠°.

فأوجد ق(∠أوب).

الحل:

المعطيات: دائرة مركزها و

ق(⌒أب) = ٩٠°

المطلوب: إيجاد ق(∠أوب).

البرهان:

و مركز الدائرة

(∠أوب) زاوية مركزية تقابل (⌒أب)

∴ ق(⌒أب) = ق (∠أوب)

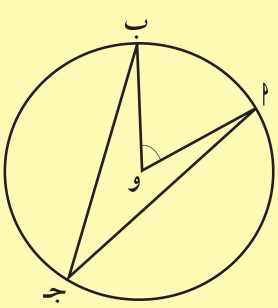
∴ ق(∠أوب) = ٩٠°

حاول أن تحل

١ إذا كان قياس زاوية مركزية ٣٥°، فأوجد قياس القوس على الدائرة المحصور بين ضلعيها.

نظرية (٢)

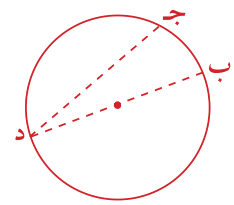
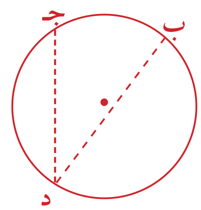
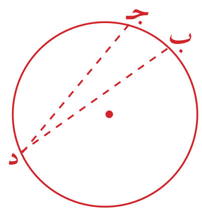
في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.



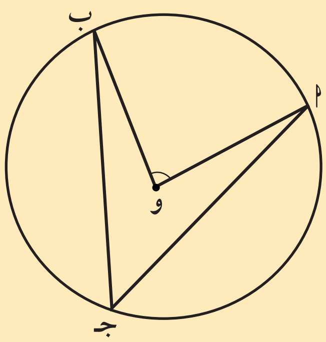
ق(∠أجب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠أوب) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒أب)

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.

هناك ٣ حالات يجب أخذها في الاعتبار.

الحالة ١	الحالة ٢	الحالة ٣
		
ينتمي مركز الدائرة إلى أحد ضلعي الزاوية المحيطية	مركز الدائرة داخل الزاوية المحيطية	مركز الدائرة خارج الزاوية المحيطية

مثال (٢)



في الشكل المقابل: إذا كان ق(أب⌢) = ٨٠° فأوجد ق(∠أجـب).

الحل:

المعطيات: دائرة مركزها و. أ، ب، جـ نقاط تنتمي إلى الدائرة. ق(أب⌢) = ٨٠°

المطلوب: إيجاد ق(∠أجـب).

البرهان:

∠أجـب زاوية محيطية في الدائرة ∴ ق(∠أجـب) = $\frac{١}{٢}$ ق(أب⌢)

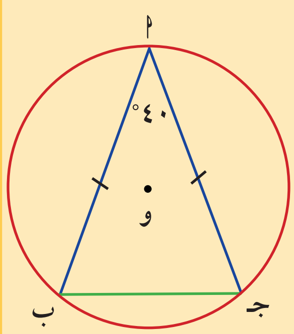
= $\frac{١}{٢}$ (٨٠°) = ٤٠°

وبالتالي ق(∠أجـب) = ٤٠°

حاول أن تحل

٢ إذا كان قياس زاوية محيطية في دائرة يساوي ٥٤°، فأوجد قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

مثال (٣)



في الشكل المقابل أب جـ مثلث متطابق الضلعين حيث أ، ب، جـ نقاط على الدائرة التي مركزها و، ق(∠ب أ جـ) = ٤٠°.

أوجد قياس كل من الأقواس أب⌢، ب جـ⌢، أجـ⌢ .

الحل:

المعطيات: دائرة مركزها و. أ، ب، جـ نقاط تنتمي إلى الدائرة.

Δأب جـ متطابق الضلعين، أب = أجـ.

ق(∠ب أ جـ) = ٤٠°

المطلوب: إيجاد قياس كل من الأقواس $\overset{\frown}{\text{أب}}$، $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$، $\overset{\frown}{\text{أجـ}}$

البرهان:

زوايا المثلث هي زوايا محيطية في الدائرة ∴ ق(ب$\hat{\text{أ}}$جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$)

ومنه: ٤٠° = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$). ∴ ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) = ٢ × ٤٠° = ٨٠°.

∴ ق($\overset{\frown}{\text{جـ أ ب}}$) = ٣٦٠° − ٨٠° = ٢٨٠°

∵ أب = أجـ

∴ ق($\overset{\frown}{\text{أب}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{أجـ}}$) = $\frac{٢٨٠}{٢}$ = ١٤٠°.

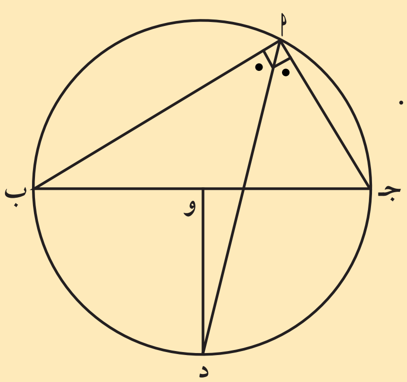
حاول أن تحل

٣ في المثال (٣) إذا كان $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$، منصف الزاوية الداخلية أ$\hat{\text{جـ}}$ب ويقطع الدائرة في النقطة هـ.

ما قياس القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{أهـ}}$؟

مثال (٤)

في الشكل المقابل دائرة مركزها و. أثبت أن $\overline{\text{د و}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$.



الحل:

المعطيات: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية أ، رؤوسه الثلاثة تنتمي إلى الدائرة التي مركزها و.

$\overleftarrow{\text{أد}}$ منصف (ب$\hat{\text{أ}}$جـ) ويقطع الدائرة في د.

المطلوب: إثبات أن $\overline{\text{د و}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

البرهان:

∴ ق(جـ$\hat{\text{أ}}$ب) = ٩٠° معطى

$\overleftarrow{\text{أد}}$ منصف الزاوية ب$\hat{\text{أ}}$جـ

∴ ق(جـ$\hat{\text{أ}}$د) = ٤٥°

∵ ق(جـ$\hat{\text{أ}}$د) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{د جـ}}$) نظرية

∴ ق($\overset{\frown}{\text{د جـ}}$) = ٩٠°، ق(جـ$\hat{\text{و}}$د) = ٩٠° نظرية

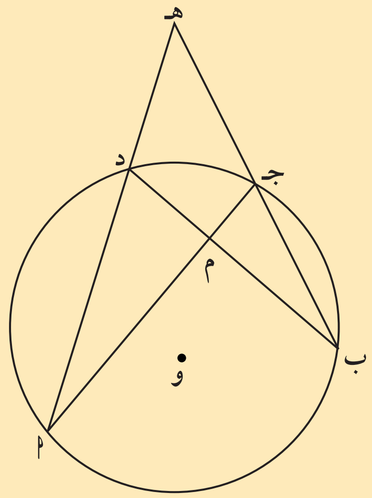
∴ $\overline{\text{د و}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$.

حاول أن تحل

٤ في المثال (٤)، إذا كان ق(أ$\hat{\text{ب}}$جـ) = ٣٠°، أوجد ق(أ$\hat{\text{د}}$ب).

مثال (٥)

في الشكل المقابل، أثبت أن: $ق(\hat{بمأ}) = \frac{ق(\overset{\frown}{بأ}) + ق(\overset{\frown}{جـد})}{٢}$.



الحل:

المعطيات: أ، ب، جـ، د نقاط تنتمي إلى الدائرة التي مركزها و.

$\overline{أجـ} \cap \overline{بد} = \{م\}$ ، $\overleftrightarrow{بجـ} \cap \overleftrightarrow{أد} = \{هـ\}$

المطلوب: إثبات أن $ق(\hat{بمأ}) = \frac{ق(\overset{\frown}{بأ}) + ق(\overset{\frown}{جـد})}{٢}$

البرهان:

$(\hat{بمأ})$ هي زاوية خارجة عن المثلث أم د.

$ق(\hat{بمأ}) = ق(\hat{بدأ}) + ق(\hat{أمد})$...

$= \frac{١}{٢} ق(\overset{\frown}{بأ}) + \frac{١}{٢} ق(\overset{\frown}{جـد}) = \frac{ق(\overset{\frown}{بأ}) + ق(\overset{\frown}{جـد})}{٢}$

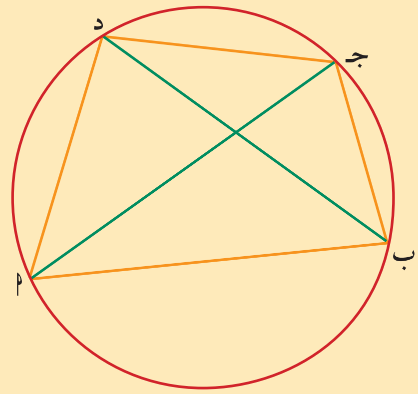
حاول أن تحل

٥ في المثال (٥)، أثبت أن $ق(\hat{بهـأ}) = \frac{ق(\overset{\frown}{بأ}) - ق(\overset{\frown}{جـد})}{٢}$

مثال (٦)

أ ب جـ د شكل رباعي دائري.

أثبت أن $ق(\hat{أبد}) = ق(\hat{أجـد})$.



الحل:

المعطيات: أب جـ د شكل رباعي دائري.

المطلوب: إثبات تساوي قياسي الزاويتين $(\hat{أبد})$، $(\hat{أجـد})$.

البرهان: أب جـ د شكل رباعي دائري.

$\hat{أبد}$ زاوية محيطية $\therefore ق(\hat{أبد}) = \frac{١}{٢} ق(\overset{\frown}{أد})$ (١)

$\hat{أجـد}$ زاوية محيطية $\therefore ق(\hat{أجـد}) = \frac{١}{٢} ق(\overset{\frown}{أد})$ (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن $ق(\hat{أبد}) = ق(\hat{أجـد})$.

حاول أن تحل

٦ في المثال (٦)، أثبت أن $ق(\hat{أدب}) = ق(\hat{أجـب})$

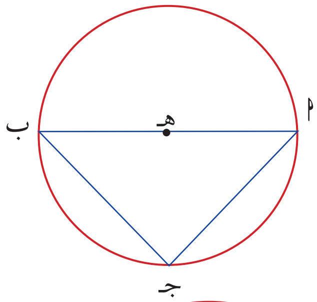
معلومة رياضية:

الشكل الرباعي الدائري هو مضلع رباعي تقع رؤوسه على دائرة.

تدريب (١):

إذا كان $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة التي مركزها هـ، جـ ∋ الدائرة ،

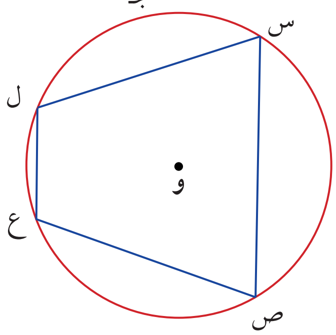
أثبت أن (أ جـ ب) زاوية قائمة.



تدريب (٢):

س ص ع ل شكل رباعي دائري.

أثبت أن ق(ل س ص) + ق(ل ع ص) = ١٨٠°



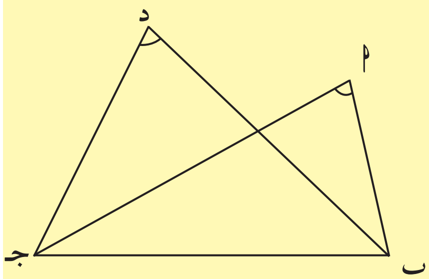
نتائج

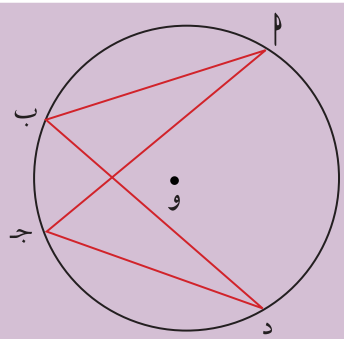
١ كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.

٢ كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.

٣ كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة)، تكون زواياه المتقابلة متكاملة.

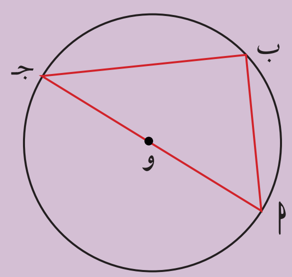
٤ في الشكل إذا تطابقت الزاويتان أ، د المرسومات على القاعدة $\overline{\text{ب جـ}}$ وفي جهة واحدة منها. كان الشكل أ ب جـ د رباعيًا دائريًّا.





أ ب د ، أ جـ د تحصران أد

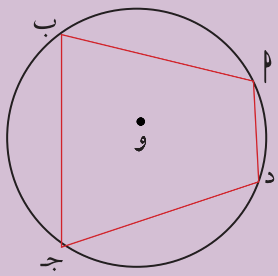
∴ ق(أ ب د) = ق(أ جـ د)



أ ب جـ تحصر أجـ (نصف دائرة)

∴ ق(أ ب جـ) = ٩٠°

(أ ب جـ) زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة وهي زاوية قائمة



ق(أ) + ق(جـ) = ١٨٠°

ق(ب) + ق(د) = ١٨٠°

تدريب (٣):

لتكن ب نقطة تنتمي إلى الدائرة التي مركزها ن

$\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة جـ.

$\overline{\text{جـ ب}}$ وتر في الدائرة يمر بنقطة التماس جـ.

يسمى $\overline{\text{جـ ب}}$ وتر التماس

الزاوية (أ جـ ب) تسمى زاوية مماسية، الزاوية (س جـ ب) تسمى زاوية مماسية أيضًا.

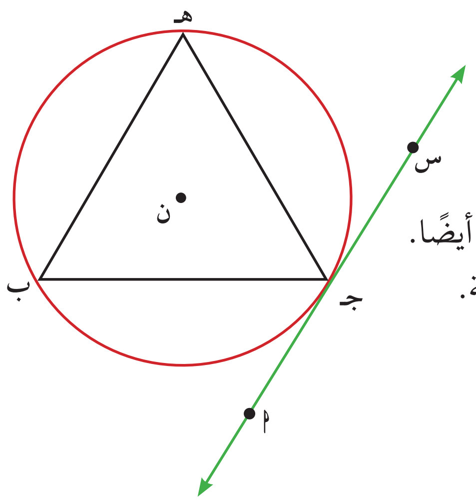
الزاوية (جـ هـ ب) تشترك مع الزاوية المماسية في القوس نفسه باستخدام المنقلة.

أكمل:

ق(أ جـ ب) =

ق(جـ هـ ب) =

ماذا تستنتج؟



نظرية (٣)

(١) قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.

(٢) قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

إثبات نظرية (٣)

المعطيات:

$\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ مماس للدائرة في ب.

$\overline{\text{ب ل}}$ وتر في الدائرة.

المطلوب:

إثبات أن ق(هـ ب ل) = ق(ب م ل) حيث م نقطة تنتمي إلى الدائرة.

العمل: نرسم $\overline{\text{ب د}}$ قطر للدائرة يمر بنقطة التماس ب.

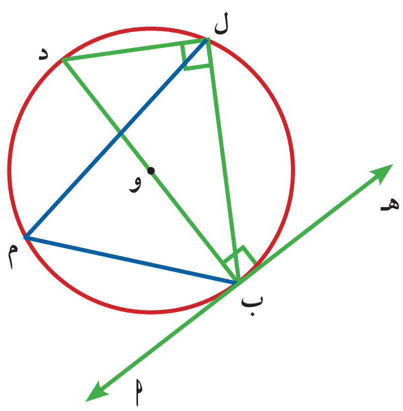
البرهان (١):

Δب ل د قائم الزاوية ل لأن $\overline{\text{ب د}}$ قطر في الدائرة.

ق(هـ ب ل) + ق(ل ب د) = ٩٠° خواص المماس للدائرة (١)

ق(ل ب د) + ق(ب د ل) = ٩٠° (Δ ب ل د قائم الزاوية ل) (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن:



ق(ل بَ̂ د) + ق(هـ ب̂ ل) = ق(ب د̂ ل) + ق(ل ب̂ د)

∴ ق(هـ ب̂ ل) = ق(ب د̂ ل)

ولكن ق(ب د̂ ل) = ق(ب م̂ ل) لماذا؟

∴ ق(هـ ب̂ ل) = ق(ب م̂ ل) وهو المطلوب

البرهان (٢):

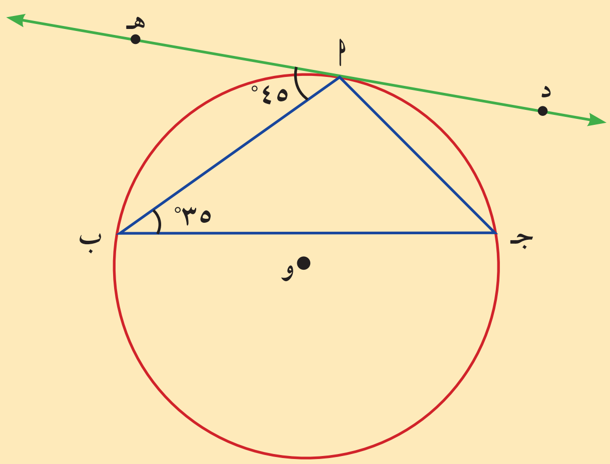
ق(هـ ب̂ ل) = ق(ب م̂ ل) من (١).

∵ ق(ب م̂ ل) = $\frac{1}{2}$ ق(ب⌒ل) (خاصية الزاوية المحيطية)

∴ ق(هـ ب̂ ل) = $\frac{1}{2}$ ق(ب⌒ل). وهو المطلوب

مثال (٧)

في الشكل المقابل إذا كان $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماسًا للدائرة عند أ ، فأوجد ق(جـ أ̂ ب).



الحل:

المعطيات:

$\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماس للدائرة عند أ.

ق(هـ أ̂ ب) = ٤٥°، ق(أ ب̂ جـ) = ٣٥°

المطلوب: إيجاد ق(جـ أ̂ ب).

البرهان:

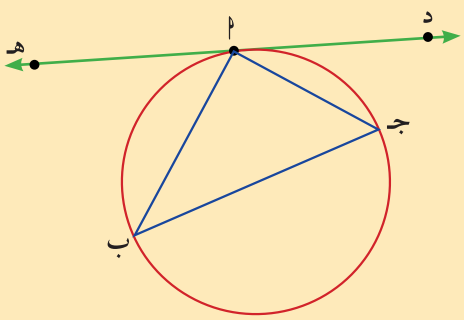
ق(أ جـ̂ ب) = ق(هـ أ̂ ب) = ٤٥° نظرية

∵ ق(جـ أ̂ ب) + ق(أ جـ̂ ب) + ق(أ ب̂ جـ) = ١٨٠°

∴ ق(جـ أ̂ ب) = ١٨٠° − ق(أ جـ̂ ب) − ق(أ ب̂ جـ)

ق(جـ أ̂ ب) = ١٨٠° − ٤٥° − ٣٥° = ١٠٠°

حاول أن تحل



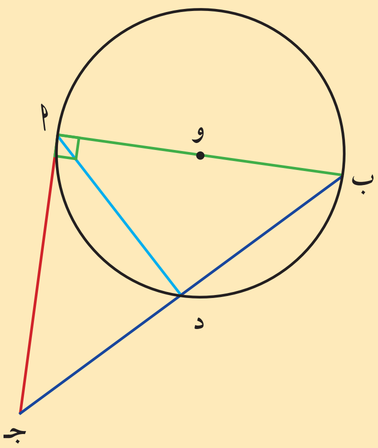
٧ في الشكل المقابل، لدينا: ق(د أ̂ جـ) = ٤٠°، ق(هـ أ̂ ب) = ٥٠°.

أ أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ.

ب أثبت أن $\overline{\text{جـ ب}}$ قطر للدائرة.

مثال (٨)

أب قطر في دائرة مركزها و. نرسم $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ مماسًا للدائرة بحيث يكون أجـ = ٢ نق . $\overline{\text{ب جـ}}$ تقطع الدائرة في د. أثبت أن أد = جـ د.



الحل:

المعطيات:

$\overline{\text{أب}}$ قطر في دائرة مركزها و. $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ مماس للدائرة، أجـ = ٢ نق، $\overline{\text{ب جـ}}$ تقطع الدائرة في د

المطلوب: إثبات أن أد = جـ د

العمل: نرسم $\overline{\text{أد}}$

البرهان:

ق(جـ$\hat{\text{أ}}$د) = ق(أ$\hat{\text{ب}}$د) (نظرية الزاوية المماسية والزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه) (١)

$\overline{\text{أجـ}} \perp \overline{\text{أب}}$ ($\overline{\text{أجـ}}$ مماس للدائرة)

أجـ = أب = ٢ نق

∴ Δ أ ب جـ قائم الزاوية أ متطابق الضلعين.

ومنه ق(أ$\hat{\text{جـ}}$د) = ق(أ$\hat{\text{ب}}$د) (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن ق(جـ$\hat{\text{أ}}$د) = ق(أ$\hat{\text{جـ}}$د)

Δ أ د جـ متطابق الضلعين ∴ أد = جـ د

حاول أن تحل

٨ $\overleftrightarrow{\text{م ت}}$ مماس لدائرة مركزها و. $\overline{\text{م ن}}$ وتر في الدائرة بحيث يكون م ن = م ت. (م نقطة التماس) $\overline{\text{ت ن}}$ تقطع الدائرة في ل.

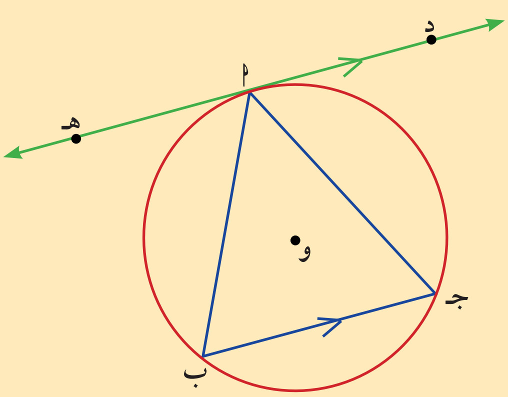
أثبت أن Δ ت ل م متطابق الضلعين (ل ت = ل م)

مثال (٩)

في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة أ،

$\overline{\text{ب جـ}}$ وتر في الدائرة موازٍ للمماس $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$.

أثبت أن المثلث أب جـ متطابق الضلعين.



الحل:

المعطيات: $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة أ. $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

المطلوب: أثبت أن Δ أب جـ متطابق الضلعين.

البرهان

∵ $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

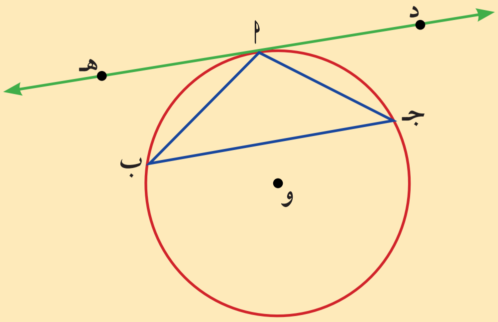
∴ ق(د $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ق(أ $\hat{\text{جـ}}$ ب) بالتبادل والتوازي (١)

∵ ق(د $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ق(أ $\hat{\text{ب}}$ جـ) زاوية مماسية وزاوية محيطية تحصران القوس نفسه $\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$ (٢)

(١) ، (٢) تعطي: ق(أ $\hat{\text{جـ}}$ ب) = ق(أ $\hat{\text{ب}}$ جـ)

ومنه: أ جـ = أ ب

أي أن المثلث متطابق الضلعين



حاول أن تحل

٩ في الشكل المقابل، إذا كان لدينا $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة أ.

المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين (أ ب = أ جـ).

أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

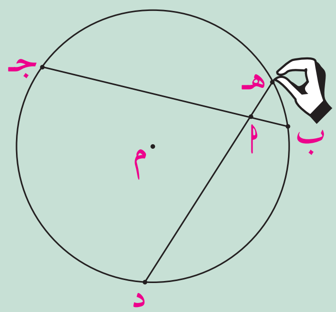
الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس

Circle: Intersecting Chords and Tangent

سوف تتعلم

- الأوتار المتقاطعة.
- المماس.
- العلاقة بين وترين متقاطعين داخل الدائرة.
- العلاقة بين طول القطع المماسية وطول القاطع.

عمل تعاوني



١ أ ارسم دائرة مركزها م، ثم ارسم وترين $\overline{\text{د هـ}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ يتقاطعان في نقطة أ.

ب قس طول $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{هـ أ}}$ ، $\overline{\text{أد}}$.

أوجد نواتج الضرب أب × أجـ، أهـ × أد.

جـ كرر الرسم والقياس واكتب ما تلاحظه.

د حاول أن تكتشف علاقة ما بين نواتج الضرب.

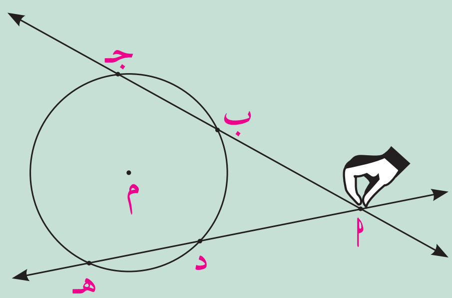
هـ خمّن العلاقة بين نواتج ضرب أطوال الأجزاء التي ينقسم إليها وتران متقاطعان في دائرة.

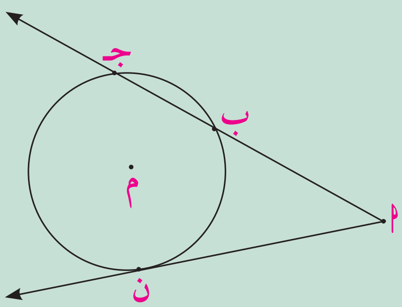
٢ أ ارسم دائرة أخرى، ثم ارسم قاطعين يقطعان الدائرة من نقطة خارج هذه الدائرة.

ب قس طول: $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{أد}}$ ، $\overline{\text{أهـ}}$ وأوجد نواتج الضرب: أب × أجـ ، أهـ × أد.

جـ خمّن علاقة عامة بالنسبة إلى قاطعين من نقطة خارج دائرة.

الأدوات المستخدمة:
مسطرة، منقلة، فرجار





٣ من نقطة خارج دائرة م ارسم $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ يقطع الدائرة في ب، جـ ثم مماسًا للدائرة $\overleftrightarrow{\text{أن}}$ يمسها في ن. ابحث عن العلاقة بين أب × أجـ، $(\text{أن})^{2}$ مستفيدًا من تخمينك السابق.

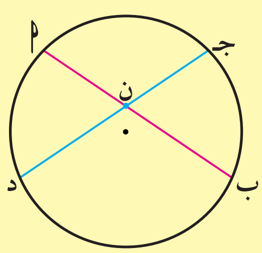
١ - تقاطع الأوتار داخل الدائرة

Intersecting Chords Inside the Circle

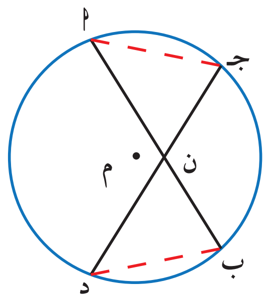
نظرية (١)

إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي جزءي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزءي الوتر الآخر.

ن أ × ن ب = ن جـ × ن د



برهان نظرية (١)



المعطيات: $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ وتران متقاطعان في النقطة ن.

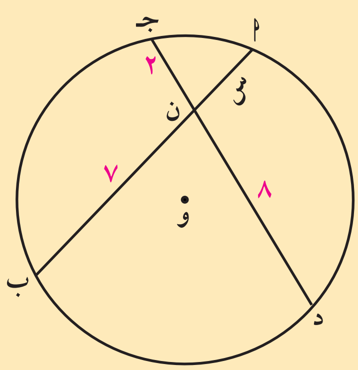
المطلوب: إثبات أن: ن أ × ن ب = ن جـ × ن د

العمل: نرسم $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$.

البرهان:

ق(أ ن̂ جـ) = ق(د ن̂ ب)	زاويتان متقابلتان بالرأس
ق(ب̂) = ق(جـ̂)	زاويتان محيطيتان مرسومتان على القوس $\frown{\text{أد}}$ نفسه
Δأن جـ ~ Δد ن ب	تطابق الزوايا
$\frac{\text{أن}}{\text{دن}} = \frac{\text{ن جـ}}{\text{ن ب}}$	تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة في المثلثين المتشابهين
ن أ × ن ب = ن جـ × ن د	

مثال (١)

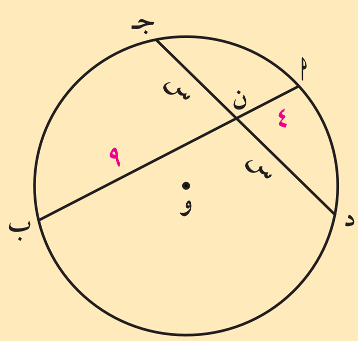


في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.

الحل:

ن جـ × ن د = ن أ × ن ب	نظرية
٢ × ٨ = س × ٧	بالتعويض
١٦ = ٧س	بالتبسيط
$\frac{١٦}{٧} = \frac{٧\text{س}}{٧}$	بالقسمة
س = $\frac{١٦}{٧}$	

حاول أن تحل

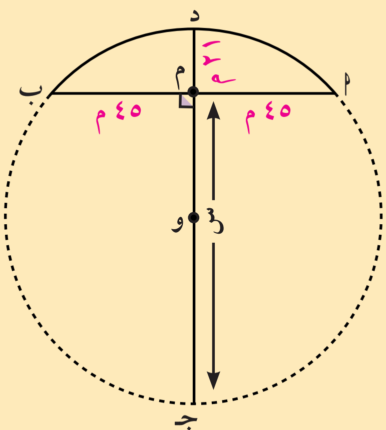


١ في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.

مثال (٢)

هندسة معمارية: أنشئ جسر مشاة لعبور أحد الأنهار وكان قوس هذا الجسر على شكل قوس من الدائرة، بحيث كان طول الوتر الواصل بين طرفي الجسر في هذه الدائرة ٩٠ م. إذا كان طول العمود المقام من منتصف الوتر ٢١ م، كما في الشكل.
أوجد طول قطر الدائرة.

بنى القدماء الجسور فوق الأنهار على شكل قوس دائرة مع دعامات جانبية. وهذه الدعامات مهمة لأنها تتحمل كل ثقل الجسر.



الحل:

المعطيات: طول الوتر = ٩٠م   طول العمود = ٢١م

المطلوب: إيجاد طول قطر الدائرة

البرهان: ∵ العمود المنصف لوتر يمر بمركز الدائرة (نظرية)

∴ د جـ قطر في الدائرة.

من تقاطع القطر والوتر نجد أن:

س × ٢١ = ٤٥ × ٤٥

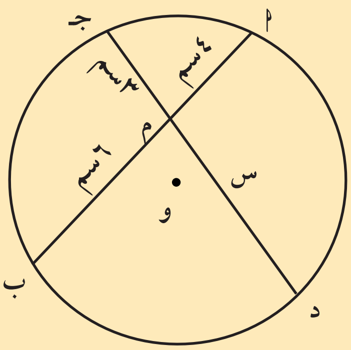
س = $\frac{٤٥ \times ٤٥}{٢١}$ = ٩٦,٤٣ تقريبًا

طول القطر ≈ ٢١ + ٩٦,٤٣

≈ ١١٧,٤٣

طول القطر = ١١٧ مترًا تقريبًا.

حاول أن تحل



٢ في الدائرة المقابلة التي مركزها و:

م أ = ٤ سم، م ب = ٦ سم، م جـ = ٣ سم، م د = س.

أ) أوجد قيمة س.

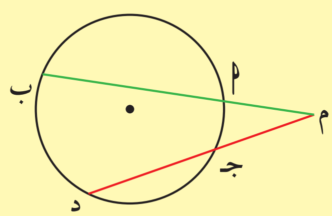
ب) أوجد البعد بين المركز و والوتر $\overline{\text{د جـ}}$ إذا علمت أن طول نصف قطر الدائرة يساوي ٦ سم.

٢ - تقاطع الأوتار خارج الدائرة Intersecting Chords Outside the Circle

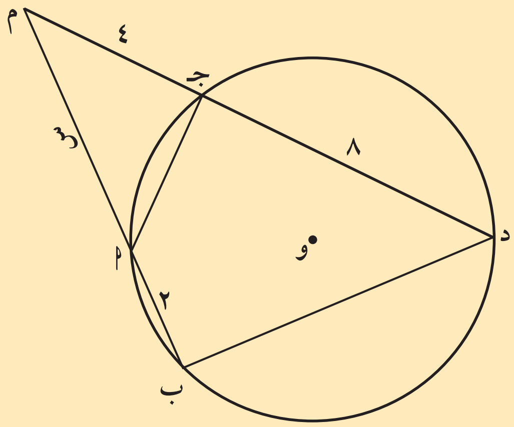
نتيجة (١)

إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.

م أ × م ب = م جـ × م د.



مثال (٣)



في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.

الحل:

المعطيات: $\overline{\text{ب أ}}$ ، $\overline{\text{د جـ}}$ وتران للدائرة التي مركزها و ويتقاطع امتدادهما خارجها عند النقطة م.

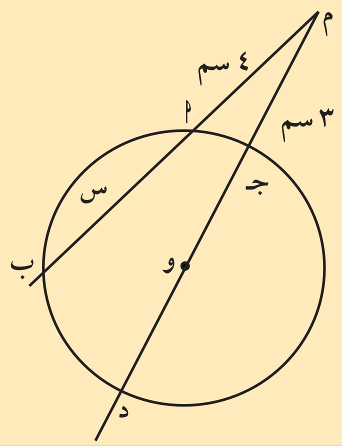
المطلوب: إيجاد قيمة س

البرهان:

م أ × م ب = م جـ × م د	نتيجة
س(س + ٢) = ٤(٤ + ٨)	بالتعويض
$س^{٢}$ + ٢س − ٤٨ = ٠	بالتبسيط
$س = \dfrac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ}$	باستخدام المميز
س = ٦ أو س = −٨	الحلول

فتكون قيمة س = ٦ لأن س = −٨ مرفوضة

حاول أن تحل



٣ في الشكل المقابل، دائرة مركزها و. طول نصف قطرها يساوي ٤ سم.

أوجد قيمة س.

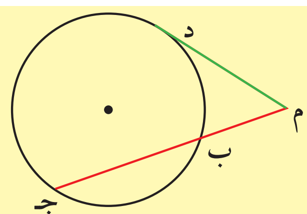
٣ − تقاطع مماس وقاطع الدائرة من نقطة خارج دائرة

Intersection Between Tangent and Secant from any Point Outside of a Circle

نتيجة (٢)

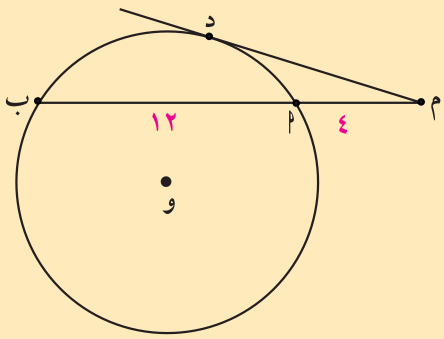
إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.

$(\text{م د})^{٢}$ = م ب × م جـ .



مثال (٤)

في الشكل المقابل، أوجد طول القطعة المماسية $\overline{\text{م د}}$ علمًا بأن: ٱم = ٤ سم ، ٱب = ١٢ سم.



الحل:

نجد طول $\overline{\text{م ب}}$.

م ب = ٤ + ١٢ = ١٦

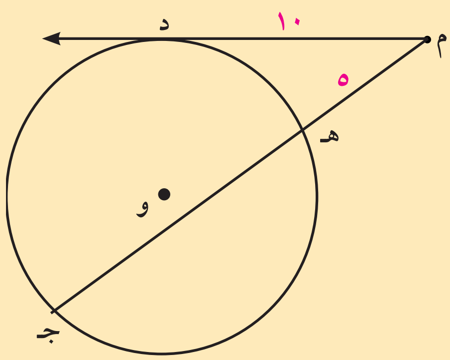
نكتب: (م د)^{٢} = مٱ × م ب نتيجة

(م د)^{٢} = ٤ × ١٦ بالتعويض

(م د)^{٢} = ٦٤ بالتبسيط

م د = ٨ بإيجاد الجذر التربيعي

حاول أن تحل



٤ في الشكل المقابل، $\overline{\text{م د}}$ قطعة مماسية حيث م د = ١٠

م هـ = ٥.

أوجد طول $\overline{\text{هـ جـ}}$.

مثال (٥)

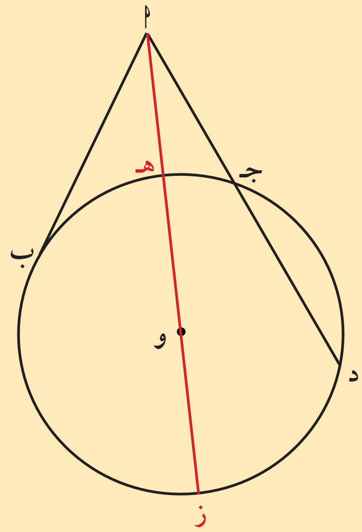
أراد أحد الأشخاص معرفة طول القطعة المماسية من النقطة ٱ إلى النقطة ب على الدائرة، فأخذ مسطرة ووضع الصفر عند النقطة ٱ فوجد أن المسطرة تتقاطع مع الدائرة عند النقطة جـ بحيث ٱجـ = ٤ سم وعند النقطة د بحيث ٱ د = ٩ سم.

ما طول القطعة المماسية $\overline{\text{ٱب}}$؟

الحل: جبريًّا

المعطيات: أ جـ = ٤سم، أ د = ٩سم، أب قطعة مماسية.

المطلوب: إيجاد طول $\overline{\text{أب}}$.



البرهان:

(أب)^2 = أ جـ × أ د	نتيجة
(أب)^2 = ٤ × ٩	بالتعويض
(أب)^2 = ٣٦	بالتبسيط
أب = ٦	بايجاد الجذر التربيعي

فيكون طول $\overline{\text{أب}}$ يساوي ٦سم

حاول أن تحل

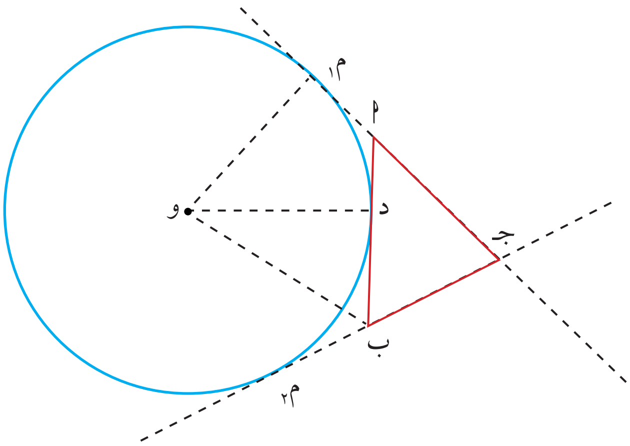
٥ في المثال (٥). أوجد طول نصف قطر الدائرة إذا كانت أ هـ = ٢سم.

المرشد لحل المسائل

جـم١ ، جـم٢ قطعتان مماسيتان للدائرة.

د نقطة متحركة على القوس الأصغر م١م٢ .

مماس الدائرة في د يقطع جـم١ في أ، جـم٢ في ب.



سألت سلوى:

أين نضع د بحيث يكون محيط المثلث أ ب جـ هو أكبر ما يمكن؟

فكرت هند:

سأستخدم خواص مماس الدائرة.

محيط المثلث = جـأ + أب + جـ ب

= جـ م١ − أم١ + أد + دب + جـ م٢ − ب م٢

ولكن: أم١ = أد ، ب م٢ = ب د (خاصية المماسين المتقاطعين على الدائرة)

−أم١ + أد = ٠ ، −ب م٢ + دب = ٠

∴ محيط المثلث = جـ م١ + جـ م٢ = ٢ جـ م١ = ٢ جـ م٢

استنتاج:

محيط Δأب جـ ثابت ولا يتغير مع تغيّر موقع النقطة د.

تذكر:
إذا تقاطع مماسان لدائرة في نقطة، تكون القطعتان المماسيتان متطابقتين.

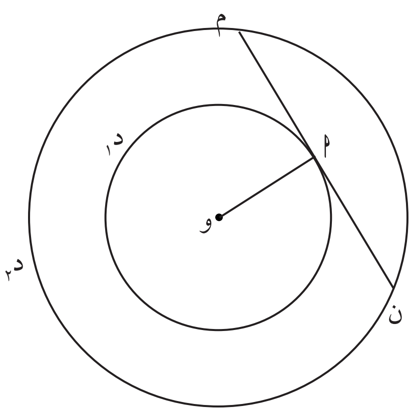
مسألة إضافية:

د١، د٢ دائرتان متحدتا المركز و.

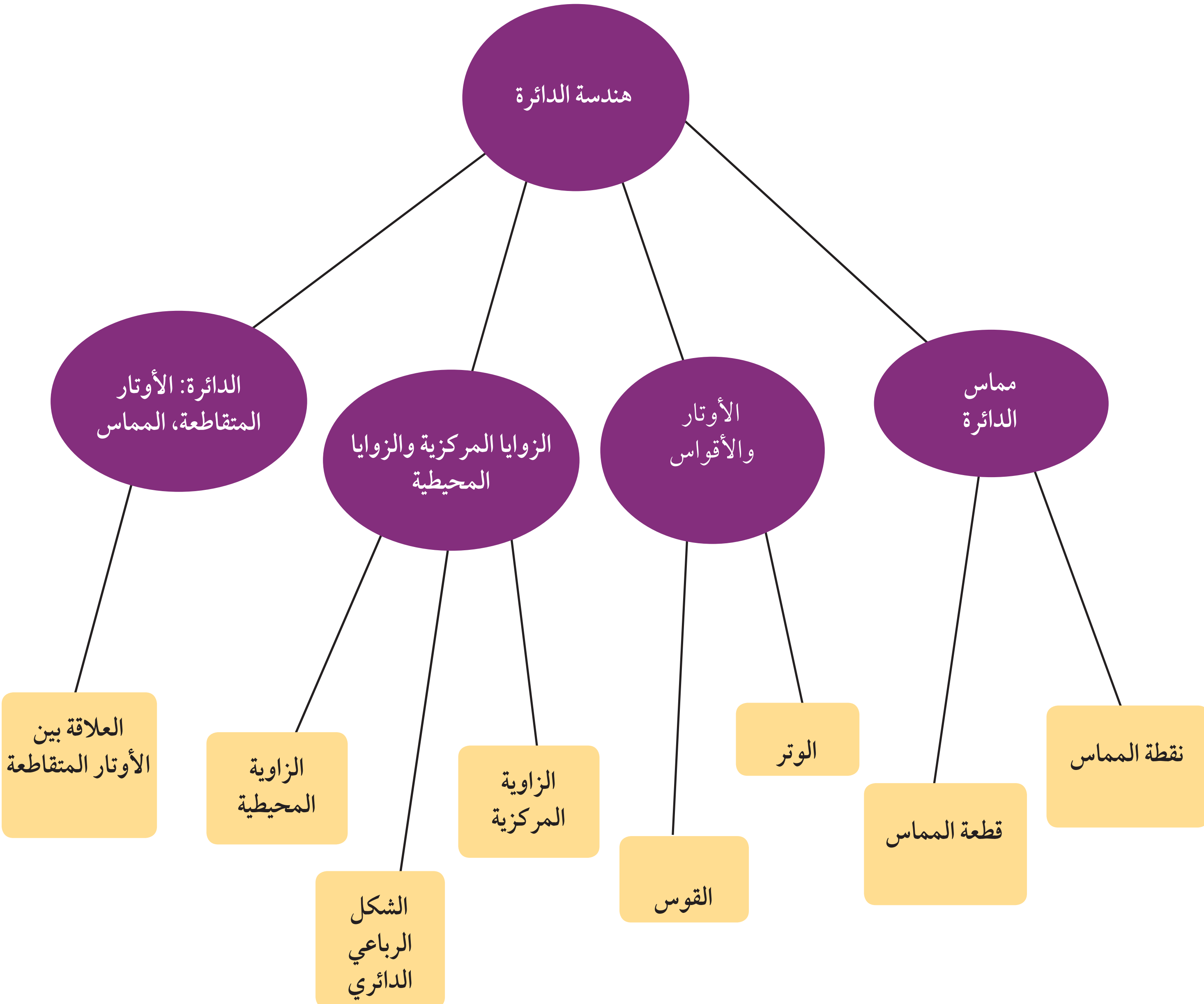
أ نقطة على د١.

مماس د١ المار في أ يقطع د٢ في م، ن.

أثبت أن أ منتصف م ن.



مخطط تنظيمي للوحدة السادسة



ملخص

– المماس لدائرة هو مستقيم في المستوي يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة.

– إذا كان مستقيم مماسًّا لدائرة، فإنه يكون متعامدًا مع نصف القطر المار بهذه النقطة.

– إذا تعامد مستقيم مع نصف قطر دائرة وكانت نقطة التعامد تنتمي إلى الدائرة، يكون المستقيم مماسًّا للدائرة.

– إذا تقاطع مماسان لدائرة في نقطة، تكون القطعتان المماسيتان متطابقتين.

– الدائرة المحاطة بمثلث هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث من الداخل ومركزها نقطة تلاقي منصفات الزاويا الداخلية للمثلث.

– في دائرة أو في دوائر متطابقة:

للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.

الأوتار المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة.

– للأقواس المتطابقة في دائرة زوايا مركزية متطابقة.

– الأوتار المتطابقة في دائرة هي على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.

– في الدائرة: القطر العمودي على وتر ينصفه وينصف كلًّا من قوسيه.

القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) هو عمودي على الوتر.

العمود المنصف لوتر يمر بمركز الدائرة.

– الزوايا المركزية زوايا رأسها مركز الدائرة.

– الزوايا المحيطية زوايا رأسها إحدى نقاط دائرة وضلعاها يقطعان الدائرة.

– قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

– قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

– كل زاويتين محيطيتين تحصران القوس نفسه متطابقتان.

– كل زاوية محيطية تحصر نصف دائرة هي زاوية قائمة.

– كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة) تكون زواياه المتقابلة متكاملة، أي كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.

– الزاوية المكونة من مماس ووتر تسمى زاوية مماسية، وقياسها يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

- إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي جزءي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزءي الوتر الآخر.
- إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.
- إذا رسم من نقطة خارج دائرة مماس وقاطع، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.

الوحدة السابعة

المصفوفات
Matrices

مشروع الوحدة: المعالجة الحيوية (Biotherapy).

١ **مقدمة المشروع:** يعتبر تسرب الزيت والمواد الكيميائية إلى المياه الجوفية من أهم مخاطر العصر الحديث، كما وتستخدم البكتيريا في مجال المعالجة الحيوية التي تتكوّن طبيعيًّا في محيط البيئة للحدّ من هذه الأخطار.

٢ **الهدف:** عند العمل في هذه الوحدة، سوف تحلل بيانات المشروع، وسوف تعالجها، وتستخدم النتائج لرسم المحتويات وتوقعها، ومن ثم سوف تبحث عن مصادر مشاريع أخرى. وفي النهاية، سوف تلخص ما ستجده وتوضحه للمساعدة في تكملة المشروع.

٣ **اللوازم:** آلة حاسبة بيانية.

٤ **أسئلة حول التطبيق:** يوضح الجدول بيانات من نتائج تحليل العلماء لخمس عينات عشوائية من التربة نفسها. في أحد مشاريع المعالجة الحيوية، وجدوا التالي من عناصر المنتجات البترولية الخطرة: البنزين (ب)، التوليدين (ت) وهو سائل عديم اللون، إيثيل البنزين (ي)، إكسيلين (س) وهو مركب هيدروكربوني. اعرض البيانات في أربع مصفوفات، ثم اختر عنصرًا من كل مصفوفة، واذكر ماذا يمثل.

مستويات المركب في التربة (ملجم/ كجم)

العينة	ب	ت	ي	س
١	٠,٠٦	٠,٩٥	٠,٩	١٨,٥
٢	٠,٠٦	١,٠٥	٠,٧٣	١٣,٥
٣	٠,٣٥	٦	٥,٦	٤٩
٤	٠,٢٢	٠,١٩	٢	١٩,٥
٥	٠,١١	٠,٨٢	٢,٥	٢٦

أ اعرض بيانات الجدول في ٤ مصفوفات.

ب استخدم هذه المصفوفات، وأوجد توليفة البنزين والتوليدين وإيثيل البنزين والإكسيلين بالمليجرام/ كجم لكل عينة تراب.

جـ بعد ١٢ شهرًا، لاحظ العلماء أن النسبة المئوية لكل مركَّب في كل عينة من التربة قد انخفضت بمعدل ٠,٠٥ ملجم/ كجم. فمثلًا، نسبة البنزين أصبحت في العينة الأولى ٠,٠١ وفي العينة الثانية ٠,٠١ وفي العينة الثالثة ٠,٣٠ وفي العينة الرابعة ٠,١٧ وفي العينة الخامسة ٠,٠٦. استخدم المصفوفات لحساب نقصان كل مركب في كل عينة.

٥ **التقرير:** حقق بحثًا عن موقع النفايات التي تتضمن خطورة، والتي تمت معالجتها حيويًّا. ما مدى اتساع الموقع؟ ما طرق المعالجة الأخرى التي يمكن استخدامها بخلاف المعالجة الحيوية؟

اكتب فقرات قليلة تلخص بحثك وتتضمن بيانات عن الموقع كلما أمكن.

دروس الوحدة

تنظيم البيانات في مصفوفات	جمع وطرح المصفوفات	ضرب المصفوفات	مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)	حل نظام من معادلتين خطيتين
٧-١	٧-٢	٧-٣	٧-٤	٧-٥

الوحدة السابعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت تمثيل العلاقات باستخدام المتغيرات .
- تعلمت تبسيط العبارات الجبرية المتضمنة أعدادًا صحيحة وكسورًا وإيجاد قيمتها.
- تعلمت تمثيل معادلات من متغيرين.
- تعلمت رسم المعادلات والمتباينات بيانيًّا.
- تعلمت رسم نظام من المعادلات أو المتباينات بيانيًّا.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تستخدم المصفوفات لتنظيم البيانات.
- سوف تتعرف المصفوفات المتساوية.
- سوف تستخدم جمع المصفوفات وطرحها لحل معادلات المصفوفات في مواقف حياتية.
- سوف تستخدم ضرب المصفوفات لحل مسائل حياتية.
- سوف تستخدم معكوسات المصفوفات لحل معادلات المصفوفات في مسائل حياتية.
- سوف تحل نظامًا من معادلتين خطيتين باستخدام قاعدة كرامر.

أضف إلى معلوماتك

يستخدم الناس في أغلب المجالات، البيانات المرتبة في قاعدة منظمة، وإحدى طرق تنظيم البيانات بصورة مختصرة هي كتابتها في صورة مصفوفة، بذلك نستطيع جمع المصفوفات وطرحها وضربها. كما يمكن استخدام ذلك للحصول على معلومات إضافية تساعد في اتخاذ القرار. تاريخيًّا، استخدمت المصفوفات لحل رسائل مشفرة، كما ويمكن استخدام ضرب المصفوفات في مسائل وتطبيقات حياتية.

المصطلحات الأساسية

مصفوفة – أعمدة – صفوف – عنصر المصفوفة – العناصر المتناظرة – مصفوفة الجمع –المصفوفة الصفرية – العنصر المحايد الجمعي – العدد القياسي – مصفوفات الضرب – المصفوفة المربعة – مصفوفة الوحدة – النظير الضربي للمصفوفة (معكوس المصفوفة) – قاعدة كرامر – محدد المصفوفة.

٧-١ تنظيم البيانات في مصفوفات
Organising Data Into Matrices

سوف تتعلم

- تنظيم البيانات في مصفوفات
- المصفوفات المتساوية

عمل تعاوني

يبين الجدول الأرقام القياسية لأسعار المستهلك حسب أقسام الإنفاق الرئيسة:

مقارنة يناير ٢٠١١ بـ يناير ٢٠١٢.　　سنة الأساس ٢٠٠٠ = صفرًا

أقسام الإنفاق الرئيسة	يناير ٢٠١١	يناير ٢٠١٢
الرقم القياسي العام	١٤٦,٠	١٥١,١
المواد الغذائية	١٧٢,٠	١٨٥,٩
الحلويات	١٦٣,٢	١٦٩,١
الملابس	١٥٤,٨	١٥٩,٨
خدمات المسكن	١٤٨,٢	١٥١,٢
سلع وخدمات منزلية	١٣٧,٣	١٣٩,٨

* المصدر: الإدارة المركزية للإحصاء الكويت.

١ كم بلغت نسبة الزيادة في الرقم القياسي العام؟

٢ في أي قسم كانت نسبة الزيادة الأكبر؟ وفي أي قسم كانت الأصغر؟

تعريف

المصفوفة هي تنظيم من الأعداد المرتبة في صفوف وأعمدة.

الأعداد المكونة للمصفوفة تسمى عناصر Elements.

رتبة المصفوفة　Dimension of a Matrix

نرمز إلى المصفوفة بأحد حروف الهجاء ونضع تحته خطًّا، نكتب $\underline{أ}$ ونقرأ **المصفوفة أ**.

عدد الصفوف (م) وعدد الأعمدة (ن) يحددان **رتبة المصفوفة** وتكتب م × ن.

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ٦ & ٧ & ٠ \end{bmatrix}$$

المصفوفة $\underline{أ}$ هي من **الرتبة** ٢ × ٣.

ملاحظة: لكتابة رتبة المصفوفة نكتب أولًا عدد الصفوف يليه عدد الأعمدة.

مثال (١)

اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ٤ \\ -٧ & -٣ & ٢ \\ ٩ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} -٣ & \frac{٢}{٣} & -٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ ٠٫٥ \end{bmatrix}$

الحل:

تتكون المصفوفة أ من ٣ صفوف و٣ أعمدة: المصفوفة من الرتبة ٣ × ٣.

تتكون المصفوفة ب من صف واحد و٣ أعمدة: المصفوفة من الرتبة ١ × ٣.

تتكون المصفوفة جـ من ٤ صفوف وعمود واحد: المصفوفة من الرتبة ٤ × ١.

حاول أن تحل

١ اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

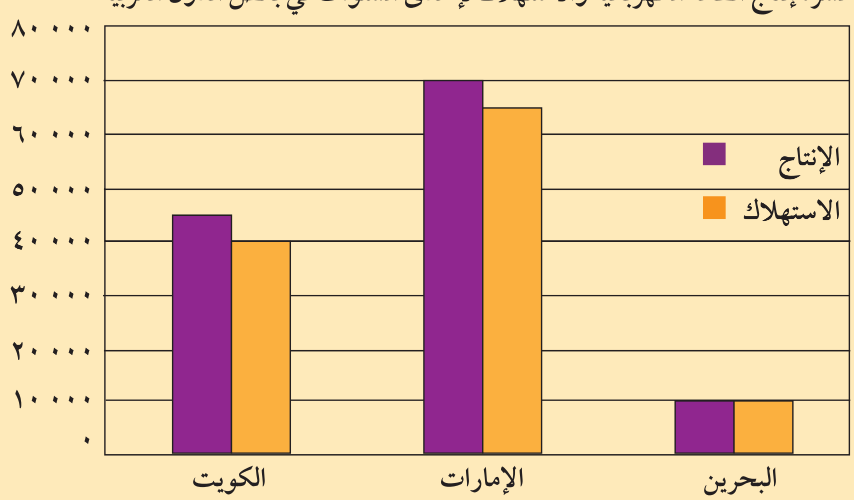
$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & ٥ & ٤ \\ ٧ & ٠٫٥ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٣ & -٨ \end{bmatrix}$ ، $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٠ & ١٠ \\ -٥ & ١ \\ ٩ & ٠٫٦ \end{bmatrix}$

مثال (٢)

تطبيقات حياتية

الطاقة: يمكن أن تقاس الطاقة الكهربائية بالجيجاوات/ ساعة. اكتب مصفوفة تمثّل بيانات الرسم البياني التالي بالأعمدة المزدوجة.

نشرة إنتاج الطاقة الكهربائية والاستهلاك لإحدى السنوات في بعض الدول العربية



الحل:

افرض أن كل صف في المصفوفة يمثّل دولة، وكل عمود يمثّل مستوى الإنتاج أو الاستهلاك.

استنتج عناصر المصفوفة من الرسم.

$$\begin{array}{cc}
\text{الاستهلاك} & \text{الإنتاج} & \\
\left[\begin{array}{cc}
٤٠\,٠٠٠ & ٤٥\,٠٠٠ \\
٦٥\,٠٠٠ & ٧٠\,٠٠٠ \\
١٠\,٠٠٠ & ١٠\,٠٠٠
\end{array}\right] & & \begin{array}{c}\text{الكويت} \\ \text{الإمارات} \\ \text{البحرين}\end{array}
\end{array}$$

حاول أن تحل

٢ **أ** وضّح كيف يمكنك تعديل المصفوفة لتشمل البيانات التي إذا أضيفت إليها دول أخرى.

ب أعد كتابة عناصر المصفوفة السابقة في مصفوفة من الرتبة ٢ × ٣.

ضع عنوانًا للصفوف والأعمدة.

جـ وضّح الفرق بين المصفوفة التي رتبتها جـ × د والمصفوفة التي رتبتها د × جـ.

ترميز عناصر المصفوفة

يحدد أي عنصر في المصفوفة بدلالة رقمي الصف والعمود الواقع فيهما، فمثلًا، في المصفوفة أ العنصر الذي في الصف الأول والعمود الثالث نرمز إليه بالرمز $أ_{٣١}$ (الصف أولًا والعمود ثانيًا).

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{bmatrix}$$

العنصر في الصف الأول والعمود الثالث: $أ_{٣١}$

مثال (٣)

في المصفوفة: ب = $\begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ١ & ١٢ \\ ٣,٥ & ٢ & ٦ & ٢ \\ -٤ & ١ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ اكتب قيمة كل عنصر مما يلي:

أ $ب_{٢٢}$ ب $ب_{١٣}$ ج $ب_{١١}$

الحل:

أ العنصر $ب_{٢٢}$ يقع في الصف ٢ وفي العمود ٢ ∴ $ب_{٢٢}$ = ٦

ب العنصر $ب_{١٣}$ يقع في الصف ٣ وفي العمود ١ ∴ $ب_{١٣}$ = ١

ج العنصر $ب_{١١}$ يقع في الصف ١ وفي العمود ١ ∴ $ب_{١١}$ = ١٢

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، أوجد $ب_{٢٣}$ من المصفوفة ب.

المصفوفات: المربعة، الأفقية، العمودية

Horizontal and Vertical Matrices Square,

- **المصفوفة المربعة:** هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.

وفي ما عدا ذلك، تسمى المصفوفة: مصفوفة مستطيلة Rectangular Matrix.

- **المصفوفة الأفقية:** هي مصفوفة مكونة من صف واحد Horizontal Matrix.
- **المصفوفة العمودية:** هي مصفوفة مكونة من عمود واحد Vertical Matrix.
- **فكر وناقش:** هل يمكن لمصفوفة أن تكون عمودية وأفقية معًا؟

مثال (٤)

صنّف كلًّا من المصفوفات التالية:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & -٥ & ١ \\ ٧ & ٤ & ٠ \\ ٨ & ٢ & ٣ \end{bmatrix} \qquad \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٠,٢ \end{bmatrix}$$

$$\underline{جـ} = \begin{bmatrix} -٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix} \qquad \underline{د} = \begin{bmatrix} ١,٤ & ٣ & -٢ \\ ٥ & ٨ & ١٢ \end{bmatrix}$$

معلومة رياضية:

المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار تسمى مصفوفة صفرية

Zero Matrix

ويرمز إليها بالرمز $\underline{٠}_{م \times ن}$

الحل:

أ : مصفوفة ٣ × ٣ ∴ أ مصفوفة مربعة.

ب : مصفوفة ٣ × ١ ∴ ب مصفوفة عمودية.

جـ : مصفوفة ١ × ٣ ∴ جـ مصفوفة أفقية.

د : مصفوفة ٢ × ٣ ∴ د مصفوفة مستطيلة.

حاول أن تحل

٤ صنّف المصفوفات في المثال (١).

المصفوفات المتساوية: Equal Matrices

تكون **مصفوفتان متساويتين** إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية والعكس صحيح.

المصفوفة التي عدد صفوفها (جـ)، وعدد أعمدتها (د) هي من الرتبة جـ × د.

معلومة رياضية:

كل عنصرين لهما الموقع نفسه في المصفوفتين اللتين لهما الرتبة نفسها يسميان عنصرين متناظرين.

مثال (٥)

هل المصفوفتان أ، ب متساويتان؟ فسّر. $\text{أ} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٥} & -٠,٧٥ \\ -٢ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٠,٢ & -\frac{٣}{٤} \\ -٢ & ٠,٥ \end{bmatrix}$

الحل:

كلّ من أ، ب لهما صفّان وعمودان، وعناصرهما المتناظرة متساوية، وبالتالي فالمصفوفتان أ، ب متساويتان.

حاول أن تحل

٥ هل المصفوفتان س، ص متساويتان؟ فسّر.

$\text{س} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\text{ص} = \begin{bmatrix} ٩ & -١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

والآن، يمكنك أن تستخدم تعريف المصفوفات المتساوية لحلّ المعادلات.

مثال (٦)

إذا كانت: $\begin{bmatrix} ٤ & ٢\text{س} - ٥ \\ ٣\text{ص} + ١٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢٥ \\ \text{ص} + ١٨ & ٣ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

الحل:

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٢\text{س} - ٥ \\ ٣\text{ص} + ١٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢٥ \\ \text{ص} + ١٨ & ٣ \end{bmatrix}$$

بما أن المصفوفتين متساويتان، فإن عناصرهما المتناظرة متساوية.

٢س − ٥ = ٢٥	٣ص + ١٢ = ص + ١٨
٢س = ٣٠	٢ص = ٦
س = ١٥	ص = ٣

الحل هو: س = ١٥، ص = ٣

حاول أن تحل

٦ (أ) إذا كانت $\begin{bmatrix} ٥ & ٣٨ \\ ٤\text{ص} - ١٠ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & \text{س} + ٨ \\ -\text{ص} & ٣ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

(ب) إذا كانت [٣س   س + ص   س − ص] = [−٩   ٤   −١٠] فأوجد قيمة كل من س، ص.

٧-٢

جمع وطرح المصفوفات
Adding and Subtracting Matrices

سوف تتعلم

- جمع المصفوفات
- طرح المصفوفات
- حلّ المعادلات المصفوفية

عمل تعاوني

إحصائيًّا: اعمل مع زميل لك. استخدم المعلومات في الجدول:

المتوسط الحسابي للدرجات				
السنة	اللغة		الرياضيات	
	إناث	ذكور	إناث	ذكور
٢٠٠٠	٨٥	٨٣	٧٦	٨٢
٢٠٠١	٨٧	٨٥	٧٤	٨٥

١ أ أوجد من الجدول مجموع المتوسطين الحسابيين لدرجات الذكور في كل سنة.
ب أوجد من الجدول مجموع المتوسطين الحسابيين لدرجات الإناث في كل سنة.

٢ أ اكتب مصفوفة تمثّل المتوسط الحسابي لدرجات اللغة للذكور والإناث خلال السنتين.
ضع عنوانًا لكل من: المصفوفة، وصفوفها، وأعمدتها.
ب اذكر رتبة هذه المصفوفة.

٣ أ اكتب مصفوفة تمثّل المتوسط الحسابي لدرجات الرياضيات للذكور والإناث خلال السنتين.
ضع عنوانًا لكل من: المصفوفة، وصفوفها، وأعمدتها.
ب اذكر رتبة المصفوفة.

٤ أ بالنظر إلى إجابتك عن السؤال الأول والمصفوفات التي كتبتها في السؤالين ٢، ٣.
اكتب مصفوفة ثالثة تمثل مجموع المتوسطين الحسابيين لدرجات الذكور والإناث خلال السنتين.
ضع عنوانًا لكل من: المصفوفة، وصفوفها، وأعمدتها.
ب اذكر رتبة هذه المصفوفة.

٥ استخدم ملاحظاتك وأي أنماط تراها لصياغة طريقة لجمع المصفوفات.

معلومة رياضية:
العناصر المتناظرة في المصفوفات هي العناصر التي لها الموضع نفسه في كل مصفوفة.

جمع وطرح المصفوفات Adding and Subtracting Matrices

لجمع مصفوفتين أ، ب يجب أن تكونا من **الرتبة نفسها**.

نجمع كل عنصرين لهما الموقع نفسه في أ، ب. مصفوفة الجمع لها رتبة كل من المصفوفتين أ، ب.

جـ = أ + ب

أ من الرتبة م × ن ، ب من الرتبة م × ن

∴ جـ من الرتبة م × ن.

$جـ_{وس} = أ_{وس} + ب_{وس}$.

مثال (١)

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & 7 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} 3 & 9 & -3 \\ -9 & 6 & 12 \end{bmatrix}$

فأوجد إن أمكن:

أ) أ + ب ب) أ + جـ

وإذا لم يكن الجمع ممكنًا، فاذكر السبب.

الحل:

أ) أ + ب. لا يمكن الجمع، لأن رتبة أ هي ٢ × ٣ لا تساوي رتبة ب وهي ٣ × ٢.

ب) أ + جـ. يمكن الجمع، لأن المصفوفتين لهما الرتبة نفسها: ٢ × ٣.

$$أ + جـ = \begin{bmatrix} 1+3 & -2+9 & 0-3 \\ 3-9 & -5+6 & 7+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -3 \\ -6 & 1 & 19 \end{bmatrix}$$

رتبة أ + جـ هي ٢ × ٣.

حاول أن تحل

١) أوجد ناتج ما يلي: $\begin{bmatrix} -12 & 24 \\ -3 & 5 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -5 & 4 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$

مثال (٢)

تطبيقات حياتية

الرياضة: في رياضة الخماسيّ الحديث، والتي تجرى منافسات فيها على مدار يوم واحد، يكون على كلّ متسابق أو لاعب أن يشارك في الألعاب الخمس: الرماية، المبارزة بالسيف، السباحة، الفروسيّة، اختراق الضاحية.

كون مصفوفة لكل لعبة من الجدول التالي ثم أوجد مجموع النقاط التي حصل عليها كلّ لاعب في الألعاب الخمس أثناء منافساتهم في إحدى البطولات.

الرياضة / اللاعب	رماية	مبارزة بالسيف	سباحة	فروسية	اختراق الضاحية
الأوّل	١ ١٥٦	٨١٦	١ ١٨٨	٨٨٩	١ ١٦٨
الثاني	١ ٠٣٦	٨١٦	١ ٢٨٠	٨٢٦	١ ٢١٠
الثالث	١ ٠٢٤	٦٧٨	١ ٢٩٦	١ ٠٧٠	١ ٢٧٠

الحل:

اكتب خمس مصفوفات ٣ × ١، ثم اجمع المصفوفات:

الرماية، المبارزة، السباحة، الفروسية، اختراق الضاحية

$$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ١\,١٥٦ \\ ١\,٠٣٦ \\ ١\,٠٢٤ \end{bmatrix}،\quad \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٨١٦ \\ ٨١٦ \\ ٦٧٨ \end{bmatrix}،\quad \underline{\text{جـ}} = \begin{bmatrix} ١\,١٨٨ \\ ١\,٢٨٠ \\ ١\,٢٩٦ \end{bmatrix}،\quad \underline{\text{د}} = \begin{bmatrix} ٨٨٩ \\ ٨٢٦ \\ ١\,٠٧٠ \end{bmatrix}،\quad \underline{\text{هـ}} = \begin{bmatrix} ١\,١٦٨ \\ ١\,٢١٠ \\ ١\,٢٧٠ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}} + \underline{\text{جـ}} + \underline{\text{د}} + \underline{\text{هـ}} = \begin{bmatrix} ١\,١٥٦ \\ ١\,٠٣٦ \\ ١\,٠٢٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٨١٦ \\ ٨١٦ \\ ٦٧٨ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١\,١٨٨ \\ ١\,٢٨٠ \\ ١\,٢٩٦ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٨٨٩ \\ ٨٢٦ \\ ١\,٠٧٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١\,١٦٨ \\ ١\,٢١٠ \\ ١\,٢٧٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١\,١٥٦ + ٨١٦ + ١\,١٨٨ + ٨٨٩ + ١\,١٦٨ \\ ١\,٠٣٦ + ٨١٦ + ١\,٢٨٠ + ٨٢٦ + ١\,٢١٠ \\ ١\,٠٢٤ + ٦٧٨ + ١\,٢٩٦ + ١\,٠٧٠ + ١\,٢٧٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥\,٢١٧ \\ ٥\,١٦٨ \\ ٥\,٣٣٨ \end{bmatrix}$$

وبالتالي فاللاعب الفائز في هذه الألعاب هو اللاعب الثالث.

حاول أن تحل

٢ أ) وضّح لماذا لا تستطيع أن تجمع المصفوفات إلا إذا كانت لها الرتبة نفسها فقط.

ب) استخدم جمع المصفوفات لإثبات أنّ العبارة التالية صحيحة:

$$\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ١٠ & ١١ \\ -٤ & ٦ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & -٧ \\ ٦ & ٢ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٧ \\ ٦ & ٢ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ١٠ & ١١ \\ -٤ & ٦ \end{bmatrix}$$

مثال (٣)

إذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{جـ}} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix}$

فأوجد: $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}}$ ، $\underline{\text{ب}} + \underline{\text{أ}}$ ، $(\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}}) + \underline{\text{جـ}}$ ، $\underline{\text{أ}} + (\underline{\text{ب}} + \underline{\text{جـ}})$ ، $\underline{\text{أ}} + \underline{٠}_{٢\times٢}$ ، $\underline{\text{أ}} + (-\underline{\text{أ}})$.

معلومة رياضية:

المصفوفة $-\underline{\text{أ}}$ هي النظير الجمعي للمصفوفة $\underline{\text{أ}}$.

الحل:

$$\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix} \qquad \underline{\text{ب}} + \underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$$

$$(\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}}) + \underline{\text{جـ}} = \begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٥ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{أ}} + (\underline{\text{ب}} + \underline{\text{جـ}}) = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ -٣ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٥ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{أ}} + \underline{٠}_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{أ}} + (-\underline{\text{أ}}) = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & -٣ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، أوجد $\underline{\text{جـ}} + \underline{\text{ب}}$ ، $(\underline{\text{جـ}} + \underline{\text{ب}}) + \underline{\text{أ}}$.

خواص جمع المصفوفات

إذا كان $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ ، $\underline{جـ}$ مصفوفات من الرتبة م × ن فإن:

- $\underline{أ} + \underline{ب}$ هي من الرتبة م × ن — خاصية الإقفال (الانغلاق)
- $\underline{أ} + \underline{ب} = \underline{ب} + \underline{أ}$ — خاصية الإبدال Commutative
- $(\underline{أ} + \underline{ب}) + \underline{جـ} = \underline{أ} + (\underline{ب} + \underline{جـ})$ — خاصية التجميع Associative
- $\underline{٠}_{م\times ن} + \underline{أ} = \underline{أ} + \underline{٠}_{م\times ن} = \underline{أ}$ — المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد الجمعي من الرتبة م × ن
- $\underline{أ} + (-\underline{أ}) = \underline{٠}_{م\times ن}$ — خاصية المعكوس الجمعي (النظير الجمعي).

طرح المصفوفات

يمكن طرح المصفوفات باستخدام خاصية مصفوفة المعكوس الجمعي.

إذا كان للمصفوفتين $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ الرتبة نفسها، فإن $\underline{أ} - \underline{ب} = \underline{أ} + (-\underline{ب})$.

ملاحظة: إذا كان $\underline{أ} \neq \underline{ب}$ ولهما الرتبة نفسها فإن: $\underline{أ} - \underline{ب} \neq \underline{ب} - \underline{أ}$ وبالتالي، عملية طرح المصفوفات ليست إبدالية.

مثال (٤)

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ & -١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ١ \\ ٤ & ٢ & -٢ \end{bmatrix}$

أوجد $\underline{أ} - \underline{ب}$ ، $\underline{ب} - \underline{أ}$

الحل:

الطريقة الأولى:

$\underline{أ} - \underline{ب} = \underline{أ} + (-\underline{ب})$

$$= \begin{bmatrix} ٤ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & -٤ & -١ \\ -٤ & -٢ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٤ + (-٣) & ٢ + (-٤) & ٣ + (-١) \\ ٠ + (-٤) & ٤ + (-٢) & -١ + (٢) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٢ \\ -٤ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

الطريقة الثانية:

$$\underline{أ} - \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ & -١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ١ \\ ٤ & ٢ & -٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٤ - ٣ & ٢ - ٤ & ٣ - ١ \\ ٠ - ٤ & ٤ - ٢ & -١ - (-٢) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & -٢ & ١ \\ ١ & ٢ & -٤ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{ب}} - \underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ -٢ & ٢ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ -١ & ٤ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ -٢ & ٢ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & -٢ & -٤ \\ ١ & -٤ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ - ٣ & ٤ - ٢ & ٣ - ٤ \\ -٢ - (-١) & ٢ - ٤ & ٤ - ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ٢ & -١ \\ -١ & -٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل

٤ أوجد ناتج كل مما يلي:

أ $\begin{bmatrix} ٦ & -٩ & ٧ \\ -٢ & ١ & ٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٤ & ٣ & ٠ \\ ٦ & ٥ & ١٠ \end{bmatrix}$

ب $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ -١ & ١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$

حل المعادلات المصفوفية Solving Matrix Equations

المعادلة المصفوفية هي معادلة إحدى مصفوفاتها غير معلومة (المتغير).

يمكنك استخدام خواص المساواة لحل المعادلات المصفوفية.

لأي مصفوفات أ، ب، جـ لها الرتبة نفسها إذا كان: أ = ب، فإن: أ + جـ = ب + جـ، أ − جـ = ب − جـ.

مثال (٥)

حل المعادلة المصفوفية التالية:

$$\underline{\text{س}} - \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٨ & ٩ \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\underline{\text{س}} - \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٨ & ٩ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{س}} - \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٨ & ٩ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$$

بإضافة $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ لكل من طرفي المعادلة

وبالتالي: $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١١ & ١١ \end{bmatrix}$

حاول أن تحل

٥ أوجد س حيث:

$$\underline{\text{س}} - \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٧ \\ -٤ & ٤ \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفات
Matrix Multiplication

سوف تتعلم
- ضرب مصفوفة في عدد
- الضرب القياسي
- ضرب المصفوفات

عمل تعاوني

اعمل مع زميل لك. استخدم البيانات في الجدول:

	مبيعات مطعم		
	وجبة ١	وجبة ٢	وجبة ٣
ثمن وجبة الغداء	٢,٥٠٠ دينار	١,٧٥٠ دينار	٢,٠٠٠ دينار
عدد الوجبات المباعة	٥٠	١٠٠	٧٥

١ ما ثمن: وجبات الغداء ١، وجبات الغداء ٢، وجبات الغداء ٣؟

٢ أ ما ثمن الوجبات المباعة؟

ب وضح كيف استخدمت البيانات الموجودة في الجدول لإيجاد الإجابة.

٣ أ اكتب مصفوفة ١ × ٣ لتمثل ثمن كل وجبة مباعة.

ب اكتب مصفوفة ٣ × ١ لتمثل عدد الوجبات المباعة.

ج **الكتابة**: استخدم الكلمات: (صف، عمود، عنصر) لتصف إجراءات استخدام المصفوفات التي حصلت عليها، لإيجاد المبلغ بالدينار الذي يبيع به المطعم جميع الوجبات.

ضرب مصفوفة في عدد Multiplying a Matrix by a Scalar

يمكنك أن تضرب عدد حقيقي في مصفوفة مثل:

$$3\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 12 & -9 \end{bmatrix}$$

الضرب القياسي Scalar Multiplication

الضرب القياسي هو عملية ضرب مصفوفة أ في عدد حقيقي ك : ك ≠ ٠.

الناتج هو المصفوفة ك أ.

نحصل على المصفوفة ك أ بضرب كل عنصر من أ في ك.

إذا كان ك = ٠، يكون الناتج مصفوفة صفرية.

معلومة رياضية:
رتبة المصفوفة ك أ تساوي رتبة المصفوفة أ.

مثال (١)

إذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -٤ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ -٢ & -١ & ٣ \end{bmatrix}$

فأوجد: ٥$\underline{\text{أ}}$ ، ٣$\underline{\text{ب}}$. ثم ٥$\underline{\text{أ}}$ − ٣$\underline{\text{ب}}$

الحل:

$$٥\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٥\times٢ & ٥\times٣ & ٥\times(-٤) \\ ٥\times٥ & ٥\times٤ & ٥\times٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ١٥ & -٢٠ \\ ٢٥ & ٢٠ & ١٥ \end{bmatrix}$$

$$٣\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٣\times٠ & ٣\times١ & ٣\times٢ \\ ٣\times(-٢) & ٣\times(-١) & ٣\times٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ٦ \\ -٦ & -٣ & ٩ \end{bmatrix}$$

$$٥\underline{\text{أ}} - ٣\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ١٠ & ١٥ & -٢٠ \\ ٢٥ & ٢٠ & ١٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ٦ \\ -٦ & -٣ & ٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ١٢ & -٢٦ \\ ٣١ & ٢٣ & ٦ \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل

١ من المثال (١)، أوجد:

أ ٥$\underline{\text{ب}}$ − ٤$\underline{\text{أ}}$ ب $\underline{\text{أ}}$ + ٦$\underline{\text{ب}}$

خواص الضرب القياسي

إذا كان $\underline{\text{أ}}$ ، $\underline{\text{ب}}$ ، $\underline{٠}$ مصفوفات من الرتبة م × ن. ك، د عددان قياسيان. فإن:

- ك $\underline{\text{أ}}$: مصفوفة من الرتبة م × ن — خاصية الإغلاق
- (ك د) $\underline{\text{أ}}$ = ك(د $\underline{\text{أ}}$) — خاصية التجميع للضرب
- ك($\underline{\text{أ}}$ + $\underline{\text{ب}}$) = ك $\underline{\text{أ}}$ + ك $\underline{\text{ب}}$ — خاصية التوزيع من اليمين
- ($\underline{\text{أ}}$ + $\underline{\text{ب}}$)ك = $\underline{\text{أ}}$ ك + $\underline{\text{ب}}$ ك — خاصية التوزيع من اليسار
- ٠ × $\underline{\text{أ}}$ = $\underline{٠}$ — خاصية الضرب في صفر

مثال (٢) **إثرائي**

الطعام: يخطط مطعم لرفع ثمن كل نوع من الشراب ليصبح مرة ونصف المرة، فكم سيكون ثمن كل نوع؟ (استخدم لائحة الأسعار في الجدول)

	حجم كبير	حجم صغير
لبن قليل الدسم	٠,٥٠٠ دينار	٠,٣٠٠ دينار
عصير البرتقال	٠,٩٠٠ دينار	٠,٦٠٠ دينار
عصير المانجو	٠,٨٠٠ دينار	٠,٥٠٠ دينار

الحل:

اضرب كل عنصر في ١,٥ .

$$\begin{bmatrix} ٠,٤٥٠ & ٠,٧٥٠ \\ ٠,٩٠٠ & ١,٣٥٠ \\ ٠,٧٥٠ & ١,٢٠٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٠,٣٠٠)١,٥ & (٠,٥٠٠)١,٥ \\ (٠,٦٠٠)١,٥ & (٠,٩٠٠)١,٥ \\ (٠,٥٠٠)١,٥ & (٠,٨٠٠)١,٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠,٣٠٠ & ٠,٥٠٠ \\ ٠,٦٠٠ & ٠,٩٠٠ \\ ٠,٥٠٠ & ٠,٨٠٠ \end{bmatrix} \times ١,٥$$

سوف يصبح ثمن اللبن ٠,٧٥٠ دينار، ٠,٤٥٠ دينار، وثمن عصير البرتقال ١,٣٥٠ دينار، ٠,٩٠٠ دينار، وثمن عصير المانجو ١,٢٠٠ دينار ، ٠,٧٥٠ دينار.

حاول أن تحل

٢ بعد رفع الأسعار، تناقصت مبيعات الشراب في المطعم. وضع صاحب المطعم إعلانًا كتب عليه: تخفيض الأسعار بنسبة ٢٠٪. ضع لائحة بالأسعار الجديدة.

يمكن استخدام خواص الضرب القياسي لحل معادلات تتضمن مصفوفات.

مثال (٣)

حل المعادلة: ٤$\underline{س}$ + ٢ $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ثم تحقق من إجابتك.

الحل:

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} ٢ + \underline{س}٤$$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \times ٢ & ٣ \times ٢ \\ ١ \times ٢ & (٢-) \times ٢ \end{bmatrix} + \underline{س}٤$$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٦ \\ ٢ & ٤- \end{bmatrix} + \underline{س}٤$$

$$\begin{bmatrix} ٨ & ٦ \\ ٢ & ٤- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ١٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} = \underline{س}٤$$

$$\begin{bmatrix} ٨- & ٤ \\ ٠ & ٨ \end{bmatrix} = \underline{س}٤$$

$$\begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨- & ٤ \\ ٠ & ٨ \end{bmatrix} \frac{١}{٤} = \underline{س}$$

تحقق:

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} ٢ + \underline{س}٤$$

$$٤\begin{bmatrix}١&-٢\\٢&٠\end{bmatrix}+٢\begin{bmatrix}٣&٤\\-٢&١\end{bmatrix}\overset{?}{=}\begin{bmatrix}١٠&٠\\٤&٢\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}٤&-٨\\٨&٠\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}٦&٨\\-٤&٢\end{bmatrix}\overset{?}{=}\begin{bmatrix}١٠&٠\\٤&٢\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}١٠&٠\\٤&٢\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}١٠&٠\\٤&٢\end{bmatrix} \checkmark$$

حاول أن تحل

٣ حل كل معادلة مما يلي:

أ) $٢س=\begin{bmatrix}٤&١٢\\١&-٤\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-٢&٠\\٣&٤\end{bmatrix}$

ب) $-٣س+\begin{bmatrix}٧&٠&-١\\٢&-٣&٤\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}١٠&٠&٨\\-١٩&-١٨&١٠\end{bmatrix}$

ضرب المصفوفات Matrices Multiplying

أجري اختبار للذكاء في مادتي الرياضيات والعلوم لكل من ناصر، أحمد، عبد الله ثم رتبت البيانات في صورة مصفوفتين أ ، ب حيث:

$$أ=\begin{array}{c|cc|} & \text{الرياضيات} & \text{العلوم}\\ \hline \text{ناصر} & ٣٠ & ٢٠\\ \text{أحمد} & ٤٠ & ١٥\\ \text{عبد الله} & ٢٥ & ٢٥ \end{array}$$

والمصفوفة أ تمثل عدد الأسئلة الموضوعية التي أجاب عنها كل من الطلاب الثلاثة في كل مادة على حدة.

$$ب=\begin{array}{c|c|} \text{درجة الرياضيات لكل سؤال} & ٤\\ \text{درجة العلوم لكل سؤال} & ٢ \end{array}$$

والمصفوفة ب هي درجة السؤال في كل من المادتين.

المطلوب: معرفة مجموع درجات كل طالب منهم في المادتين معًا.

الحل:

مجموع درجات ناصر في مادتي الرياضيات والعلوم = ٣٠ × ٤ + ٢٠ × ٢ = ١٦٠ درجة

مجموع درجات أحمد في مادتي الرياضيات والعلوم = ٤٠ × ٤ + ١٥ × ٢ = ١٩٠ درجة

مجموع درجات عبد الله في مادتي الرياضيات والعلوم = ٢٥ × ٤ + ٢٥ × ٢ = ١٥٠ درجة

والآن إذا كتبنا النواتج النهائية في صورة مصفوفة $جـ=\begin{bmatrix}١٦٠\\١٩٠\\١٥٠\end{bmatrix}$

وهذا ينتج من ضرب المصفوفتين $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$. لكي تقوم بعملية ضرب مصفوفتين، اضرب عناصر كلّ صفّ من المصفوفة الأولى في عناصر كلّ عمود من المصفوفة الثانية. أوجد ناتج كلّ ضرب، ثمّ اجمع نواتج الضرب كما في المثال التالي:

$$\underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣٠ & ٢٠ \\ ٤٠ & ١٥ \\ ٢٥ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٤ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣٠ \times ٤ + ٢٠ \times ٢ \\ ٤٠ \times ٤ + ١٥ \times ٢ \\ ٢٥ \times ٤ + ٥ \times ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٦٠ \\ ١٩٠ \\ ١٥٠ \end{bmatrix}$$

وبالتالي تكون درجة أحمد هي الأفضل.

مثال (٤)

أوجد ناتج $\underline{أ} \times \underline{ب}$.

حيث $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ -١ & -٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$

الحل:

اضرب $أ_{١١}$ و $ب_{١١}$، ثم اضرب $أ_{٢١}$ و $ب_{١٢}$، ثم اجمع نواتج الضرب.

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ -١ & -٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{؟} & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$$(٠)(٤) + (٣)(-٢) = -٦$$

الناتج هو العنصر في الصفّ الأوّل والعمود الأوّل. كرّر الخطوات نفسها مع باقي الصفوف والأعمدة.

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ -١ & -٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ & \text{؟} \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$$(٠)(٠) + (٣)(١) = ٣$$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ -١ & -٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ & ٣ \\ \text{؟} & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$$(-١)(٤) + (-٤)(-٢) = ٤$$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ -١ & -٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ & ٣ \\ ٤ & \text{؟} \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$$(-١)(٠) + (-٤)(١) = -٤$$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ -١ & -٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ & ٣ \\ ٤ & -٤ \\ \text{؟} & \square \end{bmatrix}$$

$$(١)(٤) + (٢)(-٢) = ٠$$

$$\begin{bmatrix}٠&٣\\-١&-٤\\١&٢\end{bmatrix}\begin{bmatrix}٤&٠\\-٢&١\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-٦&٣\\٤&-٤\\٠&؟\end{bmatrix}$$

$$(١)(٠)+(٢)(١)=٢$$

ناتج الضرب:

$$\begin{bmatrix}٠&٣\\-١&-٤\\١&٢\end{bmatrix}\begin{bmatrix}٤&٠\\-٢&١\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-٦&٣\\٤&-٤\\٠&٢\end{bmatrix}$$

حاول أن تحل

٤ أ صف الإجراءات التي تمّت لضرب الصفّ المظلّل في العمود المظلّل في المثال (٤).

ب أوجد ناتج الضرب: $\begin{bmatrix}-١&٠\\٣&-٤\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-٣&٣\\٥&٠\end{bmatrix}$

ج في المثال (٤)، ما رتبة المصفوفات الأصليّة؟ ما رتبة مصفوفة الضرب؟

د التفكير الناقد: كيف تقارن رتبة مصفوفة الضرب برتب المصفوفات الأصليّة؟

ضرب المصفوفات :

المصفوفة $\underline{أ}$ هي مصفوفة من الرتبة م × ن والمصفوفة $\underline{ب}$ هي مصفوفة من الرتبة ن × ر، عندئذٍ مصفوفة الضرب $\underline{أ}$ × $\underline{ب}$ هي مصفوفة من الرتبة م × ر.

مصفوفة $\underline{أ}$

$$\begin{bmatrix}١&٢\\٣&٤\\٥&٦\end{bmatrix}$$

٣ × ٢

مصفوفة $\underline{ب}$

$$\begin{bmatrix}٧&٨&٩&١٠\\١١&١٢&١٣&١٤\end{bmatrix}$$

٢ × ٤

٣ صفوف

عمودان

صفّان

٤ أعمدة

متساويان

أبعاد مصفوفة الضرب ٣ × ٤

تكون مصفوفة الضرب معرّفة إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساويًا لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

$\underline{أ}_{م \times ن} \times \underline{ب}_{ن \times ر} = \underline{ج}_{م \times ر}$

مثال (٥)

بفرض أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٨ & -١ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ٨ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix}$

حدّد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب: أ × ب، ب × أ معرّفة أو غير معرّفة.

أوجد رتبة كل مصفوفة ضرب معرّفة.

الحل:

أ × ب
(٣ × ٢) (٢ × ٢)
متساويتان
أ × ب معرّفة ورتبتها ٣ × ٢

ب × أ
(٢ × ٢) (٣ × ٢)
غير متساويتين
ب × أ غير معرّفة

حاول أن تحل

٥ بفرض: أ = $\begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٠ & -١ & ٠ & ٨ \\ ٨ & ١ & -٥ & ٢ \end{bmatrix}$

أ حدّد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب أ × ب، ب × أ معرّفة أو غير معرّفة.

ب أوجد ناتج الضرب المعرّف.

جـ بفرض أن المصفوفة أ هي مصفوفة من الرتبة ٢ × ٣، المصفوفة ب هي مصفوفة من الرتبة ٣ × ٢.

هل أ × ب، ب × أ متساويتان؟ وضّح إجابتك.

لضرب المصفوفات بعض خصائص ضرب الأعداد

خواص ضرب المصفوفات المربعة

إذا كانت أ، ب ، جـ مصفوفات من الرتبة م × م. فإن:

- أ × ب: مصفوفة من الرتبة م × م.
- (أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ) — خاصية التجميع للضرب
- أ × (ب + جـ) = أ × ب + أ × جـ — خاصية التوزيع
- (ب + جـ) × أ = ب × أ + جـ × أ
- $\underline{O}_{م×م}$ × أ = أ × $\underline{O}_{م×م}$ = $\underline{O}_{م×م}$ — خاصية الضرب في الصفر

ملاحظة: عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية.

مثال (مضاد)

$$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} ، \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix}$$

أوجد $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}$، $\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}}$. ماذا تستنتج؟

الحل:

$$\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣١ & ١٦ \\ ٢٧ & ١٢ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٨ & ١٧ \\ ٣٠ & ٢٥ \end{bmatrix}$$

$\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} \neq \underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}}$ ∴ عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية.

تذكر:
يكفي إيجاد مثال مضاد واحد لإثبات عدم صحة النظرية.

مربع المصفوفة Square Matrix

إذا كانت $\underline{\text{أ}}$ مصفوفة مربعة، فإن المصفوفة $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}}$ يرمز إليها بالرمز $\underline{\text{أ}}^{٢}$.

وتقرأ مربع المصفوفة $\underline{\text{أ}}$. وبالمثل $\underline{\text{أ}}^{٣} = \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}}$، $\underline{\text{أ}}^{٤} = \underline{\text{أ}}^{٣} \times \underline{\text{أ}}$، ....

مثال (٦)

إذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

أوجد: $\underline{\text{أ}}^{٢}$ ، $\underline{\text{أ}}^{٣}$

الحل:

$$\underline{\text{أ}}^{٢} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{أ}}^{٣} = \underline{\text{أ}}^{٢} \times \underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل

٦ إذا كانت $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$. أوجد: $\underline{\text{ب}}^{٢}$ ، $\underline{\text{ب}}^{٣}$.

٧–٤ مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)

Identity and Inverse Matrices

سوف تتعلم

- مصفوفة الوحدة للضرب
- محدد المصفوفة
- النظير الضربي (المعكوس الضربي) للمصفوفة
- حل المعادلة المصفوفية باستخدام النظير الضربي.

عمل تعاوني

١ أوجد ناتج ما يلي:

أ $\begin{bmatrix} -٥ & ٦ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

ب $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٥ & ٦ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

جـ $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ١ \\ -٢ & ٠ & ٢ \\ ١ & ٥ & ٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

د $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ١ \\ -٢ & ٠ & ٢ \\ ١ & ٥ & ٣ \end{bmatrix}$

٢ **أنماط**: صف أي أنماط تراها في إجابتك عن السؤال الأوّل.

٣ توقّع ناتج ما يلي، ثم تحقّق من توقّعك.

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -٢ & ٤ \\ ١ & ٢ & ٣ & ٠ \\ -١ & -٢ & ١ & ٤ \\ ٥ & ٢ & ٣ & ٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

٤ أوجد ناتج ما يلي:

أ $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$

ب $\begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

جـ $\begin{bmatrix} ١ & ٥ & -١ \\ ١ & ٠ & -١ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠{,}٢ & -٠{,}٢ & ٠ \\ ٠ & -١ & ١ \end{bmatrix}$

د $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠{,}٢ & -٠{,}٢ & ٠ \\ ٠ & -١ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٥ & -١ \\ ١ & ٠ & -١ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٥ **أنماط**: صف أي أنماط تراها في إجابتك عن السؤال (٤).

٦ **التفكير الناقد**: كيف ترتبط إجاباتك بالنسبة إلى السؤالين (١)، (٤)؟

مصفوفة الوحدة Identity Matrix

المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي ١، وبقية العناصر صفر تسمى **مصفوفة الوحدة** للضرب. ويرمز إليها بـِ و.

$\text{و}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\text{و}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

بفرض أن $\text{م} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{د} \end{bmatrix}$ ، $\text{و} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\text{م} \times \text{و} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \text{أ}\times 1 + \text{ب}\times 0 & \text{أ}\times 0 + \text{ب}\times 1 \\ \text{جـ}\times 1 + \text{د}\times 0 & \text{جـ}\times 0 + \text{د}\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} = \text{م}$

كذلك $\text{و} \times \text{م} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} = \text{م}$

أي أن: $\text{م} \times \text{و} = \text{و} \times \text{م} = \text{م}$

$\text{و} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية.

وبصورة عامة $\text{و}_{\text{ن}\times\text{ن}}$ هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة ن.

النظير الضربي Multiplicative Inverse

إذ كانت م، س مصفوفتين مربعتين من الرتبة نفسها بحيث يكون $\text{م} \times \text{س} = \text{و}$ ، فإن س هي النظير الضربي للمصفوفة م.

ويرمز إليها بـِ م^{-1} .

إذًا $\text{م} \times \text{م}^{-1} = \text{م}^{-1} \times \text{م} = \text{و}$

مثال (١)

أثبت أن $\text{ب} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\text{م} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

الحل:

$\text{م} \times \text{ب} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 2 + 3\times(-1) & 2\times(-3) + 3\times 2 \\ 1\times 2 + 2\times(-1) & 1\times(-3) + 2\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\text{م} \times \text{ب} = \text{و}$ ∴ ب هي النظير الضربي لِـ م .

يمكن القول أن المصفوفة م هي النظير الضربي للمصفوفة ب .

معلومة رياضية:

النظير الضربي للمصفوفة م يسمى أيضًا المصفوفة المعكوسة م^{-1}.

حاول أن تحل

١ (أ) أثبت أن المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2{,}5 & 1 \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي لِـ $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

(ب) في المثال (١)، أثبت أن م هي النظير الضربي لِـ ب.

محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية Determinant of a 2 × 2 Matrix

ترتبط كل مصفوفة مربعة أ بعدد حقيقي يسمى **محدد أ** ويرمز إلى هذا العدد بالرمز | أ | ويقرأ **محدد المصفوفة** أ.
سنقتصر في هذا الدرس على محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثانية.

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{د} \end{bmatrix}$ هو أ د − ب ج

نكتب $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{د} \end{vmatrix} =$ أ د − ب ج

تسمى المصفوفة التي محددها يساوي الصفر **بالمصفوفة المنفردة**

مثال (٢)

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية: $\text{أ} = \begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{bmatrix} \text{س} & ٠ \\ ٠ & \text{س} \end{bmatrix}$

الحل:

$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{vmatrix} = (-٣) \times (-٥) - ٤ \times ٢ = ٧$

$|\text{ب}| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix} = (٢) \times (-٢) - (-٣) \times (٣) = ٥$

$|\text{ج}| = \begin{vmatrix} \text{س} & ٠ \\ ٠ & \text{س} \end{vmatrix} = \text{س}^٢ - ٠ = \text{س}^٢$

حاول أن تحل

٢ أوجد محدد كل من المصفوفات التالية:

أ) $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ب) $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٨ & ٧ \\ ٢ & ١٠ \end{bmatrix}$ ج) $\text{ج} = \begin{bmatrix} \text{ك} & ٣ \\ \text{ك} - ٣ & -٣ \end{bmatrix}$

ليس لكلّ المصفوفات المربّعة نظير ضربي (معكوسات). سوف يساعدك الاختبار التالي على استنتاج ما إذا كانت المصفوفة ٢ × ٢ لها نظير ضربي، وكيف يمكنك إيجاده إن وجد.

خاصية

بفرض أن: $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{bmatrix}$ إذا كان أ د − ب ج ≠ ٠ ، فإن أ لها نظير ضربي $\text{أ}^{-١}$ حيث:

$$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|} \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{ج} & \text{أ} \end{bmatrix}$$

$$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{\text{أ د} - \text{ب ج}} \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{ج} & \text{أ} \end{bmatrix}$$

معلومة رياضية:
المصفوفة التي محددها الصفر ليس لها نظير ضربي وتسمى **مصفوفة منفردة**.

مثال (٣)

إذا كانت المصفوفة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} س & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{bmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س.

الحل:

$|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} س & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{vmatrix} = ٠$ محدد المصفوفة المنفردة

$٦س - ٤٨ = ٠$ تبسيط المحدد

$٦س = ٤٨$

$س = ٨$

حاول أن تحل

٣ إذا كانت المصفوفة $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ -٤ & ٢س \end{bmatrix}$ منفردة، أوجد قيمة س.

مثال (٤)

هل للمصفوفة: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٨ & -٢ \end{bmatrix}$ نظير (معكوس) ضربي؟ في حالة الإيجاب أوجده.

الحل:

$أ د - ب جـ = (-١)(-٢) - (٠)(٨) = ٢$ $\because ٢ \neq ٠$ $\therefore$ $\underline{أ}$ لها نظير ضربي $\underline{أ}^{-١}$

$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ -٨ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ -٤ & -٠,٥ \end{bmatrix}$

حاول أن تحل

٤ (أ) هل $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

(ب) هل $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ -٣ & -٤ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

مثال (٥)

حدّد أي مصفوفة مما يلي لها نظير (معكوس) ضربي، ثم أوجده.

أ $م = \begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$ ب $ن = \begin{bmatrix} ٣ & ٩ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

الحل:

أ $م = \begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$

احسب: أ د − ب جـ

أ د − ب جـ = (−٢)(−٤) − (٢)(٥) = −٢

حيث إن: أ د − ب جـ ≠ ٠، فإن النظير الضربي (المعكوس) لـ م يكون موجودًا.

$م^{-١} = \frac{١}{-٢} \times \begin{bmatrix} -٤ & -٢ \\ -٥ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢,٥ & ١ \end{bmatrix}$

ب $ن = \begin{bmatrix} ٣ & ٩ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

احسب: أ د − ب جـ

أ د − ب جـ = (٣)(٦) − (٩)(٢) = ٠

حيث إن: أ د − ب جـ = ٠، فإن معكوس ن غير موجود.

$ن^{-١}$ غير موجود.

حاول أن تحل

٥ حدّد أي مصفوفة من المصفوفات التالية لها نظير ضربي (معكوس)، ثم أوجده.

أ $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٠,٥ & ٢,٣ \\ ٣ & ٧,٢ \end{bmatrix}$

٧–٥

حل نظام من معادلتين خطيتين
Solving a System of Two Linear Equations

سوف تتعلم

- حل نظام من معادلتين خطيتين
- قاعدة كرامر

دعنا نفكر ونتناقش

يمكن للمعادلة المصفوفية أن تمثّل أي نظام معادلات.

نظام معادلات	المعادلة المصفوفية
$\begin{cases} س + ٢ص = ٥ \\ ٣س + ٥ص = ١٤ \end{cases}$	$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ١٤ \end{bmatrix}$

١ قارن طريقتي كتابة النظام في معادلات المصفوفات. أين تجد معامل س، ص؟ المتغيرات؟ الثوابت؟

كل مصفوفة في معادلة المصفوفات على الشكل $\underline{أ} \times \underline{ع} = \underline{ب}$ لها اسمها:

مصفوفة المعاملات $\underline{أ}$		مصفوفة المتغيرات $\underline{ع}$		مصفوفة الثوابت $\underline{ب}$
$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$	$\times$	$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} ٥ \\ ١٤ \end{bmatrix}$

٢ أ أوجد مصفوفة الضرب: $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$

ب يمكن كتابة مصفوفة الضرب بأنها مساوية للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٥ \\ ١٤ \end{bmatrix}$.

اشرح كيف أن معادلة المصفوفة تمثّل نظام المعادلات.

حل النظام: Solving a System

تستطيع إيجاد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات، ثم الحصول سريعًا على حل النظام من المعادلات الخطية.

١ – الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة المربعة: Solving by Using Inverse Matrix

مثال (١)

حلّ النظام: $\begin{cases} س + ص = ٣ \\ س - ص = ٧ \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

الحل:

اكتب النظام مع معادلة المصفوفات.

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١- \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٧ \end{bmatrix} \quad (١)$$

حيث $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١- \end{bmatrix}$، $\underline{ع} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٧ \end{bmatrix}$

$$|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١- \end{vmatrix} = ١ \times (-١) - ١ \times ١ = -٢ \neq ٠$$

$$\underline{أ}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

وبضرب كل من طرفي المعادلة (١) من جهة اليمين في $\underline{أ}^{-1}$.

نحصل على $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

وبالتالي: س = ٥، ص = −٢

حاول أن تحل

١ حلّ النظام: $\begin{cases} 5س + 3ص = 7 \\ 3س + 2ص = 5 \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

يمكن أيضًا حلّ نظام من معادلتين خطيتين باستخدام المحددات، وتسمى قاعدة كرامر Crammer's Rule.

٢ – استخدام قاعدة كرامر (المحددات) لحل معادلتين خطيتين:

Using Crammer's Rule to Solve Two Linear Equations

لحل نظام معادلتين خطيتين:

أ س + ب ص = ل

جـ س + د ص = م

نكتب: $\Delta = \begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات

$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ل & ب \\ م & د \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات بعد استبدال العمود الزائد بعمود معاملات س

$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} أ & ل \\ جـ & م \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات بعد استبدال العمود الزائد بعمود معاملات ص

فإن $س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta}$ ، $ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta}$ (بشرط أن $\Delta \neq 0$)

وهذه تعرف بقاعدة كرامر Cramer's Rule

مع الملاحظة أن:

١ إذا كان $\Delta \neq ٠$ ، فإن للمعادلتين حلًّا وحيدًا

٢ إذا كان $\Delta = ٠$ ، $\Delta_{\text{س}} \neq ٠$ فالحل ϕ

وسنكتفي بهاتين الحالتين ولا نتعرض للحالة التي كل من Δ ، $\Delta_{\text{س}}$ مساويا الصفر

مثال (٢)

استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام:
$$\begin{cases} ٤\text{س} - ٥\text{ص} + ٧ = ٠ \\ ٣\text{ص} - ٦\text{س} + ٣ = ٠ \end{cases}$$

الحل:

نكتب أولًا النظام بالطريقة القياسية:
$$\begin{cases} ٤\text{س} - ٥\text{ص} = -٧ \\ -٦\text{س} + ٣\text{ص} = -٣ \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & -٥ \\ -٦ & ٣ \end{vmatrix} = -١٨$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} -٧ & -٥ \\ -٣ & ٣ \end{vmatrix} = -٣٦$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٤ & -٧ \\ -٦ & -٣ \end{vmatrix} = -٥٤$$

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-٣٦}{-١٨} = ٢$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-٥٤}{-١٨} = ٣$$

حاول أن تحل

٢ استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام:
$$\begin{cases} ٣\text{س} + ٢\text{ص} = -٦ \\ -٤\text{س} - ٣\text{ص} - ٧ = ٠ \end{cases}$$

المرشد لحل المسائل

الإحداثيان (س، ص) لنقطة في المستوي هي حل النظام: $\left\{\begin{array}{l} ٢س + ٣ص = ١٣ \\ ٥س + ٧ص = ٣١ \end{array}\right.$.

أوجد إحداثيي هذه النقطة.

كيف فكر مرشد؟

حل المسألة هو الزوج المرتب (س، ص).

يمكنني رسم المستقيمين بيانيًّا وقراءة إحداثيي نقطة التقاطع، ولكن هذا ليس ضروريًّا.

يمكنني استخدام المصفوفات في الحل.

سأعيد كتابة النظام في شكل معادلة مصفوفات.

لإيجاد المصفوفة $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ سوف أضرب طرفي المعادلة في النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}$.

والآن، بما أنني حصلت على النظير الضربي فسوف أضرب.

تذكرت ! يجب أن أضرب من جهة اليمين، لأن عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية.

سأعيد كتابة معادلة المصفوفات، ثم أضرب. هذا يعني أن: س = ٢، ص = ٣.

وماذا كتب؟

$$\left\{\begin{array}{l} ٢س + ٣ص = ١٣ \\ ٥س + ٧ص = ٣١ \end{array}\right.$$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٣ \\ ٣١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}^{-١} = \frac{١}{٢ \times ٧ - ٥ \times ٣}\begin{bmatrix} ٧ & -٣ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$= -١\begin{bmatrix} ٧ & -٣ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -٧ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٣ \\ ٣١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٧ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}$$

٢ × ١ ٢ × ٢

لا يمكن أن أضرب

$$\begin{bmatrix} -٧ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١٣ \\ ٣١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-٧) \times ١٣ + ٣ \times ٣١ \\ ٥ \times ١٣ + (-٢) \times ٣١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$$

إحداثيا نقطة التقاطع هما (٢، ٣)

مسألة إضافية

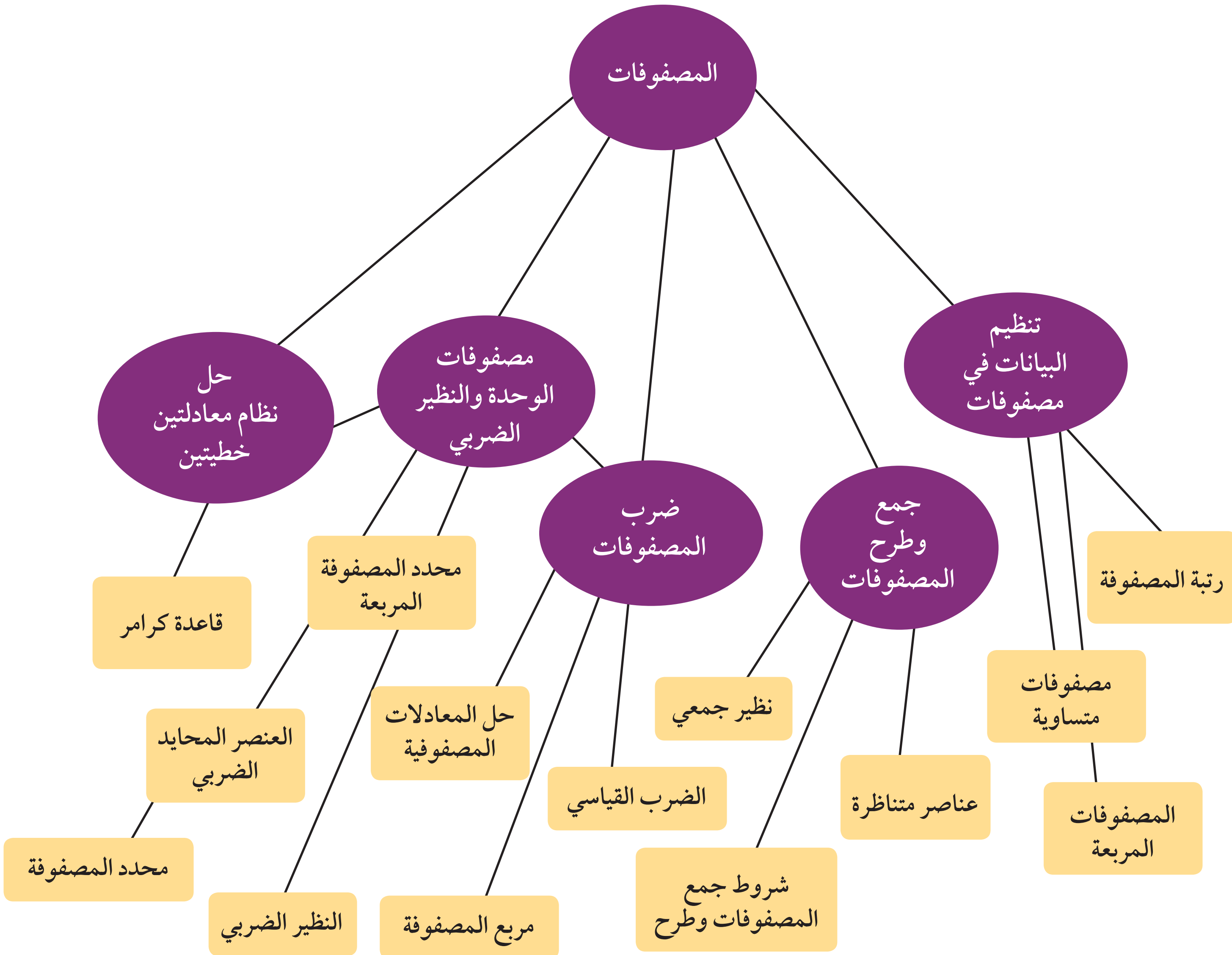
١ إحداثيا نقطة في المستوي هما حل النظام: $\left\{\begin{array}{l} ١٢س + ١٣ص = ١٤ \\ ٥س + ٧ص = ٩ \end{array}\right.$
استخدم المصفوفات لحل النظام وإيجاد إحداثيي هذه النقطة.

٢ ما المشاكل التي ستعترض مرشدًا

أ إذا لم يكن للنظام حلول؟

ب إذا كان للنظام عدد غير منته من الحلول؟

مخطط تنظيمي للوحدة السابعة



ملخص

- المصفوفة عبارة عن تنظيم من الأعداد على شكل مستطيل، ترتب فيه الأعداد في صفوف وأعمدة وتكتب مثلًا: $\underline{\text{أ}}$.
- يحدّد أي عنصر في المصفوفة بدلالة رقمي الصف والعمود الواقع فيهما.
- تكون المصفوفتان متساويتين إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية.
- تحصل على مصفوفة الجمع بجمع العناصر المتناظرة، كما ويمكنك أيضًا طرح المصفوفات عن طريق طرح العناصر المتناظرة.
- العناصر المتناظرة في المصفوفات هي العناصر التي لها الرتبة نفسها في كلّ مصفوفة.
- المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار تسمى مصفوفة صفرية.
- المصفوفة $-\underline{\text{أ}}$ هي النظير الجمعي للمصفوفة $\underline{\text{أ}}$.
- خواص جمع المصفوفات: $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}} = \underline{\text{ب}} + \underline{\text{أ}}$

$$\underline{\text{أ}} + (\underline{\text{ب}} + \underline{\text{جـ}}) = (\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}}) + \underline{\text{جـ}}$$

$$\underline{\text{٠}} + \underline{\text{أ}} = \underline{\text{أ}} + \underline{\text{٠}} = \underline{\text{أ}}$$

$$\underline{\text{أ}} + (-\underline{\text{أ}}) = \underline{\text{٠}}$$

- عند ضرب مصفوفة في عدد قياسي، نضرب كل عنصر من المصفوفة في هذا العدد.
- تكون مصفوفة الضرب معرّفة، إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساويًا لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

$$\underline{\text{أ}}_{\text{م}\times\text{ن}} \times \underline{\text{ب}}_{\text{ن}\times\text{ر}} = \underline{\text{جـ}}_{\text{م}\times\text{ر}}.$$

- لكي تقوم بعملية ضرب المصفوفات، اضرب عناصر كل صف من المصفوفة الأولى في عناصر كل عمود من المصفوفة الثانية. أوجد ناتج كل ضرب، ثم اجمع نواتج الضرب.
- إذا كانت $\underline{\text{أ}}$ من الرتبة م × ن ، $\underline{\text{ب}}$ من الرتبة ن × ر، فإن رتبة المصفوفة $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}$ هي م × ر.
- خصائص ضرب المصفوفات: $(\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}) \times \underline{\text{جـ}} = \underline{\text{أ}} \times (\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{جـ}})$

$$\underline{\text{أ}} \times (\underline{\text{ب}} + \underline{\text{جـ}}) = \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} + \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{جـ}}$$

$$(\underline{\text{ب}} + \underline{\text{جـ}}) \times \underline{\text{أ}} = \underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}} + \underline{\text{جـ}} \times \underline{\text{أ}}$$

- المصفوفة المربعة هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.
- المصفوفة المربعة ن × ن التي عناصر قطرها الرئيسي هي ١ وبقية العناصر هي الصفر، تسمى مصفوفة الوحدة للضرب وتكتب $\underline{\text{و}}$.
- مصفوفة الوحدة هي مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي ١ وبقية العناصر صفر.

– مصفوفة النظير (المعكوس) الضربي للمصفوفة المربعة $\underline{أ}$، تكتب $\underline{أ}^{-1}$ ويكون:

$\underline{أ}^{-1} \times \underline{أ} = \underline{و}$، $\underline{أ} \times \underline{أ}^{-1} = \underline{و}$، وتسمى النظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ}$.

– تقترن كل مصفوفة مربعة $\underline{أ}$ بعدد حقيقي يسمى «محدد» ويرمز إليه بالرمز $|\underline{أ}|$ ويقرأ محدد المصفوفة $\underline{أ}$. وإذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$

فإن $|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{vmatrix} =$ أد – ب جـ

$$\underline{أ}^{-1} = \frac{1}{\text{أد} - \text{ب جـ}} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$$ حيث أد – ب جـ $\neq$ ٠

– في المصفوفة $\begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$، إذاكان أ د – ب جـ = ٠. تسمى المصفوفة منفردة وليس لها نظير ضربي.

– حلّ نظام من معادلتين خطيتين هو زوج مرتب يحقق المعادلتين معًا.

– يمكن حلّ نظام من معادلتين خطيتين باستخدام النظير الضربي للمصفوفة أو باستخدام المحددات (قاعدة كرامر).

الوحدة الثامنة

حساب المثلثات (٢)
Trigonometry (2)

مشروع الوحدة: موجة المستقبل

١ مقدمة المشروع: يحتوي مد وجزر المحيط على كمّ هائل من الطاقة. استخدمَتْ هذه الطاقة خلال القرون الغابرة لإدارة الطواحين. أما في العقود الأخيرة فقد اكتشفت الشركات كيفية تسخير هذه الطاقة لتوليد الكهرباء. تتغير قوة المد والجزر بدرجة عالية ولكن بطريقة متوقّعة ومتكررة مما سهل الاستفادة منها.

يجب إجراء دراسة دقيقة لحركة المد والجزر لتحديد مكان وضع المحرّكات، بغية (الهدف) الاستفادة القصوى من الطاقة المولدة. يبنى السّد عادة حيث يوجد أكبر فرق بين المد والجزر. تتولد الطاقة من دخول الماء وخروجه من خلال السد. يتمُّ استخدام مصادر أخرى للطاقة لدعم تلك المتولّدة من حركة المد والجزر عندما تخف هذه الحركة.

٢ الأهداف: دراسة حول الطاقة المتولدة من حركة المد والجزر، وإمكانية الاستفادة منها في توليد الطاقة الكهربائية.

٣ اللوازمُ: أوراق مليمترية، آلة حاسبة بيانية.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ يسجل يوميًّا في مواقع معيّنة من العالم ارتفاع المياه فوق مستوى معين، يُسمى متوسط المياه المنخفضة **Low Water Mean**. يُبيِّن الجدولان المرفقان المعلومات المسجلة في موقعين. قدّر فترة ومدى الدالة التي تنمذج دورة المد والجزر في كل موقع.

الموقع الأول	
الوقت	ارتفاع المياه
١١:٣٠ ق.ظ	١٨ سم
٥:٤٢ ب.ظ	١٤٦ سم
١١:٥٥ ب.ظ	١٨ سم
٦:٠٧ ق.ظ	١٤٦ سم

الموقع الثاني	
الوقت	ارتفاع أو انخفاض المياه
٤:٤٦ ب.ظ	−٧٣ سم
١٠:٥٩ ب.ظ	١٠١ سم
٥:١١ ق.ظ	−٧٣ سم
١١:٢٤ ق.ظ	١٠١ سم

ب يتأثر المد والجزر بمواقع الشمس والقمر، يحدث أصغر أو أكبر مد وجزر عندما يكون القمر هلالًا أو بدرًا. ابحث عن ترابط موقع القمر وقوة المد والجزر، وارسم تمثيلًا بيانيًّا يُبيِّن تحولات المد والجزر بدلالة الوقت خلال شهر قمري معين.

جـ كيف يمكن تفسير عدم ثبات الطاقة المتولدة من حركة المد والجزر؟

د أوجد بعض المناطق على الكرة الأرضية حيث يمكن إقامة سدود للاستفادة من حركة المدّ والجزر.

٥ التقرير: مرتكزًا على الأبحاث التي قمت بها، أُكتب مقالًا صغيرًا تبين فيه مزايا وعيوب هذه الطاقة. هل تعتقد أنه يمكن تشكيل مصدر عمليّ للطاقة الكهربائية في المستقبل؟

دروس الوحدة

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)	العلاقات بين الدوال المثلثية (١)	العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)
٨-١	٨-٢	٨-٣

الوحدة الثامنة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت كيفية استخدام النسب المثلثية.
- تعلمت كيفية استخدام نظرية فيثاغورث.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تتعرف دائرة الوحدة.
- سوف توجد إحداثيات النقطة على دائرة الوحدة لتستخدمها في إيجاد قيم الدوال المثلثية.
- سوف توجد العلاقة بين الدوال المثلثية لزاوية حادة لحل المعادلات المثلثية.
- سوف تقوم بتبسيط عبارات جبرية تحتوي على دوال مثلثية.
- سوف توجد العلاقة بين:

– جا$^2\theta$، جتا$^2\theta$ لأي زاوية θ.

– ظا$^2\theta$ وقا$^2\theta$ لأي زاوية θ.

– ظتا$^2\theta$ وقتا$^2\theta$ لأي زاويةθ.

- سوف تبسط عبارات تتضمن دوالّ مثلثية وتبرهن صحة متطابقات مثلثية.

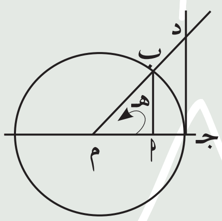
المصطلحات الأساسية

دائرة الوحدة – دوال مثلثية – إشارات الدوال المثلثية – إشارات مقلوب دالة مثلثية – الربع الأول – الربع الثاني – الربع الثالث – الربع الرابع – زاوية الإسناد – متطابقات.

أضف إلى معلوماتك

أُطلق اسم جيب (**sin**) على دالة الجيب (**sin function**) نتيجة عدم وضوح حصل في القرون الوسطى. جاءت هذه التّسمية من كلمة سنسكريتية (**Sanskrit**) وهي «جيفا» (**Jiva**) وتعني الوتر. وقد استخدمت أولًا في الهند مع «أريابتا» (**Araybheta**) سنة ٥١٠ م. وكانت تعني نصف وتر ولكن تم اختصارها، ونقلت إلى اللغة العربية تحت اسم «جيبا» (**jiba**) وهي مشابهة لكلمة «جيب» (**jaib**) وتعني الصدر (أو التجويف). أما في الوقت الحاضر فكلمة جيب في اللغة العربية هي مرادفة لكلمة (**sin**).

وجد المترجمون عند نقل الناتج الفكري العربي إلى اللاتينية أنّ كلمة جيب (**sinus**) تعني أيضًا الصدر (أو التجويف) ومن كلمة (**sinus**) حصلنا على كلمة (**sin**) جيب، أمّا كلمة ظل (**tangent**) فهي تعود إلى «توماس فينك» (**Thomas Finck**) عام ١٥٨٣، التي يمكن فهمها بالنظر إلى الرسم:



القطعة المستقيمة $\overline{\text{دجـ}}$ هي مماسة للدائرة في النقطة جـ. لنأخذ م ب = م جـ = ١ فيكون ظاهـ = $\frac{\text{دجـ}}{\text{م جـ}}$ = $\frac{\text{دجـ}}{١}$ = دجـ، كما وعرفت **tangent** قديمًا بعبارة «**umbra versa**» وتعني الظل المدار. تستخدم دائرة الوحدة في حل تمارين تتعلق بالدوال المثلثية.

٨–١

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)

The Unit Circle in the Coordinate Plane and Trigonometric Functions (Circular Functions)

عمل تعاوني

استخدم الفرجار وارسم دائرة د طول نصف قطرها ١ (وحدة قياس) ومركزها نقطة الأصل للمحورين المتعامدين في المستوى الإحداثي. استخدم منقلة وارسم زاوية موجهة في وضع قياسي موجبة قياسها ٣٠°.

يقطع الضلع النهائي الدائرة (في الربع الأول) في النقطة م$_١$ (س$_١$، ص$_١$).

١ ما الطرق التي يمكنك استخدامها لإيجاد إحداثيات م$_١$؟ (بدون استخدام آلة حاسبة)

٢ استخدم إحدى هذه الطرق وأوجد قيم س$_١$، ص$_١$.
اكتب هذه القيم على شكل كسور عشرية.

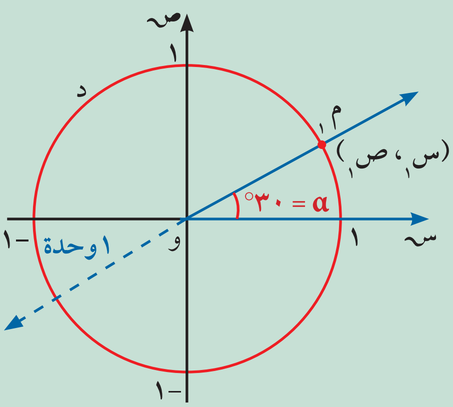
٣ استخدم آلة حاسبة لإيجاد: جتا ٣٠°، جا ٣٠°.
قارن هذه القيم بما وجدته في السؤال (٢).

٤ أ كرر الخطوات أعلاه مستخدمًا زاوية قياسها ٤٥°. ما إحداثيات النقطة الجديدة م$_٢$؟

ب ضع تخمينًا. ما العلاقة بين إحداثيات النقطة م على الدائرة التي رسمتها وقيم جيب تمام وجيب الزاوية في الوضع القياسي والتي يمر ضلعها النهائي في م؟

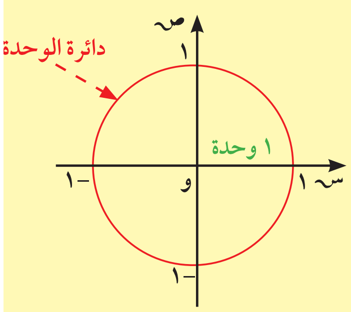
سوف تتعلم

- دائرة الوحدة
- النقطة المثلثية
- الدوال المثلثية (الدائرية)
- إشارات الدوال المثلثية
- زاوية الإسناد



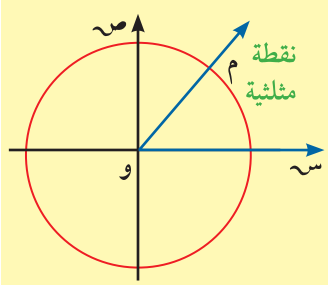
دائرة الوحدة Unit Circle

هي دائرة مركزها نقطة الأصل و، وطول نصف قطرها واحد وحدة.



النقطة المثلثية The Triangular Point

هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة.



معلومة مفيدة:
عادة ما يستخدم الحرف اليوناني θ (يلفظ ثيتا) للتعبير عن قياس زاوية.

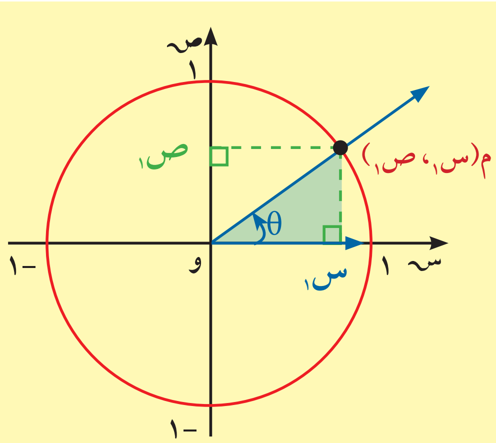
ملاحظة: تكون النقطة (س، ص) نقطة مثلثية إذا وفقط إذا كان س^٢ + ص^٢ = ١

سوف نستخدم الرمز θ لنرمز إلى قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي.

النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ

بفرض أنّ زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ، يقطع ضلعها النهائي دائرة الوحدة في النقطة م (س$_١$، ص$_١$).

في الشكل المقابل المثلث المظلل قائم الزاوية.



تعرف من دراستك السابقة: أن جتاθ = $\frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}$

∵ طول الوتر = نق = ١

∴ جتاθ = $\frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{س_١}{١}$ = س١ **أي أن جتاθ = س١**

كذلك جاθ = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{ص_١}{١}$ = ص١ **أي أن جاθ = ص١**

وبالتالي تكون النسب المثلثية للزاوية θ هي:

جتاθ = س١	جاθ = ص١
ظاθ = $\frac{ص_١}{س_١}$، س١ ≠ ٠	ظتاθ = $\frac{س_١}{ص_١}$، ص١ ≠ ٠
قاθ = $\frac{١}{س_١}$، س١ ≠ ٠	قتاθ = $\frac{١}{ص_١}$، ص١ ≠ ٠

معلومة مفيدة:

عندما نقول الزاوية θ أو α أو ... نقصد الزاوية التي قياسها θ أو α أو ...

مثال (١)

باستخدام دائرة الوحدة أوجد جا ٦٠°، جتا ٦٠°.

الحل:

نرسم دائرة الوحدة، ونرسم الزاوية الموجهة التي قياسها ٦٠° في الوضع القياسي.

فيكون م و = ١ وحدة طول

نسقط من م عمودًا على المحور السيني وليكن $\overline{\text{م هـ}}$.

∆م هـ و قائم الزاوية هـ.

∵ ق(هـ$\hat{\text{م}}$و) = ٣٠°.

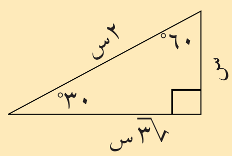
∴ وهـ = $\frac{١}{٢}$ (لأن في المثلث الثلاثيني الستيني طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ طول الوتر)

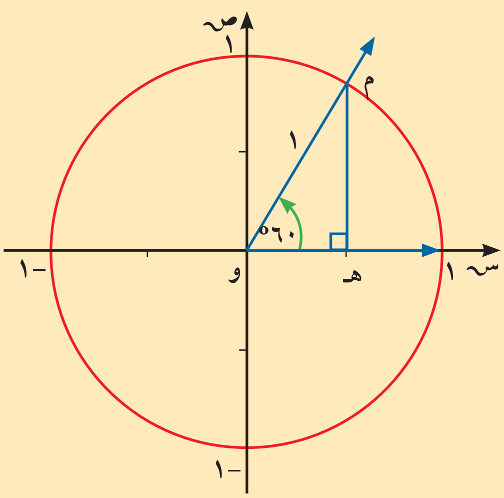
∴ م هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ من نظرية فيثاغورث

إحداثيا النقطة م هما: $\frac{١}{٢}$، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$، جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$.

مساعدة رياضية:





حاول أن تحل

١ على دائرة الوحدة، ارسم زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها ٤٥°. ثم أوجد جتا ٤٥°، جا ٤٥°.

يمكن استخدام مثلث قائم الزاوية لإيجاد جتاθ، جاθ لأي زاوية θ موجهة في الوضع القياسي لا يقع ضلعها النهائي في الربع الأول.

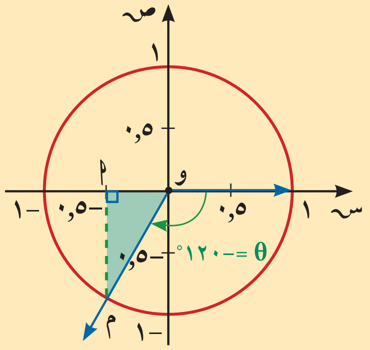
مثال توضيحي

باستخدام دائرة الوحدة أوجد جتا(−١٢٠°)، جا(−١٢٠°).

الحل:

الخطوة ١

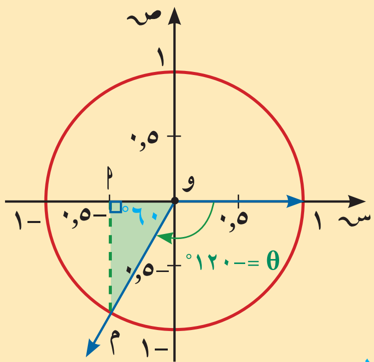
ارسم زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها −١٢٠° ويقطع ضلعها النهائي دائرة الوحدة في النقطة م.



الإحداثي السيني = جتا(−١٢٠°)
الإحداثي الصادي = جا(−١٢٠°)

الخطوة ٢

ارسم مثلثًا قائم الزاوية بحيث ينطبق الوتر على الضلع النهائي للزاوية ثم ضع أحد ضلعيه على محور السينات (بحيث يكون الضلع الآخر موازيًا لمحور الصادات) وليكن المثلث أوم.



المثلث ثلاثيني ستيني

الخطوة ٣

لاحظ أن ق(م$\hat{و}$أ) = ٦٠°   لماذا؟

أوجد طول كل ضلع في المثلث.

طول الوتر $\overline{وم}$ = ١   طول الوتر يساوي طول نصف قطر الدائرة

طول الضلع الأصغر $\overline{وأ}$ = $\frac{١}{٢}$ طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° يساوي نصف طول الوتر

طول الضلع الأكبر $\overline{أم}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ باستخدام نظرية فيثاغورث

بما أن النقطة تقع في الربع الثالث، فكلا الإحداثيين سالبان.

ينطبق الضلع الأصغر على محور السينات ∴ جتا(−١٢٠°) = −$\frac{١}{٢}$ ، جا(−١٢٠°) = −$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$.

حاول أن تحل

٢ مستخدمًا طريقة المثال التوضيحي، أوجد جتا $\frac{٣\pi}{٤}$، جا $\frac{٣\pi}{٤}$.

تدريب

استخدم آلة حاسبة وأكمل الجدول التالي مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين:

قياس الزاوية θ / النسبة	٢٠°	٤٠°	٨٠°	١٣٠°	١٦٠°	٢٢٠°	٢٥٠°	٣١٠°
جا θ (sinθ)								
جتا θ (cosθ)								
ظا θ (tanθ)								

الدوال الدائرية (المثلثية) Circular Functions (Trigonometric Functions)

إذا كانت م(س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية قياسها θ، وتحرك الضلع النهائي لهذه الزاوية في الاتجاه الموجب (الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة)، فإن م تتغير على دائرة الوحدة وبالتالي تتغير معها كل من س، ص ويكون: لكل قيمة تأخذها θ حيث θ ∋ [٠، ٢π[، قيمة واحدة لكل من المتغيرين س، ص حيث س، ص تنتميان إلى [−١، ١].

مما تقدم، نستطيع تعريف الدوال المثلثية (أو الدوال الدائرية) التالية:

تعريف:

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية قياسها θ حيث ٠ ≤ θ < ٢π فإن:

(١) دالة الجيب: د(θ) = جاθ حيث جاθ = ص (الإحداثي الصادي للنقطة المثلثية)

(٢) دالة جيب التمام: د(θ) = جتاθ حيث جتاθ = س (الإحداثي السيني للنقطة المثلثية)

(٣) دالة الظل: د(θ) = ظاθ حيث ظاθ = $\frac{ص}{س}$ ، س ≠ ٠

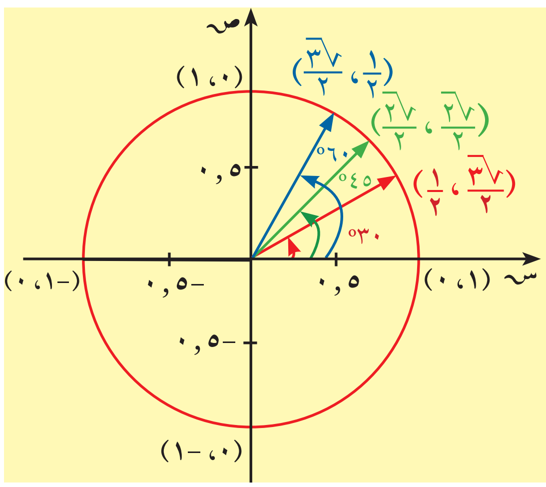
(٤) دالة القاطع: د(θ) = قاθ حيث قاθ = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠

(٥) دالة قاطع التمام: د(θ) = قتاθ حيث قتاθ = $\frac{١}{ص}$ ، ص ≠ ٠

(٦) دالة ظل التمام: د(θ) = ظتاθ حيث ظتاθ = $\frac{س}{ص}$ ، ص ≠ ٠

معلومة رياضية:

- الاتجاه الموجب هو الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة.
- النقطة المثلثية (س، ص) يمكن التعبير عنها بـ (جتاθ، جاθ).



يمكن بسهولة إيجاد قيم الدوال المثلثية لبعض قيم θ الخاصة.

الدالة / قياس الزاوية θ	°٠	°٣٠	°٤٥	°٦٠	°٩٠	°١٨٠	°٢٧٠	°٣٦٠
	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π
جاθ	٠	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	١	٠	−١	٠
جتاθ	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	٠	−١	٠	١
ظاθ	٠	$\frac{\sqrt{٣}}{٣}$	١	$\sqrt{٣}$	غير معرّف	٠	غير معرّف	٠

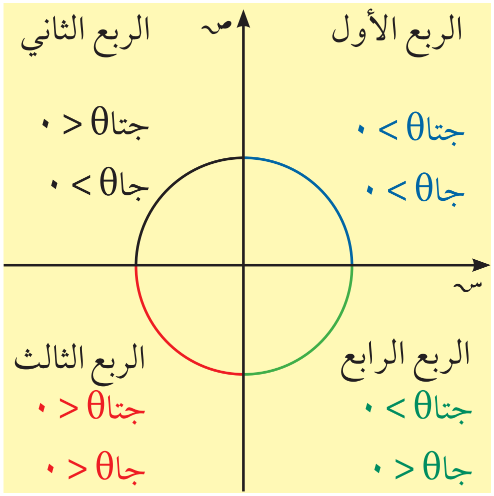
من الشكل: يمكن ملاحظة ما يلي:

إذا كانت θ في الربع الأول فإن: جاθ > ٠، جتاθ > ٠

إذا كانت θ في الربع الثاني فإن: جاθ > ٠، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الثالث فإن: جاθ < ٠، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الرابع فإن: جاθ < ٠، جتاθ > ٠



مثال (٢)

حدّد إشارة جاθ، جتاθ في كل مما يلي:

أ θ = ١٣٥° ب θ = ٧π/٦ ج θ = ٣٠٥°

الحل:

أ ∵ θ = ١٣٥°، ∴ ٩٠° < θ < ١٨٠° أي أن θ تقع في الربع الثاني.

∴ جا θ > ٠، جتا θ < ٠

ب ∵ θ = ٧π/٦ ، ∴ π < θ < ٣π/٢ أي أن θ تقع في الربع الثالث.

∴ جاθ < ٠ ، جتاθ < ٠

ج ∵ θ = ٣٠٥°، ∴ ٢٧٠° < θ < ٣٦٠° أي أن θ تقع في الربع الرابع.

∴ جاθ < ٠ ، جتاθ > ٠

حاول أن تحل

٣ أ إذا كانت ٩٠° < θ < ٢٧٠°. ما هي إشارة جتاθ؟

ب إذا كانت ٠° < θ < π. ما هي إشارة جاθ؟

زاوية الإسناد Reference Angle

تحتاج أحيانًا إلى معرفة قيم النسب المثلثية لزاوية θ ضلعها النهائي موجود في الربع الثاني أو الربع الثالث أو الربع الرابع. يمكن إسناد هذه الزاوية إلى زاوية حادة α، محددة بمحور السينات والضلع النهائي للزاوية θ.

معلومة

الرمز α يُقرأ ألفا.

تعريف زاوية الإسناد:

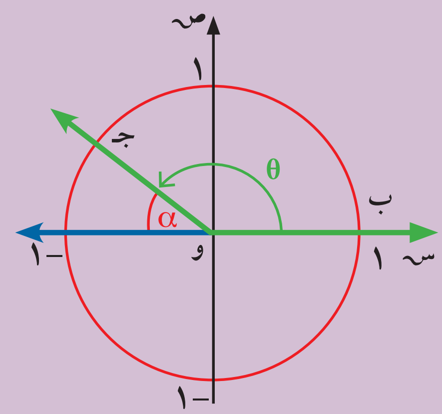
زاوية الإسناد للزاوية الموجهة ($\overleftarrow{\text{وب}}$، $\overleftarrow{\text{وجـ}}$) التي في وضع قياسي هي الزاوية **الحادة** α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات.

فإذا كان α زاوية الإسناد فإن: $٠^\circ < \alpha < ٩٠^\circ$

تذكر

الزاوية الموجهة ب وَ جـ يمكن أن نرمز لها بالرمز ($\overleftarrow{\text{وب}}$، $\overleftarrow{\text{وجـ}}$) حيث $\overleftarrow{\text{وب}}$ الضلع الابتدائي، $\overleftarrow{\text{وجـ}}$ الضلع النهائي.

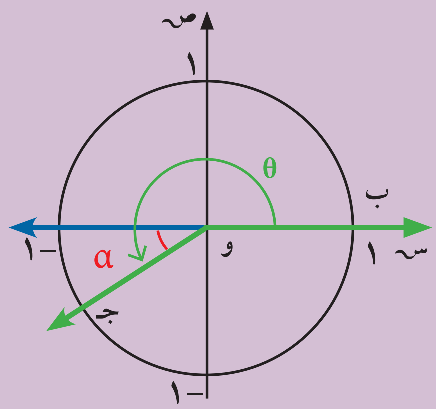
الأشكال التالية توضح الحالات المختلفة لإيجاد زاوية الإسناد:



عندما θ تقع في الربع الثاني

$\alpha^\circ = ١٨٠^\circ - \theta^\circ$

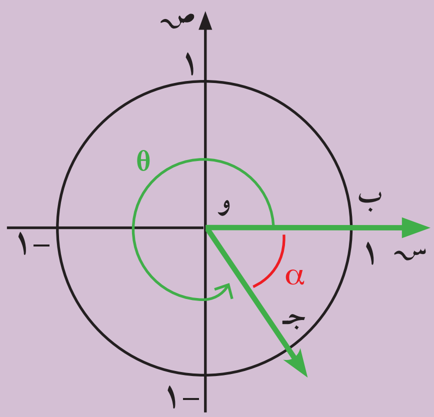
$\alpha^{د} = \pi - \theta^{د}$



عندما θ تقع في الربع الثالث

$\alpha^\circ = \theta^\circ - ١٨٠^\circ$

$\alpha^{د} = \theta^{د} - \pi$



عندما θ تقع في الربع الرابع

$\alpha^\circ = ٣٦٠^\circ - \theta^\circ$

$\alpha^{د} = ٢\pi - \theta^{د}$

مثال (٣)

ارسم كلًّا من الزوايا الموجهة في وضع قياسي، ثم عيّن زاوية الإسناد وأوجد قياسها لكل مما يلي:

أ ١٢٥° ب ٢١٥° جـ $\frac{١١\pi}{٦}$

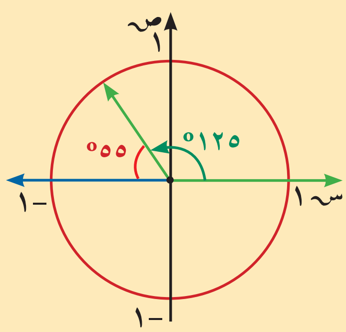
الحل:

أ $\theta = ١٢٥^\circ$ تقع في الربع الثاني

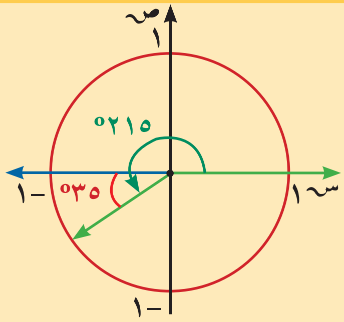
∴ قياس زاوية الإسناد $\alpha^\circ = ١٨٠^\circ - \theta^\circ$

$= ١٨٠^\circ - ١٢٥^\circ$

$= ٥٥^\circ$



ب $\theta = ٢١٥^\circ$ تقع في الربع الثالث

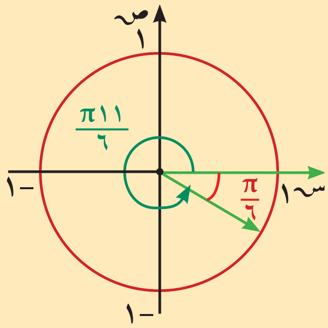


∴ قياس زاوية الإسناد $\alpha = \theta - ١٨٠^\circ$

$= ٢١٥^\circ - ١٨٠^\circ$

$= ٣٥^\circ$

ج $\theta = \frac{١١\pi}{٦}$ تقع في الربع الرابع



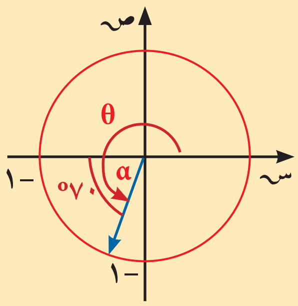
∴ قياس زاوية الإسناد $\alpha = ٢\pi - \theta$

$= ٢\pi - \frac{١١\pi}{٦}$

$= \frac{\pi}{٦}$

حاول أن تحل

٤ يبيّن الشكل المقابل، زاوية الإسناد α° للزاوية θ°. أوجد θ.



٨–٢

العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

Relations Between Trigonometric Functions (1)

عمل تعاوني

١ أ على دائرة الوحدة، عيّن زاوية موجهة موجبة θ في الوضع القياسي ضلعها النهائي في الربع الأول.

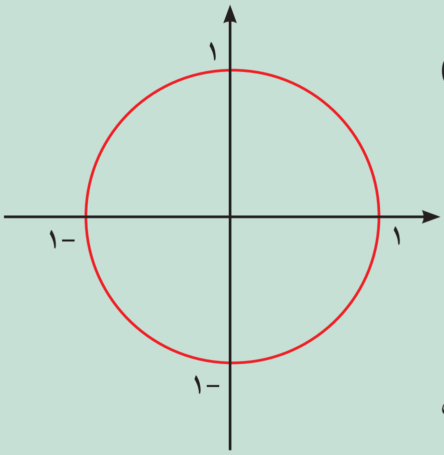
ب أوجد θ.

جـ استخدم آلة حاسبة لإيجاد:

جاθ، جتاθ، جا$(-\theta)$، جتا$(-\theta)$.

٢ كرر الخطوات في ١ مع زاوية موجهة موجبة س ضلعها النهائي في الربع الثاني.

٣ ضع تخمينًا حول العلاقة بين قيم الدوال المثلثية لزاويتين كل منهما المعكوس الجمعي للأخرى.



سوف تتعلم

- العلاقات بين الدوال المثلثية للزواية θ والزوايا: $-\theta$، $\pi - \theta$، $\pi + \theta$ ، $\frac{\pi}{2} - \theta$ ، $\frac{\pi}{2} + \theta$، $\theta + 2$كπ
- حل معادلات مثلثية
- تبسيط تعبيرات جبرية تحتوي على دوال مثلثية

تسمى جاθ، جتاθ، ظاθ النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ وتدعى **النسب المثلثية الأساسية**

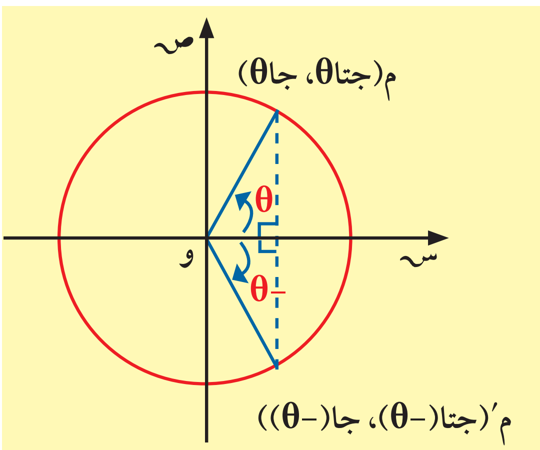
علمًا بأن
$-1 \leq$ جتا$\theta \leq 1$
$-1 \leq$ جا$\theta \leq 1$
ظا$\theta \in$ ح

النسب المثلثية للزاويتين θ، $-\theta$.

النقطة المثلثية م′ هي انعكاس للنقطة المثلثية م في محور السينات حيث م(س، ص) $\xrightarrow{ع_س}$ م′(س، –ص)

ويكون جتا$(-\theta)$ = جتاθ

جا$(-\theta)$ = –جاθ



تذكر

ع$_س$ تعني انعكاس في محور السينات.

قانون:

جتا$(-\theta)$ = جتاθ

جا$(-\theta)$ = –جاθ

وبالتالي ظا$(-\theta)$ = –ظاθ بشرط أن يكون ظاθ معرّف.

مثال (١)

أ إذا كان جتا $\frac{٣\pi}{٨} = \frac{\sqrt{٢ - \sqrt{٢}}}{٢}$ ، فأوجد جتا $\left(-\frac{٣\pi}{٨}\right)$.

ب إذا كان جا ٣٦° ≃ ٠,٥٨٧٨ ، فأوجد جا(–٣٦°).

جـ إذا كان ظا ٤٥° = ١ ، فأوجد ظا(–٤٥°).

الحل:

أ جتا$\left(-\frac{٣\pi}{٨}\right)$ = جتا $\frac{٣\pi}{٨} = \frac{\sqrt{٢ - \sqrt{٢}}}{٢}$.

ب جا(–٣٦°) = –جا ٣٦° ≃ –٠,٥٨٧٨ .

جـ ظا(–٤٥°) = –ظا ٤٥° = –١ .

حاول أن تحل

١ أكمل إذا كان:

أ جا م = ٠,٣ فإن جا(– م) = ...

ب جتا ل = ٠,٣٨ فإن جتا(– ل) = ...

جـ ظا س = ٣,١٤ فإن ظا(– س) = ...

د جتا(– ص) = $\frac{١}{٤}$ فإن جتا ص = ...

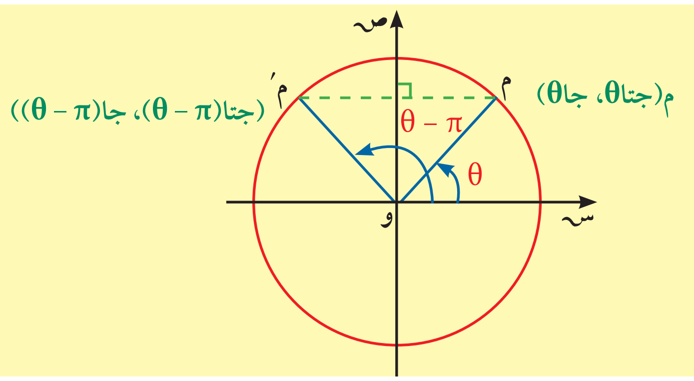
النسب المثلثية للزاويتين θ ، (π – θ).

النقطة المثلثية م′ هي انعكاس للنقطة المثلثية م في محور الصادات.

حيث م(س، ص) $\xrightarrow{ع_{ص}}$ م′(–س، ص)

فيكون: جتا(π – θ) = –جتاθ

جا(π – θ) = جاθ



قانون:

جتا(π – θ) = –جتاθ

جا(π – θ) = جاθ

وبالتالي ظا(π – θ) = –ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

تذكر

$ع_{ص}$ تعني انعكاس في محور الصادات.

مثال (٢)

بدون استخدام الآلة الحاسبة

إذا كان:

أ) جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$ ، أوجد جتا ١٢٠°.

ب) جا $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، أوجد جا $\frac{٣\pi}{٤}$.

ج) ظاθ = $\frac{٣}{٥}$ ، أوجد ظا(π − θ).

الحل:

أ) جتا ١٢٠° = جتا(١٨٠° − ٦٠°) = − جتا ٦٠° = − $\frac{١}{٢}$.

ب) جا $\frac{٣\pi}{٤}$ = جا$\left(\pi - \frac{\pi}{٤}\right)$ = جا $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$.

ج) ظا(π − θ) = − ظاθ = − $\frac{٣}{٥}$.

معلومة مفيدة:

إذا كانت الزاوية α هي زاوية الإسناد للزاوية θ فإن:

جاα = |جاθ|

جتاα = |جتاθ|

ظاα = |ظاθ|

فمثلًا: الزاوية ٦٠° زاوية إسناد للزاوية ١٢٠°.

جتا٦٠° = |جتا ١٢٠°|

حاول أن تحل

٢) بدون استخدام الآلة الحاسبة. إذا كان:

أ) جا٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ، فأوجد جا ١٥٠°.

ب) جتاس = $\frac{٤}{٥}$ ، فأوجد جتا(π − س).

ج) ظا $\frac{\pi}{١٢}$ = ٢ − $\sqrt{٣}$، فأوجد ظا $\frac{١١\pi}{١٢}$.

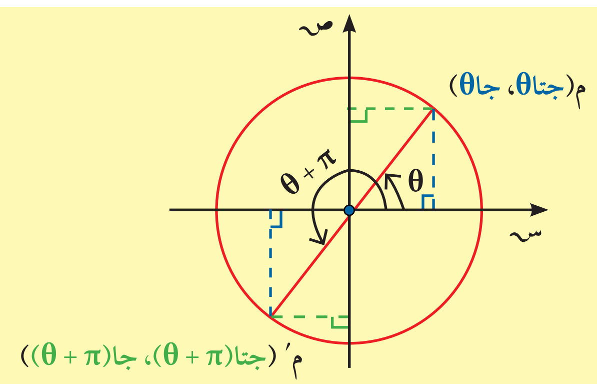
النسب المثلثية للزاويتين θ، (π + θ).

النقطة م′ هي انعكاس للنقطة م في نقطة الأصل.

حيث م(س، ص) $\xrightarrow[\text{نقطة الأصل}]{\text{انعكاس في}}$ م′(−س، −ص)

فيكون: جتا(π + θ) = −جتاθ

جا(π + θ) = −جاθ



قانون:

جتا(π + θ) = −جتاθ

جا(π + θ) = −جاθ

وبالتالي ظا(π + θ) = ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

مثال (٣)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان:

أ جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ، فأوجد جا ٢١٠°.

ب ظا $\frac{\pi}{٨}$ = −١ + $\sqrt{٢}$ ، فأوجد ظا $\frac{٩\pi}{٨}$.

الحل:

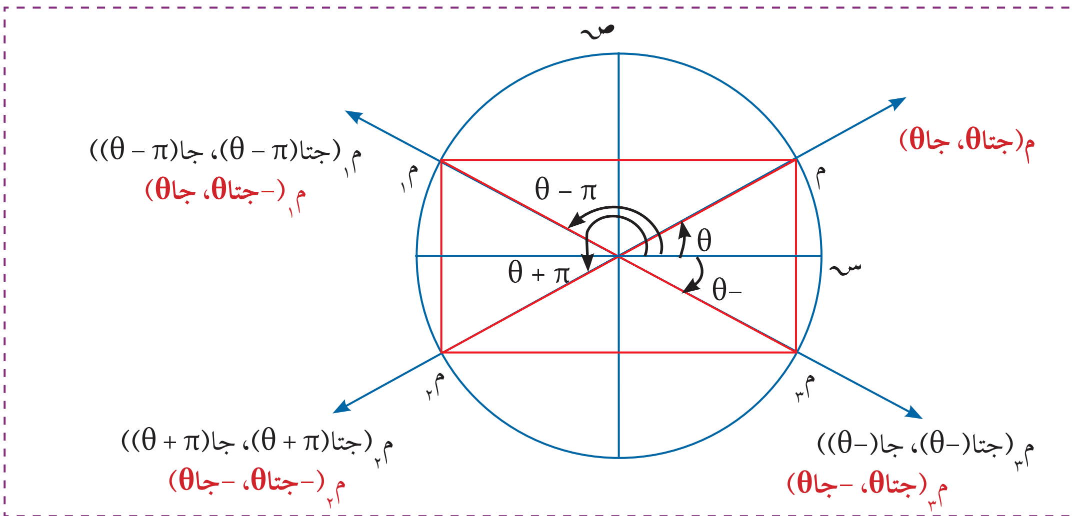
أ جا ٢١٠° = جا(١٨٠° + ٣٠°) = −جا ٣٠° = −$\frac{١}{٢}$.

ب ظا $\frac{٩\pi}{٨}$ = ظا$\left(\pi + \frac{\pi}{٨}\right)$ = ظا $\frac{\pi}{٨}$ = −١ + $\sqrt{٢}$.

حاول أن تحل

٣ بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جتا ٤٠° ≃ ٠,٧٦٦ . فأوجد جتا ٢٢٠°.

الخلاصة:



مثال (٤)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، أوجد:

أ جا ١٥٠°. ب جتا ٢٤٠°. جـ ظا $\frac{٢\pi}{٣}$.

الحل:

أ جا ١٥٠° = جا(١٨٠° − ٣٠°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$.

ب جتا ٢٤٠° = جتا(١٨٠° + ٦٠°) = −جتا ٦٠° = −$\frac{١}{٢}$.

جـ ظا $\frac{٢\pi}{٣}$ = ظا$\left(\pi - \frac{\pi}{٣}\right)$ = −ظا $\frac{\pi}{٣}$ = −$\sqrt{٣}$.

حاول أن تحل

٤ إذا كان جا ٥٦° ≃ ٠,٨٢٩ . بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جا ٢٣٦°.

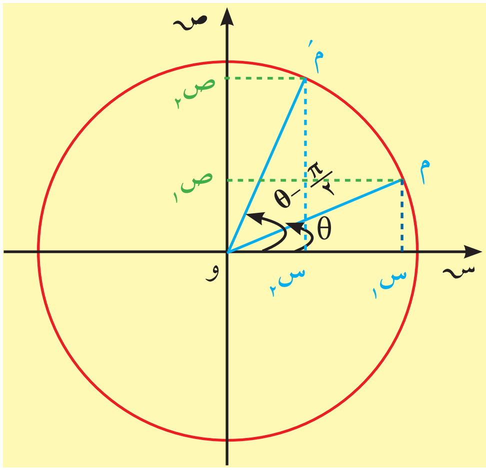
النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

Δوس١م ≅ Δوص٢م′ لماذا؟

استخدم تطابق الأضلاع المتناظرة لإثبات:

جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جاθ

جا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جتاθ



استنتاج: لأي زاويتين متتامتين، فإن جيب إحداهما يساوي جيب تمام الأخرى.

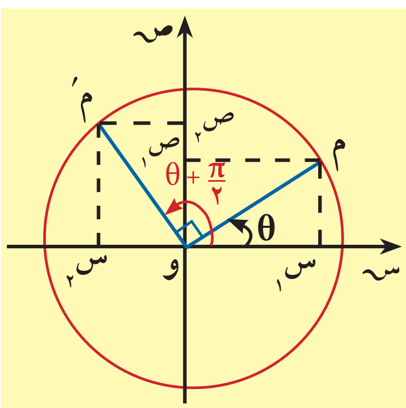
قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$



المثلثان وس١م ≅ وص٢م′ متطابقان. لماذا؟

ما هي إحداثيات كلٍّ من م، م′؟

ما إشارة كلٍّ من جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$، جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$؟

أثبت: جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = −جاθ، جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = جتاθ.

قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = −جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = −ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

الدوال المثلثية (الدائرية) على ح Trigonometric Functions on ℝ

رأينا حتى الآن قيم الدوال الدائرية (المثلثية) على الفترة [٠، ٢π) أو على مجموعة جزئية من هذه الفترة مثل:

[٠، $\frac{\pi}{٢}$) أو ($\frac{\pi}{٢}$، π)، ... على أساس أن الضلع النهائي للزاوية الموجهة في وضعها القياسي يكمل دورة واحدة على مجال التعريف أي عندما θ ∈ [٠، ٢π).

ولكن ماذا يحدث إذا سمحنا للضلع النهائي للزاوية θ بالدوران أكثر من دورة؟

يتبين لنا أنه إذا كانت θ قياس زاوية موجهة في وضع قياسي حيث نقطتها المثلثية (س، ص) سوف ترافقها زوايا موجهة كلًّا منها في وضع قياسي أيضًا وقياساتها (θ + ٢ك π) حيث ك عدد صحيح ولها النقطة المثلثية (س، ص)

ونطلق عليها اسم «زوايا متكافئة»

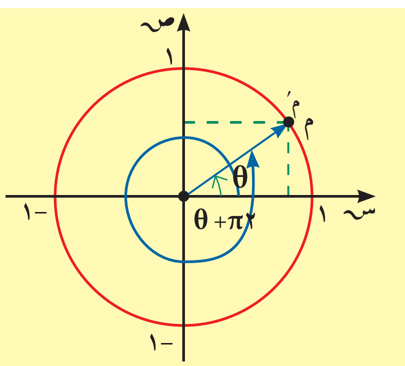
وأصغر قياس غير سالب للزوايا المتكافئة يسمى القياس الأساسي.

فمثلًا: ٣٠°، ٣٠° + ١ × ٣٦٠°، ٣٠° + ٢ × ٣٦٠°، ٣٠° + ٣ × ٣٦٠°، ٣٠° − ٣٦٠°، ٣٠° − ٢ × ٣٦٠°

↓ ٣٠°، ٣٩٠°، ٧٥٠°، ١١١٠°، −٣٣٠°، −٦٩٠°

هي قياسات لزوايا متكافئة مع الزاوية التي قياسها الأساسي ٣٠°.

كما أن: $\frac{\pi}{٣}$، $\frac{٧\pi}{٣}$، $\frac{١٣\pi}{٣}$، $\frac{-٥\pi}{٣}$، $\frac{-١١\pi}{٣}$، هي قياسات لزوايا متكافئة مع الزاوية التي قياسها الأساسي $\frac{\pi}{٣}$.



وهكذا يمكن استنتاج ما يلي:

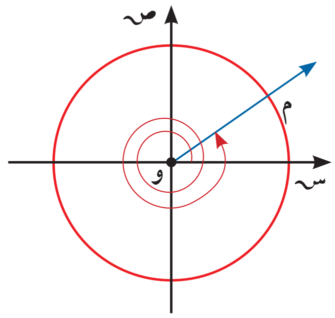
إذا كان ك عددًا صحيحًا فإن:

جا(θ + ٢ك π) = جاθ

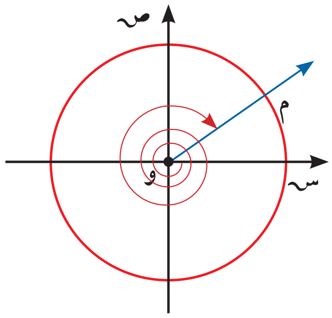
جتا(θ + ٢ك π) = جتاθ

ظا(θ + ك π) = ظاθ حيث ظاθ معرّف

يبين الشكلان أدناه أن القوانين السابقة هي صحيحة أيضًا لأي زاوية قياسها θ:



دوران بالاتجاه الموجب

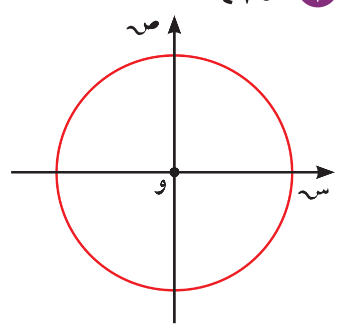


دوران بالاتجاه السالب

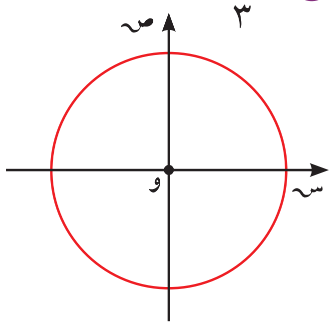
تدريب (١)

ارسم وحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية التي قياسها:

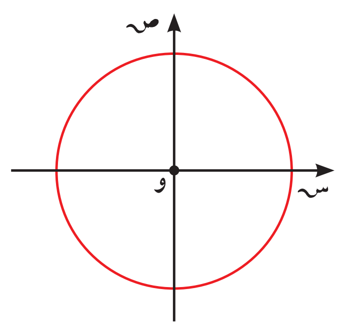
أ ٤٧٥°



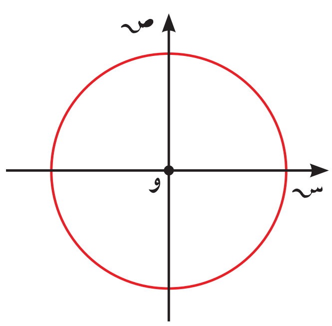
ب $\frac{١٧\pi}{٣}$



ج $\frac{-١٦\pi}{٣}$



د −٨٩٠°



تدريب (٢)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، أكمل:

جا٣٩٠° = جا(٣٠° + ٣٦٠°) = ... = ...

جتا٧٦٥° = ... = ... = ...

ظا$\left(\frac{-١١\pi}{٣}\right)$ = ظا(................) = ... = ...

من العرض السابق يمكننا إعادة تعريف الدوال الدائرية باعتبار المجال هو ح فيكون:

تعريف:

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ فإن:

١ جاθ = ص $\qquad \forall\ \theta \in$ ح

٢ جتاθ = س $\qquad \forall\ \theta \in$ ح

٣ ظاθ = $\frac{ص}{س}$ ، س $\neq$ ٠ $\qquad$ حيث $\theta \in$ ح

٤ قاθ = $\frac{١}{س}$ ، س $\neq$ ٠ $\qquad$ حيث $\theta \in$ ح

٥ قتاθ = $\frac{١}{ص}$ ، ص $\neq$ ٠ $\qquad$ حيث $\theta \in$ ح

٦ ظتاθ = $\frac{س}{ص}$ ، ص $\neq$ ٠ $\qquad$ حيث $\theta \in$ ح

مثال (٥)

بسط التعبير التالي لأبسط صورة:

جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° − س).

الحل:

جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° − س)

= جا س + جتا س − جا س + جتا س

= ٢ جتا س

حاول أن تحل

٥ بسّط كلًّا من التعبيرات التالية لأبسط صورة:

أ جتا(θ + ٩π)

ب جتا$\left(-\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

حل معادلات مثلثية

Solving Trigonometric Equations

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $-\theta$ تقع في الربع الرابع.

تعلمت في هذا الدرس أن جتاθ = جتا$(-\theta)$.

ولكن إذا عرفت جيب التمام لإحدى الزوايا، فهل يمكنك الجزم إن كانت الزاوية تساوي θ أو $-\theta$؟ عليك اعتماد الحلّين.

حل المعادلة: جتا س = جتاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = $-\theta$ + ٢ك π (ك ∈ ص)

لاحظ أن جيب تمام الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع.

مثال (٦)

حل كلًّا من المعادلتين:

أ جتا س = $\frac{١}{٢}$

ب ٢جتا س − $\sqrt{٣}$ = ٠

الحل:

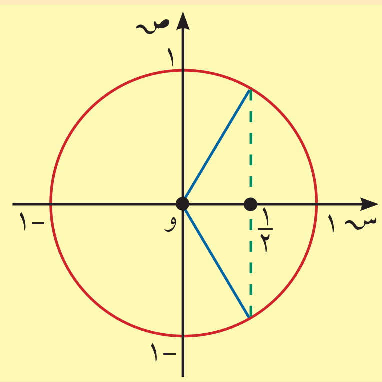
أ جتا س = $\frac{١}{٢}$

جتا س = جتا $\frac{\pi}{٣}$ (نعتمد عادة على أصغر قياس غير سالب)

∵ جتا س > ٠

∴ سَ تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

∴ س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π أو س = $-\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π (ك ∈ ص)



ب ٢جتا س − $\sqrt{٣}$ = ٠

جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا س = جتا $\frac{\pi}{٦}$

∵ جتا س > ٠

∴ سَ تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

∴ س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ك π أو س = $-\frac{\pi}{٦}$ + ٢ك π (ك ∈ ص)

حاول أن تحل

٦ حل المعادلة: $\sqrt{٢}$ جتا س = ١.

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية ($\pi - \theta$) تقع في الربع الثاني.

تعلمت أيضًا أن جاθ = جا($\pi - \theta$).

وبالتالي، إذا كانت جا س = جاθ فإنّ: س = θ + ٢ك π أو س = ($\pi - \theta$) + ٢ك π (ك $\in$ ص)

حل المعادلة جا س = جاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = ($\pi - \theta$) + ٢ك π ، (ك $\in$ ص)

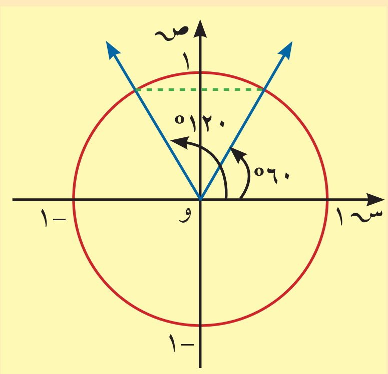
لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني.

مثال (٧)

حل كلًّا من المعادلتين:

أ جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ب ٢ جا س = $\sqrt{٢}$

الحل:



أ جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

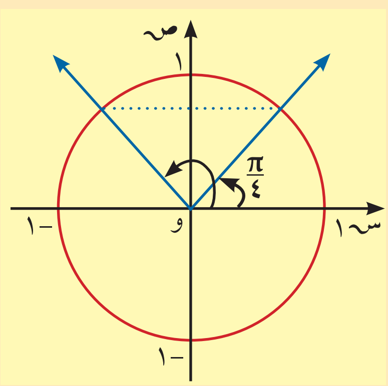
جا س = جا $\frac{\pi}{٣}$

$\because$ جاس > ٠

$\therefore$ سَ تقع في الربع الأول أو الربع الثاني.

س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π أو س = $\left(\pi - \frac{\pi}{٣}\right)$ + ٢ك π (ك $\in$ ص)

س = $\frac{٢\pi}{٣}$ + ٢ك π



ب ٢ جا س = $\sqrt{٢}$

جا س = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

$\therefore$ جا س = جا $\frac{\pi}{٤}$

$\because$ جا س > ٠

$\therefore$ سَ تقع في الربع الأول أو الربع الثاني.

$\therefore$ س = $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ك π أو س = $\left(\pi - \frac{\pi}{٤}\right)$ + ٢ك π (ك $\in$ ص)

س = $\frac{٣\pi}{٤}$ + ٢ك π

حاول أن تحل

٧ حل المعادلة: ٢ جا س − ١ = ٠.

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $(\theta + \pi)$ تقع في الربع الثالث.

الزاويتان θ، $\theta + \pi$ لهما الظل نفسه.

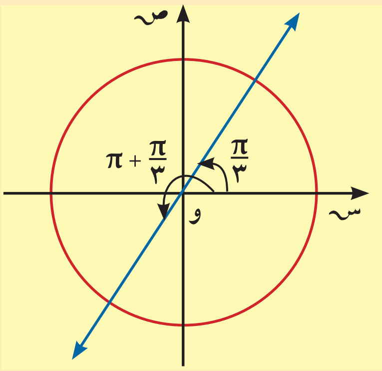
ظاθ = ظا$(\theta + \pi)$

حل المعادلة ظا س = ظاθ هو س = θ + ك π، (ك $\in$ ص)

لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث.

مثال (٨)

حل المعادلة: ظا س = $\sqrt{٣}$.



الحل:

ظا س = $\sqrt{٣}$

ظا س = ظا $\frac{\pi}{٣}$ وحيث ظا س > ٠

$\therefore$ س تقع في الربع الأول أو الربع الثالث.

س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π أو س = $\left(\pi + \frac{\pi}{٣}\right)$ + ٢ك π (ك $\in$ ص)

س = $\frac{٤\pi}{٣}$ + ٢ك π

حاول أن تحل

٨ حل المعادلة: $\sqrt{٣}$ ظا س = ١.

مثال (٩)

حل كلًّا من المعادلتين:

أ جتا$\left(٣س + \frac{\pi}{٦}\right)$ = جتا$\left(س - \frac{\pi}{٣}\right)$

ب جا ٢ س = جتا$\left(س + \frac{\pi}{٤}\right)$

الحل:

أ جتا$\left(٣س + \frac{\pi}{٦}\right)$ = جتا$\left(س - \frac{\pi}{٣}\right)$

٣س + $\frac{\pi}{٦}$ = س − $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π أو ٣س + $\frac{\pi}{٦}$ = −$\left(س - \frac{\pi}{٣}\right)$ + ٢ك π (ك $\in$ ص)

٢س = −$\frac{\pi}{٣}$ − $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ك π أو ٤س = $\frac{\pi}{٣}$ − $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ك π

٢س = $-\frac{\pi}{٢}$ + ٢ك π أو   ٤س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ك π

س = $-\frac{\pi}{٤}$ + ك π أو   س = $\frac{\pi}{٢٤}$ + $\frac{١}{٢}$ ك π

ب جا ٢س = جا$\left(\text{س} + \frac{\pi}{٤}\right)$

٢س = س + $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ك π أو   ٢س = π − $\left(\text{س} + \frac{\pi}{٤}\right)$ + ٢ك π (ك ∈ ص)

٢س − س = $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ك π أو   ٢س + س = π − $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ك π

س = $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ك π أو   ٣س = $\frac{٣\pi}{٤}$ + ٢ك π

س = $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ك π أو   س = $\frac{\pi}{٤}$ + $\frac{٢}{٣}$ ك π

حاول أن تحل

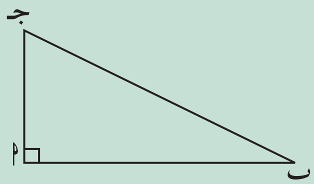
٩ حل كلًّا من المعادلتين:

أ جتا$\left(\text{٣س} - \frac{\pi}{٤}\right)$ = جتا$\left(\text{س} + \frac{\pi}{٣}\right)$ ب جا$\left(\text{٢س} + \frac{\pi}{٥}\right)$ = جا س

العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)
Relations Between Trigonometric Functions (2)

سوف تتعلم
- متطابقات فيثاغورث
- علاقات مثلثية
- تبسيط عبارات تتضمن دوالّ مثلثية
- برهنة صحة بعض المتطابقات المثلثية

عمل تعاوني



١ ﺃ ارسم مثلثًا ﺃب جـ قائم الزاوية ﺃ.

ب أوجد ق(بˆ)، ق(جـˆ) مستخدمًا منقلة.

جـ استخدم آلة حاسبة لإيجاد: جا ب، جتا ب، جا^٢ ب، جا^٢ ب + جتا^٢ ب.

جا جـ، جتا جـ، جا^٢ جـ، جا^٢ جـ + جتا^٢ جـ.

٢ كرر الخطوات أ، ب، جـ مع مثلث آخر ﺃ' ب' جـ' قائم الزاوية ﺃ'.

٣ ضع تخمينًا يبيّن ما حصلت عليه.

في هذا الدرس كلّه، θ زاوية ليست ربعية.

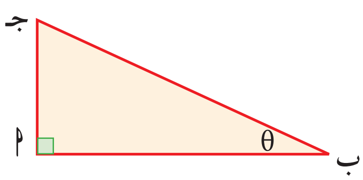
يمكن استخدام المثلث ﺃب جـ قائم الزاوية ﺃ، لإثبات المتطابقات المثلثية الأساسية.

تدريب

أكمل:

$$\text{جا}\,\theta = \frac{\cdots}{\text{الوتر}} \quad ، \quad \text{جتا}\,\theta = \frac{\cdots}{\text{الوتر}}$$

$$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\cdots} = \frac{\frac{\cdots}{\text{الوتر}}}{\frac{\cdots}{\text{الوتر}}} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

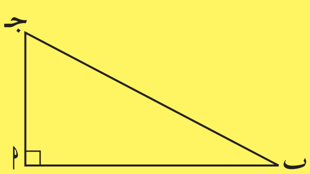


المتطابقات المثلثية الأساسية Basic Trigonometric Identities

$$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} \;،\; \text{ظتا}\,\theta = \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta} \;،\; \text{ظتا}\,\theta = \frac{١}{\text{ظا}\,\theta}$$

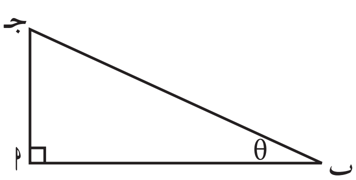
حيث المقام ≠ ٠

$$\text{قا}\,\theta = \frac{١}{\text{جتا}\,\theta} \;،\; \text{قتا}\,\theta = \frac{١}{\text{جا}\,\theta}$$



متطابقات فيثاغورث Pythagorian Identities

في الشكل المقابل △بﺃجـ قائم الزاوية ﺃ:



$$\text{جا}\,\theta = \frac{\text{ﺃجـ}}{\text{ب جـ}} \;،\; \text{جتا}\,\theta = \frac{\text{ﺃب}}{\text{ب جـ}} \;،\; \text{ظا}\,\theta = \frac{\text{ﺃجـ}}{\text{ﺃب}}$$

$$\text{جا}^٢\,\theta + \text{جتا}^٢\,\theta = \left(\frac{\text{ﺃجـ}}{\text{ب جـ}}\right)^٢ + \left(\frac{\text{ﺃب}}{\text{ب جـ}}\right)^٢ = \frac{(\text{ﺃجـ})^٢}{(\text{ب جـ})^٢} + \frac{(\text{ﺃب})^٢}{(\text{ب جـ})^٢}$$

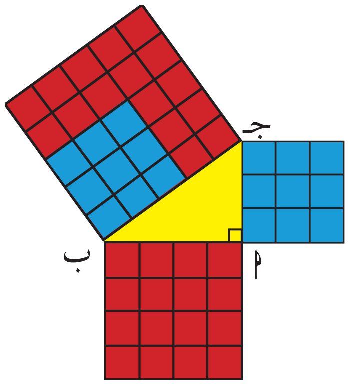
$$= \frac{(\text{ﺃجـ})^٢ + (\text{ﺃب})^٢}{(\text{ب جـ})^٢} \qquad (١)$$

∵ ﺃب جـ قائم الزاوية في ﺃ

$\therefore$ (أجـ)^٢ + (أب)^٢ = (ب جـ)^٢ **نظرية فيثاغورث**

وبالتعويض في (١) نحصل على: جا^٢ θ + جتا^٢ θ = $\frac{(\text{ب جـ})^٢}{(\text{ب جـ})^٢}$ = ١

جا^٢ θ + جتا^٢ θ = ١ تسمى متطابقة فيثاغورث



(أب)^٢ تساوي عدد المربعات الصغيرة الموجودة في المربع الذي ضلعه $\overline{\text{أب}}$ كذلك بالنسبة إلى $\overline{\text{أجـ}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$.

مثال (١)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جتاθ = ٠,٤ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$.

أ) أوجد جاθ.

ب) استنتج ظاθ.

الحل:

أ) باستخدام متطابقة فيثاغورث:

جا^٢ θ + جتا^٢ θ = ١

جا^٢ θ + (٠,٤)^٢ = ١

جا^٢ θ = ١ − (٠,٤)^٢ = ٠,٨٤

جاθ ≃ ٠,٩١٧ أو جاθ ≃ −٠,٩١٧ مرفوض لأن ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$.

ب) ظاθ = $\frac{\text{جا}θ}{\text{جتا}θ}$ ≃ $\frac{٠,٩١٧}{٠,٤}$ ≃ ٢,٢٩.

حاول أن تحل

١) بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جاθ = $\frac{٣}{٥}$ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$ فأوجد جتاθ، ظاθ.

العلاقة بين ظاθ، قاθ Relation Between tan θ, sec θ

إذا قسمنا طرفي متطابقة فيثاغورث على جتا^٢ θ نحصل على:

$\frac{\text{جتا}^٢ θ}{\text{جتا}^٢ θ} + \frac{\text{جا}^٢ θ}{\text{جتا}^٢ θ} = \frac{١}{\text{جتا}^٢ θ}$ حيث جتا θ ≠ ٠

١ + ظا^٢ θ = قا^٢ θ

$\therefore$ **١ + ظا^٢ θ = قا^٢ θ**

معلومة رياضية:

إذا كان ظا θ < ٠

∴ جاθ، جتاθ لهما الإشارة نفسها.

مثال (٢)

بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظاθ = ٢$\sqrt{٢}$، جتاθ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

الحل:

طريقة أولى:

ظاθ = ٢$\sqrt{٢}$

$\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ = ٢$\sqrt{٢}$

∴ جاθ = ٢$\sqrt{٢}$ جتاθ (١)

∵ جا٢ θ + جتا٢ θ = ١

∴ (٢$\sqrt{٢}$ جتاθ)٢ + جتا٢θ = ١ متطابقة فيثاغورث

٨جتا٢ θ + جتا٢ θ = ١ عوّض عن جاθ بـ ٢$\sqrt{٢}$ جتاθ

٩جتا٢ θ = ١

∴ جتا٢ θ = $\frac{١}{٩}$

∴ جتاθ = $\frac{١}{٣}$ (قيمة مرفوضة لأن جتاθ < ٠) أو جتاθ = −$\frac{١}{٣}$

من (١) نحصل على: جاθ = ٢$\sqrt{٢}$ × $\left(-\frac{١}{٣}\right)$

جاθ = $\frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$

طريقة ثانية:

قا٢ θ = ١ + ظا٢ θ

قا٢ θ = ١ + (٢$\sqrt{٢}$)٢

قا٢ θ = ٩

∴ قاθ = ٣ أو قاθ = −٣

∴ $\frac{١}{\text{جتا}\theta}$ = ٣ أو $\frac{١}{\text{جتا}\theta}$ = −٣

∴ جتاθ = $\frac{١}{٣}$ (وهي قيمة مرفوضة لأن جتاθ < ٠) أو جتاθ = −$\frac{١}{٣}$

∵ $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ = ٢$\sqrt{٢}$ ومنه جاθ = $\frac{-١}{٣}$ × ٢$\sqrt{٢}$ أي جاθ = $\frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$

حاول أن تحل

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظاθ = $\frac{٣}{٤}$، جا θ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

مثال (٣)

بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظاθ = $\frac{١٢}{٥}$ ، جاθ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

الحل:

طريقة أولى: نبدأ بتحديد إشارة جتاθ

ظاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

∴ جتاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{ظا}\theta}$ < ٠ لأن جاθ < ٠، ظاθ > ٠

١ + ظا^{٢} θ = قا^{٢} θ

١ + $\left(\frac{١٢}{٥}\right)^{٢}$ = قا^{٢} θ

قا^{٢} θ = ١ + $\frac{١٤٤}{٢٥}$ = $\frac{٢٥ + ١٤٤}{٢٥}$ = $\frac{١٦٩}{٢٥}$

قاθ = $\frac{١٣}{٥}$ قا θ = − $\frac{١٣}{٥}$ مرفوضة

جتاθ = $\frac{١}{\text{قا}\theta}$ = $\frac{٥}{١٣}$

ظاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

جاθ = ظاθ × جتاθ

جاθ = $\frac{١٢}{٥}$ × $\left(\frac{٥}{١٣}\right)$ جاθ = $\frac{١٢}{١٣}$،   جتاθ = $\frac{٥}{١٣}$

طريقة ثانية: نرسم Δأب جـ قائم الزاوية أ حيث أب = ٥ك، أجـ = ١٢ك. (لأن الزاوية θ تقع في الربع الأول)

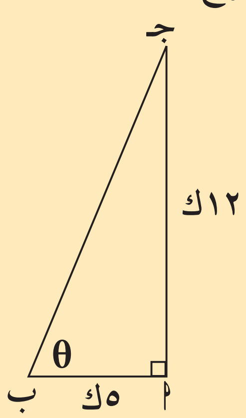
(ب جـ)^{٢} = (أب)^{٢} + (أجـ)^{٢} نظرية فيثاغورث

ب جـ^{٢} = (٥ك)^{٢} + (١٢ك)^{٢} = ٢٥ك^{٢} + ١٤٤ك^{٢} = ١٦٩ك^{٢}

ب جـ = ١٣ك

جاθ = $\frac{١٢\text{ك}}{١٣\text{ك}}$ = $\frac{١٢}{١٣}$ ،

جتاθ = $\frac{٥\text{ك}}{١٣\text{ك}}$ = $\frac{٥}{١٣}$



حاول أن تحل

٣ بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظاθ = $\frac{٢٤}{٧}$ ، جتاθ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

العلاقة بين ظتا θ، قتا θ — Relation Between cot θ, csc θ

$$١ + ظتا^٢ \theta = ١ + \frac{جتا^٢ \theta}{جا^٢ \theta}$$

$$١ + ظتا^٢ \theta = \frac{جا^٢ \theta}{جا^٢ \theta} + \frac{جتا^٢ \theta}{جا^٢ \theta}$$

$$١ + ظتا^٢ \theta = \frac{جا^٢ \theta + جتا^٢ \theta}{جا^٢ \theta}$$ المقام المشترك

$$١ + ظتا^٢ \theta = \frac{١}{جا^٢ \theta} = قتا^٢ \theta$$ $جا^٢ \theta + جتا^٢ \theta = ١$

$\therefore$ $\boxed{١ + ظتا^٢ \theta = قتا^٢ \theta}$

مثال (٤)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جا $\theta = \frac{٣}{٧}$ ، جتا θ > ٠ فأوجد ظتا θ، ظا θ.

الحل:

$$١ + ظتا^٢ \theta = \frac{١}{جا^٢ \theta}$$

$$١ + ظتا^٢ \theta = \frac{١}{\left(\frac{٣}{٧}\right)^٢} = \frac{١}{\frac{٩}{٤٩}} = \frac{٤٩}{٩}$$

$$ظتا^٢ \theta = \frac{٤٩}{٩} - ١ = \frac{٤٠}{٩}$$

$$ظتا \theta = \frac{\sqrt{٤٠}}{٣} \quad \text{أو} \quad ظتا \theta = -\frac{\sqrt{٤٠}}{٣}$$

$\because$ جا θ، جتا θ لهما الإشارة نفسها (موجبة)

$\therefore$ ظتا θ > ٠ وبالتالي ظتا $\theta = \frac{\sqrt{٤٠}}{٣}$

$$ظا \theta = \frac{١}{ظتا \theta} = \frac{١}{\frac{\sqrt{٤٠}}{٣}} = \frac{٣}{\sqrt{٤٠}} \simeq ٠,٤٧٤$$

ملاحظة: يمكن حل المثال (٤) باستخدام متطابقة فيثاغورث: جا^٢ θ + جتا^٢ θ = ١.

أو رسم مثلث قائم الزاوية واستخدام نظرية فيثاغورث. حاول ذلك.

حاول أن تحل

(٤) بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظتا $\theta = \frac{٥}{٨}$، جتا θ > ٠ فأوجد جا θ.

مثال (٥)

أثبت صحة المتطابقة التالية: $جا^3 س + جاس \times جتا^2 س = جاس$.

الحل:

$جا^3 س + جاس \times جتا^2 س = جا س (جا^2 س + جتا^2 س)$

$= جا س \times ١$ $جا^2 س + جتا^2 س = ١$

$= جاس$.

حاول أن تحل

٥ أثبت صحة المتطابقة: $جتا^4 س + جا^2 س \times جتا^2 س = جتا^2 س$.

مثال (٦)

أثبت صحة المتطابقة التالية: $\frac{(قا\theta + ١)(قا\theta - ١)}{جا^2 \theta} = قا^2 \theta$. حيث المقام $\neq ٠$

الحل:

$\frac{(قا\theta + ١)(قا\theta - ١)}{جا^2 \theta} = \frac{قا^2 \theta - ١}{جا^2 \theta}$ $(أ + ب)(أ - ب) = أ^2 - ب^2$

$= \frac{ظا^2 \theta}{جا^2 \theta}$ $١ + ظا^2 \theta = قا^2 \theta$

$= \frac{جا^2 \theta}{جتا^2 \theta} \times \frac{١}{جا^2 \theta}$ $ظا \theta = \frac{جا\theta}{جتا\theta}$

$= \frac{١}{جتا^2 \theta}$

$= قا^2 \theta$

حاول أن تحل

٦ أثبت صحة المتطابقة: $(قا^2 \theta + قتا^2 \theta) - (ظا^2 \theta + ظتا^2 \theta) = ٢$.

مثال (٧) إثرائي

حلّ المعادلة: $\frac{\text{جتا}^{٣}\theta}{\text{جا}\theta}$ = ظتاθ، حيث $\theta \in$ (٠، ٢π).

شرط أن تكون جا$\theta \neq$ ٠

الحل:

$\frac{\text{جتا}^{٣}\theta}{\text{جا}\theta}$ = ظتاθ

$\frac{\text{جتا}^{٣}\theta}{\text{جا}\theta} = \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$

$\because$ جا$\theta \neq$ ٠

$\therefore$ جتا$^{٣}\theta$ = جتاθ

جتا$^{٣}\theta$ − جتاθ = ٠

جتاθ (جتا$^{٢}\theta$ − ١) = ٠

جتاθ (− جا$^{٢}\theta$) = ٠ متطابقة فيثاغورث

جتاθ = ٠ أو جا$^{٢}\theta$ = ٠

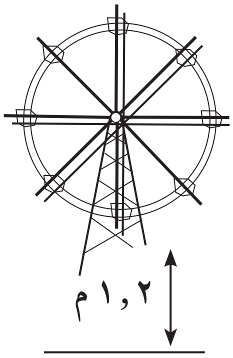
جتاθ = ٠ أو جاθ = ٠ مرفوضة

قيم θ على الفترة (٠، ٢π) التي تحقق جتاθ = ٠ هي $\theta = \frac{\pi}{٢}$ أو $\theta = \frac{٣\pi}{٢}$.

حاول أن تحل

٧ حلّ المعادلة: ٢ جا س جتا س − جتا س = ٠ حيث س $\in$ [٠، ٢π)

المرشد لحل المسائل

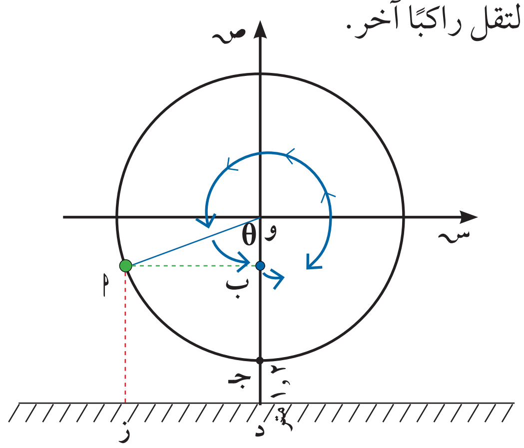


في مدينة الملاهي، ركب سلطان الدوارة.

دارت الدوارة عكس اتجاه دوران عقارب الساعة وتوقفت لتقل راكبًا آخر.

تساءل محمد: ما ارتفاع سلطان عن الأرض؟

كيف فكر محمد؟



بداية، سوف ارسم مخططًا.

تمثل النقطة أ موقع سلطان عند توقف الدوارة.

جـ د = ١,٢ متر (الارتفاع عن الأرض)

زاوية الدوران = ٢π − θ

عليّ إيجاد طول القطعة $\overline{\text{أز}}$.

أز = ب د

سأستخدم ما تعلمته في الوحدة عن النسب المثلثية.

المثلث أب و قائم الزاوية ب

جتا(٢π − θ) = $\frac{\text{وب}}{\text{وأ}}$

جتاθ = $\frac{\text{وب}}{\text{نق}}$

∴ وب = نق × جتاθ

سأستخدم خواص القطع المستقيمة.

ب د = ب جـ + جـ د

ولكن ب جـ = وجـ − وب

∴ ب د = وجـ − وب + جـ د

ب د = نق − نق × جتاθ + جـ د

ب د = نق(١ − جتاθ) + ١,٢

استنتاج محمد: عليّ معرفة طول نصف قطر الدوارة وزاوية الدوران لإيجاد ارتفاع سلطان عن الأرض.

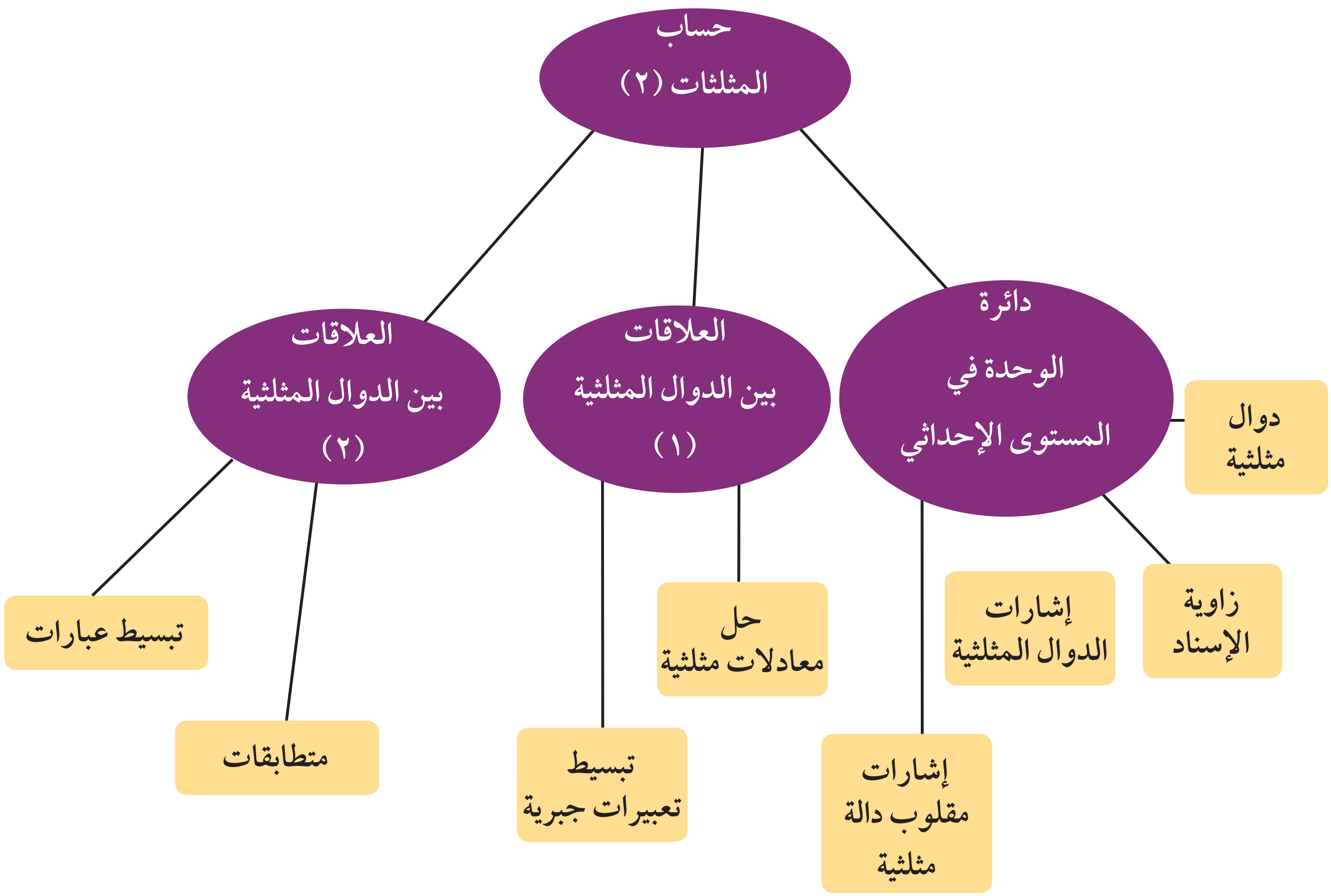
تطبيق

في المسألة أعلاه، أوجد ارتفاع سلطان عن الأرض إذا كان طول نصف قطر الدوارة ٥ أمتار وقياس الزاوية التي يصنعها مقعد سلطان مع المحور الرأسي للدوارة ٣٠°.

مسألة إضافية

ركب سالم دوارة طول نصف قطرها ٦ أمتار وترتفع قاعدتها ١,٥ متر عن الأرض. أوجد الزاوية التي يصنعها مقعد سالم مع المحور الرأسي للدوارة إذا كان سالم على ارتفاع ١١,٧ مترًا.

مخطط تنظيمي للوحدة الثامنة



ملخص

- الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها واحد وحدة تسمى «دائرة الوحدة».

- نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة تسمى «النقطة المثلثية».

- زاوية الإسناد للزاوية الموجهة (و$\overleftarrow{ب}$، و$\overleftarrow{جـ}$) التي في وضع قياسي هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات. ($٠° < \alpha < ٩٠°$).

قاθ = $\frac{١}{\text{جتا}\theta}$ ؛ قتاθ = $\frac{١}{\text{جا}\theta}$ ؛ ظاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ ؛ ظتاθ = $\frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$ المقام ≠ ٠

- دالة الجيب: د(θ) = جاθ حيث جاθ = ص

- دالة جيب التمام: د(θ) = جتاθ حيث جتاθ = س

- دالة الظل: د(θ) = ظاθ حيث ظاθ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ؛ س ≠ ٠

- دالة القاطع: د(θ) = قاθ حيث قاθ = $\frac{١}{\text{س}}$ ؛ س ≠ ٠

- دالة قاطع التمام: د(θ) = قتاθ حيث قتاθ = $\frac{١}{\text{ص}}$ ؛ ص ≠ ٠

- دالة ظل التمام: د(θ) = ظتاθ حيث ظتاθ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ؛ ص ≠ ٠

- في الربع الأول جميع الدوال المثلثية موجبة.

- في الربع الثاني جاθ، قتاθ موجبتان وبقية الدوال سالبة.

- في الربع الثالث ظاθ، ظتاθ موجبتان وبقية الدوال سالبة.

- في الربع الرابع جتاθ، قاθ موجبتان وبقية الدوال سالبة.

- إشارة مقلوب دالة مثلثية هي إشارة الدالة المثلثية الأصلية نفسها.

– العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية:

جا$(-\theta)$ = –جاθ؛ جتا$(-\theta)$ = جتاθ؛ ظا$(-\theta)$ = –ظاθ

جا$(\pi - \theta)$ = جاθ؛ جتا$(\pi - \theta)$ = –جتاθ؛ ظا$(\pi - \theta)$ = –ظاθ

جا$(\pi + \theta)$ = –جاθ؛ جتا$(\pi + \theta)$ = –جتاθ ؛ ظا$(\pi + \theta)$ = ظاθ

جا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جتاθ؛ جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جاθ

جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = جتاθ؛ جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = –جاθ

جا$(\theta + ٢$ك$\pi)$ = جاθ؛ جتا$(\theta + ٢$ك$\pi)$ = جتاθ حيث ك عدد صحيح

جا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٢}\theta$ = ١ تسمى متطابقة فيثاغورث

قا$^{٢}\theta$ = ١ + ظا$^{٢}\theta$ = $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\theta}$ حيث المقام $\neq$ ٠

قتا$^{٢}\theta$ = ١ + ظتا$^{٢}\theta$ = $\frac{١}{\text{جا}^{٢}\theta}$ حيث المقام $\neq$ ٠

الوحدة التاسعة

الهندسة التحليليّة
Analytic Geometry

مشروع الوحدة: اختيار وظيفة

١ مقدمة المشروع: هل لديك عمل ما؟ إذا لم يكن لديك عمل، فما الوظيفة التي تفضلها؟ ما المصاريف المتوقعة؟ ما المبلغ الذي ستتقاضاه؟ كيف يمكنك المقارنة بين وظيفتين أو بين دخلين؟ إن معادلات المستقيم تساعدك على الإجابة عن هذه الأسئلة كلها.

خلال عملكم على هذا المشروع، سوف ترسمون الخطوط المستقيمة وتكتبون المعادلات التي تنمذج مختلف الأعمال أو الوظائف وسوف تستخدمون هذه النماذج لتوقع الدخل.

٢ الهدف: محادثة شخص ما حول أول عمل قام به. اختيار العمل أو الوظيفة المفضلة مع تبرير الاختيار.

٣ اللوازم: أوراق رسم مليمترية وآلة حاسبة.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أوجد قيمة الأجر في الساعة لوظيفتين تفضلهما. ارسم تمثيلًا بيانيًّا بالخطوط تبيّن فيه مدخول كل وظيفة. يكون عدد الساعات بين ٠ و١٠ على المحور الأفقي وقيمة المدخول على المحور الرأسي. على افتراض أنك عملت ٨ ساعات، اشرح كيف يفسر التمثيل البياني فرق المدخول بين الوظيفتين.

على افتراض أنك تنال ٤٠٠ فلس في الساعة لقاء عملك في أحد أفران الحلويات ويحسم من أجرك ١٠٠ فلس ضريبة أسبوعية، إذا كنت تعمل س ساعة خلال ٥ أيام في الأسبوع وتدفع يوميًّا ٢٥٠ فلسًا ثمن وجبة:

أ اكتب معادلة تبيّن فيها ربحك في أسبوع واحد بعد احتساب الضريبة والمصاريف.

ب في هذه الحالة ماذا يمثّل الميل (معامل س)؟ وماذا يمثل التقاطع مع محور الصادات؟

جـ كم ساعة عمل يلزمك كي يساوي ربحك الصافي ١٤ دينارًا و ٦٥٠ فلسًا بعد احتساب الضريبة والمصاريف؟

د حاور رجلًا مسنًّا حول وظيفته. اسأله عن إيجابيات هذه الوظيفة وسلبياتها من حيث الراتب والمصاريف. اكتب معادلة تبيّن فيها دخله الأسبوعي بعد احتساب المصاريف.

٥ التقرير: ضع تقريرًا مفصلًا حول مقارنة دخل كل وظيفة وكيفية رسم التمثيلات البيانية والاستفادة منها للإجابة عن الأسئلة.

دروس الوحدة

المستوى الإحداثي	تقسيم قطعة مستقيمة	ميل الخط المستقيم	معادلة الخط المستقيم	البعد بين نقطة ومستقيم	معادلة الدائرة
٩-١	٩-٢	٩-٣ (أ)	٩-٣(ب)	٩-٤	٩-٥

الوحدة التاسعة

اين انت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت كيف تضع النقاط على المستوى الإحداثي.
- تعلمت كيفية تطبيق نظرية فيثاغورث.
- تعلمت كيف توجد القيم المطلقة والجذور التربيعية.

ماذا سوف تتعلم؟

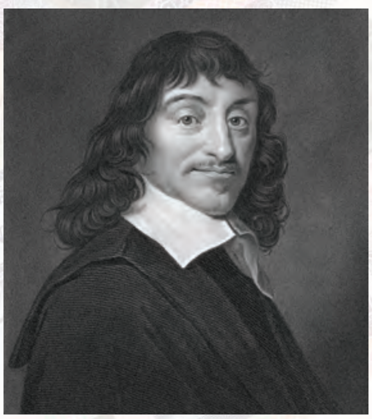
- سوف توجد المسافة بين نقطتين.
- سوف توجد طول قطعة مستقيمة.
- سوف تحدد إحداثيات نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة.
- سوف تحدد إحداثيات نقطة تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل ومن الخارج.
- سوف تقوم بحساب ميل خط مستقيم.
- سوف تقوم برسم خط مستقيم عندما تعرف نقطة منه وتعرف ميله.
- سوف تتعرف العلاقة بين ميل المستقيم وظل الزاوية.
- سوف تكتب معادلة المستقيمات المتوازية أو المتعامدة.
- سوف تتعرف صورة معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل ونقطة أو نقطتين.
- سوف تتعرف البعد بين نقطة ومستقيم.
- سوف تتعرف الدائرة ومعادلتها.
- سوف تتعرف الصورة العامة لمعادلة الدائرة وتوظيفها.
- سوف توجد مركز الدائرة وطول نصف قطرها.
- سوف تكتب معادلة المماس لدائرة.
- سوف تتعرف العلاقة بين دائرتين في المستوي.

أضف إلى معلوماتك

ديكارت والهندسة التحليليَّة

(١٥٩٦ - ١٦٥٠م)

رينيه ديكارت **Descartes** الرياضي والفيلسوف الفرنسي، هو الذي ربط بين العدد والنقطة وهذا ما أنتجَ لنا الهندسة التحليلية، حيث ابتكر النظام الإحداثي المكوَّن من محورين متعامدين متقاطعين (محور السينات ومحور الصادات)، والذي بواسطته يمكن التعبير عن كل نقطة في المستوى بعددين حقيقيين (س، ص). وباستخدام النظام الإحداثي، استطاع ديكارت أن يثبت صحة كل خواصّ الهندسة الإقليديَّة، معبرًا عن المستقيمات والمنحنيات بمعادلات جبرية باعتبارها مسارات لنقطة عامة تتحرك بشروط تحكم العلاقة بين(س، ص).



رينيه ديكارت

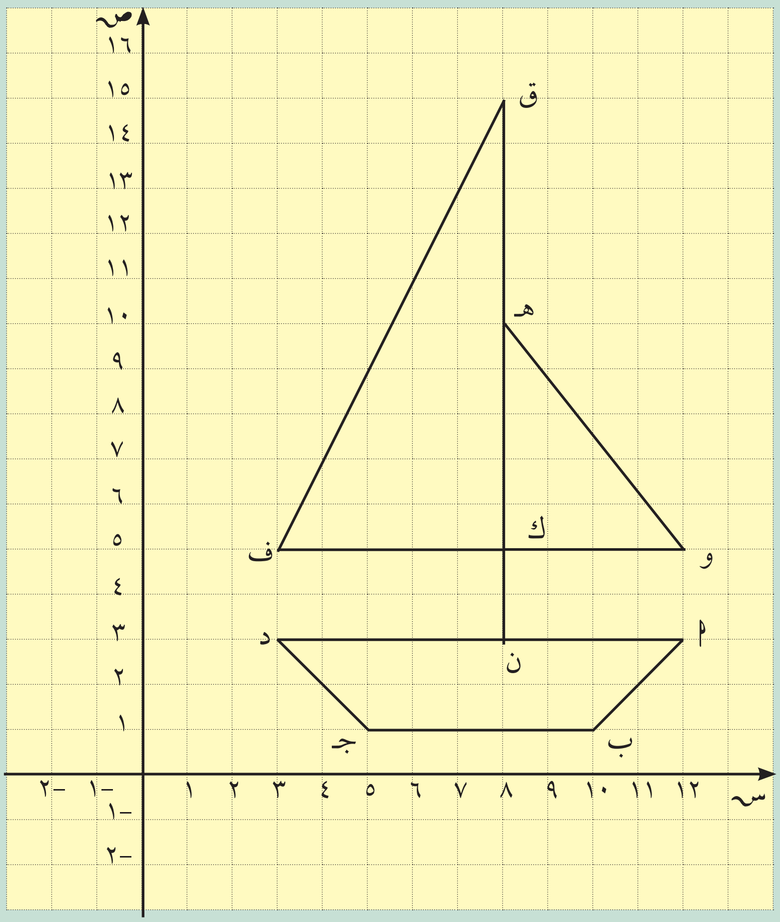
المصطلحات الأساسية

طول القطعة المستقيمة - المسافة بين نقطتين - البعد بين نقطة ومستقيم - نقطة المنتصف - ميل المستقيم - ظل الزاوية - ميلا مستقيمين متوازيين - ميلا مستقيمين متعامدين - معادلة الخط المستقيم - الدائرة - معادلة الدائرة - مركز الدائرة - نصف قطر الدائرة - مماس الدائرة.

٩ – ١

المستوى الإحداثي
Coordinate Plane

سوف تتعلم
- إيجاد المسافة بين نقطتين
- إيجاد إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة



دعنا نفكر ونتناقش
في حصة النشاط الفني قام راشد بتصميم مركب شراعي كما في الشكل.

١ اكتب إحداثيات النقاط المبينة في الرسم.

٢ أوجد طول كل من $\overline{\text{أ د}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$.

٣ قارن الفرق بين الإحداثيات السينية لكل من أ، د من جهة وب، جـ من جهة.

ماذا تلاحظ؟

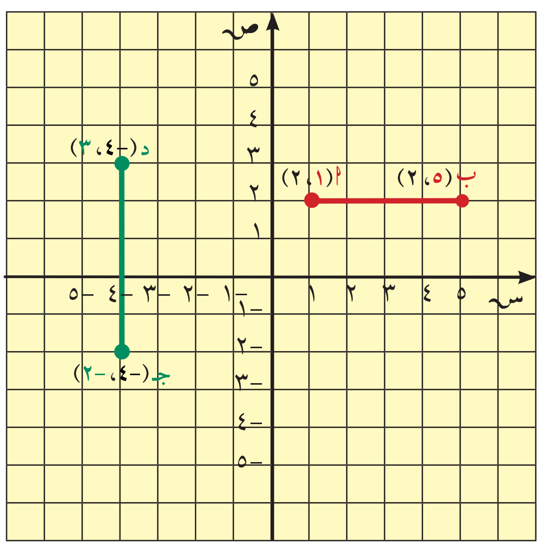
المسافة بين نقطتين
Distance Between Two Points

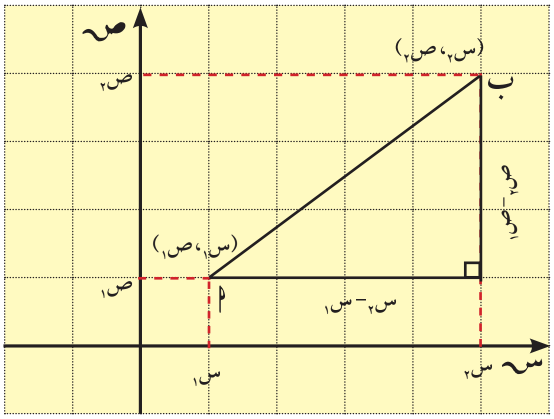
في المخطط إلى اليسار، $\overline{\text{أب}}$ موازية للمحور السيني (قطعة أفقية). يمكنك إيجاد طولها بطرح الإحداثي السيني للنقطة أ من الإحداثي السيني للنقطة ب.

طول $\overline{\text{أب}}$ = |٥ – ١| = ٤ وحدة طول.

وبالطريقة نفسها، يمكنك إيجاد طول $\overline{\text{جـ د}}$ قطعة موازية للمحور الصادي (قطعة رأسية) وذلك بطرح الإحداثي الصادي للنقطة جـ من الإحداثي الصادي للنقطة د.

طول $\overline{\text{جـ د}}$ = |٣ – (–٢)| = ٥ وحدة طول.





أي نقطتين أ (س١، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) ليستا على مستقيم أفقي أو مستقيم رأسي، يمكن تمثيلهما بيانيًّا وصنع مثلث قائم الزاوية (كما هو مبين في الشكل المقابل).

نستخدم نظرية فيثاغورث لإيجاد المسافة بين النقطتين أ ، ب.

(أ ب)٢ = (أ جـ)٢ + (ب جـ)٢ **نظرية فيثاغورث**

(أ ب)٢ = (س٢ − س١)٢ + (ص٢ − ص١)٢ **التعويض**

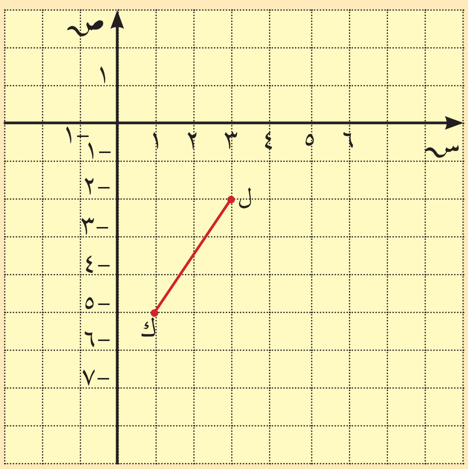
أ ب = √(س٢ − س١)٢ + (ص٢ − ص١)٢ **الجذر التربيعي الأساسي**

قانون:

المسافة بين أي نقطتين أ (س١، ص١)، ب (س٢، ص٢) تساوي √(س٢ − س١)٢ + (ص٢ − ص١)٢

يعطي القانون المسافة الدقيقة بين نقطتين بينما تعطي الآلة الحاسبة إجابة تقريبية، إلّا إذا كانت القيمة تحت علامة الجذر مربعًا كاملًا.

مثال (١)



أوجد المسافة بين ك (١، −٥) ، ل (٣، −٢).

الحل: المسافة = √(س٢ − س١)٢ + (ص٢ − ص١)٢

= √(٣ − ١)٢ + (−٢ − (−٥))٢

= √(٢)٢ + (٣)٢

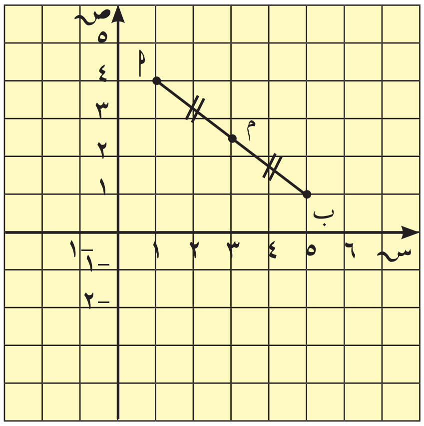
= √١٣ = ٣,٦ وحدة طول

المسافة بين ك، ل تساوي حوالى ٣,٦ وحدات طول.

حاول أن تحل

١ أوجد المسافة بين م(−٢، ١) ، ن(−٧ ، ٤) . قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

نقطة المنتصف Midpoint



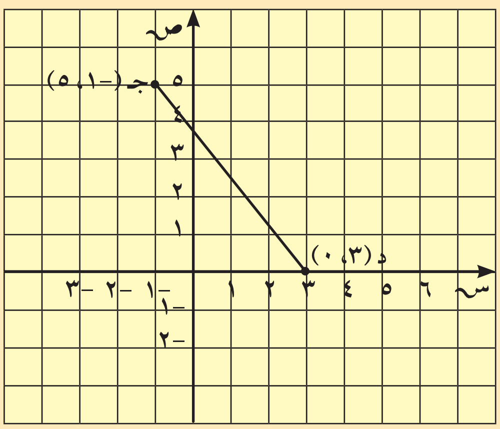
أ، ب نقطتان في المستوى. م نقطة منتصف $\overline{\text{أ ب}}$.

النقطة م تقسم القطعة $\overline{\text{أ ب}}$ إلى قطعتين متطابقتين $\overline{\text{أ م}}$، $\overline{\text{م ب}}$.

قانون:

إذا كانت أ(س١، ص١)، ب(س٢، ص٢)، فإن إحداثيات نقطة المنتصف هي م(س، ص) حيث س $= \frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2}$ ، ص $= \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2}$.

مثال (٢)



في الشكل المقابل أوجد نقطة منتصف $\overline{\text{جـ د}}$ حيث جـ (-١، ٥)، د (٣، ٠).

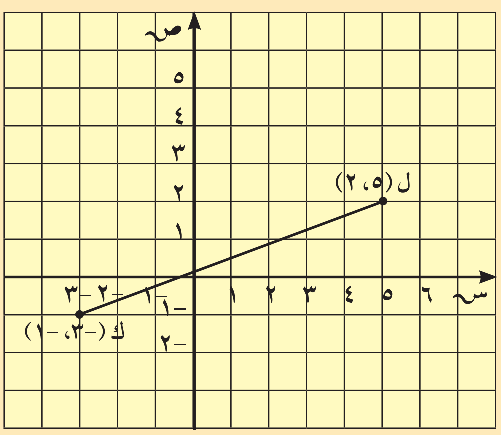
الحل: $\left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2}\right) = \left(\frac{-1 + 3}{2} ، \frac{5 + 0}{2}\right)$

$= \left(\frac{2}{2} ، \frac{5}{2}\right)$

$= (1 ، 2,5)$

نقطة منتصف $\overline{\text{جـ د}}$ هي (١ ، ٢,٥).

حاول أن تحل



٢ في الشكل المقابل، أوجد نقطة منتصف $\overline{\text{ك ل}}$ حيث ك (-٣، -١)، ل (٥، ٢).

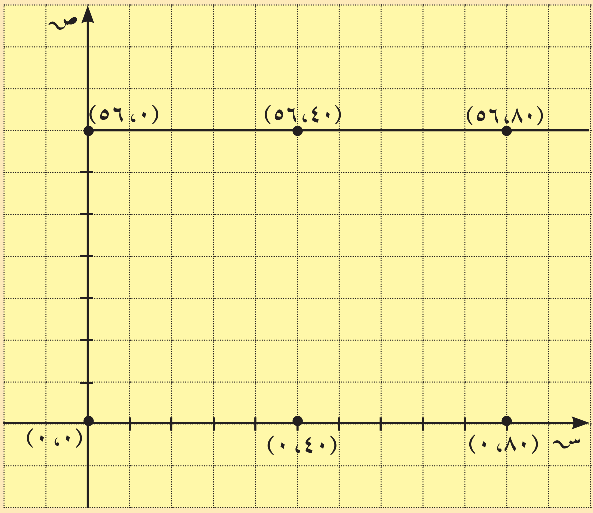
مثال (٣)

إثرائي

أرادت إحدى الشركات بناء مدينة ملاهي في العاصمة. فوضعت التصميم المقابل على أن يكون لها ٦ مداخل رئيسية. وترغب إدارة الشركة في تركيب نافورتين للماء على أن تكون كل نافورة موجودة على مسافة واحدة من أربعة مداخل في مدينة الملاهي:

أ حدد أنسب موقع لتركيب هاتين النافورتين؟

ب ما المسافة بينهما؟

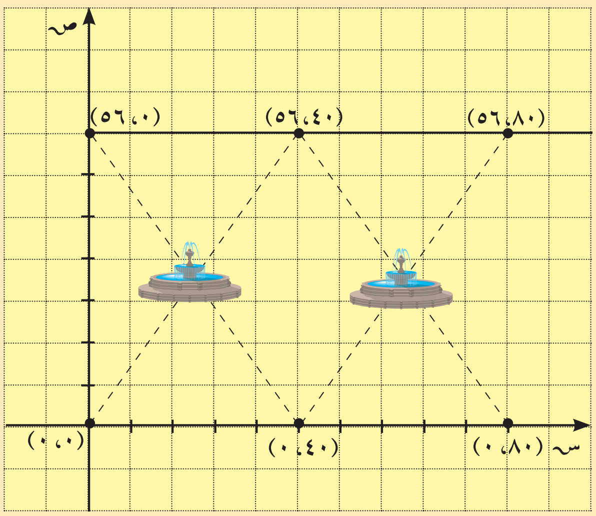


الحل:

أ النافورة الأولى لجهة اليسار يجب أن تكون على نقطة تقاطع القطرين للمستطيل الذي رؤوسه (٠، ٠)؛ (٤٠، ٠)؛ (٤٠، ٥٦)؛ (٠، ٥٦).

نقطة تقاطع القطرين هي منتصف كل قطر لذا يكون موقع تركيب هذه النافورة عند النقطة $\left(\frac{٤٠ + ٠}{٢} ، \frac{٥٦ + ٠}{٢}\right)$

أي عند النقطة (٢٠، ٢٨). النافورة الثانية لجهة اليمين يجب أن تكون عند نقطة تقاطع القطرين للمستطيل الذي رؤوسه (٤٠، ٠)؛ (٨٠، ٠)؛ (٨٠، ٥٦)؛ (٤٠، ٥٦).



نقطة تقاطع القطرين هي منتصف كل قطر. لذا يكون موقع تركيب النافورة الثانية عند النقطة $\left(\frac{٨٠ + ٤٠}{٢} ، \frac{٥٦ + ٠}{٢}\right)$

أي عند النقطة (٦٠، ٢٨).

ب المسافة بين النافورتين

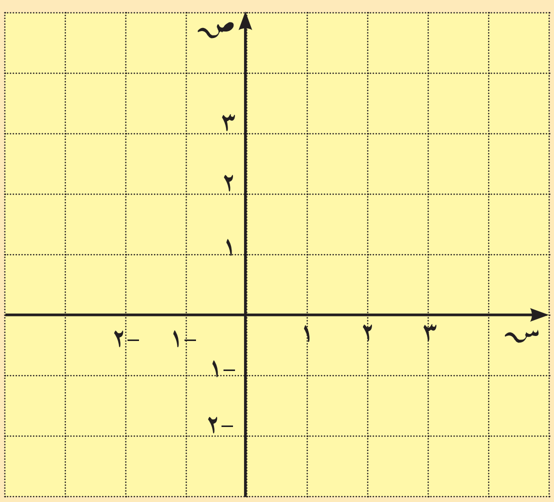
نستخدم القاعدة: $\sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$

$= \sqrt{(٦٠ - ٢٠)^٢ + (٢٨ - ٢٨)^٢} = \sqrt{(٤٠)^٢} = ٤٠$

أي أن المسافة سوف تكون ٤٠ وحدة طول.

حاول أن تحل

٣ تقع المدرسة في الموقع ٢ شرق، ١ جنوب ويقع منزل خالد ٣ شرق، ٣ شمال. عيّن على المستوى الإحداثي موقع المدرسة وموقع منزل خالد، ثم أوجد المسافة من منزل خالد إلى المدرسة.



كل وحدة طول على المحاور تساوي ٢ كيلومتر

ملاحظة: الموقع ٣ شرق، ٢ شمال يعني (+٣، ٢).

٩-٢

تقسيم قطعة مستقيمة
Dividing Line Segment

سوف تتعلم

- تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل بنسبة معلومة.
- تقسيم قطعة مستقيمة من الخارج بنسبة معلومة.

فلنعمل معًا

قطعة خشبية طولها ٩٠ سم، يريد نجار تقسيمها إلى قطعتين مختلفتي الطول. يزيد طول القطعة الكبرى عن طول الصغرى ما يساوي نصف طول القطعة الصغرى.

أوجد طول كلّ من القطعتين.

الحل:

لنفترض أن لدينا القطعة الصغرى فنقسمها إلى قسمين متطابقين، فيكون طول القطعة الكبرى ثلاثة أمثال أحد القسمين، وبالتالي هذا يعني أننا نقسم القطعة الخشبية إلى ٥ أقسام متطابقة. ونقسم طول الخشبة ٩٠ سم إلى ٥ أقسام فنحصل على ١٨ سم.

لاحظ أننا قسمنا القطعة الخشبية بنسبة ٢ : ٣

فيكون طول القطعة الصغرى = ٢ × ١٨ = ٣٦ سم

وطول القطعة الكبرى: ٣ × ١٨ = ٥٤ سم

١ - التقسيم من الداخل Internal Division

مثال تمهيدي

لتكن $\overline{\text{أب}}$ قطعة مستقيمة بحيث أ(٥، ٤)، ب (١٠، ٦) والمطلوب تقسيم $\overline{\text{أب}}$ بنسبة ٢:٣ من الداخل من جهة أ.

أوجد إحداثيات نقطة التقسيم.

الحل:

لتكن جـ (س، ص) هي نقطة التقسيم المطلوبة.

نرسم المثلث أ د ب قائم الزاوية في د.

نلاحظ الآتي: إحداثيات د هي (١٠، ٤)

ب د = ٢ وبتقسيمها بنسبة ٢: ٣ من جهة د

يكون طولا الجزءين هما $\frac{٢}{٥}$ × ٢ = ٠,٨ ،

$\frac{٣}{٥}$ × ٢ = ١,٢ على الترتيب،

وتكون نقطة تقسيم $\overline{\text{ب د}}$ هي (١٠، ٤,٨).

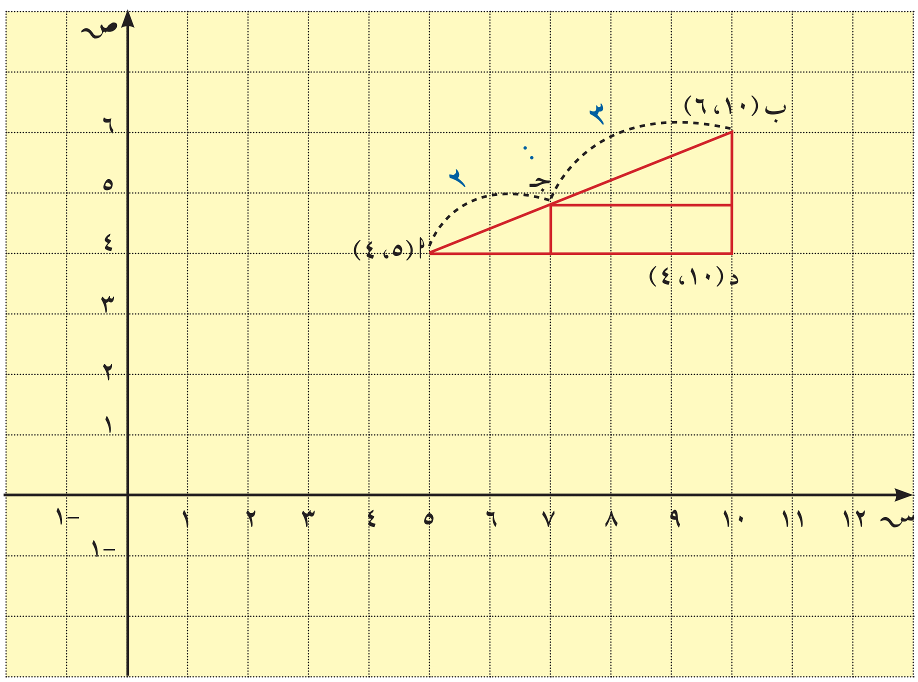
أ د = ٥ وبتقسيمها بنسبة ٢: ٣ من جهة أ

يكون طولا الجزءين هما $\frac{٢}{٥}$ × ٥ = ٢ ،

$\frac{٣}{٥}$ × ٥ = ٣ على الترتيب

وتكون نقطة تقسيم $\overline{\text{أ د}}$ هي (٧، ٤).

وبذلك تكون جـ (٧ ، ٤,٨).



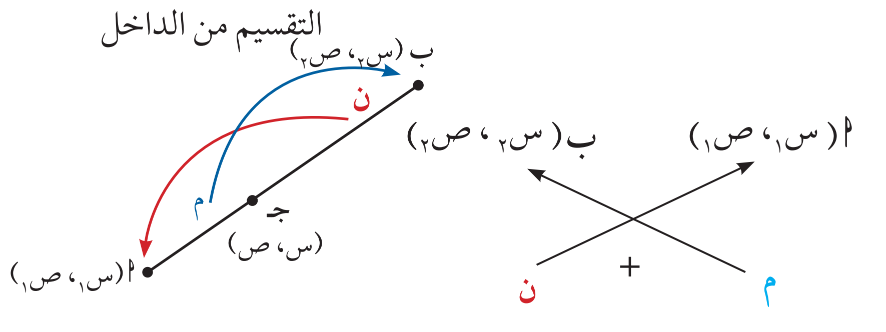
وبصفة عامة:

إذا كانت $\overline{\text{أب}}$ قطعة مستقيمة بحيث أ (س$_١$، ص$_١$)،

ب (س$_٢$، ص$_٢$) ويراد تقسيمها من جهة أ بنسبة م: ن من الداخل وكانت نقطة التقسيم جـ (س، ص) فإن:

$$\text{س} = \frac{\text{م س}_{٢} + \text{ن س}_{١}}{\text{م} + \text{ن}}$$

$$\text{ص} = \frac{\text{م ص}_{٢} + \text{ن ص}_{١}}{\text{م} + \text{ن}}$$

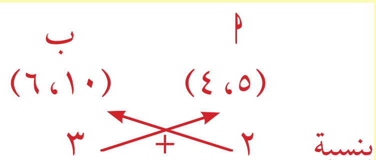


$$\text{جـ} \left(\frac{\text{م س}_{٢} + \text{ن س}_{١}}{\text{م} + \text{ن}} ، \frac{\text{م ص}_{٢} + \text{ن ص}_{١}}{\text{م} + \text{ن}} \right)$$

ويمكن إيجاد نقطة التقسيم جـ (س، ص) للمثال التمهيدي كالتالي:

$$\text{س} = \frac{٢ \times ١٠ + ٣ \times ٥}{٢ + ٣} = \frac{٣٥}{٥} = ٧$$

$$\text{ص} = \frac{٢ \times ٦ + ٣ \times ٤}{٢ + ٣} = \frac{٢٤}{٥} = ٤,٨$$

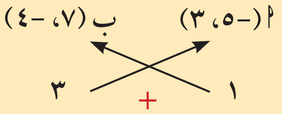


نقطة التقسيم جـ (س، ص)

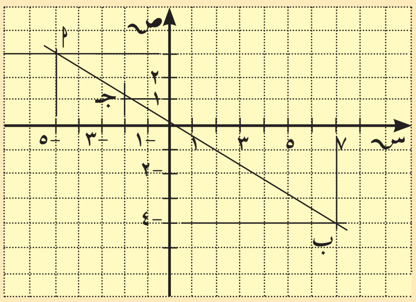
$$= \left(\frac{٢ \times ١٠ + ٣ \times ٥}{٢ + ٣} ، \frac{٢ \times ٦ + ٣ \times ٤}{٢ + ٣} \right)$$

$$= (٧ ، ٤,٨)$$

مثال (١)



إذا كان ٲ (–٥، ٣)، ب (٧، –٤). فأوجد نقطة تقسيم $\overline{\text{ٲب}}$ من جهة ٲ بنسبة ١:٣ من الداخل.



الحل: نقطة التقسيم (س، ص) = $\left(\dfrac{\text{م س}_٢ + \text{ن س}_١}{\text{م} + \text{ن}} \text{ ، } \dfrac{\text{م ص}_٢ + \text{ن ص}_١}{\text{م} + \text{ن}} \right)$

س = $\dfrac{١ \times ٧ + ٣ \times (–٥)}{١ + ٣} = \dfrac{–٨}{٤} = –٢$ ، ص = $\dfrac{١ \times (–٤) + ٣ \times ٣}{١ + ٣} = \dfrac{٥}{٤} =$ ١,٢٥

نقطة التقسيم هي: جـ (–٢ ، ١,٢٥).

حاول أن تحل

١ إذا كان ٲ (٣، –٤) ، ب (–٢، ٣). فأوجد جـ بحيث ٢ ٲ جـ = جـ ب ، جـ $\in \overline{\text{ٲب}}$.

[إرشاد: ٲ جـ : جـ ب = ١ : ٢]

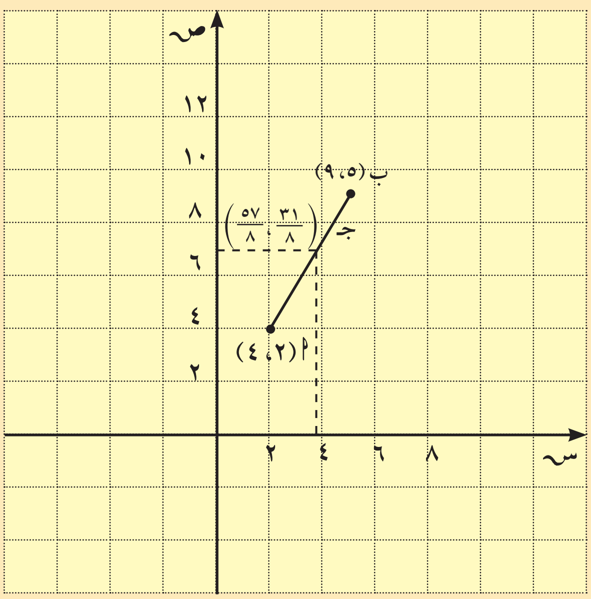
ملاحظة: الرسم ليس جزءًا من الحل ولكنه يساعد على التحقق من معقولية الإجابة.

مثال (٢)

إذا كان ٲ (٢، ٤) ، ب (٥، ٩)،

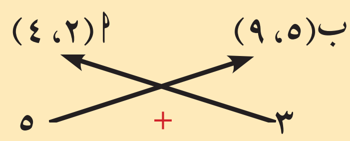
ويراد تقسيم $\overline{\text{ٲب}}$ من الداخل من جهة ب في نقطة جـ بنسبة ٣:٥.

أوجد إحداثيات النقطة جـ.



الحل:

المطلوب إيجاد قيم س، ص إحداثيات النقطة جـ حيث $\dfrac{\text{جـ ب}}{\text{ٲ جـ}} = \dfrac{٣}{٥}$ من الداخل. باستخدام قاعدة التقسيم من الداخل من جهة ب نكتب:



س = $\dfrac{٣ \times ٢ + ٥ \times ٥}{٣ + ٥} = \dfrac{٣١}{٨}$ ؛ ص = $\dfrac{٣ \times ٤ + ٥ \times ٩}{٣ + ٥} = \dfrac{٥٧}{٨}$

فتكون جـ $\left(\dfrac{٣١}{٨} \text{ ، } \dfrac{٥٧}{٨} \right)$

حاول أن تحل

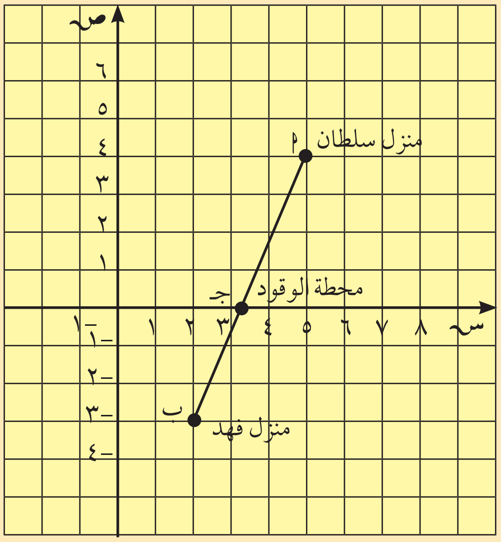
٢ لتكن ٲ (٢، –٣) ، ب (–٤، ٧). أوجد إحداثيات النقطة جـ على $\overline{\text{ٲب}}$ بحيث: ٧جـ ب = ٢جـ ٲ .

مثال (٣) تطبيقات حياتية

يقع منزل سلطان عند النقطة ﺃ (٥، ٤) بينما يقع منزل صديقه فهد عند النقطة ب (٢، −٣).

أوجد نسبة البعد بين كلا المنزلين ومحطة الوقود إذا تمثلت بالنقطة جـ $\left(\frac{٢٣}{٧}\text{، } ٠\right)$.

علمًا بأن النقاط ﺃ، جـ، ب على استقامة واحدة.



الحل:

نفرض أن نسبة التقسيم م : ن جهة منزل سلطان

لإيجاد نسبة البعد ، نستخدم القانون العام لتقسيم قطعة من الداخل.

$$\text{جـ}\left(\frac{\text{م س}_٢ + \text{ن س}_١}{\text{م} + \text{ن}} \text{، } \frac{\text{م ص}_٢ + \text{ن ص}_١}{\text{م} + \text{ن}}\right)$$

$$\left(\frac{٢٣}{٧}\text{، } ٠\right) = \left(\frac{٢ \times \text{م} + ٥ \times \text{ن}}{\text{م} + \text{ن}} \text{، } \frac{\text{م} \times (-٣) + \text{ن} \times ٤}{\text{م} + \text{ن}}\right)$$

$$\therefore \frac{٢\text{م} + ٥\text{ن}}{\text{م} + \text{ن}} = \frac{٢٣}{٧}$$

$$١٤\text{م} + ٣٥\text{ن} = ٢٣\text{م} + ٢٣\text{ن}$$

$$\therefore ٩\text{م} = ١٢\text{ن}$$

$$\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \frac{٤}{٣}$$

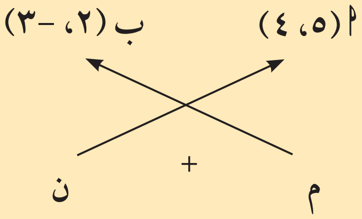
طريقة أخرى للحل:

$$\frac{-٣\text{م} + ٤\text{ن}}{\text{م} + \text{ن}} = ٠$$

$$-٣\text{م} + ٤\text{ن} = ٠$$

$$٣\text{م} = ٤\text{ن}$$

$$\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \frac{٤}{٣}$$



لاحظ أنه يمكنك الاكتفاء بإيجاد النسبة من أحد الحلين

بذلك، تكون نسبة البعد من كلا المنزلين إلى محطة الوقود هي ٤ : ٣ من جهة منزل سلطان.

ملاحظة: نسبة البعد بين كلا المنزلين ومحطة الوقود هي ٣ : ٤ من جهة منزل فهد.

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، يقع منزل صالح على المستقيم المار بمنزلي سلطان وفهد وهو يقسم $\overline{\text{ﺃب}}$ من الداخل من جهة ﺃ بنسبة ٤:٥. أوجد إحداثيات منزل صالح.

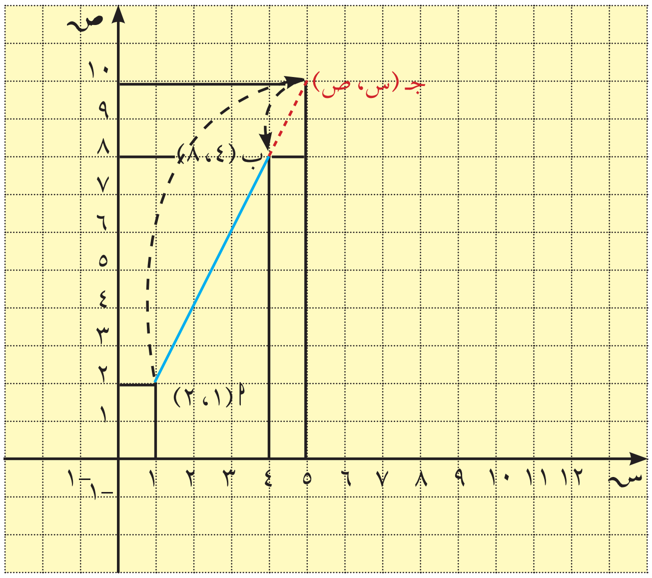
٢ – التقسيم من الخارج External Division

مثال تمهيدي

لتكن أ (١، ٢)، ب (٤، ٨)،

ويراد تقسيم $\overline{أب}$ من الخارج من جهة ب في نقطة جـ بنسبة ١ : ٤.

أوجد إحداثيات جـ.



الحل:

لتكن جـ (س، ص) حيث جـ $\in \overleftarrow{أب}$ ، جـ $\notin \overline{أب}$

جـ ب : أ جـ = ١ : ٤

وهذا يعني أن أ ب : ب جـ = ٣ : ١

أي أن ب (٤، ٨) تقسم $\overline{أجـ}$ بنسبة ٣ : ١ من الداخل من جهة أ.

بتطبيق قاعدة التقسيم من الداخل نجد أن:

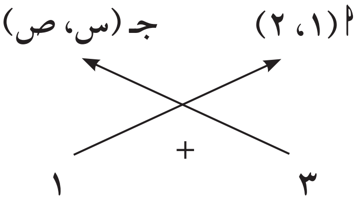
$$٤ = \frac{٣ \times س + ١ \times ١}{٣ + ١} = \frac{٣س + ١}{٤}$$

ومن ذلك نجد أن: ٣ س + ١ = ١٦ ومنها س = ٥،

$$٨ = \frac{٣ \, ص + ١ \times ٢}{٣ + ١} = \frac{٣ص + ٢}{٤}$$

ومن ذلك نجد أن: ٣ ص + ٢ = ٣٢ ومنها ص = ١٠،

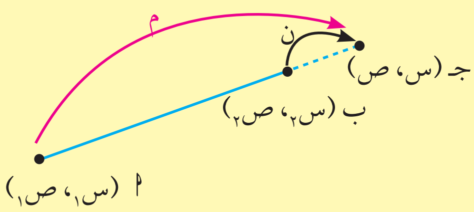
أي أن جـ (٥، ١٠) وهي نقطة التقسيم من الخارج.

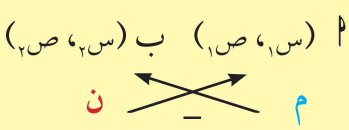


وبصفة عامة:

إذا كانت أ $(س_١، ص_١)$ ، ب $(س_٢، ص_٢)$ فإن النقطة جـ (س، ص) التي تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة ن : م من جهة ب تكون إحداثياتها: $س = \frac{م\,س_٢ - ن\,س_١}{م - ن}$

$$ص = \frac{م\,ص_٢ - ن\,ص_١}{م - ن}$$





ملاحظة: يمكن إيجاد نقطة التقسيم السابقة كالتالي:

$$س = \frac{ن\,س_١ - م\,س_٢}{ن - م} \quad ، \quad ص = \frac{ن\,ص_١ - م\,ص_٢}{ن - م}$$

بتطبيق قاعدة التقسيم من الخارج على المثال التمهيدي من جهة ب.

أ (١، ٢)   ب (٤، ٨)

٤   −   ١

جـ (س، ص)

$$\text{س} = \frac{٤ \times ٤ - ١ \times ١}{٤ - ١} = \frac{١٦ - ١}{٣} = ٥$$

$$\text{ص} = \frac{٤ \times ٨ - ١ \times ٢}{٤ - ١} = \frac{٣٢ - ٢}{٣} = ١٠$$

جـ (٥، ١٠) وهو ما حصلنا عليه نفسه في الحل السابق .

تدريب

أوجد نقطة تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج بنسبة ١ : ٤ من جهة أ.

حيث أ (١، ٢) ، ب (٤، ٨).

مثال (٤)

إذا كان أ (١، ٤) ، ب (−٢، ١)، ويراد تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج جهة أ في نقطة جـ بنسبة ٢:٣.

أوجد إحداثيات النقطة جـ.

الحل:

المطلوب إيجاد قيم س، ص إحداثيات النقطة جـ من الخارج حيث $\frac{\text{جـ أ}}{\text{جـ ب}} = \frac{٢}{٣}$.

باستخدام قاعدة التقسيم من الخارج لجهة أ نكتب:

أ(١، ٤)   ب (−٢، ١)

٢   −   ٣

$$\text{س} = \frac{٢ \times (-٢) - ٣ \times ١}{٢ - ٣} = \frac{-٧}{-١} = ٧؛ \text{ص} = \frac{٢ \times ١ - ٣ \times ٤}{٢ - ٣} = \frac{-١٠}{-١} = ١٠$$

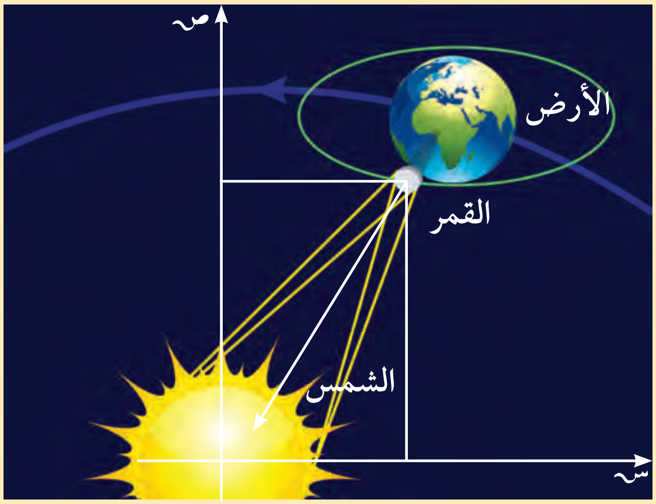
فتكون جـ (٧، ١٠)

حاول أن تحل

٤ لتكن أ (−٢، ٢) ، ب (٣، ١). أوجد إحداثيات النقطة جـ التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج من جهة ب بنسبة ٣: ٨ .

مثال (٥) **إثرائي**

أثناء الكسوف تكون الأرض والشمس والقمر على استقامة واحدة كما تبين الصورة المقابلة. المسافة بين الأرض والشمس ٠٠٠ ٦٠٠ ١٤٩ كم تقريبًا والمسافة بين الأرض والقمر ٠٠٠ ٣٨٤ كم تقريبًا.

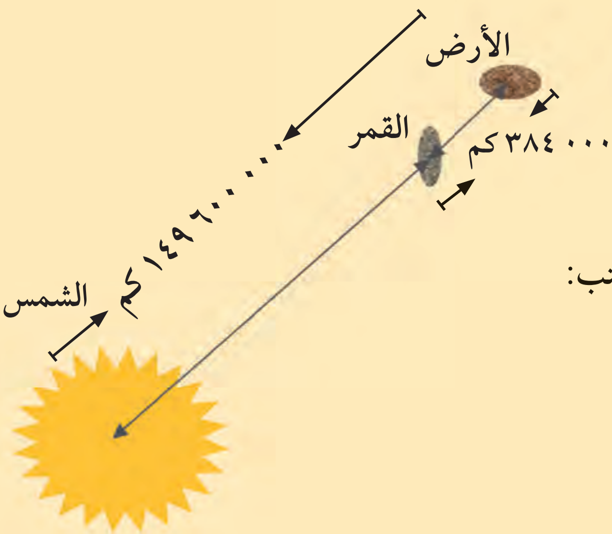


(أ) أوجد نسبة التقسيم من الخارج جهة القمر على القطعة المستقيمة الواصلة بين القمر والشمس حيث توجد الأرض.

(ب) لنأخذ مستوى إحداثي مركزه نقطة الأصل وهي الشمس.

إذا كان القمر في هذه الحالة له الإحداثيات (٦، ١٠)، فما هي إحداثيات الأرض؟

الحل:



(أ) المسافة بين الأرض والقمر = ٠٠٠ ٣٨٤ كم

المسافة بين الأرض والشمس = ٠٠٠ ٦٠٠ ١٤٩ كم

النسبة = $\frac{٣٨٤\ ٠٠٠}{١٤٩\ ٦٠٠\ ٠٠٠} = \frac{١٢}{٤\ ٦٧٥}$

(ب) التقسيم من الخارج بالنسبة إلى الأرض والقمر والشمس نكتب:

القمر (٦، ١٠)   الشمس (٠، ٠)

١٢   –   ٤٦٧٥

س = $\frac{١٢ \times ٠ - ٦ \times ٤٦٧٥}{١٢ - ٤٦٧٥}$

س $\simeq$ ٦,٠١٥

ص = $\frac{١٢ \times ٠ - ١٠ \times ٤٦٧٥}{١٢ - ٤٦٧٥}$

ص $\simeq$ ١٠,٠٢٦

أي أن إحداثيات الأرض هي تقريبًا: (٦,٠١٥، ١٠,٠٢٦)

حاول أن تحل

٥ (أ) في المثال (٥)، أوجد نسبة التقسيم: $\frac{\text{مسافة بين الشمس والقمر}}{\text{مسافة بين الشمس والأرض}}$.

(ب) إذا افترضنا أن إحداثيات الأرض هي (٧، ١١). فما هي إحداثيات القمر؟

٩–٣ (أ)

ميل الخط المستقيم
Slope of a Straight Line

دعنا نفكر ونتناقش

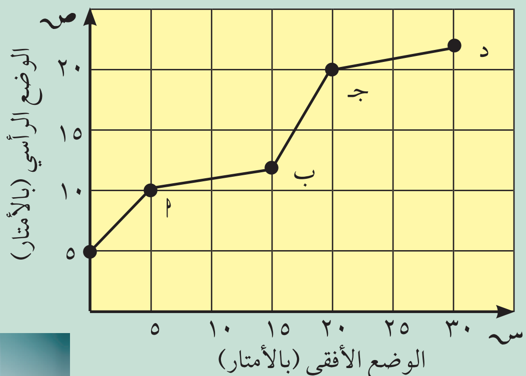
يمثل المخطط مسار أحد مصاعد التزلج.

١ ما التغير الرأسي من أ إلى ب؟
من ب إلى جـ؟ من جـ إلى د؟

٢ ما التغير الأفقي من أ إلى ب؟
من ب إلى جـ؟ من جـ إلى د؟

٣ ما نسبة التغير الرأسي إلى التغير الأفقي لكل قطعة؟

٤ أي مرحلة هي الأكثر ارتفاعًا؟ فسِّر.



سوف تتعلم

- معدل التغير
- إيجاد الميل
- العلاقة بين ميل المستقيم وظل الزاوية

معدل التغير — Rate of Change

في المخطط أعلاه، $\overline{\text{أب}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$ لهما معدلا تغيّر مختلفان. يسمح **معدل التغير** بمتابعة العلاقة بين كميتين تتغيران باستمرار. يكون ما يلي صحيحًا إذا ارتبطت إحدى الكميتين بالأخرى فإن:

$$\text{معدل التغير} = \frac{\text{التغير في المتغير التابع ص}}{\text{التغير في المتغير المستقل س}}$$

معلومة رياضية:

المعدل هو مقارنة بين كميتين بوحدات قياس مختلفة.

مثال (١)

باستخدام البيانات في الجدول أدناه أوجد معدل التغير. هل معدل التغير لكل يومين متتاليين هو نفسه؟

عدد الأيام	كلفة تأجير الحاسوب
١	٦ دنانير
٢	٧,٥ دنانير
٣	٩ دنانير
٤	١٠,٥ دنانير
٥	١٢ دينارًا

الحل:

$$\text{معدل التغير} = \frac{\text{التغير في الكلفة}}{\text{التغير في عدد الأيام}}$$

ترتبط الكلفة بعدد الأيام

$$\frac{٧,٥ - ٦}{٢ - ١} = \frac{١,٥}{١} \qquad \frac{٩ - ٧,٥}{٣ - ٢} = \frac{١,٥}{١}$$

$$\frac{١٠,٥ - ٩}{٤ - ٣} = \frac{١,٥}{١} \qquad \frac{١٢ - ١٠,٥}{٥ - ٤} = \frac{١,٥}{١}$$

معدل التغير لكل يومين متتاليين هو $\frac{١,٥}{١}$

وبالتالي، معدل التغير هو نفسه في كل بيانات الجدول .

∴ كلفة تأجير الحاسوب تزداد ١,٥ دينار لكل يوم بعد اليوم الأوّل.

تذكر:

معدل التغير يمكن أن يكون موجبًا أو سالبًا أو صفرًا.

حاول أن تحل

١ أ أوجد معدل التغير مستخدمًا اليوم الخامس واليوم الثاني.

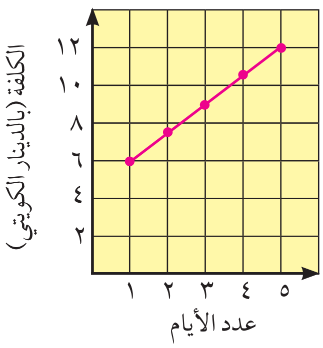
ب تفكير ناقد: هل إيجاد معدل التغير لزوج واحد من الأيام المتتالية يعني أن معدل التغير هو نفسه في كل بيانات الجدول؟ فسّر إجابتك.

استخدام الرسم البياني لإيجاد معدل التغير

يبيّن الرسم البياني أن الأزواج المرتبة (عدد الأيام، الكلفة) في المثال (١) موجودة على خط مستقيم.

∴ بيانات الجدول هي خطيّة.

∴ يمكن استخدام الرسم البياني لإيجاد معدل التغير.

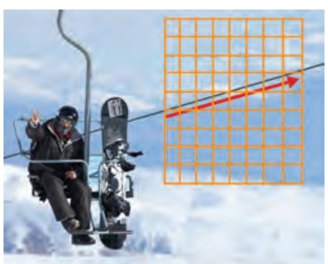


يتم تعيين المتغير المستقل على المحور الأفقي ويتم تعيين المتغير التابع على المحور الرأسي.

إيجاد الميل Finding The Slope

درست في ما سبق أن ميل المستقيم يمكن إيجاده باستخدام العلاقة.

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$



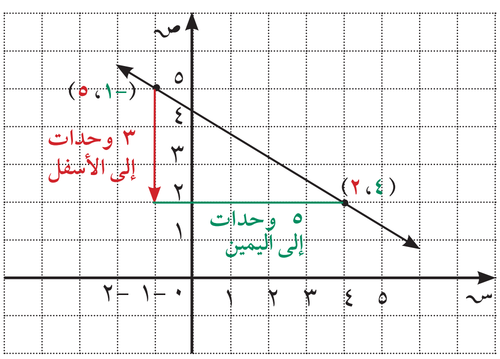
فمثلًا ميل المستقيم الموضح بالشكل المقابل

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$

$$= \frac{٢ - ٥}{٤ - (-١)}$$

$$= \frac{-٣}{٥}$$

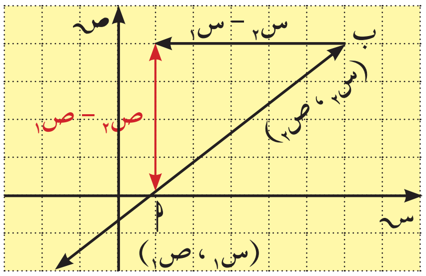
ميل الخط المستقيم يساوي $\frac{-٣}{٥}$.



كذلك يمكن استخدام نقطتين على خط مستقيم لإيجاد ميله.

في الرسم البياني إلى اليسار،

لإيجاد ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ،حيث أ $(\text{س}_{١} ، \text{ص}_{١})$، ب $(\text{س}_{٢} ، \text{ص}_{٢})$ نستخدم الصيغة التالية:



$$\text{الميل} = \frac{\text{التغيير الرأسي}}{\text{التغيير الأفقي}} = \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} ، \text{س}_{٢} - \text{س}_{١} \neq ٠$$

يجب مراعاة الترتيب المعتمد في كتابة إحداثيات النقطتين عند إيجاد الميل. فمثلًا، إذا بدأنا بالإحداثي الصادي للنقطة ب في البسط فيجب البدء بالإحداثي السيني للنقطة ب في المقام.

مثال (٢)

أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ(−٢، ١) ، ب(٥، ٧).

الحل:

$$\text{الميل} = \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$$

$$= \frac{٧ - ١}{٥ - (-٢)}$$ عوّض

$$= \frac{٦}{٧}$$ بسّط

ميل الخط المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يساوي $\frac{٦}{٧}$.

٧ − ١

أ(−٢، ١)   ب (٥، ٧)

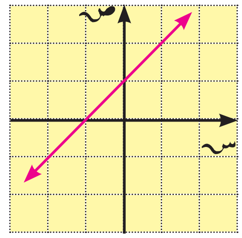
٥ −(−٢)

حاول أن تحل

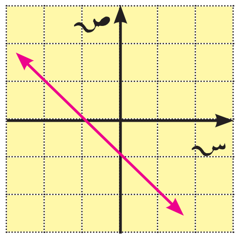
٢ أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بكل زوج من النقاط.

أ جـ(٢، ٥) ، د(٤، ٧)   ب ق(−١، ٤) ، ك(٣، −٢)   جـ م (٤، ٣) ، ن(−٧، ٣)

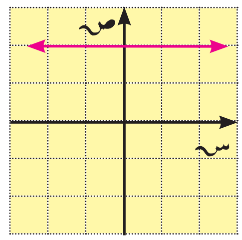
ميل المستقيم موجب



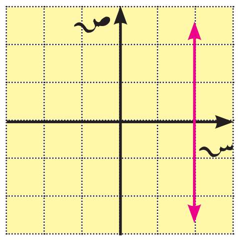
ميل المستقيم سالب



ميل المستقيم الأفقي يساوي صفرًا



المستقيم الرأسي ليس له ميل



مثال (٣)

نأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: أ(١، −١) ، ب(٢، ٢) ، جـ(−١، −٧). أثبت أن النقاط أ، ب، جـ على استقامة واحدة.

الحل:

$$\text{م}_1 = \text{ميل } \overleftrightarrow{\text{أب}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\text{٢} - (-\text{١})}{\text{٢} - \text{١}} = \text{٣}$$

$$\text{م}_2 = \text{ميل } \overleftrightarrow{\text{أجـ}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{-\text{٧} - (-\text{١})}{-\text{١} - \text{١}} = \frac{-\text{٦}}{-\text{٢}} = \text{٣}$$

أي أن $\text{م}_1 = \text{م}_2 = \text{٣}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أب}} \,//\, \overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ ولكنهما يشتركان في النقطة أ.

$\therefore$ تكون النقاط أ، ب، جـ على استقامة واحدة.

حاول أن تحل

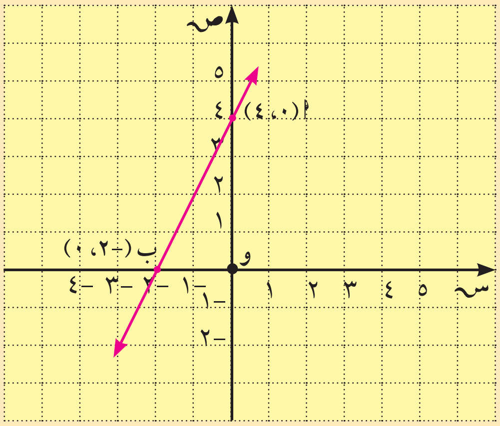
٣ أثبت أن النقاط أ(٢، −١) ، ب(−١، ٥) ، جـ(٣، −٣) على استقامة واحدة.

تذكر أن العلاقة بين ظل الزاوية θ التي يصنعها مستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وميل هذا المستقيم م

هي: م = ظا θ.

مثال (٤)

أوجد ميل $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ(٠،٤)، ب(-٢، ٠) وقارنه بظل الزاوية $\hat{ب}$ في المثلث قائم الزاوية ب و أ.



الحل:

$$\text{الميل} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{٤ - ٠}{٠ - (-٢)} \qquad \text{عوّض}$$

$$= \frac{٤}{٢} \qquad \text{بسّط}$$

$$= ٢$$

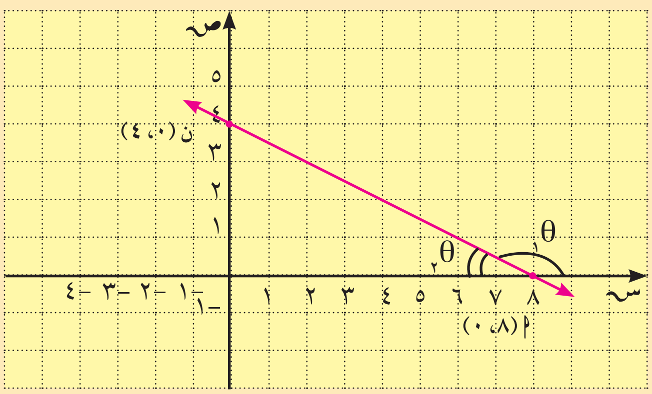
في المثلث أوب: أو = ٤ ، وب = ٢

$$\text{ظاب} = \frac{أو}{ب و} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

∴ ظاب = ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ٢

حاول أن تحل

٤ أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أن}$ وقارنه بظل الزاوية الحادة التي قياسها $\theta_٢$ وظل الزاوية المنفرجة التي قياسها $\theta_١$.



٩–٣ (ب)

معادلة الخط المستقيم
Equation of a Straight Line

سوف تتعلم
- كتابة معادلة الخط المستقيم
- الصورة العامة لمعادلة المستقيم
- إيجاد معدل التغيير

دعنا نفكر ونتناقش
تُمثِّل المعادلة: ص = م س + ن بيانيًّا بخط مستقيم.

إذا كانت م = ٠ فإن معادلة المستقيم تصبح ص = ن وهي تمثل مستقيمًا موازيًا للمحور السيني (مستقيم أفقي).

إذا كانت ن = ٠ فإن المستقيم يمر بنقطة الأصل ومعادلته ص = م س.

ملاحظة:

١ لكتابة معادلة خط مستقيم ليس رأسيًّا نحن بحاجة إلى معرفة:
- الميل (م).
- نقطة من نقاط المستقيم ولتكن $(س_{١}، ص_{١})$.

تكون معادلة المستقيم: $ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$.

٢ معادلة المستقيم الرأسي هي س = أ (وهذا المستقيم ليس له ميل)

مثال (١)
اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{٣}{٢}$ و يمر بالنقطة (٤، −١).

الحل:

$ص - (-١) = \frac{٣}{٢} (س - ٤)$ بالتعويض

$ص + ١ = \frac{٣}{٢} س - ٦$

$ص = \frac{٣}{٢} س - ٧$ بالتبسيط

∴ المعادلة: $ص = \frac{٣}{٢} س - ٧$.

حاول أن تحل
١ اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{-٢}{٣}$ ويمر بالنقطة (−٦، ٥).

تذكر:
معادلة محور السينات هي: ص = ٠
معادلة محور الصادات هي: س = ٠
وبالتالي إحداثيات نقاط محور السينات (س، ٠) وإحداثيات نقاط محور الصادات (٠، ص).

معلومة رياضية:
معدل درجة الحرارة بالفهرنهايت يرتبط بمعدل الدرجة المئوية (سيليزية) بالعلاقة:
$ف° = \frac{٩}{٥} م° + ٣٢$ ويمكن كتابتها:
$ص = \frac{٩}{٥} س + ٣٢$ وهي معادلة خط مستقيم ميله = $\frac{٩}{٥}$
أو ص = ١,٨ س + ٣٢.

مثال (٢)

اكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ(١، ٣)، ب(−٢، ٠).

الحل:

نوجد الميل

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ٠}{١ - (-٢)}$$

$$م = \frac{٣}{٣} = ١$$

المعادلة: $ص - ص_١ = م(س - س_١)$

ص − ٣ = ١ (س − ١) بالتعويض في المعادلة

ص = ٣ + س − ١ بالتبسيط

ص = س + ٢

وبالتالي معادلة المستقيم هي: ص − س − ٢ = ٠ أو س − ص + ٢ = ٠ وهي الصورة العامة لمعادلة المستقيم.

معلومة مفيدة:

الصورة العامة لمعادلة المستقيم هي:

أس + ب ص + جـ = ٠

حيث أ، ب لا يساويان الصفر معًا.

حاول أن تحل

٢ أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين جـ(٣، −١)، د(٢، −٢).

لأي مستقيمين غير رأسيين ومتوازيين الميل نفسه. أما إذا كان المستقيمان متعامدين وليس أحدهما رأسيًا، فناتج ضرب ميليهما يساوي −١. وبالتالي إذا علمنا ميل أحد المستقيمات فيمكننا إيجاد ميل المستقيمات المتوازية معه أو ميل المستقيمات المتعامدة معه، كذلك يمكننا إيجاد معادلته بمعرفة نقطة على هذا المستقيم.

مثال (٣)

إذا كان المستقيم ل: ص = ٢س + ١، فأوجد:

أ معادلة المستقيم هـ الموازي للمستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٢، −٣).

ب معادلة المستقيم ف العمودي على المستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٤، −٣).

الحل:

أ ∵ المستقيمان ل، هـ متوازيان، ميل المستقيم هـ = ميل المستقيم ل

∴ ميل المستقيم هـ = ٢

وبالتالي، معادلة المستقيم هـ تكتب على الشكل:

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$

ص − (−٣) = ٢ (س − ٢) بالتعويض في المعادلة

ص = −٣ + ٢س − ٤ بالتبسيط

ص = ٢س − ٧ وبالتالي معادلة هـ: ص − ٢س + ٧ = ٠

أو ٢س − ص − ٧ = ٠ وهي الصورة العامة لمعادلة المستقيم.

ب ∵ ل ، ف مستقيمان متعامدان ∴ ميل المستقيم ل × ميل المستقيم ف = −١

٢ × ميل المستقيم ف = −١

ميل المستقيم ف = $\frac{-١}{٢}$

وبالتالي معادلة المستقيم ف:

ص − ص$_١$ = م (س − س$_١$)

ص − (−٣) = $\frac{-١}{٢}$ (س − ٤) بالتعويض

ص + ٣ = $\frac{-١}{٢}$ س + ٢ بالتبسيط

ص = $\frac{-١}{٢}$ س − ١

∴ معادلة المستقيم ف: ص = $\frac{-١}{٢}$ س − ١

تذكر:
إذا كان ميل المستقيم هو $\frac{أ}{ب}$
فإن ميل المستقيم المتعامد معه
هو $\frac{-ب}{أ}$ حيث أ ، ب ≠ ٠

حاول أن تحل

٣ إذا كان المستقيم ك: ٣ص + س + ٣ = ٠، فأوجد:

أ معادلة المستقيم أ الموازي للمستقيم ك والذي يمر بالنقطة (−٣، ٢).

ب معادلة المستقيم ز العمودي على المستقيم ك والذي يمر بالنقطة (١، ٤).

يمكن كتابة معادلة خطية لنمذجة البيانات في جدول لتوضيح العلاقة الخطية بين مجموعتين من البيانات فإذا كان معدل التغير بين الأزواج المتتالية من البيانات هو نفسه فيوجد علاقة خطية ويكون **معدل التغير هو الميل**.

مثال (٤)

هل يمكن إيجاد علاقة خطية بين الأزواج المتتالية في الجدول الموضح؟ إذا وجدت، فاكتب المعادلة الخطية التي يمكن أن تمثل جدول هذه البيانات.

س	ص
−١	٤
٣	٦
٥	٧
١١	١٠

الحل:

الخطوة الأولى:

أوجد معدل التغير بين كل زوجين مرتبين.

س	ص
−١	٤
٣	٦
٥	٧
١١	١٠

٤ ، ٢ ، ٦

٢ ، ١ ، ٣

$\frac{٦ - ٤}{٣ + ١} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

$\frac{٧ - ٦}{٥ - ٣} = \frac{١}{٢}$

$\frac{١٠ - ٧}{١١ - ٥} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

معدل التغير = $\frac{١}{٢}$ وبالتالي م = $\frac{١}{٢}$

∴ يمكن إيجاد علاقة خطية بين الأزواج في جدول البيانات.

الخطوة الثانية:

استخدم صيغة الميل والنقطة لكتابة المعادلة:

$ص - ص_١ = م\,(س - س_١)$

$ص - ٧ = \frac{١}{٢}\,(س - ٥)$ عوض $(س_١ ،\ ص_١)$ بـ (٥، ٧) وم بـ $\frac{١}{٢}$.

$ص = \frac{١}{٢}\,س + \frac{٩}{٢}$

حاول أن تحل

٤ هل يمكن إيجاد علاقة خطية بين الأزواج المتتالية في جدول البيانات المرسوم؟
في حال وجود تلك العلاقة، اكتب المعادلة الخطية التي يمكن أن تمثل جدول هذه البيانات.

س	ص
-١١	-٧
-١	-٣
٤	-١
١٩	٥

مثال (٥) **إثرائي**

يبين الجدول التالي النسبة المئوية ص لتناقص الطاقة الكهربائية بدلالة س عدد ساعات عند استخدام البطارية في الحاسوب المحمول.

عدد ساعات استهلاك الطاقة الكهربائية (س)	١	٢	٣
النسبة المئوية للطاقة المتبقية (ص)	٨٠٪	٦٠٪	٤٠٪

أ اكتب معادلة خطية يمكن أن تنمذج العلاقة بين عدد الساعات والنسبة المئوية للطاقة المتبقية.

ب بعد كم ساعة تصبح الطاقة المتبقية في البطارية ٥٪؟

الحل:

أ معدل التغير = $\frac{٠{,}٦ - ٠{,}٨}{٢ - ١} = -٠{,}٢$

$\frac{٠{,}٤ - ٠{,}٦}{٣ - ٢} = -٠{,}٢$ فيكون معدل التغير ثابت

نستخدم المعادلة:

$ص - ص_١ = م\,(س - س_١)$ معادلة المستقيم

$ص - ٠{,}٦ = -٠{,}٢\,(س - ٢)$ بالتعويض

$ص = -٠{,}٢\,س + ١$ بالتبسيط

ب المعادلة: $ص = -٠{,}٢\,س + ١$

$ص = ٠{,}٠٥$ بالتعويض نكتب $٠{,}٠٥ = -٠{,}٢\,س + ١$

$٠{,}٢\,س = ١ - ٠{,}٠٥$

٠,٢س = ٠,٩٥

س = ٠,٩٥ ÷ ٠,٢ = ٤,٧٥

أي بعد مرور ٤ ساعات و٤٥ دقيقة.

حاول أن تحل

٥ في المثال (٥)، ما عدد ساعات استهلاك الطاقة كي تكون النسبة المئوية للطاقة المتبقية في البطارية تساوي ٧٠٪؟

٦ جاءت نتائج تمدد شريط زنبركي بالسنتيمتر بحسب الأوزان المعلقة عليه كما يبين الجدول التالي:

الوزن س (كيلوجرام)	٢	٤	٥	٧	١٠
التمدد ص (سنتيمتر)	٨	١١	١٢,٥	١٥,٥	٢٠

هل العلاقة بين الوزن والتمدد يمكن أن تكون خطية؟ في حال الإيجاب اكتب المعادلة الخطية.

٩–٤

البعد بين نقطة ومستقيم
Distance Between a Point and a Straight Line

دعنا نفكر ونتناقش

سوف تتعلم
- إيجاد البعد بين نقطة ومستقيم

رأينا سابقًا المسافة بين النقطتين (س$_١$، ص$_١$)، (س$_٢$، ص$_٢$) والقاعدة التي توجد هذه المسافة ل على الشكل التالي:

$$\text{ل} = \sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}.$$

ومعادلة المستقيم هي على الصورة ص = م س + ن، حيث م هي ميل المستقيم.

في هذا الدرس سوف نوجد البعد بين نقطة ومستقيم حيث هو طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة على المستقيم، ولكي نجد هذا البعد

نحن بحاجة إلى كتابة معادلة المستقيم على الصورة:

ﺃ س + ب ص + جـ = ٠، حيث ﺃ، ب لا يساويان الصفر معًا.

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة ل: ﺃ س + ب ص + جـ = ٠، فإن البعد ف بين النقطة د (س$_١$، ص$_١$) والمستقيم ل تعطى بالصيغة:

$$\text{ف} = \frac{|\text{ﺃ س}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{ﺃ}^٢ + \text{ب}^٢}}.$$

إذا كانت النقطة د تنتمي إلى المستقيم ل فالبعد بينهما يساوي صفرًا.

مثال (١)

أثبت أن النقطة هـ(٢، ١) لا تنتمي إلى المستقيم ل الذي معادلته: ص = ٣ س – ٤، ثمّ أوجد البعد بين المستقيم ل والنقطة هـ.

الحل:

بالتعويض عن (س، ص) بـ (٢، ١) في المعادلة: ص = ٣س – ٤

نحصل على $١ \overset{?}{=} ٣ \times ٢ - ٤$

$١ \neq ٢$ ∴ هـ لا تنتمي إلى المستقيم ل.

لإيجاد البعد بين هـ ، المستقيم ل يجب كتابة معادلة المستقيم ل على الصورة :

ﺃ س + ب ص + جـ = ٠

∴ ل: ٣س – ص – ٤ = ٠

ﺃ = ٣ ب = –١ جـ = –٤

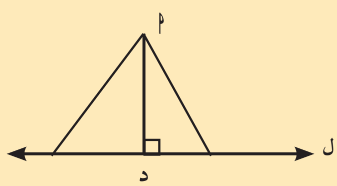
س$_١$ = ٢ ص$_١$ = ١

$$\text{البعد ف} = \frac{|\text{ﺃ س}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{ﺃ}^٢ + \text{ب}^٢}}$$

$$= \frac{|٣ \times ٢ - ١ - ٤|}{\sqrt{٣^٢ + (-١)^٢}} = \frac{|٦ - ٥|}{\sqrt{١٠}} = \frac{١}{\sqrt{١٠}}$$

ملاحظة:

بعد نقطة عن مستقيم هو طول القطعة العمودية المرسومة من النقطة على الخط المستقيم.



ﺃ د هي أقصر مسافة بين النقطة ﺃ والمستقيم ل.

∴ البعد يساوي $\frac{\sqrt{10}}{10}$ وحدة طول.

حاول أن تحل

(١) أوجد البعد بين المستقيم ل: ص = −س + ٣ والنقطة د(٢، ٥).

مثال (٢)

أوجد البعد من النقطة د(−٤، −٣) إلى المستقيم ل: ٢ ص = ٣ س − ٧.

ملاحظة:
إذا كانت المسافة بين نقطة ومستقيم تساوي صفرًا تكون النقطة تنتمي للمستقيم.

الحل:

نكتب أولًا معادلة المستقيم ل على الصورة: أ س + ب ص + جـ = ٠

ل: ٣س − ٢ص − ٧ = ٠

أ = ٣ ب = −٢ جـ = −٧

$س_1$ = −٤ $ص_1$ = −٣

$$\text{البعد ف} = \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$$

$$ف = \frac{|٣(-٤) - ٢(-٣) - ٧|}{\sqrt{(٣)^2 + (-٢)^2}} = \frac{|-١٣|}{\sqrt{٩ + ٤}} = \frac{١٣}{\sqrt{١٣}} = \sqrt{١٣}.$$

أي أن البعد من النقطة د إلى المستقيم ل يساوي $\sqrt{١٣}$ وحدة طول.

حاول أن تحل

(٢) أوجد البعد من النقطة ط(٣، −٤) إلى المستقيم ل: ص = $-\frac{٤}{٣} + \frac{س}{٦}$.

٩–٥

معادلة الدائرة
Equation of a Circle

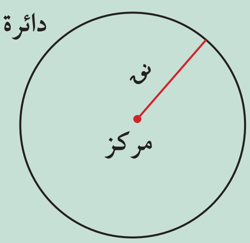
دعنا نفكر ونتناقش

إذا كان لديك قطعة من الحبل طولها ٦ أمتار، وأردت أن ترسم دائرة في فناء المدرسة، فما الذي تفعله؟ فكر مع زملائك.

هذا سيقودنا إلى تعريف الدائرة

الدائرة هي مجموعة النقاط في المستوي التي تكون على بعد ثابت من نقطة معلومة، والنقطة المعلومة تسمى **مركز الدائرة**.

والبعد الثابت هو طول نصف قطر الدائرة ويرمز له بالرمز **نق**.



سوف تتعلم

- معادلة الدائرة
- الصورة العامة لمعادلة الدائرة
- إيجاد مركز الدائرة وطول نصف قطرها
- معادلة مماس الدائرة
- العلاقة بين دائرتين في المستوي

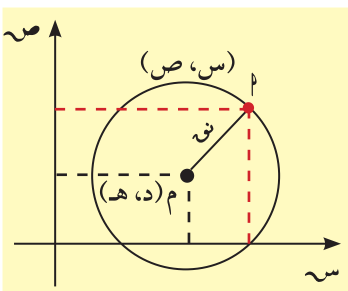
الصورة القياسية لمعادلة الدائرة:

لأي دائرة مركزها م(د، هـ) وطول نصف قطرها نق فإن المسافة بين مركز الدائرة وأي نقطة أ(س، ص) على الدائرة يمكن إيجادها باستخدام قانون المسافة بين نقطتين.

$$\text{المسافة} = \sqrt{(\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١})^{٢}}$$

$$\text{نق} = \sqrt{(\text{س} - \text{د})^{٢} + (\text{ص} - \text{هـ})^{٢}}$$

$$\text{نق}^{٢} = (\text{س} - \text{د})^{٢} + (\text{ص} - \text{هـ})^{٢}$$



وعلى ذلك، تكون معادلة الدائرة التي مركزها (د، هـ) وطول نصف قطرها نق على الصورة:

$$(\text{س} - \text{د})^{٢} + (\text{ص} - \text{هـ})^{٢} = \text{نق}^{٢}$$

وتسمّى هذه الصورة القياسية لمعادلة الدائرة بمعلومية المركز م(د، هـ) وطول نصف القطر نق.

مثال (١)

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣، −٢) وطول نصف قطرها ٧ وحدات.

الحل:

معادلة الدائرة على الصورة القياسية: $(\text{س} - \text{د})^{٢} + (\text{ص} - \text{هـ})^{٢} = \text{نق}^{٢}$ ، حيث (د، هـ) مركزها

$(\text{س} - ٣)^{٢} + [\text{ص} - (-٢)]^{٢} = ٤٩$ بالتعويض عن (د، هـ) بـ (٣، −٢)

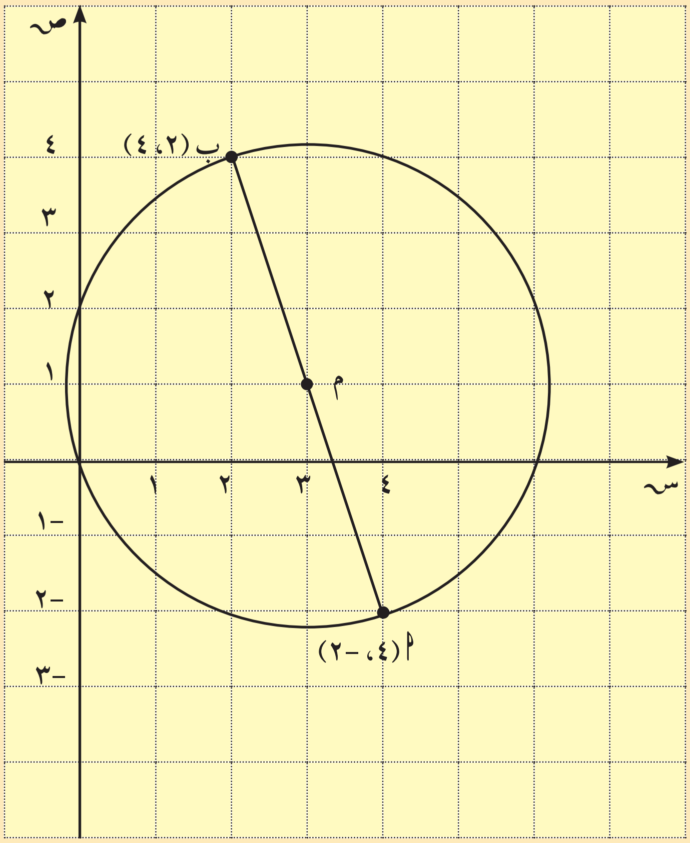
$(\text{س} - ٣)^{٢} + (\text{ص} + ٢)^{٢} = ٤٩$

حاول أن تحل

١ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٥، −٣) وطول نصف قطرها ٥ وحدات.

مثال (٢)

أوجد معادلة دائرة قطرها $\overline{\text{أب}}$ حيث أ(٤، −٢)، ب(٢، ٤).



الحل:

نوجد أولًا إحداثيات مركز الدائرة والتي هي منتصف $\overline{\text{أب}}$

م$\left(\frac{٤ + ٢}{٢}، \frac{-٢ + ٤}{٢}\right)$ أي

م(٣، ١)

نوجد طول نصف قطر الدائرة $\frac{\text{أب}}{٢}$،

$\text{نق} = \frac{١}{٢}\sqrt{(٤ - ٢)^{٢} + (-٢ - ٤)^{٢}} = \frac{١}{٢}\sqrt{٤٠}$

$\text{نق} = \sqrt{١٠}$ وحدة طول

معادلة الدائرة:

$(\text{س} - ٣)^{٢} + (\text{ص} - ١)^{٢} = ١٠$

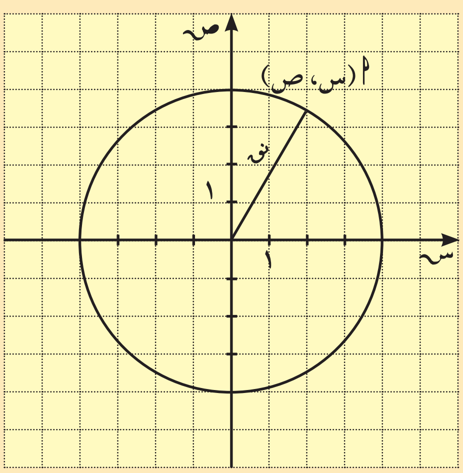
حاول أن تحل

٢ أوجد معادلة دائرة قطرها $\overline{\text{أب}}$ حيث أ(−٣، ٦)، ب(١، −٢).

إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة التي مركزها نقطة الأصل، فإن معادلتها على الصورة: $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{نق}^{٢}$

مثال (٣)

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٤ وحدات.



الحل:

إذا فرضنا نقطة مثل أ(س، ص) على الدائرة، فإن م أ = نق = ٤ وحدات،

معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل: $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{نق}^{٢}$

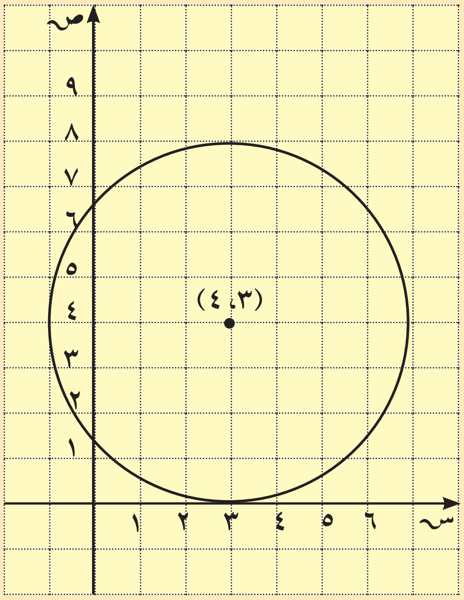
∴ $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ١٦$ معادلة الدائرة المطلوبة.

حاول أن تحل

٣ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول قطرها ٦ سم.

مثال (٤) تطبيقات حياتية

في حديقة ، زرعت مجموعة من الأزهار على شكل دائرة مركزها م(٣، ٤)، بحيث إن كل زهرة تبعد ٤ وحدات عن المركز. اكتب معادلة الدائرة التي تنمو عليها مجموعة الأزهار.



الحل:

معادلة الدائرة على الصورة القياسية: (س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}

(س − ٣)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ١٦

حاول أن تحل

٤ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣، ٤) وتمس محور الصادات.

مثال (٥)

أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها: (س + ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٩، ثم ارسم الدائرة.

الحل:

بمقارنة معادلة الدائرة المعطاة بالصورة القياسية لمعادلة الدائرة:

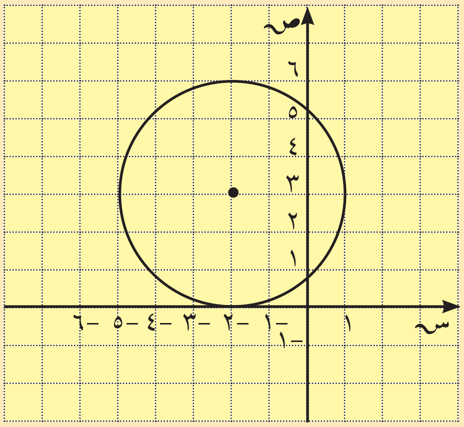
(س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}

نجد أن: −د = ٢ ⟸ د = −٢

−هـ = −٣ ⟸ هـ = ٣

نق^{٢} = ٩ ⟸ نق = ٣

مركز الدائرة (−٢، ٣) وطول نصف قطر الدائرة = ٣ وحدات.



حاول أن تحل

٥ أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:

أ س^{٢} + ص^{٢} = ٤٩.

ب (س − ٤)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٣٦.

الصورة العامة لمعادلة الدائرة

معادلة الدائرة التي مركزها م (د، هـ) وطول نصف قطرها نق تكتب على الصورة التالية: (س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}

وبالفك نحصل على الصورة التالية: س^{٢} + ص^{٢} − ٢د س − ٢ هـ ص + د^{٢} + هـ^{٢} − نق^{٢} = ٠

بوضع ل = −٢ د ؛ ك = −٢ هـ ؛ ب = د^{٢} + هـ^{٢} − نق^{٢} تصبح صورة المعادلة:

س^{٢} + ص^{٢} + ل س + ك ص + ب = ٠ ، حيث ل، ك، ب ثوابت

وتسمى الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها $\left(\frac{-ل}{٢}، \frac{-ك}{٢}\right)$

طول نصف قطرها نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب}$. حيث ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ ب > ٠

الصورة العامة: س^{٢} + ص^{٢} + ل س + ك ص + ب = ٠ هي معادلة دائرة ونلاحظ التالي:

١ إنها معادلة من الدرجة الثانية في س، ص.

٢ معامل س^{٢} = معامل ص^{٢}.

٣ لا يوجد الحد الذي يتضمن س ص.

معلومة مفيدة:

ب = د^{٢} + هـ^{٢} − نق^{٢}

∴ نق^{٢} = د^{٢} + هـ^{٢} − ب

نق^{٢} = $\left(\frac{-ل}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{-ك}{٢}\right)^{٢}$ − ب

= $\frac{ل^{٢}}{٤} + \frac{ك^{٢}}{٤}$ − ب

نق^{٢} = $\frac{١}{٤}$ (ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ ب)

∴ نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب}$

مثال (٦)

عيّن مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: ٣س^{٢} + ٣ص^{٢} − ٦س + ٩ص − ١٢ = ٠

الحل:

س^{٢} + ص^{٢} − ٢س + ٣ص − ٤ = ٠ بالقسمة على ٣

وهي معادلة دائرة على الصورة العامة

∴ ل = −٢، ك = ٣، ب = −٤

المركز = $\left(\frac{-ل}{٢}، \frac{-ك}{٢}\right) = \left(١، -\frac{٣}{٢}\right)$

نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب}$

نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{٤ + ٩ − ٤ \times (−٤)}$

نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{٢٩}$

الدائرة مركزها $\left(١ ، -\frac{٣}{٢}\right)$ وطول نصف قطرها نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{٢٩}$ وحدة طول.

حاول أن تحل

٦ عيّن مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: ٢س^{٢} + ٢ص^{٢} − ١٢س − ٤ص − ٣٠ = ٠

ملاحظة

عندما يكون لدينا معادلة على الصورة العامة التالية: س^{٢} + ص^{٢} + ل س + ك ص + ب = ٠

يمكننا معرفة ما تمثله بيانيًّا هذه المعادلة بمجرد مقارنة

ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب مع الصفر.

١ عندما ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب < ٠ فإن المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.

٢ عندما ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب = ٠ فإن المعادلة تمثل نقطة.

٣ عندما ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب > ٠ فإن المعادلة تمثل دائرة.

مثال (٧)

هل كل معادلة مما يلي تمثل معادلة دائرة؟ فسّر.

أ س^{٢} + ص^{٢} − ٣س + ٥ص − $\frac{١٥}{٤}$ = ٠

ب س^{٢} + ص^{٢} + ٤س − ٧ص + ٢٠ = ٠

جـ س^{٢} + ص^{٢} − ٦س + ٨ص + ٢٥ = ٠

الحل:

أ المعادلة: س^{٢} + ص^{٢} − ٣س + ٥ص − $\frac{١٥}{٤}$ = ٠

معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

ل = −٣، ك = ٥، ب = $\frac{-١٥}{٤}$

ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب = ٩ + ٢٥ −٤ $\left(\frac{-١٥}{٤}\right)$ = ٩ + ٢٥ + ١٥ = ٤٩ > ٠

٤٩ > ٠ ∴ المعادلة تمثل معادلة دائرة.

ب المعادلة: س^{٢} + ص^{٢} + ٤س − ٧ص + ٢٠ = ٠

معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

ل = ٤، ك = −٧، ب = ٢٠

ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب = ١٦ + ٤٩ − ٤ × ٢٠ = −١٥ < ٠

∴ المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.

ج المعادلة س^{٢} + ص^{٢} − ٦س + ٨ص + ٢٥ = ٠

معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

ل = −٦، ك = ٨، ب = ٢٥

ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب = ٣٦ + ٦٤ − ٤ × ٢٥ = ٠

∴ المعادلة تمثل نقطة.

حاول أن تحل

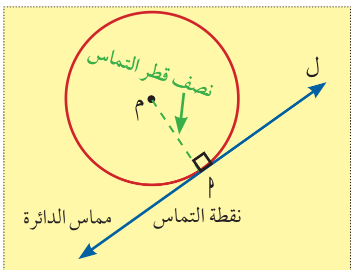
٧ هل كل معادلة مما يلي تمثل معادلة دائرة؟ فسّر.

أ س^{٢} + ص^{٢} − ٤س + ٧ص + ١٧ = ٠

ب س^{٢} + ص^{٢} + ٥س − ٦ص − ٤ = ٠

ج س^{٢} + ص^{٢} − ٢س − ٢ص + ٢ = ٠

معادلة مماس لدائرة Tangent to a Circle

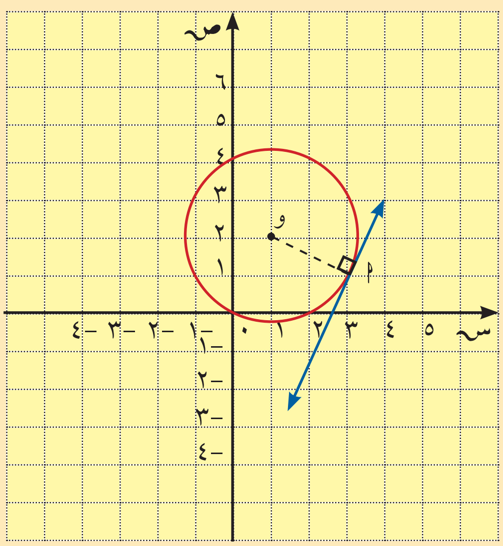


سبق وتبين لنا أن نصف قطر الدائرة عمودي على مماس الدائرة عند نقطة التماس.
باستخدام هذه الخاصية، نستطيع إيجاد معادلة مماس الدائرة.

مثال (٨)

أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها:

(س − ١)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٥ عند نقطة التماس أ(٣، ١).



الحل:

النقطة أ(٣، ١) تنتمي إلى الدائرة.

إحداثيات مركز الدائرة و(١، ٢).

ميل $\overline{وأ}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١ - ٢}{٣ - ١} = -\frac{١}{٢}$

∵ نصف قطر التماس $\overline{وأ}$ عمودي على مماس الدائرة

∴ ميل$_{\text{المماس}}$ × ميل $\overline{وأ}$ = −١

م$_{\text{المماس}}$ × $(-\frac{١}{٢})$ = −١

م$_{\text{المماس}}$ = ٢

معادلة المماس و $\overline{م أ}$ الذي ميله ٢ ويمر بالنقطة (٣، ١) هي:

ص − ص$_١$ = م (س − س$_١$)

ص − ١ = ٢ (س − ٣)

ص − ١ = ٢س − ٦

∴ معادلة المماس ص = ٢س − ٥

حاول أن تحل

٨ أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها (س − ٢)^٢ + (ص − ١)^٢ = ٢٥ عند النقطة أ(٦، ٤).

مثال (٩)

أثبت أن النقطة أ (٦، −٤) تنتمي إلى الدائرة التي مركزها و، معادلتها: س^٢ + ص^٢ − ٤س + ٢ص − ٢٠ = ٠، ثم أوجد معادلة المماس لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

الحل:

س^٢ + ص^٢ − ٤س + ٢ص − ٢٠ = ٠

المعادلة على شكل الصورة العامة لمعادلة الدائرة حيث ل = −٤، ك = ٢ ، ب = −٢٠

بالتعويض عن النقطة (٦، −٤)

(٦)^٢ + (−٤)^٢ − ٤(٦) + ٢(−٤) −٢٠

= ٣٦ + ١٦ − ٢٤ − ٨ − ٢٠ = ٠ ✓

∴ النقطة أ(٦، −٤) تنتمي إلى الدائرة.

مركز الدائرة و (٢، −١)، طول نصف قطرها: نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ٤ب}$

نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{١٠٠}$ = ٥

ميل نصف قطر التماس $\overline{و أ}$ = م = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{-٤ - (-١)}{٦ - ٢}$ = $\frac{-٣}{٤}$

نعرف أن نصف قطر التماس $\overline{وأ}$ هو عمودي على المماس عند النقطة أ

ليكن م' ميل المماس: م × م' = −١

أي $\frac{-٣}{٤}$ × م' = −١ ومنه م' = $\frac{٤}{٣}$

نأخذ المعادلة: ص − ص$_{١}$ = م' (س − س$_{١}$)

ص − (−٤) = $\frac{٤}{٣}$ (س − ٦)

ص = $\frac{٤}{٣}$ س − ١٢

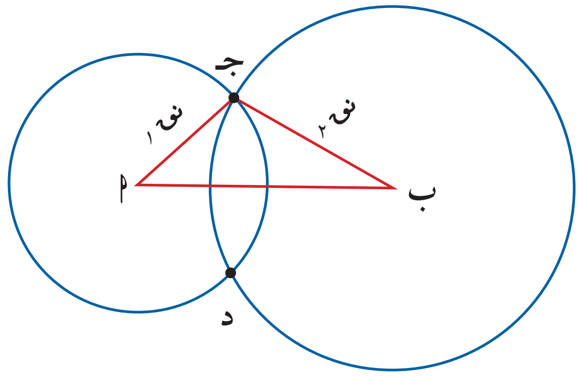
∴ معادلة المماس ص = $\frac{٤}{٣}$ س − ١٢

حاول أن تحل

٩ أثبت أن النقطة أ (١، ١) تنتمي إلى الدائرة التي مركزها و، معادلتها: س^{٢} + ص^{٢} + ٦س + ٨ص − ١٦ = ٠، ثم أوجد معادلة المماس لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

العلاقة بين دائرتين في المستوي

Intersection of Two Circles



في الشكل، الدائرتان (أ ، نق$_1$) ، (ب ، نق$_2$) تتقاطعان في جـ ، د.

لدراسة العلاقة بين دائرتين، نستخدم متباينة المثلث.

إن مقارنة البعد بين مركزي الدائرتين وطولي نصفي قطري الدائرتين يحدد موقع الدائرتين كما هو مبيّن في الجدول التالي:

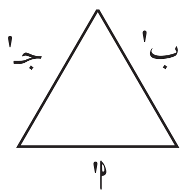
معلومة:

عندما نكتب: الدائرة (أ، نق) فهذا يعني أن أ مركز الدائرة ونق نصف قطرها.

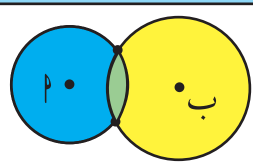
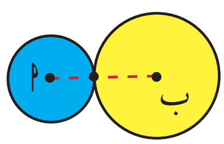
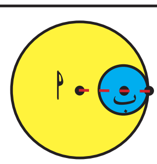
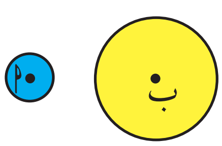
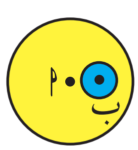
معلومة رياضية:

متباينة المثلث

في كل مثلث، طول أي ضلع أصغر من مجموع طولي الضلعين الآخرين وأكبر من الفرق بين طوليهما.



|ب' − جـ'| < أ' < ب' + جـ'

العلاقة بين أب وطولي نصفي القطرين	العلاقة بين الدائرتين	الشكل	ملاحظة
|نق$_1$ − نق$_2$| < أب < نق$_1$ + نق$_2$	الدائرتان تتقاطعان في نقطتين مختلفتين		البعد بين المركزين أصغر من مجموع طولي نصفي القطرين وأكبر من الفرق بينهما.
أب = نق$_1$ + نق$_2$	الدائرتان متماستان خارجيًّا		− البعد بين المركزين يساوي مجموع طولي نصفي القطرين − مركزا الدائرتين ونقطة التماس هي على استقامة واحدة.
أب = |نق$_1$ − نق$_2$|	الدائرتان متماستان داخليًّا		− البعد بين المركزين يساوي الفرق بين طولي نصف القطرين. − مركزا الدائرتين ونقطة التماس هي على استقامة واحدة.
أب > نق$_1$ + نق$_2$	الدائرتان لا تتقاطعان (متباعدتان)		− البعد بين المركزين أكبر من مجموع طولي نصف قطري الدائرتين.
أب < |نق$_1$ − نق$_2$|	الدائرتان لا تتقاطعان (متداخلتان)		− البعد بين المركزين أصغر من الفرق بين طولي نصفي القطرين.

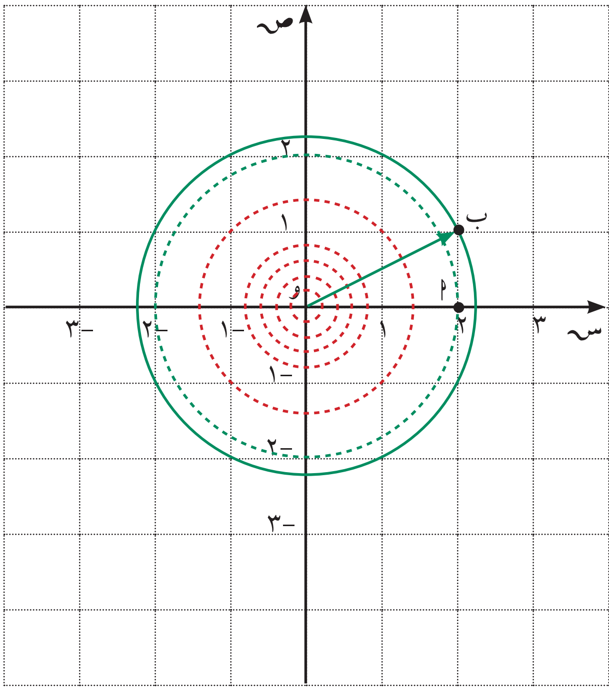
المرشد لحل المسائل

وجد جاسم هذه المسألة:

أدى قذف حصاة في بركة مياه إلى تشكل موجات دائرية يتزايد طول نصف قطرها بمعدل ٦ سم/ ثانية.

بعد كم ثانية تصل هذه الموجات إلى مركب صغير كان على مسافة ٢ متر شرقًا ومترًا واحدًا شمالًا من مركز الموجة الأولى.

أوجد معادلة الدائرة التي تصل إلى المركب.



كيف فكر جاسم لحل المسألة؟

سوف أضع مخططًا للمسألة:

ليكن و مركز الموجة ، النقطة أ تبعد ٢ متر شرق المركز ، النقطة ب تبعد مترًا واحدًا إلى شمال النقطة أ.

لكي أحصل على الزمن:

أجد المسافة وب من مركز الموجة الأولى إلى المركب.

أقسم المسافة على السرعة (٦ سم/ ثانية).

أستخدم قاعدة الدائرة لأجد معادلتها.

التطبيق:

سأستخدم نظرية فيثاغورث على المثلث و أ ب القائم في أ ، $(\text{وب})^2 = (\text{وأ})^2 + (\text{أب})^2$

$(\text{وب})^2 = ٢^2 + ١^2$

$(\text{وب})^2 = ٥$

$\text{وب} = \sqrt{٥}$ م

سأستخدم قاعدة الزمن = $\dfrac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$

الزمن = $\dfrac{\sqrt{٥}\ \text{م}}{٦\ \text{سم/ ثانية}} = \dfrac{\sqrt{٥} \times ١٠٠\ \text{سم}}{٦\ \text{سم/ ثانية}}$

الزمن ≈ ٣٧ ثانية.

معادلة الدائرة التي مركزها و(٠، ٠) ونصف قطرها $\sqrt{٥}$ هي:

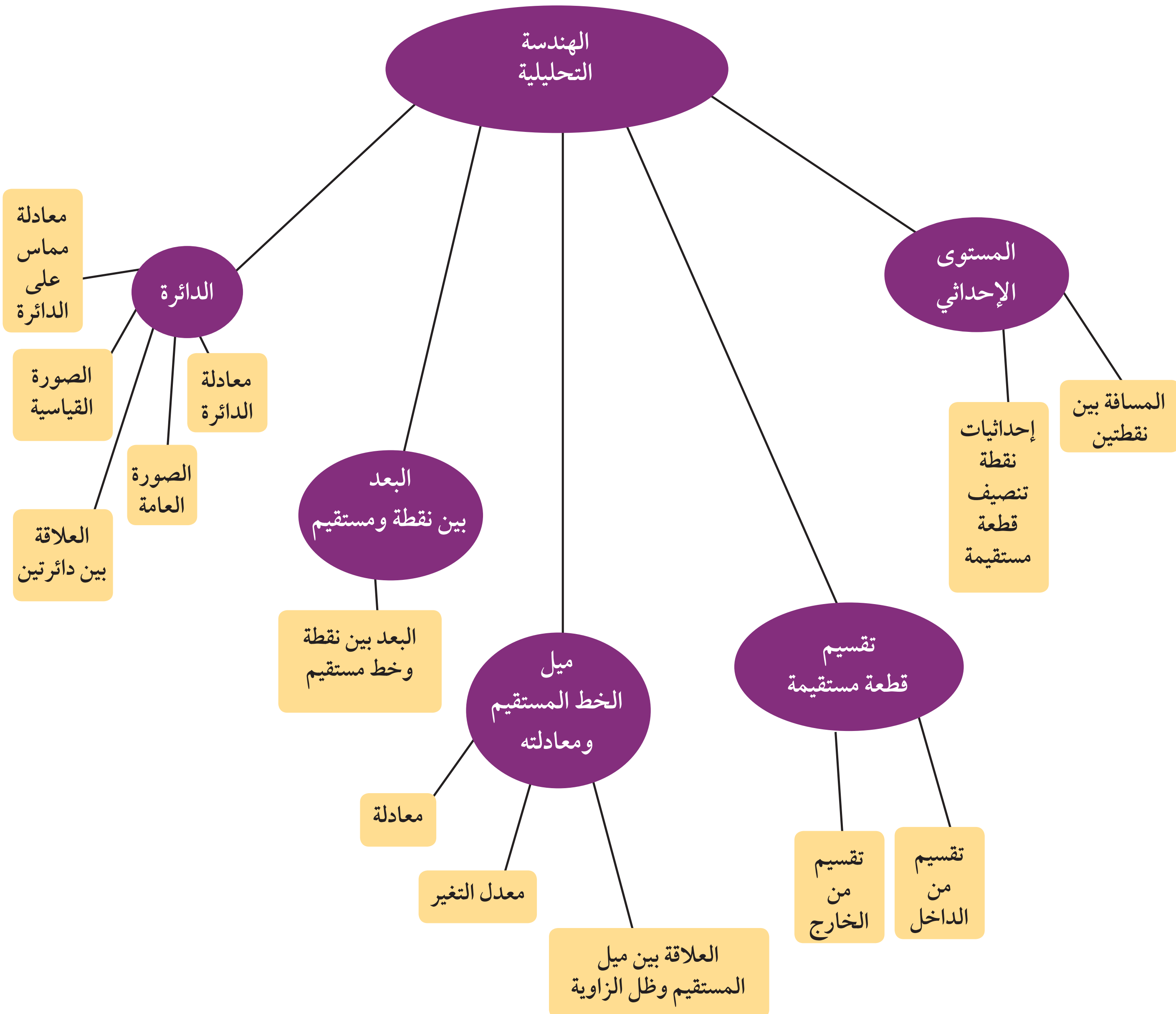
$\text{س}^2 + \text{ص}^2 = ٥$

مسألة إضافية

حوض زهور دائري الشكل، تنمذج دائرته بالمعادلة: $(\text{س} - ١)^2 + (\text{ص} - ٢)^2 = ٩$ (طول نصف القطر بالأمتار).

إذا أحطنا الحوض بالرمل بسماكة منتظمة ٥٠ سم، فأوجد طول نصف قطر الشكل الجديد ومعادلته.

مخطط تنظيمي للوحدة التاسعة



ملخص

- المسافة بين نقطتين أ، ب على محور السينات تساوي القيمة المطلقة للفرق بين إحداثيات النقطتين.

- المسافة المائلة بين نقطتين أ(س$_1$، ص$_1$)، ب(س$_2$، ص$_2$): أب = $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$.

- إذا كانت $\overline{أب}$ قطعة مستقيمة بحيث أ(س$_1$، ص$_1$)، ب(س$_2$، ص$_2$) فإن نقطة منتصف $\overline{أب}$ هي

$$ج\left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2}\right).$$

- تقسيم $\overline{أب}$ من الداخل من جهة أ بنسبة م: ن ، جـ (س، ص) نقطة التقسيم حيث:

$$س = \frac{م\, س_2 + ن\, س_1}{م + ن} ، ص = \frac{م\, ص_2 + ن\, ص_1}{م + ن}.$$

- تقسيم $\overline{أب}$ من الخارج من جهة أ بنسبة م: ن ، جـ (س، ص) نقطة التقسيم حيث:

$$س = \frac{م\, س_2 - ن\, س_1}{م - ن} ، ص = \frac{م\, ص_2 - ن\, ص_1}{م - ن}.$$

- ميل الخط المستقيم = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$.

- ميل $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ(س$_1$، ص$_1$)، ب(س$_2$، ص$_2$):

$$م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} \text{ شرط أن: } س_1 \neq س_2.$$

- ميل المستقيم م يساوي ظل الزاوية θ التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات: م = ظاθ.

- إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـ د}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{أب}$ يساوي ميل $\overleftrightarrow{جـ د}$ وبالعكس.

- إذا كانا $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ د}$ متعامدين فإن ناتج ضرب ميليهما يساوي -1 وبالعكس.

- معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل (م) والجزء المقطوع من محور الصادات ص = م س + ن .

- طول العمود النازل من النقطة م (س$_1$ ، ص$_1$) على المستقيم (ل) ومعادلته أس + ب ص + جـ = ٠ هو:

$$ف = \frac{|أس_1 + ب\, ص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}.$$

- معادلة الدائرة التي مركزها م (د، هـ) وطول نصف قطرها نق: $(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$.

- الصورة العامة لمعادلة الدائرة: $س^2 + ص^2 + ل س + ك ص + ب = ٠$ حيث ل، ك، ب ثوابت

وحيث إن مركز الدائرة $\left(-\frac{ل}{٢} ، -\frac{ك}{٢}\right)$ ، $نق = \frac{١}{٢}\sqrt{ل^2 + ك^2 - ٤ب}$ حيث $ل^2 + ك^2 - ٤ب > ٠$

- لدراسة العلاقة بين دائرتين متقاطعتين نستخدم متباينة المثلث.

- لإيجاد ميل المماس عند نقطة على دائرة نستخدم العلاقة: ميل المماس × ميل نق = −١ .

الوحدة العاشرة

الإحصاء والاحتمال
Statistic and Probability

مشروع الوحدة: اختيار وظيفة

١ مقدمة المشروع: هل تحلم بمتابعة دراستك الجامعية؟ أو بشراء سيارة؟ أو امتلاك منزل؟ أو تنفيذ مشروع يؤمن لك مستقبلًا زاهرًا؟

أسئلة كثيرة تعبر حتمًا في مخيلتك، ولكن كيف تجيب عنها؟

إن التفكير بادخار مبلغ من المال لفترات معينة يُمكِّن أي شخص من تحقيق أجزاء مهمة من أحلامه.

٢ الهدف: إن البدء بوضع موازنة صغيرة لمدخولك ومصروفك واستخدام برنامج **Excel** على الحاسوب وصنع قرارات عن كيفية إدارة الأموال سوف يكون الهدف الأساسي لهذا المشروع، حيث ستجد سبيلًا إلى ادخار مبلغ محدد خلال فترات من أسابيع أو من أشهر.

٣ اللوازم: حاسوب - آلة حاسبة.

٤ المتابعة:

شجع الطلاب على الإجابة عن الأسئلة التالية:

أ ما المبلغ الذي يحصل عليه الطالب؟ (من الأهل - راتب - مقابل عمل ...)

ب ما المبلغ الذي يصرفه الطالب في أسبوع؟ (طعام، نقليات، ...)

ج ما المبلغ غير المتوقع الذي يصرفه الطالب؟ (سينما، ألعاب، مجلات، ...)

د ما المبلغ الذي ادخره الطالب؟ (أسبوعيًّا، شهريًّا، ....)

٥ التقرير: حفّز الطلاب على كتابة تقرير مفصل يبين خطوات تنفيذ المشروع مرفقًا بجدولة واضحة للدخل والمصاريف والادخار. شجعهم على تبادل الأفكار ومراجعة حساباتهم إذا كان ذلك ضروريًّا.

دروس الوحدة

تحليل البيانات	الأرباعيات	الانحراف المعياري	طرق العد	الاحتمال المشروط
١٠-١	١٠-٢	١٠-٣	١٠-٤	١٠-٥

الوحدة العاشرة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت عرض البيانات (تمثيل بياني مصور - تمثيل بياني بالأعمدة - تمثيل بياني بالنقاط المجمعة - تمثيل بياني بالخطوط - تمثيل بياني بالدائرة).
- تعلمت وصف البيانات (المتوسط الحسابي - الوسيط - المنوال - مخطط الساق والأوراق).
- استخدمت الشجرة البيانية.
- طبقت طرق العد في حالات يكون فيها الترتيب مهمًا التباديل (التراتيب) وحالات يكون فيها الترتيب غير مهم (التوافيق).
- تعلمت حساب الاحتمال.
- استخدمت التجارب لإيجاد الاحتمالات.

ماذا سوف تتعلم؟

- حساب مقاييس النزعة المركزية جبريًّا وباستخدام التكنولوجيا.
- استخدام هذه المقاييس في تحليل البيانات.
- تحديد الأرباعيات ومجمل الأعداد الخمسة في البيانات وتمثيلها بواسطة الصندوق ذو العارضتين وتفسيرها.
- دراسة تشتت البيانات من خلال علاقتها بالانحراف المعياري.
- تفسير البيانات الإحصائية.
- حل مسائل باستخدام مبدأ العد.
- حل مسائل باستخدام قوانين التوافيق والتباديل.
- الاحتمال المشروط.

المصطلحات الأساسية

تحليل البيانات - مقاييس النزعة المركزية - مجمل الأعداد الخمسة - التشتت - الأرباعيات - الصندوق ذو العارضتين - الانحراف المعياري - التباين - مبدأ العد - التباديل - التوافيق - الأحداث المستقلة - الاحتمال المشروط.

أضف إلى معلوماتك

أحداث نادرة

إن استباق خطر حدوث عطل في حاسوب أو في صاروخ يحمل قمرًا اصطناعيًّا أو في مفاعل نووي، يحتسبه العلماء آخذين بالاعتبار احتمال الخلل في كل من مكوناته.

يهدف العلماء للوصول إلى احتمالات تقرب من $١ : ١٠^{-٦}$ أي أن احتمال حدوث عطل هو قريب من النسبة ١ إلى مليون خلال عام في مفاعل نووي. ولكن إذا كان هناك مجمع لمئة مفاعل نووي؟؟؟

في بعض الصواريخ التي تحمل أقمارًا اصطناعية يقترب احتمال حدوث عطل من $\frac{١}{١٠}$ ولكن هذه النسبة تقل كثيرًا في الرحلات المأهولة.

تحليل البيانات
Data Analysis

سوف تتعلم

- إيجاد مقاييس النزعة المركزية جبريًّا وباستخدام التكنولوجيا
- استخدام مقاييس النزعة المركزية في تحليل البيانات

معلومة رياضية:

مركز الفئة [١٥٥، ١٦٠) هو $\frac{١٥٥ + ١٦٠}{٢} = ١٥٧,٥$

عمل تعاوني

يبين الجدول التالي أطوال القامات بالسنتيمتر عند ٣٠ طالبًا في المرحلة الثانوية.

١٧٠	١٥٨	١٦٤	١٧١	١٧٥	١٦٩	١٦٧	١٦٨	١٦٣	١٧٢
١٧٤	١٥٩	١٦٩	١٧٧	١٦٤	١٦٢	١٦٦	١٦٠	١٦٩	١٥٥
١٧٩	١٧٤	١٧١	١٧٥	١٧٠	١٧٣	١٧٥	١٦٨	١٦٥	١٦٨

أ استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد المتوسط الحسابي لأطوال هؤلاء الطلاب.
ما الوسيط لهذه البيانات؟

ب أكمل الجدول التالي:

الفئة	١٥٥–	١٦٠–	١٦٥–	١٧٠–	١٧٥–
التكرار					
مركز الفئة					

جـ ما الفئة التي تتضمن الوسيط؟

د ما الفئة التي تتضمن التكرار الأكبر؟

هـ استخدم مراكز الفئات والتكرار لتجد المتوسط الحسابي لأطوال قامات هؤلاء الطلاب.

و قارن بين النتيجة في السؤال أ والنتيجة في السؤال هـ . ماذا تلاحظ؟

مقاييس النزعة المركزية Measure of Central Tendency

على افتراض أن مدير شركة أو مؤسسة يريد إجراء دراسة حول رواتب الموظفين لعدة أعوام متتالية ويريد عددًا واحدًا يبيّن له متوسط الرواتب في عام معين. فما الذي يحتاج إليه؟

المتوسط الحسابي Mean

المتوسط الحسابي لـ ن من الأعداد

$س_1$، $س_2$، $س_3$، …، $س_ن$، هو:

$$\bar{س} = \frac{س_1 + س_2 + س_3 + \dots + س_ن}{ن}$$

$$= \frac{1}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} س_ر$$

وبصورة عامة يمكننا إيجاد المتوسط الحسابي من جدول تكراري ذو فئات باستخدام القانون التالي:

الربط بالحياة:

لإدخال بيانات ذو متغير منفرد x = {1، 2، 2، 3، 3، 3، 4، 4، 5}،

باستخدام العمود FREQ لتعيين عدد التكرارات لكل بند ({xn; freq$n$})

= {1;1، 2;2، 3;3، 4;2، 5;1}، وحساب الانحراف المعياري للسكان والمتوسط.

SHIFT MODE (SETUP) ⊽ 4 (STAT) 1 (ON)

MODE 3 (STAT) 1 (1 -VAR)

1 = 2 = 3 = 4 = 5 = ⊽ ◑

1 = 2 = 3 = 4 = 2 =

AC SHIFT 1 (STAT) 3 (Var) 2 ($\bar{x}$) =

AC SHIFT 1 (STAT) 3 (Var) 2 (σx) =

STAT x		FREQ
3	3	3
4	4	2
5	5	1

3

1.154700538

الناتج: المتوسط ٣ الانحراف المعياري للسكان: 1.154700538

قانون: (الطريقة المباشرة)

$$\bar{س} = \frac{ت_1 س_1 + ت_2 س_2 + ت_3 س_3 + \dots + ت_ن س_ن}{ت_1 + ت_2 + ت_3 + \dots + ت_ن}$$

$$= \frac{\sum_{ر=1}^{ن} (ت_ر س_ر)}{\sum_{ر=1}^{ن} ت_ر}$$

حيث $ت_ر$ تكرار الفئة ر،

$س_ر$ مركز الفئة ر،

ن عدد الفئات

مثال (١)

يبيّن الجدول التالي الأوزان بالكيلوجرام لِـ ٦٠ طالبًا في المرحلة الثانوية.

أوجد المتوسط الحسابي لأوزان هؤلاء الطلاب.

الفئة	٥٠-	٥٥-	٦٠-	٦٥-	٧٠-	٧٥-	٨٠-
التكرار	٤	٧	١٢	١٤	١١	٩	٣

الحل:

يمكن تكوين الجدول التالي: (استخدم الآلة الحاسبة)

الفئة	مركز الفئة $س_ر$	التكرار $ت_ر$	$ت_ر س_ر$
٥٠-	٥٢,٥	٤	٢١٠
٥٥-	٥٧,٥	٧	٤٠٢,٥
٦٠-	٦٢,٥	١٢	٧٥٠
٦٥-	٦٧,٥	١٤	٩٤٥
٧٠-	٧٢,٥	١١	٧٩٧,٥
٧٥-	٧٧,٥	٩	٦٩٧,٥
٨٠-	٨٢,٥	٣	٢٤٧,٥
		$\sum_{ر=١}^{٧} ت_ر = ٦٠$	$\sum_{ر=١}^{٧} ت_ر س_ر = ٤٠٥٠$

$$\overline{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{٧} (ت_ر س_ر)}{\sum_{ر=١}^{٧} ت_ر} = \frac{٤٠٥٠}{٦٠} = ٦٧,٥$$

أي أن المتوسط الحسابي لأوزان ٦٠ طالبًا هو ٦٧,٥ كيلوجرامًا.

حاول أن تحل

١ يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات ٧٠ طالبًا في مادة الرياضيات حيث النهاية العظمى ١٠٠ درجة.

أوجد المتوسط الحسابي لهذه الدرجات.

الفئة	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-
التكرار	٤	٨	١٤	١٥	١٣	٩	٤	٣

يمكن تبسيط الحسابات وإيجاد قيمة تقريبية أيضًا للمتوسط الحسابي.

نأخذ وسطًا فرضيًّا ف (من المستحسن أن يكون مركز الفئة الذي يقابل أكبر تكرار للبيانات).

الوسيط Median

الوسيط لعدد ن من القيم المرتبة تصاعديًّا أو تنازليًّا هو:

أ العدد الذي يتوسط القيم إذا كان العدد ن فرديًّا.

ب المتوسط الحسابي للعددين في منتصف القيم إذا كان العدد ن زوجيًّا.

أي أن الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $\frac{ن + ١}{٢}$ من الأعداد إذا كان العدد ن فرديًّا ومتوسط القيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢}$ + ١ من الأعداد إذا كان العدد ن زوجيًّا.

يمكن إيجاد الوسيط باستخدام التمثيل البياني للتكرار المتجمع الصاعد وللتكرار المتجمع النازل أو لكليهما.

مثال (٢)

يوضح الجدول التالي التوزيع التكراري لأطوال قامات ٥٥ طالبًا في المرحلة الثانوية.

أكمل الجدول لإيجاد الوسيط باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار المتجمع الصاعد.

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
١٥٠-	٣		
١٥٥-	٧		
١٦٠-	٩		
١٦٥-	١٢		
١٧٠-	١٠		
١٧٥-	٨		
١٨٠-	٤		
١٨٥-	٢		

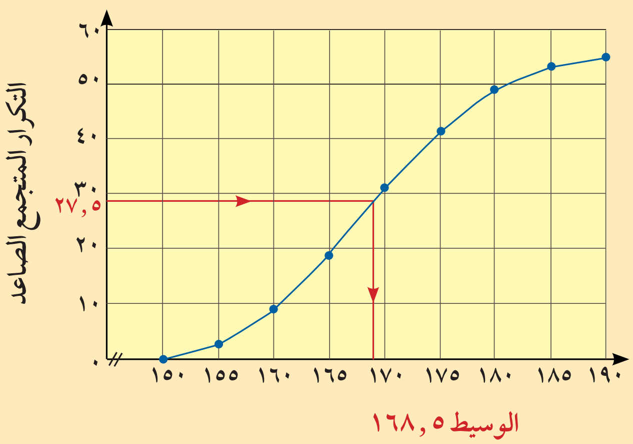
الحل:

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
١٥٠-	٣	أقل من ١٥٥	٣
١٥٥-	٧	أقل من ١٦٠	١٠
١٦٠-	٩	أقل من ١٦٥	١٩
١٦٥-	١٢	أقل من ١٧٠	٣١
١٧٠-	١٠	أقل من ١٧٥	٤١
١٧٥-	٨	أقل من ١٨٠	٤٩
١٨٠-	٤	أقل من ١٨٥	٥٣
١٨٥-	٢	أقل من ١٩٠	٥٥

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\sum ت_ر}{٢}$$

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{٥٥}{٢} = ٢٧,٥$$

من الشكل يتضح أن الوسيط يساوي تقريبًا ١٦٨,٥ .



حاول أن تحل

٢ أكمل جدول البيانات التالي لإيجاد الوسيط لأوزان ٢٠ طالبًا بالكيلوجرام باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار المتجمع الصاعد.

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
٥٥–	٣		
٦٠–	٤		
٦٥–	٥		
٧٠–	٦		
٧٥–	٢		

مثال (٣)

يوضح الجدول التالي توزيع الرواتب الشهرية لمئة موظف في إحدى الشركات بالدينار.
أكمل الجدول لإيجاد الوسيط باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار النازل.

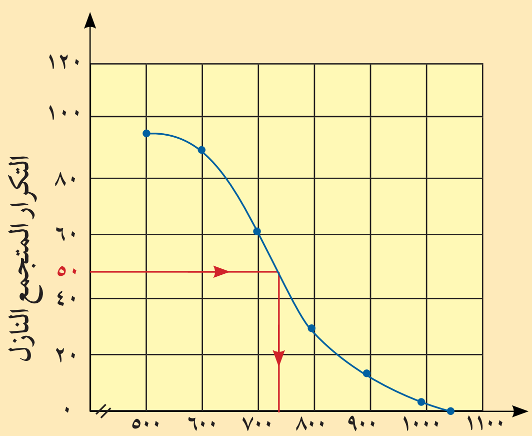
الفئات	التكرار	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٥٠٠–	٥		
٦٠٠–	٣٠		
٧٠٠–	٣٢		
٨٠٠–	٢٠		
٩٠٠–	١٠		
١٠٠٠–	٣		

الحل:

الفئات	التكرار	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٥٠٠–	٥	٥٠٠ فأكثر	١٠٠
٦٠٠–	٣٠	٦٠٠ فأكثر	٩٥
٧٠٠–	٣٢	٧٠٠ فأكثر	٦٥
٨٠٠–	٢٠	٨٠٠ فأكثر	٣٣
٩٠٠–	١٠	٩٠٠ فأكثر	١٣
١٠٠٠–	٣	١٠٠٠ فأكثر	٣

ترتيب الوسيط = $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠

من الشكل يتضح أن الوسيط يساوي تقريبًا ٧٥٠.



الوسيط حوالى ٧٥٠
الحدود الدنيا للفئات

حاول أن تحل

٣ أكمل الجدول التالي لإيجاد الوسيط لدرجات ٢٥ طالبًا باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار المتجمع النازل.

الفئة	التكرار	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٥–	٢		
٨–	٥		
١١–	٨		
١٤–	٦		
١٧–	٤		

يمكن إيجاد قيمة تقريبية للوسيط باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار المتجمع الصاعد ولمنحنى التكرار المتجمع النازل معًا.

مثال (٤)

يوضح الجدول التالي الرواتب الشهرية لمئة موظف في إحدى الشركات بالدينار.

أكمل الجدول التالي لتبين التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل، ثم استخدم التمثيل البياني لهما معًا لإيجاد الوسيط.

الفئات	٥٠٠–	٦٠٠–	٧٠٠–	٨٠٠–	٩٠٠–	١٠٠٠–
التكرار	٥	٣٠	٣٢	٢٠	١٠	٣

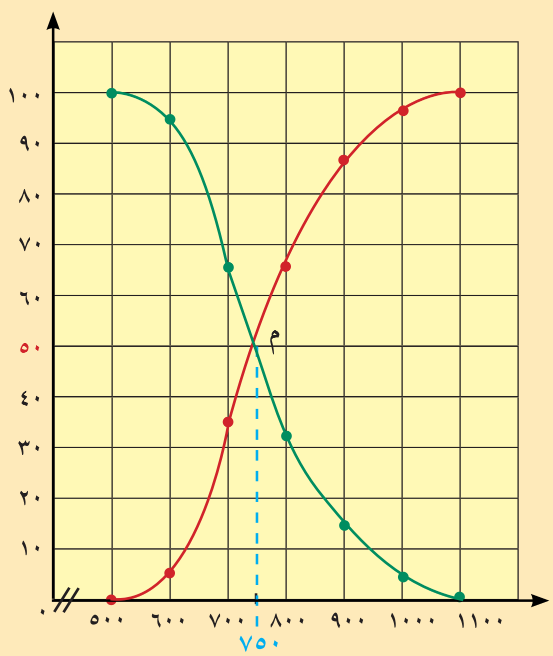
الحل:

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٥٠٠-	٥	أقل من ٦٠٠	٥	٥٠٠ فأكثر	١٠٠
٦٠٠-	٣٠	أقل من ٧٠٠	٣٥	٦٠٠ فأكثر	٩٥
٧٠٠-	٣٢	أقل من ٨٠٠	٦٧	٧٠٠ فأكثر	٦٥
٨٠٠-	٢٠	أقل من ٩٠٠	٨٧	٨٠٠ فأكثر	٣٣
٩٠٠-	١٠	أقل من ١٠٠٠	٩٧	٩٠٠ فأكثر	١٣
١٠٠٠-	٣	أقل من ١١٠٠	١٠٠	١٠٠٠ فأكثر	٣

يتقاطع منحنى تكرار المتجمع الصاعد مع منحنى تكرار المتجمع النازل عند نقطة م.

العمود المرسوم من النقطة م على المحور الأفقي يعطي العدد ٧٥٠ تقريبًا.

الوسيط يساوي ٧٥٠ دينارًا تقريبًا.



حاول أن تحل

٤ أكمل الجدول التالي لدرجات ٦٠ طالبًا في اختبار الرياضيات حيث النهاية العظمى ١٠٠ درجة لتبين التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل، ثم استخدم التمثيل البياني لهما معًا لإيجاد الوسيط.

الفئات	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-
التكرار	٧	١٠	١٧	١٢	٨	٦

المنوال Mode

المنوال هو القيمة الأكثر تكرارًا في البيانات.

مثال (٥)

أوجد المنوال في ما يلي:

أ ٥، ٨، ٩، ٧، ٤، ٥، ٦، ١٠، ٥

ب ١٢، ١٨، ١١، ١٢، ٢٠، ١١، ١٥، ١٦، ١٧، ٢٣

ج ٧، ٧، ٧، ٧، ٧

د ٥، ٦، ٥، ٦، ٥، ٦، ٧

الحل:

أ المنوال = ٥ (الأكثر تكرارًا)

ب يوجد منوالان: ١١، ١٢

ج لا يوجد منوال

د يوجد منوالان: ٥، ٦

حاول أن تحل

٥ أوجد المنوال في ما يلي:

أ ٧، ٥، ١٢، ٦، ٧، ١٤

ب ١٥، ٨، ٩، ١٢، ١٥، ٨، ٧، ١٠

ج ١، ١، ١، ١، ١

د ٣، ٨، ٣، ٨، ٨، ٣، ٤، ٤

ملاحظة:

إذا لم يوجد تكرار في البيانات فلا يوجد منوال لها.

ويمكن أن يوجد أكثر من منوال لمجموعة القيم.

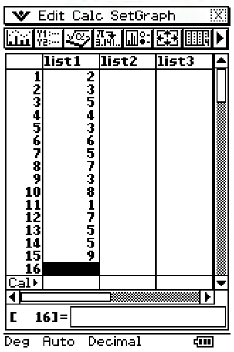
الربط بالحياة:

استخدم الآلة الحاسبة (Casio Classpad 300)

لإيجاد وسيط ومنوال البيانات التالية:

٢، ٣، ٥، ٤، ٣، ٦، ٥، ٧، ٣، ٨، ١، ٧، ٥، ٥، ٩

انقر Statistics (في قائمة التطبيقات).



استخدم list 1؛ تأكد من أن المؤشر في الموضع الأول من list 1.

أدخل ٢ في المركز الأول، وهذا سوف يظهر في الجزء السفلي من الشاشة كما [١] = ٢.

المفتاح (EXE) للانتقال إلى الموضع التالي في القائمة.

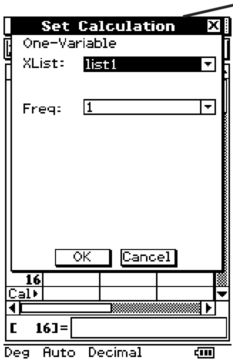
اكتب قيم البيانات المتبقية في لائحة القائمة ١ اضغط على (EXE) بعد كل إدخال. تظهر الشاشة كافة البيانات التي يتم إدخالها في list 1.

العثور على الإحصاء الوصفي للبيانات

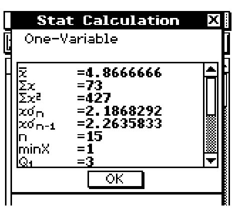
انقر على Calc في شريط القوائم للحصول على الإحصاء الوصفي.

نحن نتعامل مع متغير واحد لذا انقر على One–Variable

فإن نافذة Set Calculation تتيح لك اختيار القائمة التي تحتوي على البيانات ذات الصلة.



اضغط OK



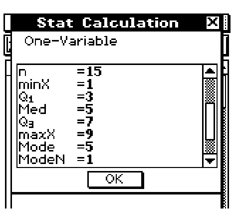
جميع الإحصاءات المتوفرة وصفيًا لهذا المتغير تظهر على الشاشة:

القيمة الأولى، •• تعني. المتوسط الحسابي the mean أي ٤,٨٦٧ (إلى ٣ منازل عشرية)

القيمة الثانية تعني: $\Sigma X = 73$ أي مجموع البيانات 73

n=15 تعني أن عدد قيم مجموعة البيانات ١٥.

نتجه إلى الأسفل لإيجاد كل من الوسيط والمنوال



Med = 5 يعني الوسيط يساوي ٥

Mode = 5 يعني المنوال يساوي ٥

إيجاد المنوال للتوزيع التكراري باستخدام قانون الرافعة:

نحدد الفئة المنوالية وهي الفئة التي يقابلها أكبر تكرار.

نحدد التكرار للفئتين السابقة مباشرة واللاحقة مباشرة للفئة المنوالية على الترتيب $ك_1$ ، $ك_2$.

المنوال يقسم الفئة المنوالية كما في الشكل بحيث إن:

$ك_1 \times س = ك_2 \times (ف - س)$

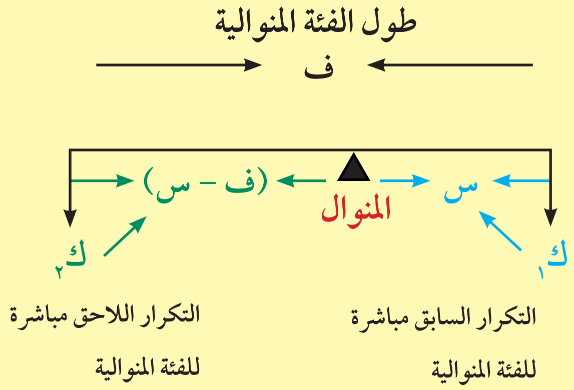
ف = طول الفئة المنوالية

المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + س

هذا ما يعرف «بطريقة الرافعة» لحساب المنوال.

ويمكن وضع صيغة رياضية لقانون الرافعة على الشكل التالي:

$$المنوال = الحد\ الأدنى\ للفئة\ المنوالية + \frac{ك_2}{ك_1 + ك_2} \times ف$$



مثال (٦)

يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لعدد ساعات الدراسة الأسبوعية عند ٥٠ طالبًا.

أوجد المنوال لعدد ساعات الدراسة الأسبوعية عند الطلاب .

الفئة	٣٥−	٤٠−	٤٥−	٥٠−	٥٥−
التكرار	٧	٢٠	١٥	٦	٢

الحل:

باستخدام قانون الرافعة

الحد الأدنى للفئة المنوالية = ٤٠

ف: طول الفئة المنوالية = ٥

$ك_1$: تكرار الفئة السابقة للفئة المنوالية = ٧

$ك_2$: تكرار الفئة اللاحقة للفئة المنوالية = ١٥

$ك_1 \times س = ك_2 \times (ف - س)$

$٧ \times س = ١٥ \times (٥ - س)$

$٧ س = ٧٥ - ١٥ س$

$٢٢ س = ٧٥$

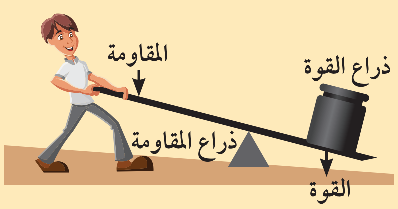
$\therefore\ س = \frac{٧٥}{٢٢}$

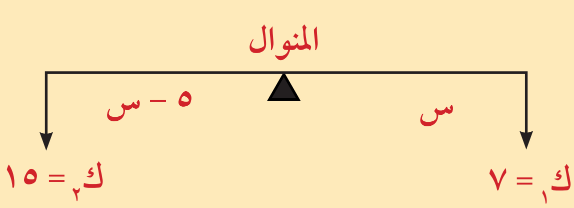
$س \simeq ٣,٤١$

معلومة مفيدة:

قانون الرافعة:

القوة × طول ذراعها = المقاومة × طول ذراعها.





المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + س

∴ المنوال ≃ ٤٠ + ٣,٤١

≃ ٤٣,٤١

وبذلك يكون منوال ساعات الدراسة أسبوعيًّا عند الطلاب ٤٣ ساعة و٢٥ دقيقة تقريبًا.

حاول أن تحل

٦ يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لمعدل الكوليسترول عند ٢٠ شخصًا.

أوجد المنوال لمعدل الكوليسترول عند هؤلاء الأشخاص باستخدام الصيغة الرياضية لقانون الرافعة.

معلومة صحية:

المعدل الطبيعي للكوليسترول في الدم في دولة الكويت:

CHOL ... 3.10 ⟶ 5.20

HDL.D ... 1.04 ⟶ 1.68

الفئة	٠,٠٤-	٠,١٧-	٠,٣٠-	٠,٤٣-	٠,٥٦-	٠,٦٩-
التكرار	١	٣	٤	٧	٤	١

يمكن إيجاد قيمة تقريبية للمنوال بيانيًّا باستخدام المدرج التكراري من خلال تحديد فئة المنوال والفئة السابقة مباشرة والفئة اللاحقة مباشرة.

مثال (٧)

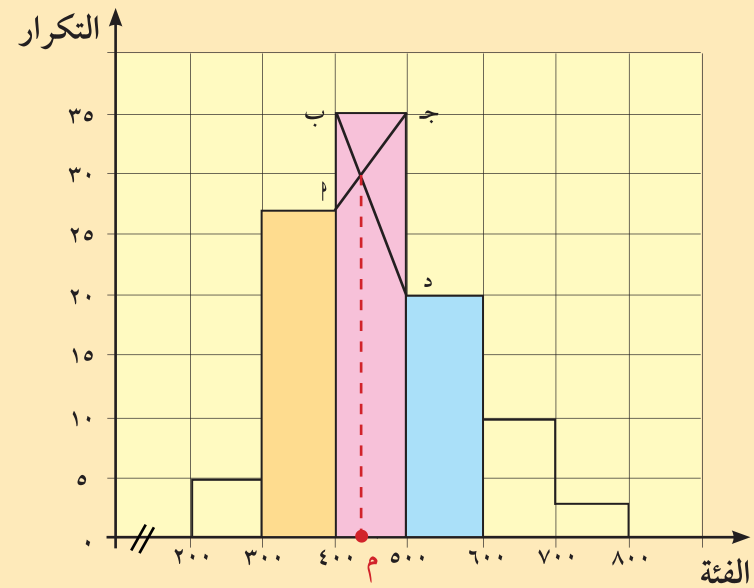
يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لرواتب الموظفين بالدينار في إحدى المؤسسات.

استخدم التمثيل البياني للمدرج التكراري لايجاد قيمة تقريبية لمنوال رواتب الموظفين.

الفئة	٢٠٠-	٣٠٠-	٤٠٠-	٥٠٠-	٦٠٠-	٧٠٠-
التكرار	٥	٢٧	٣٥	٢٠	١٠	٣

الحل:

يبين الجدول أن الفئة المنوالية هي ٤٠٠ – والفئة السابقة المباشرة هي ٣٠٠ – والفئة اللاحقة مباشرة هي ٥٠٠ –



من نقطة تقاطع أجـ مع ب د نرسم عمودًا على المحور الأفقي يقطعه في النقطة م. فنحصل على قيمة تقريبية للمنوال وهي ٤٤٥ دينارًا.

حاول أن تحل

(٧) يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان ٦٠ طالبًا ثانويًا بالكيلوجرام. استخدم المدرج التكراري لإيجاد قيمة تقريبية لمنوال أوزان هؤلاء الطلاب.

الفئة	٦٠–	٦٤–	٦٨–	٧٢–	٧٦–	٨٠–
التكرار	٧	١٢	١٨	١٠	٨	٥

١٠–٢

الأرباعيات
Quartiles

سوف تتعلم

من مقاييس التشتت
- المدى
- الأرباعيات
- الصندوق ذو العارضتين

عمل تعاوني

كانت درجات الطلاب في مادة الرياضيات حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة كما يلي:

١٤، ١٥، ١٧، ٩، ٨، ١٠، ١٣، ١٤، ١٦، ١٧،

٧، ٥، ٦، ٩، ١٤، ١٩، ١٥، ١٠، ١١،

١٤، ١٠، ١٧، ١٦، ١٨، ١٠، ٦، ١٢، ١٠.

١ أوجد الفرق بين أعلى قيمة وأدنى قيمة.

٢ رتب قيم هذه البيانات تصاعديًّا.

٣ أوجد الوسيط لهذه البيانات.

٤ يقسم الوسيط قيم البيانات إلى قسمين متساويين:

أ أوجد الوسيط الأدنى لمجموعة القيم التي هي أصغر من الوسيط الذي حصلت عليه في السؤال (٣).

ب أوجد الوسيط الأعلى لمجموعة القيم التي هي أكبر من الوسيط الذي حصلت عليه في السؤال (٣).

٥ رتب تصاعديًّا القيم التالية:

القيمة الصغرى للبيانات، الوسيط الأدنى، الوسيط، الوسيط الأعلى، القيمة العظمى للبيانات.

تذكر:

الوسيط: هو القيمة من البيانات التي تأتي في المنتصف بعد ترتيبها تصاعديًّا أو تنازليًّا.

إن **مقاييس النزعة المركزية** تعطينا فكرة عن قرب أو بعد قيم البيانات عن المتوسط الحسابي أو عن الوسيط ولكنها لا توضح كيفية توزيع هذه القيم وانتشارها.

تصف مقاييس الانتشار (التشتت) مدى التغير في البيانات.

يكون التشتت صغيرًا عندما تكون مفردات البيانات متقاربة من بعضها ويكون كبيرًا عندما تكون المفردات متباعدة

فأهمية دراسة التشتت تكمن في معرفة مدى تجانس قيم هذه البيانات .

إذا كان لدينا مجموعتان من البيانات لديهما نفس المتوسط الحسابي.

فإن المجموعة التي قيم بياناتها قريبة أكثر من المتوسط الحسابي تكون الأكثر تجانسًا وانسجامًا في ما بينها.

أبسط مقاييس الانتشار هو معرفة المدى.

المدى = القيمة العظمى − القيمة الصغرى.

يوضح المدى الانتشار الكامل لقيم البيانات والذي يمكن أن يتضمن القيمة المتطرفة والتي قد تزيد المدى بشكل كبير، وبالتالي تعطي فكرة خاطئة عن انتشار قيم البيانات.

مثال (١)

أوجد المدى لقيم البيانات التالية:

أ ٧، ٨، ١٠، ١٢، ٦، ٩، ١١، ١٤

ب ١٢، ١٥، ١٠، ١٠، ١١، ٢٠، ١٨، ٤٧

الحل:

أ المدى = ١٤ − ٦ = ٨

ب المدى = ٤٧ − ١٠ = ٣٧. القيمة المتطرفة ٤٧ أعطت مدًى كبيرًا جدًّا لانتشار القيم.

حاول أن تحل

١ أوجد المدى لقيم البيانات التالية:

أ ٥٧، ٥٣، ٤٠، ٤٥، ٤٨، ٥٩

ب ١٢٥، ١٧٦، ١٢٨، ١٣٠، ١٣٢، ١٢٤

لكي نتجاهل المدى الكبير الناتج عن القيمة المتطرفة في قيم البيانات نستخدم الأرباعيات والمدى الأرباعي.

الأرباعيات Quartiles

يقسم الوسيط قيم البيانات إلى نصفين وتقسم الأرباعيات قيم البيانات إلى ٤ أرباع ومنها نستنتج:

أ الأرباعي الأول $ر_١$ وهو وسيط النصف الأدنى من قيم البيانات ويسمى **الأرباعي الأدنى**.

ب الأرباعي الثاني $ر_٢$ وهو وسيط قيم البيانات ويسمى **الوسيط**.

جـ الأرباعي الثالث $ر_٣$ وهو وسيط النصف الأعلى من قيم البيانات ويسمى **الأرباعي الأعلى**.

د المدى الأرباعي = $ر_٣ - ر_١$.

تسمى (القيمة الصغرى، الأرباعي الأدنى، الوسيط، الأرباعي الأعلى، القيمة العظمى) "مجمل الأعداد الخمسة".

مثال (٢)

يبين الجدول التالي نتائج الدوري الكويتي الممتاز لكرة القدم ٢٠١١ − ٢٠١٢.

الفريق	القادسية	الكويت	العربي	السالمية	الجهراء	كاظمة	النصر	الشباب
النقاط	٥١	٤٠	٣٣	٢٥	٢٤	٢٢	١٧	١٤

أ رتب هذه القيم تصاعديًّا.

ب أوجد قيمة المدى.

جـ أوجد قيم الوسيط والأرباعيات (الأدنى والأعلى والمدى الأرباعي).

د اكتب "مجمل الأعداد الخمسة".

الحل:

أ) ١٤، ١٧، ٢٢، ٢٤، ٢٥، ٣٣، ٤٠، ٥١

ب) المدى: ٥١ − ١٤ = ٣٧ (نلاحظ أن المدى كبير)

جـ) الوسيط ($ر_٢$) = $\frac{٢٤ + ٢٥}{٢}$ = ٢٤,٥

البيانات مع الوسيط: ١٤، ١٧، ٢٢، ٢٤، $ر_٢$ = ٢٤,٥، ٢٥، ٣٣، ٤٠، ٥١

الأرباعي الأدنى هو وسيط القيم: ١٤، ١٧، ٢٢، ٢٤

$ر_١$ = $\frac{١٧ + ٢٢}{٢}$ = ١٩,٥

الأرباعي الأعلى هو وسيط القيم: ٢٥، ٣٣، ٤٠، ٥١

$ر_٣$ = $\frac{٣٣ + ٤٠}{٢}$ = ٣٦,٥

المدى الأرباعي = ٣٦,٥ − ١٩,٥ = ١٧

د) مجمل الأعداد الخمسة: (١٤، ١٩,٥، ٢٤,٥، ٣٦,٥، ٥١)

ملاحظة: يمكن ترتيب قيم البيانات على الشكل التالي:

١٤، ١٧، $ر_١$ = ١٩,٥، ٢٢، ٢٤، الوسيط $ر_٢$ = ٢٤,٥، ٢٥، ٣٣، $ر_٣$ = ٣٦,٥، ٤٠، ٥١

حاول أن تحل

٢) يبين الجدول التالي نتائج الدوري الكويتي لكرة القدم ٢٠١٠ – ٢٠١١.

الفريق	القادسية	الكويت	العربي	كاظمة	الجهراء	النصر	السالمية	الشباب
النقاط	٥١	٤٧	٣٩	٣٨	١٩	١٦	١٤	١٢

أ) أوجد الوسيط والمدى والأرباعيات والمدى الأرباعي لقيم هذه البيانات.

ب) اكتب "مجمل الأعداد الخمسة".

مخطط الصندوق Box Plot

هو تمثيل بياني يصف مجمل الأعداد الخمسة لقيم البيانات وهو يتكون من مستطيل مركزي (الصندوق) يمثل الأرباعي الأدنى $ر_١$ والوسيط $ر_٢$ والأرباعي الأعلى $ر_٣$ وقطعتين مستقيمتين من الجهتين تمثلان القيمة الصغرى والقيمة العظمى ونسميها **العارضتين**.

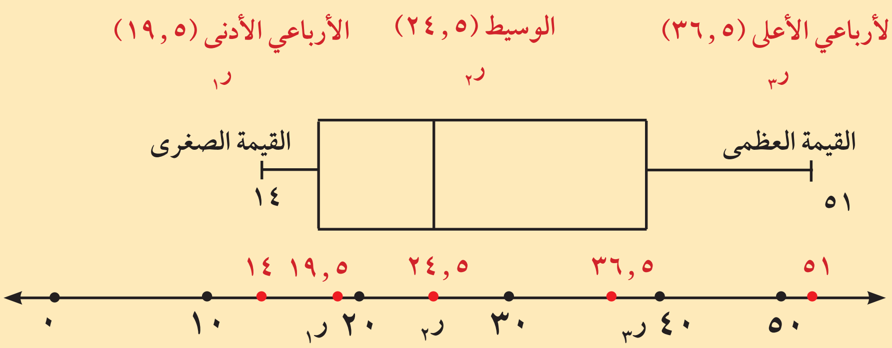
مثال (٣)

استخدم "مجمل الأعداد الخمسة" من المثال (٢) لترسم مخطط الصندوق ذي العارضتين. فسّر النتائج.

الحل:

"مجمل الأعداد الخمسة" : (١٤، ١٩,٥، ٢٤,٥، ٣٦,٥، ٥١)

مخطط الصندوق



يبين مخطط الصندوق أن المنطقة المحصورة بين الوسيط والأرباعي الأدنى هي أصغر من المنطقة المحصورة بين الوسيط والأرباعي الأعلى. أي أن الوسيط أقرب إلى الأرباعي الأدنى.

ولتفسير ذلك:

إن انتشار قيم البيانات قريبة أكثر إلى بعضها بين الوسيط والأرباعي الأدنى وتبتعد عن بعضها بين الوسيط والأرباعي الأعلى. مما يعني أن هناك مجموعتين من الأندية متقاربة في ما بينها المجموعة الأولى بين المركز الأول والثالث ومجموعة بين المركز الرابع والأخير.

كما أن مخطط الصندوق لا يبين وجود قيمة متطرفة.

حاول أن تحل

٣ ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين للبيانات الموجودة في فقرة "حاول أن تحل (٢)". فسّر النتائج.

يمكن رسم مخططين لصندوقين لمقارنة النتائج.

مثال (٤)

تمثل المجموعة الأولى بيانات معدل مصروف المنزل الشهري على الطعام بالدولار الأمريكي في ١٢ بلدًا أوروبيًّا:

٣١٠، ٤٢٠، ٧٥٠، ٤٥٠، ٥٢٠، ٦٨٠، ٤٧٠، ٤٩٠، ٥٩٠، ٥٦٠، ٣٨٠، ٣٥٠ .

تمثل المجموعة الثانية بيانات معدل مصروف المنزل الشهري على الطعام بالدولار الأمريكي في ١٢ بلدًا عربيًّا:

١٠٥٠، ٦٥٠، ٧٠٠، ٣٧٠، ٩٠٠، ٨٠٠، ٢٢٠، ٨٣٠، ١١٠٠، ١١٩٠، ١٩٠، ٧٦٠.

١ رتب البيانات بطريقة تصاعدية.

٢ أوجد الوسيط والأرباعي الأدنى والأعلى لكل مجموعة من البيانات بالإضافة إلى القيمة الأصغر والقيمة الأكبر لكل مجموعة من البيانات.

٣ ارسم مخططين لصندوقين مستخدمًا البيانات المرتبة تصاعديًّا لكل من المجموعتين الأولى والثانية.

٤ فسّر النتائج.

الحل:

١ المجموعة الأولى بحسب الترتيب التصاعدي:

٣١٠، ٣٥٠، ٣٨٠، ٤٢٠، ٤٥٠، ٤٧٠، ٤٩٠، ٥٢٠، ٥٦٠، ٥٩٠، ٦٨٠، ٧٥٠.

المجموعة الثانية بحسب الترتيب التصاعدي:

١٩٠، ٢٢٠، ٣٧٠، ٦٥٠، ٧٠٠، ٧٦٠، ٨٠٠، ٨٣٠، ٩٠٠، ١٠٥٠، ١١٠٠، ١١٩٠.

٢ القيمة الصغرى = ٣١٠، وسيط المجموعة الأولى = $\frac{٤٧٠ + ٤٩٠}{٢}$ = ٤٨٠ ،

الأرباعي الأدنى = ٤٠٠، الأرباعي الأعلى = ٥٧٥،

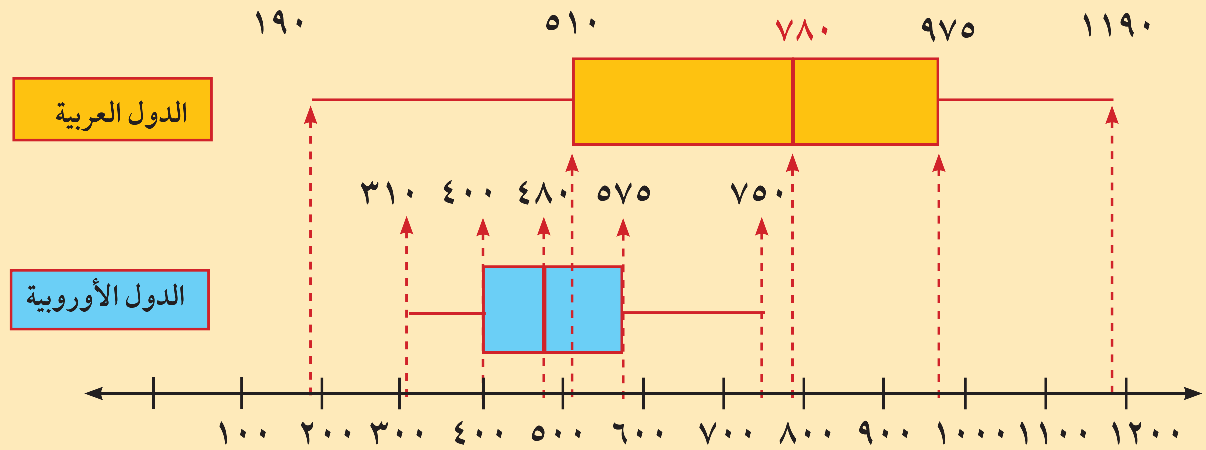
القيمة الكبرى = ٧٥٠.

القيمة الصغرى = ١٩٠، وسيط المجموعة الثانية = $\frac{٧٦٠ + ٨٠٠}{٢}$ = ٧٨٠ ،

الأرباعي الأدنى = ٥١٠ ، الأرباعي الأعلى = ٩٧٥،

القيمة الكبرى = ١١٩٠.

٣



٤ الصندوق الذي يمثل الدول العربية أطول من الصندوق الذي يمثل الدول الأوروبية ما معناه أن هناك تباعد في المصروف الشهري بين الدول العربية والدول الأوروبية على الطعام. ففي الدول الأوروبية نجد أن الوسيط أقرب إلى الأرباعي الأدنى وهو أبعد من الأرباعي الأعلى مما يدل على أن المصروف على الطعام أقرب إلى ٤٥٠ دولارًا شهريًّا علمًا أنه لا يوجد قيمًا متطرفة لأن المدى يساوي:

٧٥٠-٣١٠ = ٤٤٠.

أما في مجموعة الدول العربية الوسيط أقرب إلى الأرباعي الأعلى من الأرباعي الأدنى مما يعني أن المجتمعات العربية تنفق كثيرًا على الطعام حوالى ٧٨٠ دولارًا شهريًّا، ولكن نجد أيضًا أن هناك تفاوت كبير في المجتمعات العربية لأن المدى يساوي:

١١٩٠-١٩٠ = ١٠٠٠ ما يدل على التفاوت الاجتماعي في الدول العربية.

حاول أن تحل

٤ ارسم مخططين لصندوقين لقيم البيانات التالية وفسّر النتائج:

أ ٧، ٨، ٤، ٥، ٩، ١٠، ٦

ب ١٢، ١٠، ١٥، ١٦، ٢٠، ١٧، ١٨، ٣٨

١٠-٣

الانحراف المعياري
Standard Deviation

سوف تتعلم

من مقاييس التشتت:
- التباين
- الانحراف المعياري

عمل تعاوني

أراد معلم الفصل مقارنة درجات ٨ طلاب الأوائل من الشعبة (أ) والشعبة (ب) للصف العاشر حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة.

درجات الشعبة أ: ١٠، ١٢، ١٣، ١٤، ١٥، ١٧، ١٩، ١٢.

درجات الشعبة ب: ١١، ١٢، ١٣، ١٤، ١٤، ١٥، ١٦، ١٧.

أ) أوجد $\overline{س}$ المتوسط الحسابي لدرجات طلاب الشعبة أ.

ب) أوجد $\overline{ص}$ المتوسط الحسابي لدرجات طلاب الشعبة ب.

جـ) استنادًا إلى قيم $\overline{س}$، $\overline{ص}$: هل يستطيع معلم الفصل أن يقرر أي مجموعة من الطلاب درجاتهم هي الأفضل؟

د) أكمل الجدولين التاليين:

شعبة (أ)

$س_ر$	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^٢$
١٠		
١٢		
١٢		
١٣		
١٤		
١٥		
١٧		
١٩		
	المجموع	

شعبة (ب)

$ص_ر$	$ص_ر - \overline{ص}$	$(ص_ر - \overline{ص})^٢$
١١		
١٢		
١٣		
١٤		
١٤		
١٥		
١٦		
١٧		
	المجموع	

سوف تتعلم في هذا البند مؤشرات أخرى من مقاييس التشتت وهي التباين $ع^٢$ والانحراف المعياري ع.

التباين والانحراف المعياري Variance and Standard Deviation

إذا كانت $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، ...، $س_ن$ مجموعة من القيم عددها ن حيث متوسطها الحسابي $\overline{س}$ فإن:

$$\text{التباين} = ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢}{ن}$$

ومنه الانحراف المعياري = ع = $\sqrt{ع^٢}$

إذا كانت $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، ...، $س_ن$ هي قيم بيانات؛ $ت_١$، $ت_٢$، $ت_٣$، .... ، $ت_ن$ هي تكرار هذه القيم على الترتيب فيكون التباين لهذه القيم هو:

$$ع^٢ = \frac{ت_١(س_١ - \overline{س})^٢ + ت_٢(س_٢ - \overline{س})^٢ + ... + ت_ن(س_ن - \overline{س})^٢}{ت_١ + ت_٢ + ... + ت_ن}$$

$$= \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر (س_ر - \overline{س})^٢}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر}$$

والانحراف المعياري = $ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر (س_ر - \overline{س})^٢}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر}}$

معلومة رياضية:

- $(س_ر - \overline{س})$ هي انحراف $س_ر$ عن المتوسط الحسابي.
- المتوسط الحسابي: هو ناتج قسمة مجموع قيم البيانات على عدد هذه القيم.

مثال (١)

أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم البيانات:
٤، ٦، ٨، ٥، ٣، ٧، ٢

الحل:

نوجد أولًا المتوسط الحسابي:

$$\overline{س} = \frac{٤ + ٦ + ٨ + ٥ + ٣ + ٧ + ٢}{٧} = \frac{٣٥}{٧} = ٥$$

نكون الجدول التالي:

القيمة $س_ر$	الانحراف عن المتوسط الحسابي $س_ر - \overline{س}$	مربع الانحراف عن المتوسط الحسابي $(س_ر - \overline{س})^٢$
٤	١-	١
٦	١	١
٨	٣	٩
٥	٠	٠
٣	٢-	٤
٧	٢	٤
٢	٣-	٩
		المجموع = ٢٨

التباين $ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢}{ن} = \frac{٢٨}{٧} = ٤$

التباين $ع^2 = ٤$

الانحراف المعياري $ع = \sqrt{٤} = ٢$.

حاول أن تحل

١ أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم البيانات:

٩، ٧، ٨، ٦، ٤، ٢

مثال (٢)

يمكن استخدام الآلة الحاسبة

يبين الجدول التالي عدد الساعات القصوى لعمر ٧ مصابيح كهربائية بالساعات من إنتاجين مختلفين.

إنتاج (أ)	١٠٥٠	٩١٠	١٠٠٠	١٠٣٠	٩٤٠	٩٦٠	٩٧٠
إنتاج (ب)	١١٣٠	٧٠٠	٩٧٠	٩٦٠	١٠٥٠	١١٨٠	٨٧٠

أ أوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$ للإنتاج (أ) والمتوسط الحسابي $\overline{ص}$ للإنتاج (ب).

ب أوجد وسيط الإنتاج (أ) ثم وسيط الإنتاج (ب).

جـ ستبين الحسابات في السؤالين (أ)، (ب) أن المتوسط الحسابي في الإنتاجين هو نفسه وأن الوسيط في الإنتاجين هو نفسه.

أوجد الانحراف المعياري $ع_1$ في الإنتاج (أ) والانحراف المعياري $ع_2$ في الإنتاج (ب). ماذا تستنتج؟

أي إنتاج هو الأفضل؟

الحل:

أ $$\overline{س} = \frac{١٠٥٠ + ٩١٠ + ١٠٠٠ + ١٠٣٠ + ٩٤٠ + ٩٦٠ + ٩٧٠}{٧} = ٩٨٠$$

$$\overline{ص} = \frac{١١٣٠ + ٧٠٠ + ٩٧٠ + ٩٦٠ + ١٠٥٠ + ١١٨٠ + ٨٧٠}{٧} = ٩٨٠$$

ب إنتاج (أ): ٩١٠، ٩٤٠، ٩٦٠، ٩٧٠، ١ ٠٠٠، ١ ٠٣٠، ١ ٠٥٠
الوسيط = ٩٧٠
إنتاج (ب): ٧٠٠، ٨٧٠، ٩٦٠، ٩٧٠، ١ ٠٥٠، ١ ١٣٠، ١ ١٨٠
الوسيط = ٩٧٠

جـ

القيمة $س_ر$	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^٢$
١ ٠٥٠	٧٠	٤ ٩٠٠
٩١٠	−٧٠	٤ ٩٠٠
١ ٠٠٠	٢٠	٤٠٠
١ ٠٣٠	٥٠	٢ ٥٠٠
٩٤٠	−٤٠	١ ٦٠٠
٩٦٠	−٢٠	٤٠٠
٩٧٠	−١٠	١٠٠
		المجموع = ١٤ ٨٠٠

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢}{ن}}$$

الانحراف المعياري في الإنتاج (أ)

$ع_١ = \sqrt{٢\ ١١٤,٢٨٦} = ٤٥,٩٨$

$ص_ر$	$ص_ر - \overline{ص}$	$(ص_ر - \overline{ص})^٢$
١ ١٣٠	١٥٠	٢٢ ٥٠٠
٧٠٠	−٢٨٠	٧٨ ٤٠٠
٩٧٠	−١٠	١٠٠
٩٦٠	−٢٠	٤٠٠
١٠٥٠	٧٠	٤ ٩٠٠
١ ١٨٠	٢٠٠	٤٠ ٠٠٠
٨٧٠	−١١٠	١٢ ١٠٠
		المجموع = ١٥٨ ٤٠٠

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢}{ن}}$$

الانحراف المعياري في الإنتاج (ب)

$ع_٢ = \sqrt{٢٢\ ٦٢٨,٥٧} = ١٥٠,٤٣$

نلاحظ أن $ع_٢$ يساوي ٣ $ع_١$ تقريبًا.

لذا في الإنتاج (ب) التشتت عن المتوسط الحسابي كبير وبالتالي المصابيح الكهربائية في الإنتاج (أ) هي الأفضل.

معلومة:

من المتعارف عليه عند الإحصائيين أنه كلما كان الانحراف المعياري صغيرًا كلما كان تشتت قيم البيانات أقرب إلى المتوسط الحسابي، وكلما كان كبيرًا كان تشتت قيم البيانات بعيدًا عن المتوسط الحسابي.

حاول أن تحل

٢ لتكن (أ)، (ب) مجموعتين من البيانات

(أ): ١٢، ١٠، ٧، ١٥، ٨، ١٩، ٢٠

(ب): ١٤، ١٨، ١٢، ٩، ٨، ١١، ١٩

أ أوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$ لقيم (أ) والمتوسط الحسابي $\overline{ص}$ لقيم (ب). ماذا تلاحظ؟

ب أوجد وسيط قيم المجموعة (أ)، ثم وسيط قيم المجموعة (ب). ماذا تلاحظ؟

جـ أوجد الانحراف المعياري $ع_١$ لقيم المجموعة (أ) والانحراف المعياري $ع_٢$ لقيم المجموعة (ب). أي القيم أقل تشتتًا عن متوسطها الحسابي؟ اشرح إجابتك.

ملاحظة: لحساب التباين لقيم بيانات في جدول تكراري ذو فئات نعتبر $س_ر$ هي مركز الفئة.

مثال (٣)

يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات ٦٠ طالبًا في امتحان نهاية العام الدراسي حيث النهاية العظمى ١٠٠ درجة.

الفئة (درجات)	٠–	٢٠–	٤٠–	٦٠–	٨٠–
التكرار	٤	٦	١٦	٢٤	١٠

أوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$ والتباين $ع^٢$ والانحراف المعياري ع لقيم هذه البيانات.

الحل:

المتوسط الحسابي: $\frac{\sum \text{س}_{\text{ر}}\text{ت}_{\text{ر}}}{\sum \text{ت}_{\text{ر}}} = \frac{\text{٣٦٠٠}}{\text{٦٠}} = \text{٦٠}$

$\therefore \ \bar{\text{س}} = \text{٦٠}$

الفئة	مركز الفئة $\text{س}_{\text{ر}}$	التكرار $\text{ت}_{\text{ر}}$	$\text{س}_{\text{ر}}\text{ت}_{\text{ر}}$	$(\text{س}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}})$	$(\text{س}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}})^2$	$(\text{س}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}})^2 \times \text{ت}_{\text{ر}}$
-٠	١٠	٤	٤٠	-٥٠	٢٥٠٠	١٠٠٠٠
-٢٠	٣٠	٦	١٨٠	-٣٠	٩٠٠	٥٤٠٠
-٤٠	٥٠	١٦	٨٠٠	-١٠	١٠٠	١٦٠٠
-٦٠	٧٠	٢٤	١٦٨٠	١٠	١٠٠	٢٤٠٠
-٨٠	٩٠	١٠	٩٠٠	٣٠	٩٠٠	٩٠٠٠
		المجموع: ٦٠	المجموع: ٣٦٠٠			المجموع: ٢٨٤٠٠

التباين $= \frac{\sum (\text{س}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}})^2 \text{ت}_{\text{ر}}}{\sum \text{ت}_{\text{ر}}} = \frac{\text{٢٨٤٠٠}}{\text{٦٠}} = \text{٤٧٣}\frac{\text{١}}{\text{٣}}$

التباين $= \text{ع}^2 = \text{٤٧٣},\overline{\text{٣}}$

الانحراف المعياري: $\text{ع} = \sqrt{\text{٤٧٣},\overline{\text{٣}}} \simeq \text{٢١},\text{٧٥٦}$

حاول أن تحل

٣ يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان ١٠٠ طالب ثانوي (الوزن بالكيلوجرام).

الفئة	-٦٠	-٦٤	-٦٨	-٧٢	٧٦
التكرار	٥	١٨	٤٢	٢٧	٨

أوجد المتوسط الحسابي $\bar{\text{س}}$ والانحراف المعياري ع لهذه الأوزان.

مثال (٤)

إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم من بيانات هو $ع_ر$ = ٦ وأن مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو ٥٤٠، فما عدد قيم هذه البيانات؟

الحل:

نأخذ القاعدة: $ع_ر^{٢} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^{٢}}{ن}$

وبالتعويض: $(٦)^{٢} = \frac{٥٤٠}{ن}$

$ن = \frac{٥٤٠}{٣٦} = ١٥$

عدد قيم هذه البيانات هو ١٥.

حاول أن تحل

٤ الانحراف المعياري لمجموعة قيم من بيانات هو $ع_ر$ = ٤، ومجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو ٤٨٠.

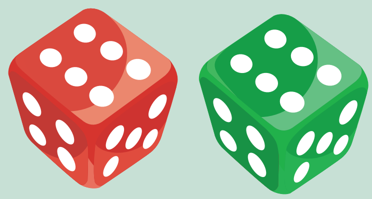
فما عدد قيم هذه البيانات؟

١٠-٤

طرق العد
Methods of Counting

دعنا نفكر ونتناقش

يقوم خالد برمي حجري نرد معًا مرة واحدة. الأول لونه أحمر والثاني لونه أخضر.
انظر الشكل أدناه.



أ) مم يتألف كل ناتج؟

ب) اكتب كل عناصر فضاء العينة في قائمة.

جـ) ما عدد النواتج الممكنة؟

د) ما النواتج التي تشكل الحدث «رمي حجري نرد معًا بحيث يكون مجموع العددين الظاهرين يساوي ٩»؟

سوف تتعلم

- حل مسائل باستخدام مبدأ العد
- حل مسائل باستخدام قوانين التباديل أو التوافيق

كلنا نعرف كيف نعد، ولكننا سنتعرف في هذا الدرس على طرق للعد أكثر تطورًا.
مبدأ العد هو في صلب الجبر المتقطع، وسنستفيد منه عند دراسة الاحتمال.
العديد من المسائل البسيطة أو المعقدة تتطلب تحديد عدد عناصر مجموعة أو الطرق التي يمكن بها ترتيب أشياء أو تجميعها.

مبدأ العد Counting Principle

يمكن أن نحل بعض مسائل العد عن طريق ترتيب المجموعة التي سوف نقوم بعدها. وسوف نبدأ بمثالين يتبعان هذه الطريقة.

مثال (١) العد عن طريق القوائم

ما عدد الرموز ثلاثية الحروف التي يمكن تكوينها من بين الحروف: أ، ب، جـ، د من دون تكرار لأي حرف منها؟

الحل:

اكتب قائمة بالإمكانيات بشكل مرتب (متوال بحسب الترتيب):

أ ب جـ	أ ب د	أ جـ ب	أ جـ د	أ د ب	أ د جـ	(أ أولًا)
ب أ جـ	ب أ د	ب جـ أ	ب جـ د	ب د أ	ب د جـ	(ب أولًا)
جـ أ ب	جـ أ د	جـ ب أ	جـ ب د	جـ د أ	جـ د ب	(جـ أولًا)
د أ ب	د أ جـ	د ب أ	د ب جـ	د جـ أ	د جـ ب	(د أولًا)

يوجد ٤ × ٦ = ٢٤ إمكانية. يمكن كتابة ٢٤ رمزًا.

حاول أن تحل

١) ما عدد الرموز التي يمكن تكوينها من حروف «نواف» من دون تكرار لأي حرف منها شرط ألّا يبدأ الرمز بـ «أ»؟

إذا كان عدد الإمكانيات صغيرًا بما يكفي، فإن **الشجرة البيانية** يمكن أن تساعد في تنظيم مهمة العد.

مثال (٢) الشجرة البيانية

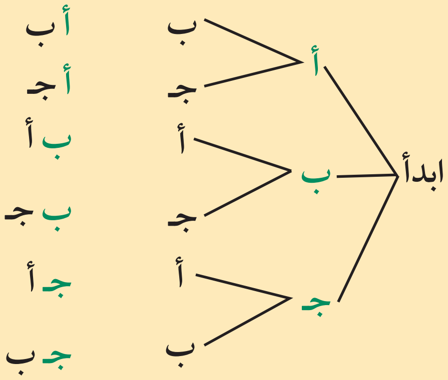
في تجربة على سلوك الحيوان، استخدم علماء النفس نوعين من الأطعمة على التوالي كمكافأة، كل مكافأة عبارة عن واحدة من ثلاثة أنواع ممكنة. كم عدد التشكيلات المختلفة الممكنة في حال كانت أنواع الجوائز غير مكررة؟

الحل:

ميّز بين الأنواع الثلاثة من الجوائز كالتالي: أ، ب، جـ.

الشجرة البيانية إلى اليسار توضّح كل الإمكانيات. كل طريق عبر الشجرة البيانية بالاتجاه من اليمين إلى اليسار تمثل تتابعًا ممكنًا لجائزة، ولأن هناك ست طرق لذلك سيكون لدينا ست تشكيلات ممكنة.

لاحظ أن: ٣ × ٢ = ٦.



حاول أن تحل

٢ يقدم أحد المطاعم وجبة غداء مؤلفة من: سلطة أو حساء، دجاج أو سمك أو لحمة، حلويات أو فاكهة. استخدم الشجرة البيانية لإعطاء عدد الوجبات الممكنة.

يصبح استخدام مخطط الشجرة البياني غير عملي في حال كانت مجموعة الإمكانيات الجاري عدها كبيرة. في مثل هذه الحالات تستخدم طريقة الضرب التي تمت نمذجتها بالعد على الشجرة البيانية.

مبدأ العد Counting Principle

إذا كان لدينا عملية مركبة ع تتكون من عدة عمليات متتالية عددها ن وهي :

$ع_1$، $ع_2$، $ع_3$، ... $ع_ن$ وإذا كانت:

$ع_1$ يمكن أن تحدث بـ $ر_1$ طريقة،

$ع_2$ يمكن أن تحدث بـ $ر_2$ طريقة،

⋮

$ع_ن$ يمكن أن تحدث بـ $ر_ن$ طريقة،

فإن عدد الطرق التي يمكن أن يحدث بها الإجراء ط هي:

$ر_1 \times ر_2 \times \ldots \times ر_ن$.

إن مفتاح حل مسائل مبدأ العد هو أن نحدد المراحل $ع_1$، $ع_2$، ... ، $ع_ن$. وبمجرد تعريفها، يتم تحديد عدد مرات حدوث كل منها، ومن ثمّ ضرب هذه الأعداد للحصول على عدد الطرق الممكنة لحل المسألة.

مثال (٣) استخدام مبدأ العد

تبدأ لوحات السيارات في إحدى المدن بحرفين من الحروف الأبجدية يتبعهما ثلاثة أرقام. كم عدد اللوحات التي يمكن الحصول عليها؟ افترض أنه لا يوجد تكرار لأي من الحروف أو الأرقام في أي من لوحات التراخيص.

الحل:

$ع$: ختم اللوحة

$ع_{١}$: ختم الحرف الأول

$ع_{٢}$: ختم الحرف الثاني

$ع_{٣}$: ختم الرقم الأول

وهكذا لدينا:

		الأحرف		الأرقام		
العمليات	:	$ع_{١}$	$ع_{٢}$	$ع_{٣}$	$ع_{٤}$	$ع_{٥}$
عدد الطرق لاستكمال كل عملية	:	٢٨	٢٧	١٠	٩	٨
عدد طرق ختم اللوحة	=	٢٨ ×	٢٧ ×	١٠ ×	٩ ×	٨

= ٥٤٤ ٣٢٠ طريقة

يمكن الحصول على ٥٤٤ ٣٢٠ لوحة في هذه المدينة.

حاول أن تحل

٣ استخدم معطيات المثال (٣)، ما هو عدد اللوحات التي يمكن الحصول عليها إذا كان رقم الآحاد فردي؟

مثال (٤) استخدام مبدأ العد

يوجد ثمانية متسابقين في سباق ١٠٠ م جري. ما هو عدد النتائج الممكنة لهذا السباق؟ افترض عدم وجود تعادل بين أي متسابقين. علمًا بأن المتسابقين وصل كلًّا منهم إلى خط النهاية.

الحل:

$ع$: قائمة العدائين بترتيب إنهاء السباق.

$ع_{١}$: المتسابق الذي ينهي السباق أولًا.

$ع_{٢}$: المتسابق الذي ترتيبه الثاني في إنهاء السباق.

وهكذا لدينا:

العمليات : $ع_١$ $ع_٢$ $ع_٣$ $ع_٤$ $ع_٥$ $ع_٦$ $ع_٧$ $ع_٨$

عدد الطرق لاستكمال كل عملية : ٨ ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١

عدد الطرق لإجراء ع = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

= ٨! = ٤٠٣٢٠

يوجد ٤٠٣٢٠ ناتجًا ممكنًا لهذا السباق.

تذكر:

مضروب ن أو

ن! هو: ن × (ن − ١) × ... × ٣ × ٢ × ١

فمثلًا: ٥! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

٠! = ١ تُقرأ مضروب صفر = ١

حاول أن تحل

٤ اشترك ٢٠ جملًا في سباق للهجن ووصلت جميعها إلى خط النهاية في أوقات مختلفة (أي أنه لا يوجد أي تعادل).
ما هو عدد النتائج الممكنة لهذا السباق؟

التباديل Permutations

في المثالين السابقين، كان الترتيب مهمًّا ومعتمدًا. مثل هذا الترتيب يسمى **بالتباديل**. وعمومًا **عدد تباديل ن من الأشياء هو ن! (مضروب ن)** كما هو مبيّن في المثال (٤) وفي حالة العديد من المواقف التي تتعامل مع تباديل الأشياء تهتم فقط **بمجموعة جزئية** من الأشياء المُتضمنة. المثال (٥) يختبر موقفًا مشابهًا.

مثال (٥) إيجاد عدد التباديل

افترض أن ٣١ عضوًا من جمعية الرياضيات في مدرستك يريدون اختيار أربعة أشخاص لأربعة مناصب: رئيس، نائب رئيس، أمين السر، أمين الصندوق. حدّد كم طريقة يمكن بها الاختيار لهذه المناصب.

الحل:

اختيار الرئيس: ٣١ طريقة

اختيار نائب الرئيس: ٣٠ طريقة

اختيار أمين السر: ٢٩ طريقة

اختيار أمين الصندوق: ٢٨ طريقة

عدد الطرق التي يمكن بها اختيار الأشخاص للمناصب الأربعة هو: ٣١ × ٣٠ × ٢٩ × ٢٨ = ٧٥٥ ١٦٠

حاول أن تحل

٥ في إحدى الجمعيات الخيرية يوجد ٢٠ عضوًا يشكلون مجلس الأمناء. يريدون اختيار رئيسًا، أمينًا للسر، أمينًا للصندوق.
حدّد كم طريقة يمكن بها الاختيار لهذه المناصب.

قانون التباديل Law of Permutations

عدد تباديل ن من العناصر **المختلفة** مأخوذة منها ر في كل مرة هو:

$^{ن}ل_{ر} = ن(ن - ١)(ن - ٢) \dots (ن - ر + ١)$، ر، ن $\in$ صـ$_+$، ر $\le$ ن

عندما ر = ٠ يعرّف $^{ن}ل_{.} = ١$

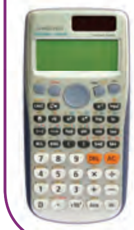
لاحظ: $^{ن}ل_{ر} = ن \times (ن - ١) \times (ن - ٢) \times \dots \times (ن - ر + ١)$

$$= ن(ن - ١) \times \underbrace{(ن - ٢) \times \dots \times (ن - ر + ١)}_{\text{ر عامل}} \times \frac{(ن - ر) \times \dots \times ٣ \times ٢ \times ١}{(ن - ر) \times \dots \times ٣ \times ٢ \times ١}$$

$$= \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$

مساعدة:

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد عدد التباديل، اضغط على nPr.



قانون

$^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$ حيث ر، ن $\in$ صـ$_+$، ر $\le$ ن، $^{ن}ل_{.} = ١$

مثال (٦)

أوجد قيمة كل تبديل بدون استخدام الآلة الحاسبة بصورة مباشرة.

أ $^{٦}ل_{٤}$ ب $^{١١}ل_{٣}$ جـ $^{ن}ل_{٣}$

الحل:

أ الطريقة الأولى:

$$^{٦}ل_{٤} = \frac{٦!}{(٦ - ٤)!} = \frac{٦!}{٢!}$$

$$= \frac{٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٢ \times ١} = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = ٣٦٠$$

الطريقة الثانية:

نبدأ بـ ٦

$$^{٦}ل_{٤} = \underbrace{٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣}_{\text{٤ أعداد}} = ٣٦٠$$

ب $^{١١}ل_{٣} = \frac{١١!}{(١١ - ٣)!} = \frac{١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨!}{٨!} = ١١ \times ١٠ \times ٩ = ٩٩٠$

جـ $^{ن}ل_{٣} = \frac{ن!}{(ن - ٣)!} = \frac{ن \times (ن - ١) \times (ن - ٢) \times (ن - ٣)!}{(ن - ٣)!} = ن(ن - ١)(ن - ٢)$

حاول أن تحل

٦ أوجد قيمة كل تبديل بدون استخدام الآلة الحاسبة بصورة مباشرة.

أ $ل^{٥}_{٣}$ ب $ل^{١٠}_{٤}$ جـ $ل^{ن}_{٤}$

طرق حساب $ل^{٦}_{٤}$

6 shift nPr 4 =	360
$6! \div (6-4)!$	360
$6 \times 5 \times 4 \times 3$	360

مثال (٧)

ما عدد الكلمات التي يمكن أن تتشكل من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية العربية وذلك في حال عدم تكرار أي منها؟

الحل:

المطلوب في المسألة إيجاد عدد التباديل لـ ٥ حروف من ٢٨ حرفًا في الوقت نفسه.

$$ل^{٢٨}_{٥} = \frac{!٢٨}{!(٢٨-٥)} = \frac{!٢٨}{!٢٣} = ٢٨ \times ٢٧ \times ٢٦ \times ٢٥ \times ٢٤$$

$$= ١١\,٧٩٣\,٦٠٠$$

يوجد ٦٠٠ ٧٩٣ ١١ كلمة مكونة من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية العربية.

مساعدة:

ترتيب الحروف مهم في كتابة الكلمات. فكلمة كتاب تختلف عن كلمة كاتب.

حاول أن تحل

٧ ما عدد الأعداد التي يمكن أن تتشكل من ٤ أرقام من أرقام النظام العشري بدون الصفر وذلك في حال عدم تكرار أي رقم؟

التوافيق Combinations

عندما تريد إيجاد عدد المجموعات الجزئية والمكون كل منها من ر عنصر، والتي يمكن اختيارها من مجموعة مكونة من ن عنصر (ر ≤ ن) دون الاعتماد على الترتيب فنحن نحسب التوافيق.

مثال (٨)

ما عدد اللجان المكونة من ثلاثة أشخاص، والتي يمكن تكوينها من مجموعة من أربعة أشخاص؟

الحل:

سَمِّ الأشخاص الأربعة أ، ب، جـ، د ثم قم بإعداد قائمة كتلك الموجودة في المثال (١) وذلك كالتالي:

(لاحظ أن هناك $ل^{٤}_{٣}$ = ٢٤ ترتيبًا ممكنًا لاختيار ثلاثة منها).

أ ب جـ	أ ب د	أ جـ ب	أ جـ د	أ د ب	أ د جـ
ب أ جـ	ب أ د	ب جـ أ	ب جـ د	ب د أ	ب د جـ
جـ أ ب	جـ أ د	جـ ب أ	جـ ب د	جـ د أ	جـ د ب
د أ ب	د أ جـ	د ب أ	د ب جـ	د جـ أ	د جـ ب

لاحظ أن لجنة معينة مكونة من ثلاثة أشخاص أ، ب، جـ تظهر ٣! = ٦ مرات في القائمة.

أ ب جـ   أ جـ ب   ب أ جـ   ب جـ أ   جـ أ ب   جـ ب أ

تشكل هذه الترتيبات الستة مجموعة واحدة لذلك فإن إجمالي أعداد اللجان مساوٍ لـ $^{٤}ل_{٣}$ ترتيبًا ممكنًا مقسمًا على ٣! ترتيبًا مختلفًا لكل لجنة.

$$\text{عدد اللجان} = \frac{^{٤}ل_{٣}}{٣!} = \frac{\frac{٤!}{(٤-٣)!}}{٣!} = \frac{٤!}{(٤-٣)!\,٣!} = \frac{٤!}{١!\,٣!} = ٤$$

حاول أن تحل

٨ ما عدد اللجان المكونة من شخصين والتي يمكن تكوينها من مجموعة من أربعة أشخاص؟

وبصفة عامة، عدد التوافيق المكوّن كل منها من ر عنصر والمختارة من بين مجموعة مكونة من ن عنصر يمكن إيجادها كالآتي:

$$\text{عدد التوافيق} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{ر!} = \frac{ن!}{(ن-ر)!\,ر!}$$

تعريف: قانون التوافيق

إذا كان ن، ر عددان صحيحان موجبان حيث ن ≥ ر، فإن:

عدد التوافيق المكونة كل منها من ر من الأشياء والمختارة من بين ن من الأشياء هو:

$$\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!\,ر!}$$

ملاحظة:

يستخدم الرمز $^{ن}ق_{ر}$ للتعبير عن عدد التوافيق.

ملاحظات:

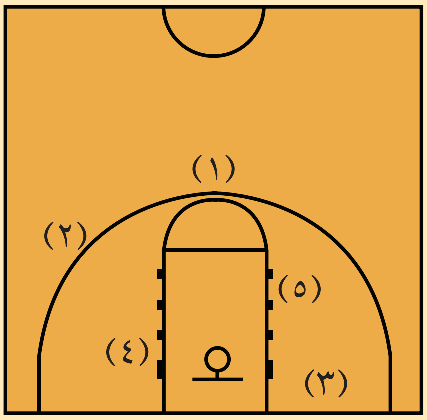
(١) عندما ر = ٠ يُعرَّف $\binom{ن}{٠} = ١$

(٢) $\binom{ن}{ن} = ١$

مثال (٩)

إذا كان فريق كرة سلة يتكوّن من ١٢ لاعبًا.

فما عدد الفرق المختلفة التي يمكن تكوينها من خمسة لاعبين من بين لاعبي هذا الفريق (يمكن لأي لاعب اللعب في كل المراكز) ؟



(١) لاعب الهجوم الخلفي
(٢) المدافع مسدد الهدف
(٣) لاعب الهجوم صغير الجسم
(٤) لاعب الهجوم قوي الجسم
(٥) لاعب الوسط

الحل:

يجب أن نوجد $\binom{١٢}{٥}$ وهي عدد الفرق المختلفة المكونة من ٥ لاعبين

والذين يمكن اختيارهم من ١٢ لاعبًا.

$$\binom{١٢}{٥} = \frac{١٢!}{٥!(١٢-٥)!} = \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٧٩٢$$

عند استخدام الآلة الحاسبة 12 shift nCr 5 = 792

يوجد ٧٩٢ فريقًا مختلفًا، كل فريق مكون من ٥ لاعبين وتم اختيارهم من بين ١٢ لاعبًا.

حاول أن تحل

٩ إذا كان فريق كرة قدم يتكوّن من ٢٠ لاعبًا. فما عدد الفرق المختلفة التي يمكن تكوينها من ١١ لاعبًا من بين لاعبي هذا الفريق؟ (يمكن لأي لاعب اللعب في أي مركز)

تستطيع العديد من الآلات الحاسبة أن تحسب ${}^{١٢}ق_{٥}$ مباشرة من دون ضرورة لإيضاح الخطوات الوسطية. وعلى الرغم من ذلك فنحن نوضحها هنا لأنها قد تساعدك في بعض الأحيان التي تكون فيها الأعداد كبيرة بحيث يصعب أن تعطي إجابة دون استخدام الآلة الحاسبة. وفي حالة الأعداد الكبيرة جدًّا قد لا تساعدك بعض الآلات الحاسبة مثل ${}^{١٠٠٠}ق_{١٠}$. فطبق القانون.

تستخدم الخطوات التالية لإيجاد التوافيق بواسطة الآلة الحاسبة:

ن nCr ر =

مثال (١٠)

من أجل اختيار لوائح المرشحين للانتخابات النيابية، يجب اختيار ١٠ مرشحين من بين ٥١ مرشحًا.

ما عدد اللوائح المختلفة التي يمكن تكوينها؟

الحل:

إن الترتيب أثناء اختيار اللائحة غير مطلوب، إذًا هذه مسألة تتعلق بالتوافيق لإيجاد ${}^{٥١}ق_{١٠}$.

$${}^{٥١}ق_{١٠} = \frac{٥١!}{١٠! \times ٤١!} = ١٢\ ٧٧٧\ ٧١١\ ٨٧٠$$

عند استخدام الآلة الحاسبة 51 nCr 10 = $1,2777711870.10^{10}$

عدد اللوائح المختلفة الممكنة هو ١٢ ٧٧٧ ٧١١ ٨٧٠

حاول أن تحل

١٠ أثناء الإعداد لزيارة المتحف الوطني، أراد منظمو الزيارة إعداد لوائح للطلاب لاستخدام حافلات تتسع كل منها ١٥ طالبًا. علمًا بأن عدد الطلاب هو ٦٠ طالبًا، فما عدد اللوائح المختلفة التي يمكن إعدادها لهذه الزيارة؟

مثال (١١)

في كل مما يلي حدّد ما إذا كان المثال يبيّن تبديلًا أو توفيقًا واحسب عدد الطرق في كل حالة.

أ اختيار رئيس، نائب رئيس، أمين سر من بين ٢٥ عضوًا في نادي القراءة.

ب اختيار ٥ حبات بطاطا من كيس يحتوي على ١٢ حبة لإعداد وجبة غذائية.

جـ وضع معلم مخططًا يبيّن مقاعد ٢٢ طالبًا في غرفة بها ٢٥ مقعدًا.

د اختيار ٤ أبيات من قصيدة شعرية مكونة من ١١ بيتًا لكتابتها وتعليقها في غرفة الفصل.

الحل:

أ الترتيب مهم في الاختيار ∴ تباديل. $^{٢٥}ل_{٣} = ١٣\,٨٠٠$

ب الترتيب غير مهم في الاختيار ∴ توافيق. $^{١٢}ق_{٥} = ٧٩٢$

جـ الترتيب مهم ∴ تباديل. $^{٢٥}ل_{٢٢} \simeq ٢,٥٨٥٢ \times ١٠^{٢٤}$

د الترتيب غير مهم ∴ توافيق. $^{١١}ق_{٤} = ٣٣٠$

حاول أن تحل

١١ في ما يلي، حدّد ما إذا كان المثال يبيّن تبديلًا أو توفيقًا.

أ اختيار ٣ طلاب من الصف العاشر للمشاركة في مسابقة تلاوة القرآن.

ب مراكز المشاركين الثلاثة في مسابقة تلاوة القرآن.

١٠–٥

الاحتمال المشروط
Conditional Probability

سوف تتعلم

- الحدث المستقل
- الحدث التابع
- الاحتمال المشروط

دعنا نفكر ونتناقش

تتألف لعبة الدومينو من بلاطات على شكل متوازي مستطيلات، دُوّن على أحد أوجهها نقاط عددها يتراوح من الصفر (فراغ) إلى ٦.

١ أ كوّن جدولًا يبيّن الأزواج الممكنة. ما عددها؟

ب ما عدد النواتج المؤلفة من رقمين متساويين؟

٢ تم سحب بلاطة رقماها غير متساويين، ما احتمال أن يكون مجموع الرقمين يساوي ٥؟

٣ سحبت بلاطة رقماها متساويان. ما احتمال أن يكون مجموع الرقمين أصغر من ٥؟

في كل تجربة عشوائية، نهتم أولًا بمعرفة مجموعة النواتج الممكنة والتي تسمى **فضاء العينة (ف)**. كل **حدث** هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

إذا كانت جميع نواتج التجربة لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث ٲ هو:

$$\text{ل(الحدث ٲ)} = \frac{\text{عدد نواتج الحدث ٲ}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

أي أن: $\text{ل(ٲ)} = \frac{\text{ن (ٲ)}}{\text{ن (ف)}}$

يكتب الاحتمال بصورة كسر عشري أو كسر أو نسبة أو نسبة مئوية.

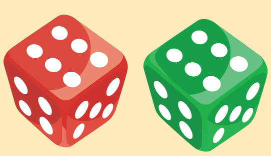
مثال (١)

في لعبة «رمي حجري نرد منتظمين ومتمايزين» والتجربة هي ملاحظة الوجه العلوي لكل من الحجرين

أ ممّ يتألف كل ناتج؟ اكتب فضاء العينة. وما عدد النواتج الممكنة؟

ب مثل فضاء العينة بيانيًّا.

جـ ما احتمال الحدث ٲ: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ٤»؟



الحل:

أ يتألف كل ناتج من زوج مرتب (م، ن) حيث ١ ≤ م ≤ ٦، ١ ≤ ن ≤ ٦. م ، ن $\in$ ص$_+$.

ف = {(١، ١)، (١، ٢)، ... ، (١، ٦)،

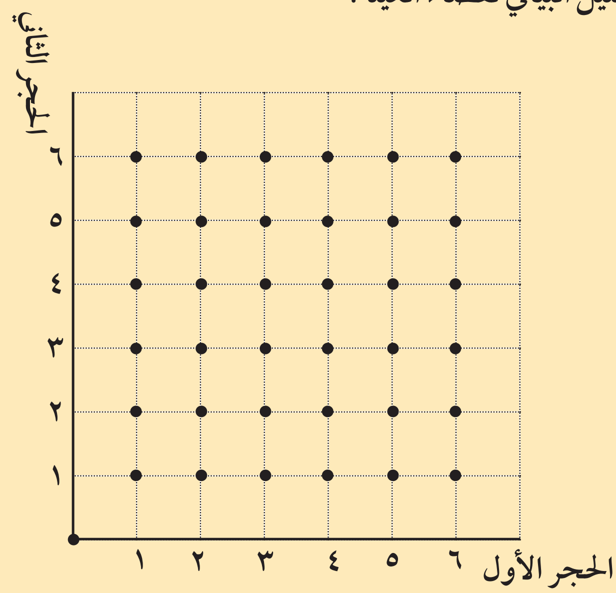
(٢، ١)، (٢، ٢)، ... ، (٢، ٦)،

⋮

(٦، ١)، (٦، ٢)، ... ، (٦، ٦)}

وبتطبيق مبدأ العد، عدد النواتج هو ٦ × ٦ = ٣٦ ناتجًا. وكل هذه النواتج لها فرصة الظهور نفسها.

ب التمثيل البياني لفضاء العينة.



ج يتألف الحدث ؟ من ثلاثة نواتج: {(١، ٣)، (٣، ١)، (٢، ٢)}.

ل (؟) = ن (؟) / ن (ف) = ٣ / ٣٦ = ١ / ١٢

حاول أن تحل

١ في المثال (١): أ ما احتمال الحدث «ب»: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ٧»؟

ب ما احتمال الحدث «جـ»: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ١٣»؟

جـ ما احتمال الحدث «د»: «ظهور عددين أحدهما مربعًا للآخر»؟

ولأن أي حدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة، فإن عدد النواتج في حدث ما يكون دائمًا أصغر من أو يساوي عدد نواتج فضاء العينة. لذلك فإن احتمال وقوع حدث ما، هو عدد ينتمي إلى الفترة [٠، ١].

خواص الاحتمال لحدث ما

ليكن ؟ حدث في فضاء عينة ف منته وغير خالٍ فإن:

١ ٠ ≤ ل(؟) ≤ ١

٢ إذا كان ؟ = { } إذًا ل(؟) = ٠ ويسمى ؟ حدثًا مستحيلًا.

٣ إذا كان ؟ = ف إذًا ل(؟) = ١ ويسمى ؟ حدثًا مؤكدًا.

٤ مجموع احتمالات جميع النواتج في فضاء العينة يساوي ١.

معلومة مفيدة:

فضاء العينة، في تجربة رمي حجري نرد منتظمين ومتمايزين هو نفسه فضاء العينة في تجربة رمي حجر نرد مرتين متتاليتين.

مثال (٢)

في تجربة رمي حجري نرد متمايزين معًا وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما، الحدث ﺃ هو «مجموع العددين الظاهرين هو ١٣» . فما احتمال وقوع الحدث ﺃ؟

الحل:

نعلم أن عدد النواتج الممكنة هو ٣٦

وبما أن أكبر عدد هو ٦ في كل حجر فإن المجموع ١٣ لا يمكن أن يحصل

بالتالي فإن عدد النواتج في الحدث ﺃ هو صفر إذًا ل(ﺃ) = $\frac{٠}{٣٦}$ = ٠

وهذا الحدث هو حدث مستحيل.

ملاحظة:

إذا لم يذكر نوع حجر النرد فهذا يعني أنه منتظم.

حاول أن تحل

٢ في تجربة رمي حجري نرد متمايزين معًا وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما، كان الحدث ب «الحصول على مجموع أصغر من ١٣»، فما احتمال وقوع الحدث ب؟

في الكثير من الحالات نستخدم التباديل أو التوافيق لإيجاد الاحتمال.

مثال (٣)

اشترى ناصر علبة حلوى تحتوي على ١٢ قطعة بينها ٤ قطع بالشوكولاتة. يريد ناصر أخذ قطعتين من العلبة معًا عشوائيًا. فما احتمال أن يختار قطعتين بالشوكولاتة؟

الحل:

التجربة: اختيار قطعتي حلوى من بين ١٢ قطعة دون اعتماد الترتيب.

∴ عدد نواتج التجربة ن (ف) = $\binom{١٢}{٢}$ = $\frac{{}^{١٢}ل_{٢}}{٢!}$ = $\frac{١٢ \times ١١}{٢ \times ١}$ = ٦٦ ناتجًا.

الحدث ﺃ: اختيار قطعتين بالشوكولاتة، دون اعتماد الترتيب

∴ عدد نواتج الحدث ﺃ = ن (ﺃ) = $\binom{٤}{٢}$ = $\frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١}$ = ٦ نواتج.

∴ ل(ﺃ) = $\frac{ن\,(ﺃ)}{ن\,(ف)}$ = $\frac{٦}{٦٦}$ = $\frac{١}{١١}$.

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، ما احتمال اختيار قطعتي حلوى عشوائيًا ليستا بالشوكولاتة؟

مخطط ڤن

Venn Diagram

تساعد النماذج الهندسية أحيانًا على فهم المسائل وإيجاد الاحتمالات.

مثال (٤) مخطط ڤن (مثال إثرائي)

في إحدى المدارس الثانوية يهتم ٥٤٪ من الطلاب بالأنشطة الكشفية، ٦٢٪ بالرياضة.

نصف الذين يهتمون بالأنشطة الكشفية يهتمون أيضًا بالرياضة.

أ ما النسبة المئوية للطلاب الذين يهتمون فقط بالرياضة؟

ب اختير طالب عشوائيًّا من طلاب هذه المدرسة، فما احتمال ألا يهتم بالرياضة؟

الحل:

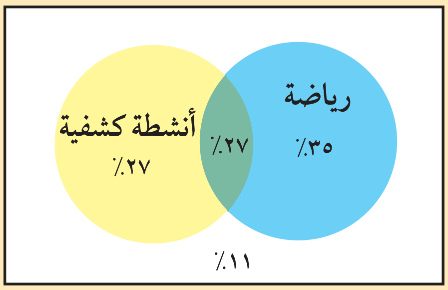
لترتيب المعطيات وعرضها نختار مستطيلًا يمثل فضاء العينة (كل طلاب المدرسة) ونرسم داخل المستطيل منطقتين متداخلتين لتمثيل الطلاب الذين يهتمون بالأنشطة الكشفية والطلاب الذين يهتمون بالرياضة.

ندوّن داخل هذه المناطق النسب المئوية كما يلي:

المنطقة المتداخلة (الخضراء) تتضمن نصف الطلاب المهتمين بالأنشطة الكشفية والمهتمين بالرياضة: ٠,٥ × ٥٤٪ = ٢٧٪

المنطقة الصفراء تتضمن: (٥٤ − ٢٧)٪ = ٢٧٪

المنطقة الزرقاء تتضمن: (٦٢ − ٢٧)٪ = ٣٥٪



المنطقة البيضاء تتضمن: [١٠٠ − (٢٧ + ٢٧ + ٣٥)]٪ = ١١٪

يمكننا الآن الإجابة عن الأسئلة بقراءة مخطط ڤن.

أ النسبة المئوية للطلاب الذين يهتمون فقط بالرياضة = ٣٥٪

ب احتمال ألا يهتم الطالب بالرياضة = ٢٧٪ + ١١٪ = ٣٨٪ أو ٠,٣٨

- حل آخر: ١ − ٠,٦٢ = ٠,٣٨

حاول أن تحل

٤ يقرأ ٨٤٪ من طلاب الصف العاشر كتب مطالعة باللغة العربية، ويقرأ ١٨٪ من طلاب هذا الصف كتبًا باللغة الإنكليزية، ويقرأ ١٥٪ من الطلاب كتبًا باللغتين.

اختير طالب عشوائيًّا من طلاب هذا الفصل،

أ ما احتمال أن يكون ممن يقرأون كتبًا باللغة الإنكليزية فقط؟

ب ما احتمال أن يكون هذا الطالب ممن لا يقرأون كتبًا باللغتين معًا؟

العمليات على الأحداث واحتمالاتها:

تقاطع حدثين أ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ، ب في آن معًا ويرمز إليه بـ أ $\cap$ ب.

اتحاد حدثين أ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ أو ب ويرمز إليه بـ أ $\cup$ ب.

الحدثان أ، ب هما متنافيان (Incompatible) إذا لم يشتركا في أي عنصر أي أ $\cap$ ب = $\varnothing$.

متمم الحدث أ هو $\overline{\text{أ}}$ (complement) الذي يتألف من كل النواتج الموجودة في فضاء العينة وغير الموجودة في أ.

قاعدة الاحتمال لاتحاد حدثين:

ل(أ $\cup$ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ $\cap$ ب)

ومنها ل(أ $\cap$ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ $\cup$ ب)

قاعدة الاحتمال لمتمم الحدث أ:

ل($\overline{\text{أ}}$) = ١ − ل(أ)

قاعدة الاحتمال لحدثين متنافيين:

إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف فإن ل(أ $\cup$ ب) = ل(أ) + ل(ب).

مثال (٥)

إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان:

ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٤ ، ل(أ $\cap$ ب) = ٠,٤ ، أوجد كلًّا من:

١ ل(أ $\cup$ ب)   ٢ ل($\overline{\text{أ}}$)

الحل:

١ ل(أ $\cup$ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ $\cap$ ب)

= ٠,٧ + ٠,٤ − ٠,٤ = ٠,٧.

٢ ل($\overline{\text{أ}}$) = ١ − ل(أ)

= ١ − ٠,٧ = ٠,٣

حاول أن تحل

٥ إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة، وكان ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٥ ، ل (أ $\cup$ ب) = ٠,٦ أوجد كلًّا من:

أ ل(أ $\cap$ ب)

ب ل($\overline{\text{ب}}$)

مثال (٦)

إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان:

ل($\overline{أ}$) = ٢ , ٠، ل(أ ∪ ب) = ٩ , ٠، ل(أ ∩ ب) = ٤ , ٠، أوجد ل($\overline{ب}$)، ل($\overline{أ ∩ ب}$).

الحل:

∵ ل($\overline{أ}$) = ١ − ل(أ)

∴ ل(أ) = ١ − ل($\overline{أ}$) = ١ − ٢ , ٠ = ٨ , ٠

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

٩ , ٠ = ٨ , ٠ + ل(ب) − ٤ , ٠

ل(ب) = ٩ , ٠ − ٨ , ٠ + ٤ , ٠

= ٥ , ٠

ل($\overline{ب}$) = ١ − ل(ب)

= ١ − ٥ , ٠ = ٥ , ٠

ل($\overline{أ ∩ ب}$) = ١ − ل(أ ∩ ب) = ١ − ٤ , ٠ = ٦ , ٠

حاول أن تحل

٦ إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة، وكان ل(أ) = ٥ , ٠، ل(ب) = ٦ , ٠، ل (أ ∩ ب) = ٢ , ٠

أوجد ل($\overline{أ ∪ ب}$).

مثال (٧)

يبين الجدول المزدوج التالي توزيعًا للأشخاص العاملين في إحدى المستشفيات:

الجنس / المهنة	رجل	امرأة	المجموع
طبيب	٢٨	١٤	٤٢
ممرض	٢٠	٢٣٢	٢٥٢
تقني-إداري	٢٢	٣٤	٥٦
المجموع	٧٠	٢٨٠	٣٥٠

تم اختيار شخص عشوائيًّا من بين ٣٥٠ شخصًا عاملًا في المستشفى .

١ أوجد احتمال كل حدث من الأحداث التالية:

أ: «الشخص ممرض» ب: «الشخص امرأة» جـ: «الشخص طبيب»

٢ أوجد ل($\bar{أ}$).

٣ أ ليكن هـ الحدث: «الشخص يكون امرأة وطبيب» ، احسب ل(هـ) باستخدام الجدول.

ب اكتب مستخدمًا الحدثين ب ، جـ الحدث« و»: «الشخص يكون امرأة أو طبيب»، ثمّ احسب ل(و).

٤ احسب ل(أ ∪ جـ).

الحل:

١ اختيار الشخص عشوائيًّا يعني أن نواتج التجربة لها فرصة الظهور نفسها ومنها :

ل(أ) = $\frac{٢٥٢}{٣٥٠}$ = ٠,٧٢ ، ل(ب) = $\frac{٢٨٠}{٣٥٠}$ = ٠,٨ ، ل(جـ) = $\frac{٤٢}{٣٥٠}$ = ٠,١٢

٢ ل($\bar{أ}$) = ١ − ل(أ) = ١ − ٠,٧٢ = ٠,٢٨

٣ أ نحسب احتمال الحدث ب ∩ جـ، بحسب الجدول الحدث هـ = ب ∩ جـ لديه ١٤ ناتجًا

وبالتالي: ل(هـ) = ل(ب ∩ جـ) = $\frac{١٤}{٣٥٠}$ = ٠,٠٤

ب نحسب احتمال الحدث ب ∪ جـ، حيث إن ب ، جـ ليسا حدثين متنافيين

ل(و) = ل(ب ∪ جـ) = ل(ب) + ل(جـ) − ل(ب ∩ جـ)

= ٠,٨٠ + ٠,١٢ − ٠,٠٤ = ٠,٨٨

٤ أ ، جـ هما حدثان متنافيان إذًا: ل(أ ∪ جـ) = ل(أ) + ل(جـ) = ٠,٧٢ + ٠,١٢ = ٠,٨٤

حاول أن تحل

٧ في فضاء عينة ف لدينا حدثان أ ، ب متنافيان حيث ل(أ) = ٠,٤ ، ل(ب) = ٠,٥ .

أ احسب ل(أ ∪ ب).

ب احسب ل $\overline{(أ ∪ ب)}$.

الأحداث المستقلة Independent Events

يكون الحدثان مستقلين إذا كان وقوع (أو عدم وقوع) أحدهما لا يؤثر على وقوع (أو عدم وقوع) الآخر. فمثلًا، في تجربة عشوائية عند رمي عملة معدنية مرتين وملاحظة الوجه العلوي فإن الحدث «ظهور صورة في الرمية الأولى» لا يؤثر على وقوع الحدث «ظهور صورة في الرمية الثانية»، لأن أي من الرميتين لا تؤثر على الأخرى بأي طريقة، ولذلك **فالحدثان مستقلان**.

إذا كنا نعلم الاحتمالات الفردية لحدثين مستقلين فإنه يمكننا إيجاد احتمال وقوع الحدثين معًا باستخدام القاعدة التالية:

قاعدة الضرب للأحداث المستقلة Multiplication principle of Independent Events

إذا كان أ، ب حدثان مستقلان فإن احتمال وقوع الحدثين معًا هو:

ل(أ $\cap$ ب) = ل(أ) $\times$ ل(ب)

معظم الآلات الحاسبة يمكنها إنتاج أعداد عشوائية تقع بين ٠، ١. كل عدد عشوائي ينتج يكون مستقلًا عن العدد الآخر السابق له.

مثال (٨)

قام أحمد بتطوير قاعدة باستخدام الآلة الحاسبة البيانية لإنتاج أرقام عشوائية من ٠ إلى ٩ (انظر إلى الشكل المقابل). فما احتمال أن يكون الرقم الأول الذي حصل عليه زوجيًّا وأن يكون الرقم الثاني مضاعفًا لـ ٣؟

الحل:

بما أن الأرقام عشوائية، فإن الناتج الأول لا يؤثر على الناتج الثاني. أي أن الحدثين مستقلين وهما:

ر: «الرقم الناتج يكون زوجيًّا» ر = {٠، ٢، ٤، ٦، ٨}.

م: «الرقم الناتج يكون مضاعفًا لـ ٣» م = {٣، ٦، ٩}.

ولأن الحدثين مستقلين، لذلك يمكن تطبيق قاعدة الضرب:

ل(ر $\cap$ م) = ل(ر) $\times$ ل(م) = $\frac{٥}{١٠} \times \frac{٣}{١٠}$ = ٠,١٥

وبالتالي: احتمال أن يكون الرقم الأول زوجيًّا والرقم الثاني من مضاعفات ٣ هو ٠,١٥.

- «**int**» هي أكبر دالة أعداد صحيحة
- «**rand**» هي منتج الأعداد العشوائية بين صفر، ١.
- **int** (10 * **rand**) تعطي أعدادًا بين صفر، ٩.

مثال: **rand** = ٠,٨١٧

10 * **rand** = ٨,١٧

int (10 * **rand**) = ٨

حاول أن تحل

٨ في تجربة عشوائية عند رمي قطعة نقود ثلاث مرات وملاحظة الوجه العلوي.

ما احتمال أن يكون الناتج (ص، ك، ص)؟

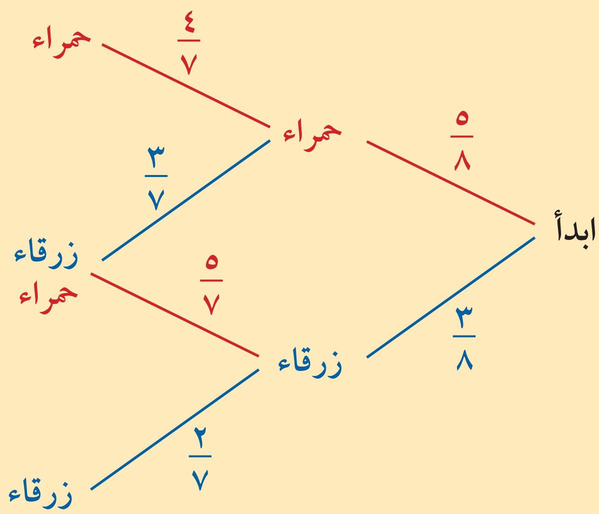
الحدث التابع Dependent Event

يكون الحدث تابعًا عندما يتأثر ظهوره بحدث سابق.

مثال (٩) **الشجرة البيانية**

لدينا ٥ كرات حمراء و٣ كرات زرقاء في كيس. في تجربة عشوائية سحبت كرتين على التوالي بدون إرجاع.

ما احتمال الحصول على كرتين حمراوتين؟



الحل:

ليكن الحدثان أ: «سحب كرة حمراء أولًا»،

ب: «سحب كرة حمراء ثانيًا» .

ل(أ) = $\frac{٥}{٨}$

دون إعادة الكرة الأولى يصبح لدينا في الكيس ٤ كرات حمراء فقط وفي الكيس هناك ٧ كرات وبالتالي ل(ب) = $\frac{٤}{٧}$.

ل(كرتان حمراوتان) = ل(أ) × ل(ب) = $\frac{٥}{٨} \times \frac{٤}{٧} = \frac{٥}{١٤}$

حاول أن تحل

٩ تحتوي علبة حلوى على ١٢ قطعة، ٤ منها بنكهة شوكولاتة والباقي بنكهة الحليب. فما احتمال أخذ قطعة بنكهة شوكولاتة وأكلها، ثم أخذ قطعة بنكهة الحليب؟

الاحتمال المشروط Conditional Probability

في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة الوجه العلوي له فإن فضاء العينة ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}.

ليكن الحدث ﺃ (ظهور عدد أكبر من ٣) فإن ﺃ = {٤، ٥، ٦} ويكون ل(ﺃ) = $\frac{\text{ن(ﺃ)}}{\text{ن(ف)}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

وليكن الحدث ب(ظهور عدد زوجي) فيكون ب = {٢، ٤، ٦}

ل(ب) = $\frac{\text{ن(ب)}}{\text{ن(ف)}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

لنسأل الآن: إذا علمنا أن الحدث ﺃ قد وقع، فما هو احتمال وقوع الحدث ب بشرط وقوع الحدث ﺃ. بمعنى آخر ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي بشرط أن يكون أكبر من ٣؟

نلاحظ أن الشرط المعطى يجعل فضاء العينة الجديد هو ﺃ = {٤، ٥، ٦} وللحصول على عدد زوجي أكبر من ٣ نوجد:

ب $\cap$ ﺃ = {٤، ٦}

وبالتالي احتمال الحصول على عدد زوجي بشرط أن يكون أكبر من ٣ هو $\frac{٢}{٣}$

احتمال وقوع الحدث ب بشرط وقوع الحدث ﺃ يسمى بالاحتمال المشروط (الشرطي) ويُكتب ل(ب|ﺃ) ويُقرأ احتمال الحدث ب بشرط ﺃ. ويمكن إيجاد ل(ب|ﺃ) باستخدام القاعدة التالية:

قاعدة الاحتمال المشروط

إذا كان وقوع الحدث ب مشروطًا بوقوع الحدث ﺃ فإن:

ل(ب|ﺃ) = $\frac{\text{ل(ﺃ} \cap \text{ب)}}{\text{ل(ﺃ)}}$ حيث ل (ﺃ) $\neq$ ٠

وكذلك ل(ﺃ $\cap$ ب) = ل(ﺃ) × ل(ب|ﺃ)

مثال (١٠)

في تجربة عشوائية ٲ، ب حدثان حيث ل(ٲ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل(ٲ ∩ ب) = ٠,٢ .

أوجد احتمال كل من الأحداث التالية: (أ) ل (ب|ٲ)   (ب) ل (ٲ|ب)

الحل:

(أ) $ل(ب|ٲ) = \frac{ل(ٲ \cap ب)}{ل(ٲ)} = \frac{٠,٢}{٠,٣} = \frac{٢}{٣}$.

(ب) $ل(ٲ|ب) = \frac{ل(ٲ \cap ب)}{ل(ب)} = \frac{٠,٢}{٠,٦} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

حاول أن تحل

(١٠) في تجربة عشوائية، إذا كان ل(ٲ) = ٠,٣ ، ل(ب | ٲ) = ٠,٢ . أوجد ل(ٲ ∩ ب).

مثال (١١)

رمى جاسم حجر نرد منتظم ولاحظ الوجه العلوي له.

نسمي الحدث ب: «الحصول على عدد أكبر من أو يساوي ٥»، الحدث ٲ: «الحصول على عدد فردي».

احسب ل(ب|ٲ) (احتمال ظهور عدد أكبر من أو يساوي ٥ بشرط أن يكون عددًا فرديًّا)

الحل:

ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}   ن (ف) = ٦

ٲ = {١، ٣، ٥}   ن (ٲ) = ٣

ب = {٥، ٦}   ن (ب) = ٢

ٲ ∩ ب = {٥}   ن (ب ∩ ٲ) = ١

$ل(ٲ) = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

$ل(ٲ \cap ب) = \frac{١}{٦}$

$ل(ب|ٲ) = \frac{ل(ٲ \cap ب)}{ل(ٲ)} = \frac{\frac{١}{٦}}{\frac{١}{٢}} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$.

حاول أن تحل

(١١) في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم، إذا كان الحدث ب «الحصول على عدد زوجي»، والحدث ٲ «الحصول على عدد أولي». فاحسب ل(ب|ٲ).

المرشد لحل المسائل

مثال (١)

(١) نأخذ البيانات التالية:

(أ): ١٠، ٢٠، ٤٠، ٥٠، ٧٠، ٨٠، ٩٠، ١٠٠، ١٢٠، ١٥٠

(ب): ١، ٢، ٤، ٥، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١٢، ١٥

أ كيف نستنتج القيم في بيانات المجموعة (ب) من قيم البيانات في المجموعة (أ)؟

ب أوجد التباين $ع_١^٢$ لقيم المجموعة (أ) والتباين $ع_٢^٢$ لقيم المجموعة (ب).

جـ استنتج العلاقة بين $ع_١$، $ع_٢$.

ما الذي أعرفه؟ قيّم مجموعتين من البيانات.

ما الذي أريد معرفته؟

الربط بين قيم المجموعة (أ) وقيم المجموعة (ب).

العلاقة بين تباين قيم المجموعة (أ) وتباين قيم المجموعة (ب).

كيف سأحل المسألة؟

(أ) بالنظر إلى قيم البيانات في المجموعة (أ) وقيم البيانات في المجموعة (ب) نلاحظ أن جميع قيم المجموعة (ب) هي قيم المجموعة (أ) مقسومة على ١٠.

(ب) نكوّن جدولًا لكل من قيم المجموعتين:

جدول (أ)

القيمة $س_ر$	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^٢$
١٠	−٦٣	٣ ٩٦٩
٢٠	−٥٣	٢ ٨٠٩
٤٠	−٣٣	١ ٠٨٩
٥٠	−٢٣	٥٢٩
٧٠	−٣	٩
٨٠	٧	٤٩
٩٠	١٧	٢٨٩
١٠٠	٢٧	٧٢٩
١٢٠	٤٧	٢ ٢٠٩
١٥٠	٧٧	٥ ٩٢٩
		المجموع = ١٧ ٦١٠

المتوسط الحسابي $\overline{س} = ٧٣$

$$ع_١^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢}{ن}$$

$$ع_١^٢ = \frac{١٧\ ٦١٠}{١٠}$$

$$ع_١^٢ = ١٧٦١$$

جدول (ب)

المتوسط الحسابي $\overline{ص} = ٧,٣$

$$ع_٢^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (ص_ر - \overline{ص})^٢}{ن}$$

$$ع_٢^٢ = \frac{١٧٦,١}{١٠}$$

$$ع_٢^٢ = ١٧,٦١$$

وبالتالي $ع_١^٢ = ١٠٠ ع_٢^٢$ أي $ع_١^٢ = (١٠)^٢ ع_٢^٢$

(جـ) نستنتج أن $ع_١ = ١٠ ع_٢$

القيمة $ص_ر$	$ص_ر - \overline{ص}$	$(ص_ر - \overline{ص})^٢$
١	−٦,٣	٣٩,٦٩
٢	−٥,٣	٢٨,٠٩
٤	−٣,٣	١٠,٨٩
٥	−٢,٣	٥,٢٩
٧	−٠,٣	٠,٠٩
٨	٠,٧	٠,٤٩
٩	١,٧	٢,٨٩
١٠	٢,٧	٧,٢٩
١٢	٤,٧	٢٢,٠٩
١٥	٧,٧	٥٩,٢٩
		المجموع = ١٧٦,١

مثال (٢)

بيّنت دراسة إحصائية أن ٢٪ من القطع التي تصنعها إحدى الشركات فيها خلل تقني. لإلغاء هذه القطع وضع اختبار للجودة وكانت نتائجه كالآتي:

يلغي الاختبار إذا كان ٩٨٪ من القطع التي فيها خلل.

يلغي الاختبار إذا كان ٠,٥٪ من القطع التي ليس فيها خلل.

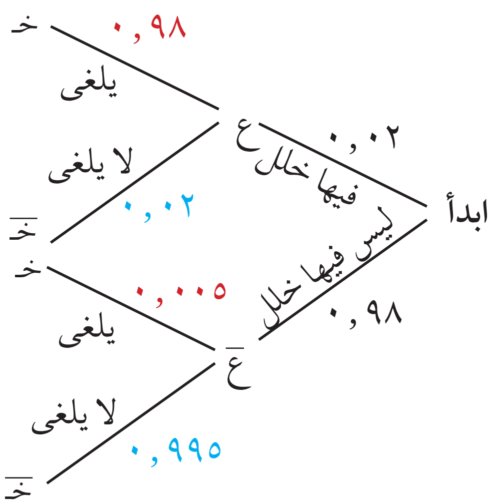
أخذت عشوائيًّا قطعة مصنعة في هذه الشركة.

ما احتمال أن يكون فيها خلل علمًا أنه لم يلغها اختبار الجودة؟

الحل:

ليكن ع الحدث: «القطعة فيها خلل»، خـ الحدث: «اختبار الجودة يلغي القطعة».

أولا: نرسم شجرة بيانية لتمثيل المعطيات



٢٪ من القطع فيها خلل

∴ ٩٨٪ لا خلل فيها.

يلغي الاختبار ٩٨٪ من القطع فيها خلل

∴ ٢٪ من القطع فيها خلل لا يلغيها.

يلغي الاختبار ٠,٥٪ من القطع التي لا خلل فيها

∴ ٩٩,٥٪ من القطع التي لا خلل فيها لا يلغيها الاختبار.

ثانيا: $\text{ل}(\text{ع}|\overline{\text{خ}}) = \dfrac{\text{ل}(\text{ع} \cap \overline{\text{خ}})}{\text{ل}(\overline{\text{خ}})}$

تحضيرًا للحل نوجد ل(خ)، ثم ل($\overline{\text{خ}}$). بالنظر إلى الشجرة البيانية، يلغي الاختبار قطعة ما في حالتين.

∴ ل(خ) = ل(ع ∩ خ) + ل($\overline{\text{ع}}$ ∩ خ)

= ٠,٠٢ × ٠,٩٨ + ٠,٩٨ × ٠,٠٠٥ = ٠,٠٢٤٥

∴ ل($\overline{\text{خ}}$) = ١ − ٠,٠٢٤٥ = ٠,٩٧٥٥

ل(ع∩$\overline{\text{خ}}$) = ٠,٠٢ × ٠,٠٢ = ٠,٠٠٠٤

$\text{ل}(\text{ع}|\overline{\text{خ}}) = \dfrac{\text{ل}(\text{ع} \cap \overline{\text{خ}})}{\text{ل}(\overline{\text{خ}})} = \dfrac{٠,٠٠٠٤}{٠,٩٧٥٥} \simeq ٠,٠٠٠٤١$

احتمال أن يكون في القطعة خلل علمًا أنه لم يلغها اختبار الجودة يساوي ٠,٠٠٠٤١ تقريبًا.

مسألة إضافية

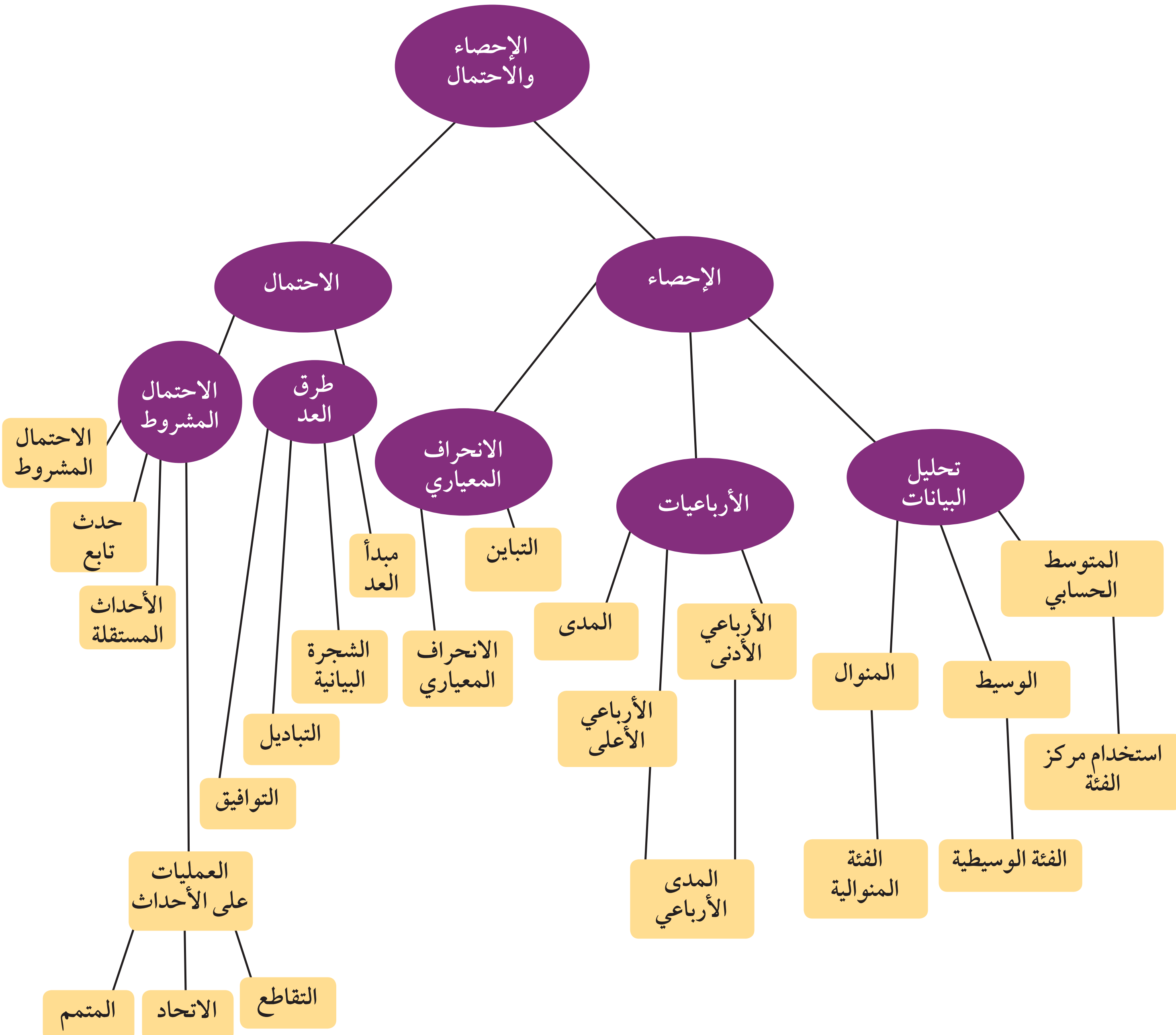
١ آلة مجهزة لتعبئة عبوات بالصابون السائل تحتوي كل منها على ٣١٠ مليليترات. اظهرت نتائج الكشف على ١٦ عبوة كما يلي:

٢٩٧، ٣١٨، ٣٠٦، ٣٠٠، ٣١١، ٣٠٣، ٢٩١، ٢٩٨، ٣٢٢، ٣٠٧، ٤١٢، ٣٠٠، ٣١٥، ٢٩٦، ٣٠٩، ٣١١.

أ أوجد المتوسط الحسابي لمحتويات هذه العبوات بالمليليتر .

ب أوجد الانحراف المعياري. ماذا تستنتج؟

مخطط تنظيمي للوحدة العاشرة



ملخص

– تستخدم قيم النزعة المركزية لوصف البيانات الإحصائية:

* المتوسط الحسابي هو ناتج قسمة مجموع قيم البيانات على عدد هذه القيم: $\overline{س} = \frac{ت_١ س_١ + ت_٢ س_٢ + \dots + ت_ن س_ن}{ت_١ + ت_٢ + \dots + ت_ن}$

* الوسيط هو القيمة التي تأتي في المنتصف بعد ترتيب هذه القيم تصاعديًا أو تنازليًا.
* المنوال هو القيمة (القيم) الأكثر تكرارًا في البيانات.
* في البيانات حيث التوزيع التكراري على فئات نستخدم مركز الفئة لإيجاد المتوسط الحسابي.

* في البيانات حيث التوزيع التكراري على فئات نستخدم قانون الرافعة:

$$\text{المنوال} = \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \frac{ك_٢}{ك_١ + ك_٢} \times ف$$

حيث إن ف = طول الفئة المنوالية،

$ك_١$ = تكرار الفئة السابقة مباشرة للفئة المنوالية،

$ك_٢$ = تكرار الفئة اللاحقة مباشرة للفئة المنوالية

* يمكن إيجاد الوسيط باستخدام بمنحنى المتجمع الصاعد أو منحنى المتجمع النازل أو كليهما.
* يمكن إيجاد المنوال باستخدام قانون الرافعة.
* يمكن إيجاد المنوال باستخدام المدرج التكراري.

– نستخدم الأرباعيات والمدى والتباين والانحراف المعياري لدراسة تشتت البيانات.

* المدى = القيمة العظمى من البيانات – القيمة الصغرى من البيانات.
* الأرباعي الأدنى = وسيط القيم الأدنى للبيانات أصغر من الوسيط ويعرف بالرمز $ر_١$.
* الأرباعي الأعلى = وسيط القيم الأعلى للبيانات أكبر من الوسيط ويعرف بالرمز $ر_٣$.
* يعرف الوسيط للبيانات بالرمز $ر_٢$.
* مجمل الأعداد الخمسة في البيانات هو: القيمة الصغرى، $ر_١$، $ر_٢$، $ر_٣$، القيمة العظمى.
* يوضح مخطط الصندوق ذي العارضتين كيفية توزيع القيم الخمس والعلاقة فيما بينها وتشتت قيم البيانات.

* التباين هو القيمة من البيانات الناتجة من حساب القاعدة: $ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر (س_ر - \overline{س})^٢}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر}$

* الانحراف المعياري يبيّن تشتت البيانات عن المتوسط الحسابي لهذه البيانات ويعطى بالقاعدة:

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر (س_ر - \overline{س})^٢}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر}}$$

إذا كبر الانحراف المعياري يكون التشتت كبيرًا وبعيدًا عن المتوسط الحسابي وإذا صغر الانحراف المعياري يكون التشتت قريبًا من المتوسط الحسابي.

* المدى الأرباعي = الأرباعي الأعلى ($ر_٣$) - الأرباعي الأدنى ($ر_١$)

- **الشجرة البيانية**: إذا كان عدد الإمكانيات صغيرًا بما يكفي، فإن الشجرة البيانية يمكن أن تساعد في تنظيم مهمة العد.
- **التباديل**: عندما يكون الترتيب مهمًّا ومعتمداً يسمى بالتباديل، عامة عدد تباديل من الأشياء هو ن**!** (مضروب ن).
- **قانون التباديل**: إذا كان ن، ر عددان صحيحان غير سالبين بحيث ر ≤ ن، فإن عدد التباديل المكوّن من أشياء عددها ر والمأخوذة من بين ن من الأشياء هو: $^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$
- **التوافيق**: عندما تريد إيجاد عدد المجموعات الجزئية والمكوّن كل منها من ر عنصر، والتي يمكن اختيارها من مجموعة مكوّنة من ن عنصر دون اعتماد النظر عن الترتيب فنحن نحسب التوافيق.
- **قانون التوافيق**: إذا كان ن، ر عددان صحيحان غير سالبين، حيث ر ≤ ن فإن عدد التوافيق المكوّنة كل منها من ر من الأشياء والمختارة من بين ن من العناصر في الوقت نفسه هو: $^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{ر!(ن - ر)!}$.
- احتمال الحدث ٲ هو: $ل(ٲ) = \frac{\text{عدد النواتج في الحدث ٲ}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$
- خواص الاحتمال لحدث ما:

ليكن ٲ حدث في فضاء عينة منته وغير خالٍ ف فإن:

- ٠ ≤ ل(ٲ) ≤ ١
- إذا كان ٲ = { } فإن ل(ٲ) = ٠، ٲ يسمى الحدث المستحيل.
- إذا كان ٲ = ف فإن ل(ٲ) = ١، ٲ يسمى الحدث المؤكد.
- مجموع احتمالات النواتج في فضاء العينة يساوي ١ .
- تقاطع حدثين ٲ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في ٲ وفي ب في آن معًا ويرمز إليه بـ ٲ ∩ ب.
- اتحاد حدثين ٲ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في ٲ أو في ب ويرمز إليه بـ ٲ ∪ ب.
- الحدثان ٲ، ب هما متنافيان إذا لم يكن لديهما ناتج مشترك أي ٲ ∩ ب = ∅.
- متمم حدث ٲ يرمز إليه بـ $\bar{ٲ}$ وهو الحدث الذي يتألف من كل النواتج الموجودة في فضاء العينة وغير موجودة في ٲ.
- الأحداث المستقلة: يكون حدثان مستقلان إذا كان حدوث أحدهما ليس له تأثير على احتمال حدوث الآخر.
- قاعدة الضرب للأحداث المستقلة:

إذا كان ٲ، ب حدثان مستقلان فإن احتمال وقوع الحدثين معًا هو: ل(ٲ ∩ ب) = ل(ٲ) × ل(ب)

- **الحدث التابع**: يكون الحدث تابعًا عندما يتأثر ظهور هذا الحدث بحدث سابق.
- الاحتمال المشروط:

ليكن لدينا حدثين ٲ، ب ونفترض أن ل(ٲ) ≠ ٠ .

احتمال وقوع الحدث ب بشرط وقوع الحدث ٲ يسمى الاحتمال المشروط ويكتب ل(ب|ٲ) ويقرأ «احتمال الحدث ب بشرط ٲ».

- قاعدة الاحتمال المشروط:

إذا كان وقوع الحدث ب مشروطًا بوقوع الحدث ٲ (ل(ٲ) ≠ ٠)

$ل(ب|ٲ) = \frac{ل(ٲ \cap ب)}{ل(ٲ)}$ ، ل(ٲ ∩ ب) = ل(ٲ) × ل(ب | ٲ) .

شركة مطابع الرسالة – الكويت

أودع في مكتبة الوزارة تحت رقم (١٤٥) بتاريخ ٢٨/ ١٠/ ٢٠١٤م