١١

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دولـــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم العالي

دليل رياضيات

"العلمي"

المـؤَلِّـفـون:

أ. وهيب جبر "منسقًا"

أ. عبد الحافظ الخطيب

أ. نسرين دويكات

أ. رائد عبد العال

مركز المناهج

أ. قيس شبانة

قررت وزارة التربية والتعليم العالي في دولة فلسطين
اعتماد هذا الدليل في مدارسها بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٨/ ٢٠١٩ م

الإشراف العام

رئيس لجنة المناهج	د. صبري صيدم
نائب رئيس لجنة المناهج	د. بصري صالح
رئيس مركز المناهج	أ. ثروت زيد

مراجعة

الدائرة الفنية:	إشراف فني	كمال فحماوي
	تصميم فني	أسحار حروب

قراءة	أحلام صلاح
تحرير لغوي	أ. وفاء جيوسي
متابعة المحافظات الجنوبية	د. سمية النّخالة

الطبعة الأولى
٢٠١٨ م/ ١٤٣٩ هـ

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم العالي
مركز المناهج

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 – رام اللّه – فلسطين
pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
فاكس +970-2-2983250 | هاتف +970-2-2983280

تقديم

يتصف الإصلاح التربوي بأنه المدخل العقلاني العلمي النابع من ضرورات الحالة، المستند إلى واقعية النشأة، الأمر الذي انعكس على الرؤية الوطنية المطورة للنظام التعليمي الفلسطيني في محاكاة الخصوصية الفلسطينية والاحتياجات الاجتماعية، والعمل على إرساء قيم تعزز مفهوم المواطنة والمشاركة في بناء دولة القانون، من خلال عقد اجتماعي قائم على الحقّوق والواجبات، يتفاعل المواطن معها، ويعي تراكيبها وأدواتها، ويسهم في صياغة برنامج إصلاح يحقق الآمال، ويلامس الأماني، ويرنو لتحقيق الغايات والأهداف.

ولما كانت المناهج أداة التربية في تطوير المشهد التربوي، بوصفها علمًا له قواعده ومفاهيمه، فقد جاءت ضمن خطة متكاملة عالجت أركان العملية التعليمية التعلمية بجميع جوانبها، بما يسهم في تجاوز تحديات النوعية بكل اقتدار، والإعداد لجيل قادر على مواجهة متطلبات عصر المعرفة، دون التورط بإشكالية التشتت بين العولمة والبحث عن الأصالة والانتماء، والانتقال إلى المشاركة الفاعلة في عالم يكون العيش فيه أكثر إنسانية وعدالة، وينعم بالرفاهية في وطن نحمله ونعظمه.

ومن منطلق الحرص على تجاوز نمطية تلقّي المعرفة، وصولًا لما يجب أن يكون من إنتاجها، وباستحضار واعٍ لعديد المنطلقات التي تحكم رؤيتنا للطالب الذي نريد، وللبنية المعرفية والفكريّة المتوخّاة، جاء تطوير المناهج الفلسطينية وفق رؤية محكومة بإطار قوامه الوصول إلى مجتمع فلسطيني ممتلك للقيم، والعلم، والثقافة، والتكنولوجيا، وتلبية المتطلبات الكفيلة بجعل تحقيق هذه الرؤية حقيقة واقعة، وهو ما كان له ليتحقّق لولا التناغم بين الأهداف والغايات والمنطلقات والمرجعيات، فقد تآلفت وتكاملت؛ ليتحقّق النتاج تعبيرًا عن توليفة تحقق المطلوب معرفيًا وتربويًا وفكريًا.

ثمّة مرجعيات تؤطّر لهذا التطوير، بما يعزّز أخذ جزئية الكتب المقررّة من المنهاج دورها المأمول في التأسيس لتوازن إبداعي خلّاق بين المطلوب معرفيًا، وفكريًا، ووطنيًا، وفي هذا الإطار جاءت المرجعيات التي تم الاستناد إليها، وفي طليعتها وثيقة الاستقلال والقانون الأساسي الفلسطيني، بالإضافة إلى وثيقة المنهاج الوطني الأول؛ لتوجّه الجهد، وتعكس ذاتها على مجمل المخرجات.

ومع إنجاز هذه المرحلة من الجهد، يغدو إزجاء الشكر للطواقم العاملة جميعها؛ من فرق التأليف والمراجعة، والتدقيق، والإشراف، والتصميم، وللجنة العليا أقل ما يمكن تقديمه، فقد تجاوزنا مرحلة الحديث عن التطوير، ونحن واثقون من تواصل هذه الحالة من العمل.

وزارة التربية والتعليم العالي

مركز المناهج الفلسطينية

آب / ٢٠١٨

مـقـدمـة

جاء دليل المعلّم في تعليم الرياضيّات في ثلاثة أجزاء، أُفرِد للجزء الأوّل الجانب النظري الذي تضمّن مفهوم عمليتَي التعلم والتعليم، وعناصر كلٍّ منهما؛ لدعم الإطار النظري لدى المعلم، وتوسيعه. فقد تناول المؤلّفون في هذا الجزء مفهوم التعلّم وعناصره (المعلم، والمتعلم، والمنهاج...) من وجهة نظر الاتجاه التقليدي في التدريس الذي تمثّله النظريّة السلوكيّة، وكذلك الاتجاه التربوي الحديث الذي تمثّله النظريّة البنائيّة.

أما الجزء الثاني من الدليل، فيمثل الجانب الإجرائي المتمثل في استعراض الأهداف التفصيليّة لكلّ وحدة، والإشارة إلى الأخطاء الأكثر شيوعاً؛ حتى يضع المعلم آليّاتٍ لتلافيها سلفاً، أو معالجتها لاحقاً، وتضمّن أيضاً نموذجاً مقترحاً لآليّات تنفيذ الدرس. وتنتهي كلُّ وحدة بنموذج إثراء يستعين به المعلم، مع الإشارة إلى ضرورة محاكاته من المعلمين.

ويأتي دور المعلم مكمّلاً ورئيساً لتحمُّل مسؤوليّة تعليم الطلبة وتعلمهم، وتعميق الوعي بالمفاهيم، والعلاقات، والنظريّات، وإدراكها، وتوظيفها في المجالات كافّة.

وتضمن الجزء الثالث جداول المواصفات لكل فصل دراسي، ونماذج امتحانات فصلية، ومساعدة المعلم في الإجابة على بعض الانشطة، وكذلك حلول لأسئلة الكتاب، إضافة لمصفوفة التتابع والتسلسل المفاهيمي للصفين السابق واللاحق للصف الحالي، وكذلك مجموعة من الأنشطة الإثرائية ونماذج لمشاريع طلابية وأفكار ريادية.

المؤلفون

المحتويات

العنوان			الصفحة
		الإطار النظري	٢
الفصل الأول		خطة الفصل الدراسي الأول لكتاب الصف الحادي عشر العلمي	٤١
	الوحدة الأولى	اشتقاق الأهداف	٤٣
		الأخطاء الشائعة والصعوبات المتوقع أن يواجهها الطالب	٤٩
		نموذج تحضير الدروس: (١-٣) درس المتجهات في الفراغ	٥٢
		أسئلة إثرائيّة على وحدة المتجهات والهندسة الفراغية	٥٥
	الوحدة الثانية	اشتقاق الأهداف	٥٩
		الأخطاء الشائعة والصعوبات المتوقع أن يواجهها الطالب	٦٢
		نموذج تحضير الدروس: (٢-٥) درس الجملة المفتوحة	٦٥
		أسئلة إثرائيّة على وحدة المنطق	٦٨
	الوحدة الثالثة	اشتقاق الأهداف	٧٠
		الأخطاء الشائعة والصعوبات المتوقع أن يواجهها الطالب	٧٢
		نموذج تحضير الدروس: (٣-١) حل نظام مكون من ثلاث معادلات خطية	٧٤
		أسئلة إثرائيّة على وحدة المعادلات والمتباينات	٧٧
		نموذج امتحان الفصل الأول	٨٢
		فكرة ريادية	٨٨
الفصل الثاني		الخطة الفصلية للفصل الدراسي الثاني	٩١
	الوحدة الرابعة	اشتقاق الأهداف	٩٣
		الأخطاء الشائعة والصعوبات المتوقّع أن يواجهها الطلبة	٩٦
		نموذج تحضير الدروس: (٤-٣) التوقع	٩٩
		أسئلة إثرائية الوحدة الرابعة: الاحتمالات والإحصاء	١٠٣
	الوحدة الخامسة	اشتقاق الأهداف	١٠٨
		الأخطاء الشائعة والصعوبات المتوقّع أن يواجهها الطلبة	١١١
		نموذج تحضير الدروس: (٥-٤) مجموع المتسلسلة الحسابية	١١٤
		أسئلة إثرائية الوحدة الخامسة المتتاليات والمتسلسلات	١١٧
	الوحدة السادسة	اشتقاق الأهداف	١٢١
		الأخطاء الشائعة والصعوبات المتوقّع أن يواجهها الطلبة	١٢٣
		نموذج تحضير الدروس: (٦-٢) القطع الناقص	١٢٥
		اسئلة إثرائية الوحدة السادسة: القطوع المخروطية	١٢٨
	الوحدة السابعة	اشتقاق الأهداف	١٣٠
		الأخطاء الشائعة والصعوبات المتوقّع أن يواجهها الطلبة	١٣٤
		نموذج تحضير الدرس (٧-٣) النهايات والصور غير المعينة	١٣٧
		اسئلة إثرائية الوحدة السابعة: النهايات والاتصال	١٤٥
		نموذج امتحان الفصل الثاني	١٤٩
		فكرة ريادية	١٥٣
		مصفوفة المفاهيم التتابعية	١٥٥
		حلول أسئلة الكتاب	١٥٦

الجزء الأول: وتكوّن من:

* **المقدمة:** تؤكّد على الدور الجديد للمعلم، ومتطلبات هذا الدور، وطبيعة مبحث الرياضيّات للصفوف (٥-١٢)، والمخرجات المتوقّعة منه، والتي تعكس فلسفة وزارة التربية والتعليم العالي الفلسطينية ورؤيتها.

* **عرض للتوجّهات التربويّة الأكثر شيوعاً، انطلاقاً من التقليديّة إلى الحداثة (نظريّات التعلم)**، إضافةً إلى استعراض مجموعة من استراتيجيات التدريس التي تتواءم مع طبيعة عرض المحتوى المعرفي في مقرّرات الصفوف (٥-١٢) التي تراعي طبيعة المرحلة النمائية التي يمرّ بها الطلبة، وتعكس توجّهاتٍ تربويّةً حديثة مبنيّة على التعلم العميق.

* **التقويم:** يشير إلى التغيّر الحاصل في الكمّ المعرفي، ومستوى أداء المهارة لدى الطلبة، كما يُعدًّ إحدى صور التغذية الراجعة للمعلم عن مهارته في تنفيذ الأساليب المناسبة التي تحقّق الأهداف المرجوة.

* **نتاجات التعلم المتوقّعة:** تمثل مجموعة الكفايات التعليمية التعلمية، من مهارات، ومعارف، واتجاهات، ومفاهيم، وأخلاقيات، واستعدادات، بما يتفق ومهارات القرن الواحد والعشرين، وتوظيف التكنولوجيا التي يُتوقَّعُ أنْ يمتلكها الطالب بعد مروره بالخبرات التعلميّة المصمّمة في الكتاب المقرّر، ويمكن قياس هذه النتاجات بأدوات قياس إجرائيّة متنوعة.

* **المهارات الأساسيّة في تدريس الرياضيات في مرحلة التمكين (٥- ١٢):**

تمّ استعراض مجموعة المهارات التي يتناولها منهاج الرياضيات للصفوف من ٥-١٢، هي:

* **بنية الكتاب:** شكل توزيع المحتوى المعرفي في الوحدات الدراسيّة، والدروس التي تم تبنّيها عند وضع المقرر؛ حتى يتسنى للمعلم توظيف مقوّمات الكتاب، وإمكاناته كافّة، وصولاً إلى أقصى استفادة منه، وهي تحقيق أهداف المنهج وغاياته.

- الجزء الثاني:

تناول هذا الجزء كل وحدة دراسية على حدة، من حيث:

* **مصفوفة توزيع الحصص على الدروس:** يبيّن الدليل توزيع الحصص على الدروس في هذه المرحلة على شكل مصفوفة، يُتوقَّع أنْ تساعد المعلمين على التخطيط للتعلم المراد إحداثه لدى الطلبة.

* **الأهداف التفصيلية الخاصة بالوحدة الدراسية.**

* **أخطاء مفاهيمية، وإجرائية شائعة، وصعوبات تعلّم** قد يقع فيها الطلبة؛ لكي يعمل المعلم على تلافيها، أو علاجها.

* **نموذج لآلية تنفيذ أَحد الدروس؛** ليسترشد بها المعلم في تحضيره.

* **أنشطة إثرائيّة مناسبة يسترشد بها المعلم، ويعدّ على غرارها.**

ويجدر بالمعلم الاطّلاع على الجزء الأول قبل البدء بالتدريس؛ ليقوم بتصميم التعليم، والتخطيط له، واختيار استراتيجية تدريس مناسبة، تتناسب مع المحتوى المعرفي المقدّم، وطبيعة طلبته.

- الجزء الثالث:

يتكون هذا الجزء من:

* **مصفوفة التتابع والتسلسل المفاهيمي** للصفين السابق واللاحق للصف الحالي: توضّح هذه المصفوفة البنية المعرفية التي اعتمدها المؤلفون بشكل طولي؛ ما يعطي صورة جليّة للمعلم حول الخبرات التعلُميّة السابقة واللاحقة التي يُفترض أنْ يمتلكها الطلبة.

* **الأهداف التفصيلية الخاصة بكل فصل دراسي.**

* **جداول المواصفات.**

* **نماذج امتحانات فصلية.**

* **حل لبعض الأنشطة، وأسئلة الكتاب.**

* **إثراء للمجالات التي تناولها الدليل،** مثل: (مشاريع وأفكار ريادية، وأوراق عمل، وألعاب تربوية...).

الجزء الأول

في ضَوْء البدء بتدريس منهاج الرياضيّات الفِلَسطينيّ بحُلّته الجديدة، كان لا بدّ من تقديم الدعم والمساندة للمعلم في المجالات كافّةً؛ للتعامل بفاعليّة مع هذا المنهاج؛ لذا فقد بات التوسُّع في المعرفة البيداغوجيّة للمعلّم أمراً حتمياً؛ لمساعدته على توظيف النظريّات التربويّة الحديثة التي تُسهم في تحقيق تعليمٍ وتعلُّمٍ فعّال وعميق، وصولاً لطلبة لديهم القدرة على توظيف المفاهيم والمعارف؛ لتطوير مهاراتهم الرياضيّة في حلّ المشكلاتِ الحياتيّة، والقدرة على التعبير عن الذات، وتوظيف التكنولوجيا في عمليّة التعليم والتعلّم، وتحقيق الاتصال والتواصل الفعّال. فمعرفة المخرجات المتوقَّعة لعمليّة التعليم والتعلّم، وطبيعتها، وسيْرورتها، وآليّات التخطيط لها، وكيفيّة قياسها يُسهم في التحوُّل من معلمٍ ضابط لعمليّة التعليم إلى معلّم يتمتّع بالمسؤوليّة عنها.

إنّ رفع كفايات المعلّمين لا بدَّ أنْ يرتكز على كفايات المنهاج بما يتضمّنه من معارفَ، ومفاهيمَ، ونظريّاتٍ، وغيرها، إضافة إلى كفايات تتعلّق في البيداغوجيا العامّة، وبيداغوجيا المحتوى، والقدرة على تحديد احتياجات الطلبة، وخصائصهم، وسماتهم النمائيّة، والتعمُّق في أصول التدريس، واستراتيجيات التعليم والتقويم بمنظورٍ تربوي يحاكي الواقعيّة والأصالة.

ارتكزت معظم نظريّات التعلم على مفهوم (التعلم) في تحديد العناصر الأخرى، إلاّ أنّ غالبيّتها أشارت إلى هدف التعلّم المرجوّ تحقيقُه، على اعتبار أنّ المتعلم مستقلٌّ قادرٌ على ضبط تعلُّمه، ويعي حاجاته، ويخطّط لتحقيقها، ويتابع ذلك بالطرق المتاحة كافّةً، ويقيّم مدى تحقيقه غاياتِه وأهدافَه، ويربط ذلك مع خبراته السابقة؛ ما يثري بناءه المعرفي، وهو ما يُسمّى التعلّمَ الاستراتيجي.

ومن العناصر المهمّة التي لا بدّ من أخذها بعين الاعتبار عند تصميم التعليم، والتخطيط له، طبيعة المتعلّمين، وخصائصهم النمائيّة؛ ما انعكس في الكتاب المقرّر على شكل أنشطةٍ تعتمد على المحسوس، وشبه المحسوس. فالجمع بين المعرفة البيداغوجيّة للمنهاج، وخصائص الطلبة في المرحلة العمريّة يجعل تصميم التدريس ملائماً للطلبة لامتلاك المهارات الأساسيّة المرجوّة، والمرتبطة بالمحتوى التعليمي.

وانسجاماً مع سياسة وزارة التربية والتعليم العالي لدمج الطلبة من ذوي الإعاقة وذوي الاحتياجات الخاصّة في بيئتهم التعلّميّة الطبيعية، لم يُغفل الدليل هؤلاء، فقدّم للمعلّم مجموعةً من الإرشادات للتعامل معهم بشيء من التفصيل، حيث توزّعت الإرشادات في ثلاث فئات، هي: الطلبة من ذوي الإعاقات الجسديّة (البصريّة، والسمعيّة، والحركيّة، والنّطق)، والطلبة بطيئو التعلم، وصعوبات التعلم، والفئة الثالثة هي الطلبة المتفوقون. ويشكّلُ هذا البند إضافةً نوعيّةً للدليل؛ حيث يساعد المعلم على التعامُل مع هذه الفئة من الطلبة بأسلوبٍ مهْنيّ مُمنْهج.

يُعدُّ التقويم إحدى صور التغذية الراجعة للمعلم عن مهارته في تنفيذ استراتيجيات تدريس؛ لتحقيق الأهداف المرجوّة، ويعكس صورة واقعيّة عن مدى فعاليّة استراتيجيةٍ ما في تحقيق أهداف موضوع محدّد. وانسجاماً مع التوجّهات الجديدة في إصلاح التعليم، تمّ التأكيد على مفهوم التقويم بأنواعه، بما في ذلك التقويم البديل، والتقويم الأصيل، واستعرض بعض من صورهما، موضّحاً الفرق بينهما بدقّة.

يُعَدّ هذا الدليل مرجعاً مهمّاً لتنفيذ الأنشطة الواردة في كتاب الطالب، من خلال استراتيجيات تدريس تنسجم مع التطوّرات التقنيّة، والكمّ المعرفي الهائل الذي يلامس أطراف أصابع أطفالنا كلّ يوم، إضافة إلى كونه مرجعاً تربوياً يدعم التطوّر المِهْني الذاتي للمعلم، من خلال تزويده بالمعرفة البيداغوجيّة اللازمة لبناء جيلٍ من المتعلمين المستقلّين، مستديمي التعلّم، القادرين على استثمار طاقاتِهم الذهنيّة والمعرفيّة في بناء الوطن، ورفع اسمه عالياً.

نظريّات التعلّم

الاتجاه التقليدي في الفكر التربوي (النظرية السلوكية):

انطلقت فكرة النظريّة السلوكيّة باعتبار أنّ السلوك الإنساني هو مجموعة من العادات التي يكتسبها الفرد خلال مراحل حياته المختلفة، حيث إنّ السلوك الإنساني مكتسب عن طريق التعلم.

أنتجت النظريّة السلوكيّة تطبيقاتٍ مهمّةً في مجال صعوبات التعلّم؛ حيث قدمت أسساً منهجيّةً للبحث والتقييم والتعليم، فلسان حال هذه النظرية يقول: إنَّ السلوك المُستهدَف (استجابة الطفل) يتوسّط مجموعات من التأثيرات البيئيّة، وهي المثير الذي يسبق السلوك (المهمّة المطلوبة من الطالب)، والمثير الذي يتبع السلوك وهو (التعزيز أو النتيجة)؛ لذا فإنّ تغير سلوك الفرد يتطلب تحليلاً للمكوّنات الثلاثة السابقة، وهي:

مثير قبلي ← السلوك المستهدف (التعلم) ← التعزيز (زيتون، ٢٠٠٦)

كما عرف (سكينر) السلوك بأنّه: «مجموعة من الاستجابات الناتجة عن مثيرات من المحيط الخارجي، إمّا أن يتم تعزيزه ويقوى، أو لا يتلقّى دعماً فتقلّ نسبة حدوثه». ونستطيع القول: إنّ النظريّة السلوكيّة انبثقت من علم النفس السلوكي؛ حيث يساعد هذا العلم في فهم الطريقة التي يشكَّل فيها سلوك المتعلّم، كما أنّه يتأثّر بشكلٍ كبيرٍ بالسّياق الذي يتمّ فيه هذا التعلم.

مبادئ النظريّة السلوكيّة:

١ يُبنى التعلّم بدعم الأداءات القريبة من السلوك المستهدَف، وتعزيزها.
٢ التعلّم مرتبط بالتعزيز.
٣ التعلم مرتبط بالسلوك الإجرائي الذي نريد بناءه.

عناصر عمليّة التعليم والتعلم في بيئة النظريّة السلوكيّة:

الطالب: مستقبِل للمعرفة، ومقلِّد لها في مواقف مشابهة.

المعلم: مرسِل للمعرفة؛ فهو مصدر المعرفة.

المحتوى المعرفي: على شكل معرفة تقريريّة، ومعلومات جاهزة.

التقويم: ملاحظةُ المعلم استجابةَ الطالب لمثيرٍ محدّد، والحكم عليه بناءً على اتّفاقٍ مسبق حول شكل الإجابة الوحيدة الصحيحة.

التعزيز: يُعدُّ التعزيز عنصراً أساسياً في إحداث التعلّم، وهو تعزيز خارجي على الأغلب.

كما تتطلّب هذه النظريّة إعطاء فرص متكافئة للطلبة داخل الغرفة الصفيّة، والانتقال بهم من موضوعات معروفة إلى أخرى مجهولة، وملاحظة استجاباتهم لهذه الفرص؛ أي أنّه يُفترض أنْ يتوافر للطالب أنشطة تحتوي المعرفة القديمة والجديدة، وعليه أنْ يطّلع عليها.

البيئة الصفيّة الماديّة: عادية، ولا ترتبط- بالضرورة- بطبيعة المعرفة المقدّمة، أو شكلها. (الزيات، ١٩٩٦)

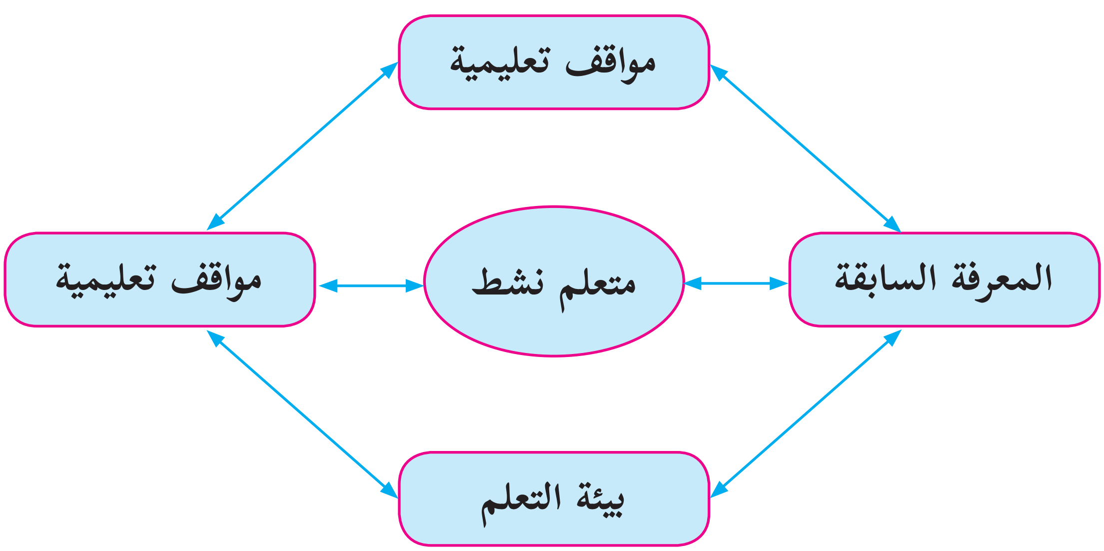
الاتجاه الحديث في التربية (النظرية البنائيّة):

لا يوجد تعريف محدد للبنائية يحوي كل ما تتضمنه من معانٍ، أو عمليات نفسية. ويرى زيتون (٢٠٠٦) أنها تمثل كلاً من الخبرات السابقة، والعوامل النفسية، والعوامل الاجتماعية، ومناخ التعلم، والمعلم الإيجابي بمجموعها بمثابة العمود الفقري للبنائية. أما السعدني وعودة (٢٠٠٦)، فيعرّفاها بأنها عملية استقبال، وإعادة بناء المتعلم معاني جديدة، من خلال سياق معرفته الآنية، وخبراته السابقة، وبيئة تعلمه. ومن ثمّ عرّفها الخليلي وآخرون (١٩٩٧) بأنها توجّه فلسفي يعتبر أنّ التعلم يحدث عند الطالب مباشرة، ويبني المعرفة من خلال تشكيلات جديدة لبنيته المعرفية.

ويمكننا القول: إنّ الفكر البنائي يشمل كلاً من البنية المعرفية والعمليات العقلية التي تتم داخل المتعلم، وأنّ التعلم يحدث نتيجة تعديل الأفكار التي بحوزة المتعلم، وإضافة معلومات جديدة، أو بإعادة تنظيم ما يوجد لديه من أفكار، وأنّ المتعلم يكوّن معرفته بنفسه، إمّا بشكل فردي، أو مجتمعي، بناء على معرفته الحالية، وخبراته السابقة التي اكتسبها من خلال تعامله مع عناصر البيئة المختلفة، وتفاعله معها، كما تؤكد البنائية على الدور النشط للمتعلم في وجود المعلم الميسّر والمساعد على بناء المعنى بشكل سليم في بيئة تساعد على التعلم؛ أي أنّ البنائية عملية تفاعل نشط بين التراكيب المعرفية السابقة، والخبرات الجديدة في بيئة تعليمية تعلمية اجتماعية فاعلة؛ ما ينتج خبرة جديدة متطورة تتشكل على صورة أنماط مفاهيمية متعددة. (الهاشمي، ٢٠٠٩)

مبادئ النظريّة البنائيّة:

١. المعرفة السابقة هي الأساس لحدوث التعلّم الجديد، فالمتعلم يبني معرفته الجديدة اعتماداً على خبراته السابقة.
٢. تحدثُ عمليّة بناء المعرفة الجديدة من خلال التواصل الاجتماعي مع الآخرين.
٣. أفضل نظريّة لبناء المعرفة هي مواجهة مشكلات حياتيّة حقيقيّة. (مرعي، ٢٠٠٣)



عناصر عمليـة التعليـم والتعلّم فـي بيئة النظريّـة البنائيّة:

يختلف دور عناصر العمليّة التعليميّة التعلميّة في ظلّ النظريّة البنائيّة عن الطّرق التقليديّة في التعليم فيما يأتي:

١ **المحتـوى التعليمـي (المقـرر):** يقـدم المعرفـة مـن الـكلّ إلـى الجـزء، ويسـتجيب لتسـاؤلات الطلبـة وأفكارهـم، ويعتمـد بشـكل كبيـر علـى المصـادر الأوليّـة للمعطيـات، والمـواد التـي يجـري التعامـل معهـا.

٢ **الطالـب:** مفكّـر، ويعمـل فـي مجموعـات، ويبحـث عـن المعرفـة مـن مصـادر متنوعـة، ويبنـي معرفتـه بنـاءً علـى معارفـه السابقة.

٣ **المعلم**: موجّه للتعلم، وميسّر له، وليس مصدراً للمعرفة. **وليقومَ بهذا الدور، فلا بدّ له من:**

أولاً- صياغـة أهدافـه التعليميّـة، بمـا يعكـس النتاجـات المتوقّعة.

ثانياً- تحديـد المعـارف والخبـرات السـابقة اللازمـة للتعلـم الجديـد مـن جهـة، وتشـخيصها، ومسـاعدة طلبتـه علـى اسـتدعائها مـن جهـة أخـرى.

ثالثاً- اعتمـاد اسـتراتيجيات التعلّـم النشـط فـي تصميـم التدريـس؛ لمسـاعدة طلبتـه علـى امتـلاك المعرفـة الجديـدة، ودمجهـا فـي بنيتـه المعرفيّـة.

٤ **التقويم**: تعتمد النظريّة البنائيّة على التقويم الحقيقي، بحيث يحدث التقويم في ثلاث مراحل، هي:

أولاً- التقويم القبلي، وهو على نوعين، هما:

- **التقويـم التشـخيصي:** يسـاعد المعلـم الطلبـة علـى اسـترجاع المعـارف السـابقة اللازمـة لإضافـة اللبنـة المعرفيـة الجديـدة. ويسـتخدم هـذا النـوع -علـى الأغلـب- عنـد البـدء بوحـدةٍ معرفيّـةٍ جديـدة (مفهـوم، أو درس، أو وحـدة).
- **التقويـم التذكيـري:** يسـاعد المعلـم طلبتـه علـى اسـترجاع المفاهيـم مـن الذاكـرة قصيـرة الأمـد؛ بهـدف اسـتكمال بنـاء المعرفـة الجديـدة. ويسـتخدم المعلـم هـذا النـوع مـن التقويـم القبلـي قبـل اسـتكماله تدريـس موضـوع قـد بـدأ بـه فـي وقـتٍ سـابق.

ثانياً- التقويم التكويني: يتم من خلال ملاحظة المعلم للطلبة، وتفاعله معهم أثناء عمليّة التعلم.

ثالثاً- التقويم الختامي: يقيس مخرجات التعلم، ويشمل مهمّات كاملة.

٥ **التعزيـز:** يبـدأ التعزيـز خارجيـاً (مـن المعلـم، لفظـي أو مـادي)، ويقـلّ بشـكلٍ تدريجـيّ، حتـى يتحـوّل إلـى تعزيـز داخلـي (ذاتـي، مـن الطالـب نفسـه: سـد حاجتـه للتعلـم، وحـل المشـكلة).

٦ **الوسـائط التعليميّـة**: تركّـز علـى اسـتخدام الوسـائط التفاعليّـة التـي تعتمـد علـى دمـج الصـوت، والصـورة، والرسـومات، والنصـوص، وأيّ أمـور أخـرى مـن بيئـة الطالـب، التـي تسـاعد المتعلـم علـى التفاعـل مـع المعرفـة الجديـدة، وبالتالـي إحـداث التعلـم.

دور المتعلم في النظرية البنائية:

يتقمص دور العالم الصغير المكتشف لما يتعلمه، من خلال ممارسته التفكير العلمي، فهو باحث عن معنى لخبرته مع مهامّ التعلم، بانٍ لمعرفته، مشارك في مسؤولية إدارة التعلم وتقويمه.

دور المعلم في النظرية البنائية:

تنظيم بيئة التعلم، وتوفير الأدوات والمواد المطلوبة لإنجاز مهامّ التعلم بالتعاون مع الطلبة، فهو ميسر، ومساعد في بناء المعرفة، ومصدر احتياطيّ للمعلومات، ومشارك في عملية إدارة التعلم وتقويمه. (زيتون،٢٠٠٣)

مقارنة بين وجهات النظر المعرفيّة والسلوكيّة:

النظرية المعرفية	النظرية السلوكية
- تغيير السلوك يَحدُثُ نتيجة لتعلم المعرفة. - التعزيز يقدم تغذية راجعة لاحتمال تكرار السلوك، أو تغييره. - التعلم هو توسيع الفهم، وتحويله. - التعلم عمليّة عقلية نشطة تتعلق باكتساب المعرفة، وتذكرها، واستخدامها، ولا يوجد نموذج معرفي واحد، أو نظرية تعلم ممثلة للمجال بأكمله؛ لاعتماده على نطاق واسع من مواقف التعلم.	- تغيير السلوك يتم من خلال تعلّم سلوكات جديدة. - التعزيز يقوّي الاستجابات. - التعلم السلوكي كان يجري على حيوانات في مواقف مخبرية متحكّم فيها؛ ما أدّى إلى تحديد عدد من القوانين العامّة للتعلم تُطبَّق على جميع الكائنات الأعلى. (عدس،١٩٩٩)

ويرى زيتون (٢٠٠٣) **أنّ للفلسفة البنائية عدّة تيارات:** منها **البنائية البسيطة،** وفيها يبني المتعلم المعرفة بصورة نشطة، ولا يحصل عليها بطريقة سلبية من البيئة، ومن المآخذ عليها: أنها لم توضح المقصود بالبيئة، أو المعرفة، أو العلاقة بينهما، أو ما البيئات الأفضل للتعلم. ويشير عفانة وأبو ملوح (٢٠٠٦) أنّ **أصحاب فكرة البنائية الجذرية يقولون:** إنّ المعرفة هي عملية تكييف ديناميكية، يتوافق فيها الفرد مع تفسيرات قابلة للتطبيق نحو ترجمات حيوية للخبرة، فالبنى العقلية المبنية من خبرات الماضي تساعد في ترتيب تدفق الخبرات المستمرة، ولكن عندما تفشل هذه البنى في عملها تتغير هذه البنى العقلية لمحاولة التكيف مع الخبرات الجديدة.

جاءت **البنائية الثقافية** لتؤكد أنّ ما نحتاجه هو فهم جديد للعقل ليس كمعالج منفرد للمعلومات، بل كوجود بيولوجي يبني نظاماً يتواجد بصورة متساوية في ذهن الفرد، وفي الأدوات والمنتجات الإنسانية والأنظمة الرمزية المستخدمة؛ لتسهيل التفاعل الاجتماعي والثقافي، وقد أضافت **البنائية النقدية** البعد النقدي والإصلاحي الذي يهدف إلى تشكيل هذه البيئات، وتعد البنائية النقدية نظرية اجتماعية للمعرفة، بتركيزها على السياق الاجتماعي للإصلاح الثقافي والمعرفي. (زيتون وزيتون، ٢٠٠٣)

بينما تنظر **البنائية التفاعلية** للتعلم على أنّه يحدث من خلال جانب عامّ، يبني المتعلمون معرفتهم من تفاعلهم مع العلم التجريبي المحيط بهم، ومع غيرهم من الأفراد، وجانب آخر (ذاتي)، يتأمل فيه المتعلمون تفاعلاتهم وأفكارهم

أثناء عملية التعلم في ظل العالم التجريبي. فتركز البنائية التفاعلية على ضرورة أن يكتسب المتعلمون القدرة على بناء التراكيب المعرفية، والتفكير الناقد، وإقناع الآخرين بآرائهم، وممارسة الاستقصاء والتفاوض الاجتماعي، وتغيير المفاهيم، بجانب القدرة على التجريب والاستكشاف، والتبرير، وخلق التفاعل بين القديم والجديد، بالإضافة للتوظيف النشط للمعرفة. (زيتون، ٢٠٠٢)

يشير زيتون (٢٠٠٣) إلى أنّه بالإضافة لما سبق من تيارات البنائية، فلا بد من الإشارة إلى **البنائية الإنسانية**، حيث إنّ العمليات المعرفية التي يوظفها المحترفون الذين ينتجون أعمالاً خارقة للعادة هي نفسها التي يوظفها المبتدؤن الذين ليس لديهم خبرة واسعة. ويرى عبيد (٢٠٠٢) أنّ **البنائية الاجتماعية** تركز على التعلم، وعلى بناء المعرفة، من خلال التفاعل الاجتماعي، والاهتمام بالتعلم التعاوني، ويسمي فيجوتسكي (Vygotsky) المنطقة التي تقع بين ما يقوم به الشخص بنفسه، وما يمكن أن يقوم به من خلال تعاونه مع شخص آخر أكثر معرفة منه (منطقة النمو الوشيك)، وفي هذه المنطقة يحدث النمو المعرفي، ويتم التعلم، وأنّ وراء البيئة الاجتماعية المباشرة لوضع التعلم سياق أوسع من التأثيرات الثقافية التي تتضمن العادات والتقاليد والأعراف والدين والبيولوجيا والأدوات واللغة.

تنحدر هذه النظريّة من النظريّة البنائيّة التي تؤكّد على دوْر الآخرين في بناء المعارف لدى الفرد، وأنّ التفاعلات الاجتماعية المثمرة بين الأفراد تساعد على نموّ البنية المعرفية لديهم، وتعمل على تطورها باستمرار، يرى (فيجوتسكي- عالم نفسي روسي من أهم منظري البنائية الاجتماعية) أنّ التفاعل الاجتماعي يلعب دوراً أساسياً في تطوير الإدراك، ويظهر مدى التطوّر الثقافي للفرد على المستويْن الفردي والاجتماعي، وهذا يشمل الانتباه التطوعي، والذاكرة المنطقيّة، وتشكيل المفاهيم. كما تشير هذه النظرية إلى أنّ التطوّر الإدراكي يعتمد على منطقة النمو المركزيّة القريبة، فمستوى التطوّر يزداد عندما ينخرط الأفراد في سلوكات اجتماعيّة، فالتطوّر يلزمه تفاعل اجتماعي، والمهارة التي تُنجز بتعاون الأفراد تتجاوز ما يُنجز بشكل فردي. كما أكد (فيجوتسكي) أنّ الوعي غير موجود في الدماغ، بل في الممارسات اليوميّة، ويعتقد أنّ الاتجاه الثقافي يقدم حلاً لفهم مشكلات الحياة، عن طريق دراسة الظواهر كتعميمات في حالة تغير حركة مستمرة، وأنّ التغير التاريخي في المجتمع والحياة يؤدي إلى تغير في سلوك الفرد، وطبيعته. (مصطفى، ٢٠٠١)

الفرق بين النظريّة البنائيّة المعرفيّة والنظريّة البنائيّة الاجتماعيّة:

يوضّح الجدول الآتي مقارنة بين هذين الاتجاهين:

وجه المقارنة	علماء البنائيّة المعرفيّة	علماء البنائيّة الثقافيّة الاجتماعيّة
تحديد موقع العقل	في رأس الفرد.	في التفاعل الفردي والاجتماعي.
التعلم	هو عملية نشطة لإعادة تنظيم المعرفة.	هو عملية مشاركة الفرد بممارساته في بيئة معينة.
كيفية تحقيق الهدف	عن طريق الأساس الثقافي والاجتماعي لخبرة الفرد.	من خلال عمليات ثقافية واجتماعية يقوم بها أفراد متفاعلون.
الاهتمام النظري	الاهتمام بعمليات الفرد النفسية.	الاهتمام بالعمليات الثقافية والاجتماعية.
تحليل التعلم	هو تنظيم ذاتي معرفي، فالفرد يشارك في ممارسة ثقافيّة.	هو مشاركة الفرد مع الآخرين، ثمّ يبني المعرفة بنفسه.
	تصميم نماذج لإعادة تنظيم مفاهيم الفرد.	مشاركة الفرد في ممارسات منظمة ثقافياً، والتفاعل معها وجهاً لوجه.
الغرفة الصفية	يكوّن فيها المعلم بالمشاركة مع المتعلمين ثقافة محدودة.	ممارسات منظّمة ثقافياً.
النظر إلي الجماعة	انعدام التجانس بين أفراد البيئة الواحدة، والتحليلات بعيدة عن الممارسات الثقافية والاجتماعية.	التجانس بين أفراد البيئة الواحدة، مع الاهتمام بتحليل الاختلافات النوعية بينهم.

(مصطفى، ٢٠٠١)

معايير اختيار استراتيجيات تعليم الرياضيات وتعلمها:

يتم اختيار استراتيجية تعليم الرياضيات وتعلمها، وفقاً للمعايير الآتية (خالد، ٢٠١٦)**:**

١ أن تناسب الاستراتيجية استعدادات الطلبة، ومستوى نضجهم، وتناسب قدراتهم، واهتماماتهم، وميولهم.
٢ أن يناسب أسلوب عرض المحتوى وتنظيمه طبيعة الرياضيات وأهداف تعليمها، وأهداف الدرس الحالي.
٣ أن تحقق الاستراتيجية مشاركة واسعة لجميع الطلبة بمختلف مستوياتهم.
٤ أن تناسب الاستراتيجية الزمن المتاح للحصة، ولطبيعة تنظيم البيئة الصفية، والتجهيزات المتوافرة.
٥ أن تعمل الاستراتيجية على بناء ثقة المعلم بالمتعلم، وتحقيق تفاعل صفي حقيقي وفعال.
٦ أن تسهم الاستراتيجية في تطوير تفكير المتعلمين، وتنمية اتجاهاتهم نحو الرياضيات.

استراتيجيات التدريس:

اعتمدت المناهج المطورة على منهجيّة النشاط، الذي يؤكّد دور الطلبة في أداء الأنشطة بمشاركة المعلمين، بحيث تكون الغرفة الصفيّة بما فيها من (معلم، وطالب، وكتاب مدرسي، ومصادر تعلم...) حاضرة لتعليم الطلبة وتعلمهم، إضافة إلى ارتباطها بالمجتمع المحلي، وتوظيف التكنولوجيا بما يحقّق التوجّهات التربوية نحو التعلم العميق.

وقد وضَح فولان ولانجورثي (Fullan& Langworthy,2014) التعلم العميق على النحو الآتي:

- بيداغوجية جديدة جاءت نتيجة تطور أدوات الاقتصاد العالمي، واقتصاد المعرفة، وما ترتّب على ذلك من تطوّرٍ في أنماط القيادة ومفاهيمها، والانتقال إلى التعلم الذي يتجاوز إتقان المحتوى المعرفي إلى تعلّم يهتم باكتشاف معارف جديدة على المستوى العالمي، والإسهام في إنتاج معارف على المستوى الكوني الذي أطلقت فيه التكنولوجيا العنان لأنماط التعليم والتعلم، وتطبيقات معرفية حياتية خارج المدرسة؛ ما انعكس على شكل توجهات تربوية حديثة تنعكس على التعليم الرسمي.
- الانتقال بالتعليم من التركيز على تغطية جميع عناصر المحتوى التعليمي (المقرر الدراسي)؛ للتركيز على عمليّة التعلم، وتطوير قدرات الطلبة في قيادة تعلمهم، وعَمَلِ ما يحقق رغباتهم، ويكون المعلمون شركاء في تعلم عميق من خلال البحث، والربط على نطاق واسع في العالم الحقيقي.

كما لا بدّ من التنويه إلى أنّ بنية منهاج الرياضيات الجديد تعدّ تعليمَ التفكير ركيزةً أساسيّةً في جميع مقرّرات الرياضيات (١-١٢)، وتعد هذه إضافة نوعية للمناهج، محفزة للمعلم في توظيف استراتيجيات التدريس التي تُعمل تفكير الطلبة وتنمّيه، وبالتالي تدفع باتجاه توليد أفكار جديدة، يمتاز فيها المعلم بالتكيف والمرونة والمواءمة، ويتم قياس مخرجات التعلم، بالاعتماد على قدرات الطلبة المرتبطة بالكفايات التعليمية التعلمية ذات نتاجات تنعكس على شكل سياقات حياتية متنوعة في المجالات كافة؛ ما يستوجب التوجه نحو أنماط تقويم تربوية حديثة، كالتقويم الأصيل بكل أدواته، دون إهمال لأدوات التقويم الأخرى. (خالد وآخرون، ٢٠١٦)

استراتيجية التعلم بالاستكشاف:

هي مجموعة من التحركات، يخطط لها المعلم، ويصممها، وينفذها، ويتيح للطلبة بيئة مناسبة؛ لمعالجة المعلومات، وتحويلها للوصول إلى معرفة جديدة، وتمكن الطالب من التخمين، أو تكوين الفرضيات حول ما يريد اكتشافه، باستخدام عملية الاستقراء أو الاستنباط، أو باستخدام المشاهدة؛ للتوصل في النهاية إلى المفهوم، أو التعميم المراد استكشافه (بل،١٩٨٧).

ومن أهم أهدافها زيادة قدرة الطلبة على التحليل، وتركيب المعلومات وتقويمها بطريقة عقلانية، وتنمية قدراتهم على التفكير الناقد والتفكير الإبداعي، وإكساب الطلبة طرق فعالة للعمل الجماعي، ومشاركة المعلومات، والاستماع لأفكار الآخرين، بالاضافة لزيادة دافعية الطلبة نحو التعلم الذاتي، كما أنّ ما يتم تعلمه باستراتيجية الاستكشاف يكون له معنى أكثر عند الطلبة، ويبقى في الذاكرة لمدة أطول، وتعزز استراتيجية التعلم بالاستكشاف قدرة الطلبة على توظيف ما تمّ تعلمه في حل مسائل جديدة في مواقف غير مألوفه لديهم. والتعليم الاستكشافي نوعان، هما: التعليم الاستكشافي الموجّه، والتعليم الاستكشافي الحر.

استراتيجية التعليم بالبرهان الرياضي:

تُعدّ استراتيجية التعلم بالبرهان الرياضي حالة خاصة لحل المسائل الرياضية، وتكمن أهمية هذه الاستراتيجية في أنها تسهم في تنمية قدرات الطالب على التفكير، وتبني شخصيته بناء علمياً ومنطقياً، ونعني بالبرهان: تقديم أدلة أو شواهد على صحة قضية ما تقنع الآخرين. وقد عرّفه عبيد وآخرون: بأنه مناقشة استنباطية، مبنية على عبارات صائبة، يأتي بصورة معالجات لفظية أو رمزية، تتمثل في تتبع عبارات نستنبط كل منها من سابقتها بأساليب منطقية، تستند إلى شواهد معترف بصحتها (مسلمات، ونظريات، ومعطيات). (عبيد وآخرون، ٢٠٠٠).

مراحل التعلم بالبرهان الرياضي:

المرحلة الأولى: فهم النظرية من خلال القراءة التأملية لفهمها، ولتحديد المعطيات، والمطلوب إثباته، ثمّ تمثيله بالرسم، ومحاولة إيجاد أمثلة أو أمثلة مضادة تقنع الطالب بصحة النظرية.

المرحلة الثانية: فهي التفكير بالبرهان، وفي هذه المرحلة يستذكر الطلبة المسلّمات والنظريات السابقة؛ للاستفادة منها في تحديد استراتيجيات البرهان المناسبة، ولمعرفة الإجراء الذي يمكن أن يقوده إلى المعرفة الجديدة، وليس من الضروري أن نبدأ البرهنة من المعطيات، وصولاً إلى المطلوب، فقد يستخدم الطالب الطريقة التحليلية، وهي التفكير بالبرهان بالاتجاه العكسي من المطلوب، وصولاً للمعطيات.

المرحلة الثالثة: من مراحل البرهان: كتابة البرهان، فقد يتوصل الطلبة للبرهان شفوياً، إلاّ أنهم يواجهون صعوبة في صياغته بعبارات رياضية، وبصورة منطقية منظمة. (عبيد وآخرون، ٢٠٠٠)

استراتيجية الألعاب:

يعرف عبيد (٢٠٠٤) اللعبة التعليمية بأنّها نشاط هادف، محكوم بقواعد معينة، يمكن أن يتنافس فيه عدة أفراد، ويعرّف استراتيجية الألعاب التعليمية بأنها مجموعة التحركات والأنشطة الصفية التي يخطط لها المعلم، وينفذها؛ من أجل تحقيق أهداف عقلية ومهارية ووجدانية من خلال المتعة والتسلية، ومن الأهداف التعليمية لهذه الاستراتيجية: زيادة الدافعية، والميل نحو المشاركة في حصص الرياضيات، وتعلم مهارات العمل الجماعي ضمن الفريق، واكتساب مهارات التخطيط، واتخاذ القرار، بالإضافة لتنمية بعض القيم التربوية، مثل المبادرة، والتنافس الشريف، وروح الفريق والتعاون الإيجابي، واحترام آراء الآخرين، والتحلي بالروح الرياضية. وقد يظهر خلال التعلم باللعب بعض السلوكات السلبية، مثل الغش، أو الفوضى التي قد تعيق المعلم والطلبة، أو اللعب دون الانتباه للهدف التعليمي.

حدد عفانة (٢٠٠٦) مراحل الألعاب التعليمية بالآتي:

- **مرحلة التخطيط:** وفيها يتم تحديد الأهداف والمعلومات والمهارات والاتجاهات التي يسعى المعلم لإكسابها للطلبة، ثمّ اختيار اللعبة المناسبة، وتحديد الأدوات والتجهيزات اللازمة، والوقت والمكان المناسبين لها، ومن الضروري أن يجرب المعلم اللعبة؛ كي يحدد النتاج التعليمي، ويتفادى أي خطأ فيها.

- **مرحلة التنفيذ:** يوضّح المعلم الأهداف المرجوة من اللعبة، وأهميتها في تعلم خبرة جديدة، أو تمكين خبرات سابقة، ثمّ يحدد طبيعة اللعبة وقواعدها وشروطها، ويوزع الطلبة بطريقة تراعي طبيعة اللعبة، وتناسب الطلبة، وقدراتهم المختلفة.
- **مرحلة التقويم:** يقوم المعلم بتقويم ذاتي لأدائه، ولأداء الطلبة، فأثناء اللعبة يجمع المعلم بيانات، ويسجل ملاحظات، ويقدم تعليمات وتوجيهات؛ لتعديل مسار اللعبة نحو الأهداف المرجوة منها، وبعد انتهاء اللعبة، يتوصل المعلم إلى حكم شامل عن مدى نجاح طلابه في تنفيذ اللعبة، ومدى الاستفادة منها. (عفانة، ٢٠٠٦)

استراتيجية العمل المعملي في تعلم الرياضيات

هي مجموعة من الممارسات الصفية التي يخطط لها المعلم، وينفذها في تسلسل، ويتيح للطلبة تعلم خبرات رياضية؛ نتيجة تفاعلهم مع أنشطة عملية، تشمل استخدام أجهزة وأدوات بطرق تجريبية، فيما تسمى بمعمل الرياضيات؛ للتحقق من صحة مفاهيم ومسلّمات، أو اكتشاف بعض التعميمات الرياضية.

ويعرف معمل الرياضيات بأنه البيئة التي يتعلم فيها الطلبة الرياضيات، من خلال التعرف إلى المفاهيم، واكتشاف المبادىء، وتطبيق النظريات المجردة في مواقف عملية، من خلال نماذج رياضية، أو أنشطة عملية، مثل الألعاب التعليمية، وهو مكان مجهّز بكتب، ودوريات، ونشرات، وأجهزة، ووسائل، وأدوات، ومحسوسات يستخدمها الطلبة؛ للتجريب، وللتحقق من صحة بعض المفاهيم ولاكتشاف التعميمات الرياضية.

أهداف استراتيجية العمل المعملي في تعلم الرياضيات:

تسهم هذه الاستراتيجية في تحقيق عدة أهداف تعليمية، بحيث تصبح الخبرات الرياضية أكثر اندماجاً في البنية العقلية، واكتساب مهارة حل المشكلات، وانتقال أثر التعلم؛ أي تنمية القدرات العقلية؛ لتطبيق المفاهيم، والتعميمات، والمهارات الرياضية في مواقف حياتية، بالإضافة لتنمية العمل الاستقلالي، أو الجماعي؛ لتحقيق الرغبة والرضا، والمشاركة في الأنشطة الرياضية، والاستمتاع بها. **(مداح،٢٠٠١)**

التعلّم النشط:

أولاً- تعريفه:

لقد عرّف أهل التربية والاختصاص التعلم النشط تعريفات كثيرة، لكنّ الشيء المشترك بينها جميعاً هو التأكيد على الدوْر الإيجابي للمتعلم، ومسؤوليّته عن تعلمه. وتكمن أهميّة مثل هذا النوع من التعلّم في أنّها تحقّق **تعلماً استراتيجياً** ناتجاً عن خبرات حقيقيّة شبيهة بالواقع، وخاصة في هذا الزمن الذي تدفّقت فيه المعرفة والمعلومات بشكلٍ يصعب الإحاطة به؛ ما يجعل السبيل الوحيد للتعامل معها هو إيجاد نوع من التعلم، كالتعلم النشط الذي يعطي الأسس والقواعد في التعامل مع تلك المعرفة والمعلومات، وحسن الاختيار، والتوظيف الفعال للمعلومات.

وتصف كوجك (٢٠٠٨) الفلسفة التي بُنيَ عليها التعلم النشط «بأنّها فلسفة تربوية تعتمد على إيجابيّة المتعلم في الموقف التعليمي. أما استراتيجيات التعلم النشط المشتقة من هذه الفلسفة، فتشمل جميع الممارسات التربويّة، والإجراءات

التدريسيّة التي تهدف إلى تفعيل دور المتعلم، ويحدث التعلم؛ نتيجةً للبحث، والتجريب، والعمل (الفردي أو الجماعي)، والخبرات التعلميّة التي يخطط لها المعلم. وإنّ اعتماد المتعلم على ذاته خلال خوض هذه الخبرات العمليّة، في سبيل بحثه عن المعلومة، يدعم بشكلٍ كبير التوجّه التربوي للوصول إلى متعلم مستقل، يتحمل مسؤوليّة تعلُّمه، ويرتكز على خبراته السابقة في بناء معرفته الجديدة. كما أنّ مثل هذه الخبرات العمليّة تعمل على دعم المنظومة القيميّة، والاتجاهات الإيجابيّة نحو الرياضيات، والتعلم الذاتي عموماً.

ويشير سعادة إلى أنّ التعلم النشط يُعدُّ طريقة تعلم وتعليم في آن واحد، يشترك فيها الطلبة بأنشطة متنوعة تسمح لهم بالإصغاء الإيجابي، والتفكير الواعي، والتحليل السليم لمادة الدراسة، حيث يتشارك المتعلمون في الآراء بوجود المعلم الميسّر لعملية التعلم (سعادة وآخرون، ٢٠٠٨).

أهميّة التعلم النشـط:

يشير زيتون (٢٠٠٧) إلى أنّ التعلّم النشط يزيد من تفاعل الطلبة في الحصّة الصفيّة، ويجعل من التعلم متعة، كما ينمّي العلاقات الاجتماعيّة بين الطلبة أنفسهم، وبين الطلبة والمعلم، ويزيد من ثقة الطالب بنفسه، ويرفع مستوى دافعية الطالب للتعلّم، ولتحقيق ذلك، يحتاج المعلم إلى التمكّن من استراتيجيات التعلم النشط، مثل: حل المشكلات، والعصف الذهني، والتعلم التعاوني، ولعب الأدوار، وطريقة الجكسو، والتعلم باللعب. لقد اخْتيرَت هذه الاستراتيجيات بعناية؛ لتناسب الطلبة في تلك الصفوف، وبها يترك المعلم أثراً كبيراً في طلبته، كما يتيح لهم الفرصة في تحمُّل المسؤوليّة، والمشاركة في اتّخاذ بعض القرارات أثناء عمليّة التعلم.

استراتيجيات التعلم النشـط وتدريس الرياضيّات:

إنّ المتتبّع لأدبيّات التعلم النشط يجد أنّ الكتّاب والمهتمين قد رصدوا استراتيجياتٍ كثيرةً للتعلم النشط على النحو الآتي:

أولاً- استراتيجية حل المشـكلة:

هي موقف جديد لم يختبره الطالب من قبل، وليس لديه حلّ جاهز له، ويثير نوعاً من التحدي الذي يقبله الطالب، ويكون هذا الموقف في صورة تساؤل يتطلّب إجابة، أو قضية تحتاج لبرهان، أو موقف حياتي يحتاج إلى حل. والنظر لموقف ما على أنه مسألة، هو نسبي، ويعتمد على مستوى التعقيد في الموقف، ومناسبته لقدرات الطالب.

ويعني حل المشكلة الإدراك الصحيح للعلاقات المتضمنة في الموقف التعليمي، بما يمكنه من الوصول للحل، ويعتمد حل المشكلة على المعرفة العقلية التي تشمل المسلّمات والمفاهيم والتعميمات اللازمة للحل، بالإضافة للاستراتيجيات، وهي الخطوات التي يقوم بها الطالب، مستخدماً معارفه العقلية لحل المسألة، من خلال تجاربه في حل مسائل سابقة.

(خالد، وآخرون، ٢٠١٦)

مراحل حل المسألة:

١ **فهم المسألة**، وإعادة صياغتها بلغة الطالب، أو بمخطط سهمي، أو شكل بياني، ثمّ تحديد مكوناتها: المعطيات، والمطلوب.

٢ **ابتكار فكرة أو خطة الحل:** تلخيص البيانات، وتنظيمها، وترجمتها لمعادلة أو متباينة، وواجب المعلم هنا تقديم تلميحات قد تساعد طلبته إلى فكرة الحل، مثل: ربط المسألة بتعلم سابق، وعمل تعديلات للمسألة؛ لتبسيطها .

٣ **تنفيذ فكرة الحل:** تجريب فكرة استراتيجية الحل المقترحة؛ للوصول إلى الحل المنطقي للمسألة، يستخدم فيها الطالب المهارات الحسابية أو الهندسية أو الجبرية المناسبة لتنفيذ خطة الحل.

٤ **مراجعة الحل وتقويمه:** وتكمن أهمية هذه المرحلة بأنها تعمل على تنمية التفكير فوق المعرفي، من خلال تقويم الطلبة لتفكيرهم، والحكم على مدى فاعليتهم في حل المسألة، من خلال التعويض، أو الحل العكسي، أو تطبيق طريقة حل أخرى.

ويتمثل دور المعلم بتشجيع الطلبة، وتدريبهم على استخدام المصادر المختلفة للمعرفة؛ لاستخلاص هذه المعلومات، وتصنيفها، وتحليلها؛ لوضع الفرضيات، معتمدين على خبراتهم السابقة، ومن ثمّ التوصل إلى استنتاجات، ومحاكمتها من حيث المعقولية، وإمكانية تطبيقها، وتطويرها، بناء على ذلك. (خالد وآخرون، ٢٠١٦).

ثانياً- استراتيجية التعلم التعاوني:

ينقل التعلم التعاوني الطلبة من التعلم الفردي إلى التعلم الجماعي، بحيث يستمعون إلى بعضهم بعضاً؛ ما يتيح لهم الفرصة المناسبة للنقاش، والتفسير الذي يدعم فهمهم. (McGatha&Bay-Williams, 2013)

وتنطلق فلسفة التعلم التعاوني من تراث فكري قديم، فالإنسان بطبيعته لا يمكن أن يعيش في عزلةٍ عن الآخرين، ووسيلته لتحقيق أهدافه هو التعاون؛ لاختزال الوقت والجهد. وينطلق التعلم التعاوني على أساس نظرية الذكاءات المتعددة، ومن مبادئ هذه النظرية: تفاوت مستوى الذكاءات وتعدّدها من فرد إلى آخر، بحيث تحقق في مجموعها تعلماً متكاملاً، وتسهم في تشكيل ذكاء. (Gardner,1983)

يتجاوز التعلم التعاوني ترتيب جلوس الطلبة إلى تمتين منظومة من القيم التي تركز على العمل التعاوني المشترك، معتمداً على العناصر الآتية:

١ **الاعتماد المتبادل الإيجابي:** ويُعدّ أهمّ عناصر نجاح التعلم التعاوني، ويجب أن يشعر الطلبة بأنهم يحتاجون إلى بعضهم بعضاً؛ من أجل إكمال مَهمّة المجموعة، ويمكن للمعلم تعزيز هذا الشعور من خلال:

أ وضع أهداف مشتركة.

ب إعطاء مكافآت مشتركة.

ج المشاركة في المعلومات والمواد (لكل مجموعة ورقة واحدة مثلاً).

د المسؤوليّة الفردية والزمرية. والمجموعة التعاونيّة يجب أن تكون مسؤولة عن تحقيق أهدافها، وكلّ عضو في المجموعة يجب أن يكون مسؤولاً عن الإسهام بنصيبه في العمل. وتظهر المسؤوليّة الفرديّة عندما يتم تقييم أداء كلّ طالب، وتعاد النتائج إلى المجموعة والفرد؛ من أجل التأكّد ممّن هو في حاجة إلى مساعدة.

٢ **التفاعل المباشر:** يحتاج الطلبة إلى القيام بعملٍ حقيقيّ معاً، يعملون من خلاله على زيادة نجاح بعضهم بعضاً، من خلال مساعدة بعضهم على التعلم، وتشجيعهم له.

٣ **معالجة عمل المجموعات:** تحتاج المجموعات إلى تخصيص وقت محدّد؛ لمناقشة تقدُّمها في تحقيق أهدافها، وفي حفاظها على علاقات عمل فاعلة بين الأعضاء، ويستطيع المعلمون أنْ يبنوا مهارة معالجة عمل المجموعة من خلال تعيين مهامّ، وتوزيع الأدوار، وسرد إيجابيّات عمل كلّ فرد في المجموعة مثلاً. (McGatha&Bay-Williams, 2013)

وأكد ستيفنز وهايد (Stephens and Hyde,2012) على دور المعلم أثناء تنفيذ العمل التعاوني، في الإشراف على عمل المجموعات، وتوفير المُناخات المناسبة التي تمكّن الطلبة من التفاعل في المجموعات، بالإضافة إلى اختيار الطلبة في المجموعات بما يتناسب وطبيعة المهام الموكلة إليهم، سواء كانت مجموعات متجانسة، أو اختيارية، أو عشوائية، أو غير ذلك.

طرق التعلـم التعاوني:

لقد اهتم كثير من التربويين والمهتمين بالتعلم التعاوني بوضع طرقٍ مختلفة له؛ ما يتطلب فهم الأنماط المختلفة للتعلم التعاوني من المعلم، أو ممّن أراد تطبيقه، وفق ظروف طلّابه، وغرفة الصف، ونوع المقاعد، وحجم المجموعة، وغيرها من الظروف التي تَفرضُ أحياناً على المعلم اتّباع طريقة معيّنة بذاتها، وقبل ذلك قناعة المعلم الشخصية. وبعض هذه الطرق تتمثل فيما يأتي:

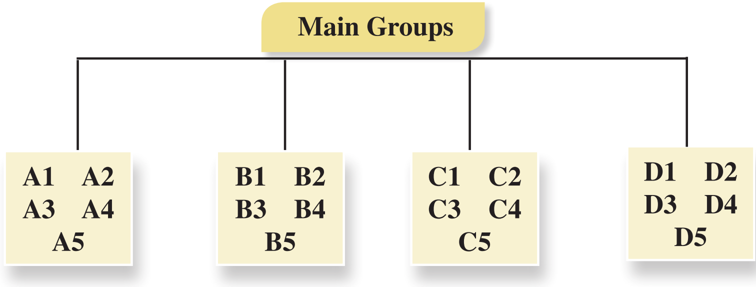
١- **تقسيم الطلبة وَفقاً لتحصيلهم:** طوّر هذه الطريقة (روبرت سلفين) في جامعة (هوبكنز) عام ١٩٧١م، وهي أبسط طرق التعلم التعاوني، حيث تتكوّن المجموعة من (٥) طلاب، وتكون غير متجانسة، فتضم طلّاباً من المستويات الثلاثة (متفوق – متوسط – دون المتوسط). ويساعد الطلبة بعضهم بعضاً في فهم المادة الدراسيّة، وتكون طريقة التقويم جماعيّة وفرديّة، ويمكن استخدام هذه الطريقة في جميع المواد الدارسيّة، وجميع المراحل الدراسيّة أيضاً (الحيلة، ٢٠٠٣).

٢- **استراتيجية جيكسو (Jigsaw Strategy):** تعني الترجمة الحرفية لهذه الاستراتيجية طريقة مجموعات التركيب، ولقد طورت هذه الطريقة واختبرت على يد إليوت أرنسون (Eiliot Arnson) وزملاؤه، ثمّ تبناها سالفين (Slavin) وجماعته، وتهدف هذه الطريقة إلى تشجيع الطلبة على التعاون، والعمل الجماعي، حيث يبدأ في هذه الأثناء تحطيم الحواجز الشخيصة (الحيلة، ٢٠٠٨).

وتستدعي طريقه جيكسو (Jigsaw) عمل الطلبة في مجموعات صغيرة، تتشارك في تقديم أجزاء من حلول مشكلة عامة، تتمثل في الأداء الناجح للمهمة، حيث يشرف المعلم على تكليف كل عضو من المجموعة جزء من المعلومات المتعلقة بالمهمة، ولا يعطى أي عضو من المجموعة أية معلومات تجعله يسهم في حل المشكلة وحده؛ للوصول لحل المشكلة من خلال المشاركة، وتبادل وجهات النظر، وفي نهاية المطاف، يتأكد المعلم من مدى تحقق الأهداف بطرق التقويم المختلفة (الخفاف، ٢٠٠٣)، وهذه الاستراتيجية تركّز على نشاط الطلبة، وتفاعلهم على النحو الآتي:

١ المجموعات الأم (home team):

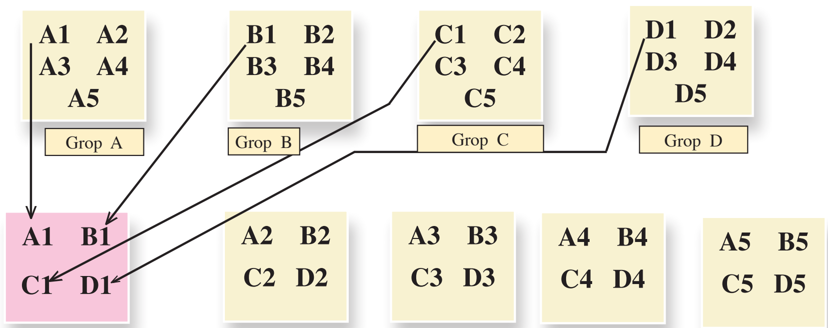
يتم توزيع الطلبة على شكل مجموعات، تتكون كل مجموعة من (٥– ٦) أعضاء، ويكون عدد الأعضاء وَفق المهام الجزئية للمشكلة، وتتفق المجموعة على منسق للفريق، ومقرر له، ويتم توزيع المهامّ على أعضاء الفريق بالتشاور فيما بينهم، وبإشراف المعلم وفق الشكل الآتي:



ويتفق المعلم مع المجموعات على زمن محدد لإنجاز المهامّ الموكلة إليهم.

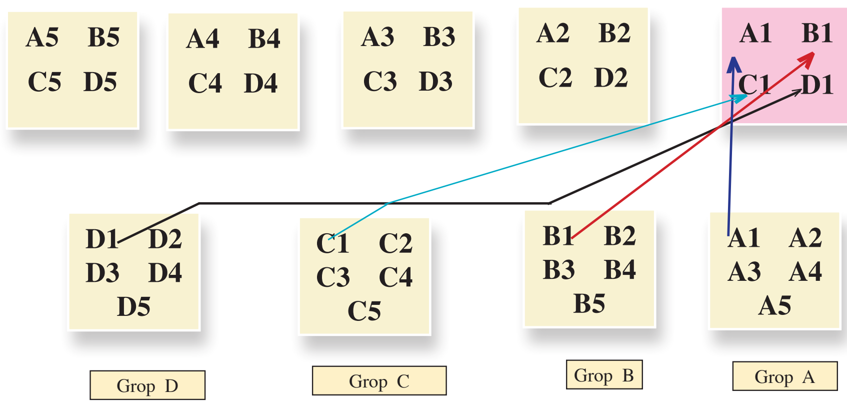
٢ مجموعات الخبراء (Experts Team):

يتجمع الطلبة في فرق متخصصة، وَفق المهامّ الموكلة إليهم، ويتلخص دورهم في مناقشة المهمة الموكلة لكلّ فريق، بحيث يكتسب الخبرة اللازمة بتفاصيلها (المهمات الجزئية)، وَفق الشكل الآتي:



٣ مرحلة تعليم طالب لطالب (عودة الخبراء إلى المجموعات الأم):

بحيث يعود كل طالب من الفرق التخصصية إلى مجموعته الأصلية، وتكون مهمة كل خبير نقل خبرته الجديدة إلى أفراد مجموعته الأم؛ لتشكل مجموعة الخبرات فيما بينهم حلاً للمهمة الكلية، والشكل الآتي يوضح ذلك:



وسميت هذه المرحلة مرحلة تعليم طالب – طالب، بحيث يمثل الطالب الواحد دور المعلم في خبرته، ويعلم فرقته عن الموضوع الذى تخصص به، وهذا يعنى أنّ المهمة التي أوكل بها لم تكن مقصورة على تعلمه لها فقط، وإنّما يتعلمها؛ كي يعلمها لغيره؛ ما يستدعي إتقانه للمهمة، بحيث أن كل طالب في المجموعة الأم يصبح مُلمّاً في جميع جوانب الموضوع، وفي داخل الفرقة، يجري نقاش وأسئلة؛ للتأكد من أنّ كل فرد فيها أصبح مُلمّاً في جميع المادة، ومن هنا جاء اسم الطريقة؛ لأنّ المهمة العامة توزع إلى أقسام، وكل طالب تخصص في قسم، وعند العودة للعمل في فرقة الأم يحاول أعضاء الفرقة تركيب هذه الأقسام بشكل ينتج عنه الشكل العام للمادة، فهو يشبه لعبة التركيب puzzle في إعطاء الصورة للمادة في نهاية عمل فرقة الأم، ثمّ ينتهي العمل بعرض الفرق المختلفة النتائج، ومناقشتها، وإجمالها، بحيث تعرض كل فرقة مهمة واحدة، يشارك أعضاء الفرق الأخرى باستكمالها، عن طريق إضافة ملاحظات وتعليقات؛ من أجل الوصول إلى الصورة الكاملة للمادة، ثمّ يعطي المعلم اختباراً لجميع الطلبة في المهمة المحددة، والعلامة التي يأخذها الطالب هي علامته الشخصية، وليست علامة المجموعة.

أمّا دور المعلم في هذه الاستراتيجية، فمشرف مستشار في الخطوة الأولى، ومتابع، ومقيّم في الخطوتين الثانية والثالثة، ونجد أنه من المناسب أن يقوم المعلم بعد الانتهاء من المرحلة الثالثة بالآتي:

- **التحقق** من فهم الطلبة للمهمة كاملة، بحيث يتّبع المعلم طرقاً مختلفة؛ للتأكد من تحقق الهدف، وفهم المهمة الكلية، كأن يطلب من أحد الطلبة أن يوضح مهام غير المهام التي أوكلت إليه في مجموعات الخبراء.
- **العدالة** في التعليم: ولما كان من حق كل طالب أن يتعرض لخبرة تعليمية تعلمية مثل أقرانه، فعلى المعلم أن يتحقق من ذلك من خلال اختيار أحد الطلبة من مجموعات مختلفة، والذي لاحظ اهتمامه وتفاعله في المجموعة الأم ومجموعة الخبراء، ويطلب منه توضيح مهمته أمام الصف بأكمله، ثمّ يطلب من مجموعة خبراء المهمة الإضافة أو التعديل، ويسمح بإثارة التساؤلات من باقي الطلبة، أو عن طريق مداخلات إذا لزم الأمر.

فوائد استخدام استراتيجية جكسو (Jigsaw):

١. تساعد على إجراء تغييرات إيجابية في أداء المتعلمين، وأخلاقياتهم.
٢. تعمل على بناء جو مفعم بالتفاهم والمحبة بين المتعلمين.
٣. تساعد المتعلمين في خلق جو صفي ملائم.
٤. تعمل على الإسهام في تطوير مهارات المتعلمين الشخصية.
٥. تساعد المتعلمين على الاعتماد على قدراتهم ومهاراتهم الذاتية في إدارة الصف (زيتون، ٢٠٠٧).
٦. تساعد على رفع مستوى الدافعية لدى المتعلمين.
٧. تساعد على بناء اتجاهات إيجابية نحو المدرسة، والمعلم، والمادة الدراسية، وبقية المتعلمين في وقت واحد.
٨. تعمل على بناء علاقات طيبة وفاعلة بين مختلف مجموعات المتعلمين، وبالتالي زيادة تحصيلهم الدراسي.
٩. تنمي روح العمل والتعاون الجماعي بين المتعلمين (سعادة، ٢٠٠٨).

٣- **الاستقصاء التعاوني:** تعتمد هذه الطريقة على جمع المعلومات من مصادر مختلفة، بحيث يشترك الطلبة في جمعها، وتوزع المهام بين الطلبة، فيُكلّفُ كلُّ فرد في المجموعة بمهام محدّدة.

ويحلّل الطلبة المعلومات التي تمّ جمعها، وتُعرض في الصّفّ، من خلال الطلبة أنفسهم تحت إشراف المعلم.

وسُمّيت هذه الطريقة بهذا الاسم؛ لاعتماد الطلبة فيها على البحث والمناقشة، وجمع المعلومات (أبو عميرة، ٢٠٠٠).

ثالثاً استراتيجية (فكّرْ- زاوجْ – شاركْ) ((Think – Pair - Share) Strategy) (T P S):

هي إحدى استراتيجيات التعلم التعاوني النشط، التي تعتمد على تفاعل الطلبة ومشاركتهم في الأنشطة التعليمية، وتهدف لتنشيط وتحسين ما لديهم من معارف وخبرات سابقة ومتعلقة بالتعلم الحالي، وتتكون هذه الاستراتيجية من ثلاث خطوات، هي:

أولاً- التفكير: وفيها يطرح المعلم سؤالاً ما أو مسألةً ما، أو أمر معين يرتبط بما تمّ شرحه، أو عرضه من معلومات أو مهارات، ويجب أن يكون هذا السؤال متحدياً أو مفتوحاً، ثمّ يطلب المعلم من الطلبة أن يقضوا برهة من الزمن، بحيث يفكر كل منهم في السؤال بمفرده، ويمنع الحديث والتجوال في الصف في وقت التفكير.

ثانياً- المزاوجة: ويطلب المعلم من الطلبة أن ينقسموا إلى أزواج، بحيث يشارك كل طالب أحد زملائه، ويحدثه عن إجابته، ويقارن كل منهما أفكاره مع الآخر، ويتناقشان فيما بينهما، ويفكران في الإجابات المطروحة، ثمّ يحددان الإجابة التي يعتقدان أنها الأفضل والأكثر إقناعاً وإبداعاً، وهذه الخطوة تستغرق عدة لحظات لتبادل الأفكار.

ثالثاً- المشاركة: يطلب المعلم – في هذه الخطوة الأخيرة – من كل زوج من الطلبة أن يشاركا أفكارهما مع جميع طلبة الصف، والمعلم يقوم بتسجيل الإجابات على السبورة. (أبو غالي، ٢٠١٠م).

رابعاً استراتيجية الأسئلة الفعّالة:

من أهم استراتيجيات التدريس منذ سنوات هي استراتيجية الأسئلة الفعّالة، على الرغم من أنّ طرح الأسئلة الاستراتيجية قديمة، إلّا أنّها واحدة من أهمّ الطرق لتحفيز الطلبة، وإشراكهم في الحصة. وإنّ من أهم واجبات معلم الرياضيات رفع مستوى التفكير عند الطلبة، وذلك لا يحدث إلّا من خلال الأسئلة الفعّالة (Adedoyin,2010).

يؤكد شين ويودخوملو (Shen and Yodkhumlue, 2012) على أهميّة طرح الأسئلة الفعّالة التي ترفع من مستوى تفكير الطلبة في الحصة. ويشير الباحثان إلى أنّ السؤال هو الأقوى في تنفيذ التعلّم الفعّال الذي يحفّز الطلبة، ويوجّه تفكيرهم، ويساعدهم على تعلّم التفكير، كما أنّه يساعد المعلم على معرفة مدى تعلُّم طلبته». ومن جهة أخرى، أكد كلٌّ من منشوري ولاب (Manoucherhri and Lapp, 2003) كذلك أنّ أهمّ مزايا التعليم الجيّد هي الأسئلة الفعّالة التي تؤدّي إلى تعليم متمركِّز حول الطالب، وأنّ الأسئلة هي التي تساعد الطلبة على الانجذاب للحصة، وبالتالي الانخراط في فعاليّاتها؛ ما يحفّز الفهم العميق.

ممّا سبق، نلاحظ أهميّة الأسئلة التي يوجّهها المعلم للطالب، تلك التي تساعده في معرفة كيف يفكّر الطلبة، حتى عندما يستخدم المعلم المجموعات، أو التكنولوجيا الحديثة، أو الألعاب، أو غيرها، فإنّه لا يمكن أنْ يستغني عن الأسئلة التي يطرحها على الطلبة، لذا فمن المهم أنْ يعرف المعلم نوع الأسئلة التي سيطرحها، ومتى يطرحها؛ ليضمن انخراط جميع الطلبة في فعاليّات الحصة، وبالتالي يحقّق الأهداف التعليميّة.

المعلّمون والأسئلة:

يبدأ المعلمون الحصّة بتوجيه الأسئلة للطلبة، فقد يطرح المعلم بمعدل سؤال في كل ٤٣ ثانية تقريباً، في حين لا يطرح الطلبة أيّ سؤال (Cambrell, 2012).

ومن جهة أخرى، فإنّ (أديدوين) يناقش فكرة استخدام بعض المعلمين الأسئلة بشكلٍ أساسيّ؛ لتوجيه الطلبة نحو تطوير طرق تفكيرهم، إضافة إلى معرفتهم، وبالتالي، فإنّ من المهم للمعلم أنْ يتقن بناء الأسئلة الفعّالة، كما عليه إتقان مهارة توجيه تلك الأسئلة في الوقت المناسب (Adedoyin, 2010).

أهميّة استخدام الأسئلة الفعّالة في الحصّة الصفيّة:

يرى شين و يودخوملو (Shen and Yodkhumlue, 2012) أنّ استراتيجية السؤال والجواب هي أهم استراتيجية، وتؤدّي إلى التواصل بين المعلم والطالب، ويشير كامبريل (Cambrell ,2012) إلى أنّ أهمية الأسئلة تكمن في تحفيز تفكير الطلبة في الحصة، وبالتالي تحقيق التفكير العميق، أما مانشوري ولاب (Manouchehri and Lapp, 2003) فإنهما يشيران إلى أنّ أهميّة الأسئلة تكمن في قدرتها على دمج الطلبة في الحصّة، وبعض الأسئلة تهدف إلى اختبار قدرات الطلبة في موضوع معين، وبعضها الآخر يكون له أهداف تعليميّة، مثل اكتشاف علاقات معينه بين مواضيع عدّة، وبعضها الآخر يكون لإضافة معنًى حياتيّ لبعض المفاهيم، أو لبناء علاقات بين الطلبة، وعلى المعلم أن يتحكّم

في مدى تعلُّم الطلبة من خلال طرح الأسئلة التي تركّز على مفهومٍ ما، إذا بُنيت تلك الأسئلة لفتح الطريق أمام تفكير الطلبة، إضافةً إلى تحقيق أهداف تعليميّة تساعد على التعلّم الفعّال.

ويبين سمول (Small, 2009) أنّ الهدف الرئيس للأسئلة هو تلبية حاجات الطلبة المختلفة، مع اختلاف قدراتهم. ولتحقيق ذلك، يبني المعلم سؤالاً، أو مَهمّة تعليميّة، بحيث يسمح لجميع الطلبة المشاركة فيها باستخدام استراتيجيات مختلفة، تمكنهم من تطوير مهاراتهم خلال البحث عن الإجابة لذلك السؤال.

كيفية تحضير الأسئلة الفعّالة:

تبدأ خطوات طرح الأسئلة الفعّالة في الحصّة بجذب انتباه الطلبة، عن طريق دمجهم في حلّ السؤال أو المَهمّة بطرقٍ مختلفة، ثمّ يقوم المعلّم بطرح أسئلة مفتوحة؛ ليدفع الطلبة للتفكير، وربط خبراتهم السابقة مع معطيات السؤال. ويدعم هذا النوع من الأسئلة ذات النهايات المفتوحة ثقة الطلبة بأنفسهم؛ لأنّها تسمح بأكثر من إجابة صحيحة. وعلى المعلم أنْ يبني الأسئلة، بحيث يحقّق مستويات الاستدلال، وأنْ يمنحهم وقتاً ليتجاوبوا مع الأسئلة؛ حتى يتمكن من الاستماع إلى ردود أفعالهم، ولا بدّ أنْ يفتح السؤال نقاشاتٍ بين الطلبة تساعدهم على التفكير والفهم، وحتى إطلاق الأحكام في بعض المواقف (Canadian Ministry of Education, 2011).

ويرى سمول (Small, 2009)) أنّ هناك استراتيجيات لبناء الأسئلة الفعّالة، مثل: البدء من الإجابة، وإعطاء الطلبة فرصة لتكوين الأسئلة عنها، والسؤال عن الأشياء المتشابهة والمختلفة، أو بتكليف الطلبة تكوين جملة حول محتوًى معيّن، وغيرها من الطرق.

خامساً استراتيجية التعلم باللعب:

للّعب دورٌ مهمٌّ في النمو الجسمي والحركي والمعرفي والوجداني للطلبة. وأنّ استخدام الطلبة حواسَهم المختلفة هو مفتاح التعلم والتطور؛ إذ لم تَعُد الألعاب وسيلةً للتسلية فقط حين يريد الطلبة قضاء أوقات فراغهم، ولم تعد وسيلة لتحقيق النمو الجسماني فحسب، بل أصبحت أداة مهمة يحقّق فيها الطلبة نموهم العقلي (ملحم، ٢٠٠٢).

ولعلّ أوّلَ من أدرك أهمية اللعب وقيمته العلميّة هو الفيلسوف اليوناني (أفلاطون)، ويتّضح هذا من خلال مناداته بذلك في كتابه (القوانين) عندما قام بتوزيع التفاح على الطلبة؛ لمساعدتهم على تعلّم الحساب، ويتّفق معه (أرسطو) كذلك حين أكّد ضرورة تشجيع الطلبة على اللعب بالأشياء التي سيتعلمونها جدياً عندما يصبحون كباراً (ميلر، ١٩٧٤).

ويرى الخالدي (٢٠٠٨) أنّ هناك سماتٍ مميّزةً للّعب تميّزه عن باقي الأنشطة، ومن هذه السمات ما يأتي:

- أنّ اللعب شيء ممتع، يسبب الشعور بالسعادة، ويخفّف التوتر.
- أنّ اللعب يتم في العادة في إطار بيئي خاضع للإشراف، والملاحظة.
- أنّ في اللعب فُرصاً كثيرة للتعلم.

ومن خلال استعراض مجموعة من التعريفات للّعب، فإنّها قد تختلف في الصياغة، ولكنها تتفق بالمفهوم، وترتبط فيما بينها بعدة صفات، مثل: الحركة، والنشاط، والواقعية، والمتعة.

عند تحويل نشاط إلى لعبة، على المعلم الاهتمام بالأمور الآتية:

١ ألّا تعتمد اللعبة على الحظ فقط.

٢ أنْ يكون هناك فرصة للطالب الضعيف في المشاركة، والقدرة على إجابة أجزاء من اللعبة.

٣ ضمان مشاركة الجميع، وعدم اقتصارها على مجموعة فقط.

٤ إضافة جوّ من المرح، على أنْ يبقى المُخرَج مرتبطاً بمحتوى الحصة.

سادساً الريادة في التعليم:

عندما يكون التعليم في الدول للريادة، فإن ذلك يعني تأكيد النزعة المادية لدى الطلبة، وتأدية ما هو مطلوب منهم بطريقة آلية، وهذا يتوافق مع بعض الفلسفات التي ظهرت في القرن الثامن عشر والتاسع عشر الميلادي، كالفلسفة الطبيعية، وحتى يتم تطبيق فكرة التعليم للريادة، لا بد من تطويعها بما ينسجم مع القيم والمبادئ المجتمعية، بالإضافة إلى دراسة كيفية التطبيق من خلال أسس وآليات عمل واضحة، ومن هذا المنطلق، فإذا أراد المجتمع أن يُحدث تغييراً في نظامه التعليمي، فلا بد أن يحفظ هذا التغيير هوية المجتمع، وأن يدفعه إلى التقدم والريادة الشاملة في جميع المجالات في إطار منظومة القيم، فهي المرجعية لكل نشاط تعليمي تربوي جديد. (العتيبي، ٢٠٠٧)

غالباً ما ترتبط الأعمال الريادية بالإبداع، والمخاطر، والقدرة على حسن استثمار التكنولوجيا الحديثة وتطبيقها، ومن أبرز صفات الريادي: القدرة على تحمل المخاطر، والاستعداد لمواجهتها، ومبادر، يقوم من تلقاء نفسه بمتطلبات العمل، ويبحث عن الفرص ويستثمرها، ويمتلك القدرة على المتابعة والاستمرار في العمل، ويبحث عن المعلومات اللازمة لتحقق الأهداف، ويراعي معايير الجودة في الإنتاج، ويعمل بفاعلية في إعداد الخطط ويطورها، ويعتبر أيّ مشكلة فرصة للتطوير، ويمتلك مهارات الإقناع والتفاوض في تسويق منتجاته.(ماس،٢٠٠٧)

فعند زيادة عدد الرياديين في بلد ما، يؤدي ذلك إلى زيادة نمو هذا البلد بين الدول؛ ما يعكس حقيقة المهارات التي يتمتعون بها، إضافة إلى قدراتهم على التجديد (innovation). فالريادي يبتكر ويجدد من خلال تقديم منتج جديد للسوق، ويعرض أسلوباً جديداً للإنتاج، ويفتح أسواقاً جديدة، ويبحث عن مصادر بديلة للحصول على المواد الخام، أو مستلزمات المشروع (hoeing ,٢٠٠٠).

إن فكرة تنفيذ المشاريع الريادية عادة ما ترتبط بالمشاريع الصغيرة، وتستخدم منهجية التعلم بالمشروع، وما يميزها أنّ الفكرة الريادية تكون مستحدثة إبداعية، أو تكون تجديداً لفكرة موجودة.

سابعاً التعلم بالمشروع:

يُعدُّ التعلم القائم على المشاريع العمليّة نموذجاً تعليمياً مميّزاً، يعتمد بشكل كبير على نظريّات التعلّم الحديثة، ويفعّلها، وهو بديل للتلقين والاستظهار، حيث يُشغِل المعلم الطلبة في استقصاء حلول المشكلات الملحّة التي تواجههم في حياتهم اليوميّة.

وقد ارتبط التعليم القائم على المشاريع بالنظريّات البنائية لِـ (جان بياجيه)، حيث يكون التعليم عبر المشروع هو «منظور شامل يركز على التدريس من خلال مشاركة الطلبة في البحث عن حلول للمشاكل عن طريق طرح الأسئلة، ومناقشة الأفكار،

وتنبّؤ التوقّعات، وتصميم الخطط أو التجارب، وجمع البيانات وتحليلها، واستخلاص النتائج، ومناقشة الأفكار والنتائج مع الآخرين، ثمّ إعادة طرح أسئلة جديدة؛ لخلق منتجات جديدة من ابتكارهم».

وتكمن قوّة التعلّم القائم على المشروع في الأصالة، وتطبيق البحوث في واقع الحياة، وتعتمد فكرته الأساسيّة على إثارة اهتمام الطلبة بمشاكل العالم الحقيقي، ودعوتهم للتفكير الجادّ فيها، وتحفيزهم على اكتساب المعرفة الجديدة، وتطبيقها في سياق حلّ المشكلة. ويلعب المعلم دور المُيسِّر، ويتركز العمل مع الطلبة حول تأطير المسائل الجديدة بالاهتمام، وهيكلة المهام ذات المغزى، والتدريب على تطوير المعرفة والمهارات الاجتماعيّة، حيث يعيد التعليم القائم على المشروع تركيز التعليم على الطالب، وليس على المنهج، وهو تحوّل عالمي شامل يقدّر الأصول غير الملموسة، ويحرّك العاطفة، والإبداع، والمرونة، وهذه لا يمكن أنْ تُدرَّس من خلال كتاب مدرسيّ، ولكنها عناصر يتم تنشيطها من خلال التجربة، ويشير علي (٢٠٠٣) إلى أنّ استخدام استراتيجية التعليم القائم على المشروع لا يقتصر على مادة دراسية دون أخرى، حيث يمكن استخدامها لتدريس معظم المواد الدراسية في المراحل الدراسية المختلفة، وإن كان يُفضل استخدامها مع المواد الدراسية التي يغلب عليها الجانب العملي. (علي، ٢٠٠٩)

ويُعدَّ التعلم القائم على المشاريع وسيلةً فعّالةً لتعليم الكفايات الرئيسة؛ للأسباب الآتية:

- غالباً ما تتقاطع المشكلة قيْد البحث مع كثير من التخصّصات العلميّة، مثل الرياضيات، والفيزياء، والجغرافيا، والأحياء؛ ما يحقّق التكامل الأفقي بين المباحث والكفايات والمهارات المختلفة في الوقت نفسه.
- يوفّر هذا النوع من التعلم الفرص المناسبة للطلبة؛ لاكتساب فهم عميق للمحتوى، إضافة إلى مهارات القرن الواحد والعشرين.
- يساعد على التنويع في أساليب التقويم؛ إذ إنّ التعلم بالمشروع يتطلب تغيير أطر التقييم التقليديّة إلى أخرى جديدة تتناسب مع طبيعه العمل بالمشاريع.
- يؤدّي تنفيذ استراتيجية التعلم بالمشروع على نطاق واسع حتماً إلى تغيير الثقافة السائدة في المدارس، خاصة تلك الموجودة في البيئات الاجتماعيّة المهمّشة (Ravitz, 2010).

ولضمان فعاليّة التعلم بالمشاريع، لا بدّ من توافر العناصر الأساسيّة الآتية:

١. **طبيعة المحتوى التعليمي (محتوى هادف):** يركّز التعلم بالمشروع في جوهره على تعليم الطلبة المعارف والمهارات اللازمة في كلّ مرحلة تعليميّة، والمستمدة من المعايير والمفاهيم الأساسية من المادة التعليميّة المستهدفة (كيمياء، رياضيات... إلخ).
٢. **مهارات القرن الواحد والعشرين:** يتعلم الطلبة من خلال المشروع بناء كفايات لازمة لعالَم اليوم، مثل: حلّ المشكلات، والتفكير النقدي، والتعاون والتواصل، والإبداع/ الابتكار، التي يتم تدريسها، وتقييمها بشكلٍ واضح.
٣. **التحقيق/ البحث العميق**: يشارك الطلبة في عمليّةٍ محكمة وطويلة، في طرح الأسئلة، وتطوير الأجوبة أثناء المشروع، مستخدمين في تنفيذه الموارد المتاحة.
٤. **الأسئلة الموجّهة:** يركز العمل بالمشروع على توجيه أسئلة مفتوحة النهاية التي تثير فضول الطلبة واهتمامهم، وتساعدهم في استكشاف المطلوب.

٥ **الحاجة إلى المعرفة**: يحتاج الطلبة بالضرورة إلى اكتساب المعرفة، وفهم المفاهيم، وتطبيق المهارات؛ من أجل الإجابة عن الأسئلة الموجّهة، وتنفيذ المشروع.

٦ **القرار والخيار**: يُسمح للطلبة إجراء بعض الخيارات حول المراحل والفعاليات والأنشطة، واتّخاذ القرار في كيفيّة تنفيذها، وكيفية إدارة وقتهم؛ للوصول إلى مخرجات المشروع، ويرشدهم في ذلك المعلمون، تبعاً للعمر، وصعوبة التجربة (المشروع).

٧ **النقد والمراجعة**: يتضمّن المشروع مرحلة يقدِّم الطلبة فيها معلومات عن مشروعهم، ويتلقّون تغذية راجعة عن جوْدة عملهم؛ ما يؤدّي بهم إلى تعديل المشروع ومراجعته، أو إجراء مزيدٍ من التحقيق والبحث؛ لتحسين المخرج النهائي للمشروع.

٨ **الجمهور العام**: يشرح الطلبة عملهم (المشروع، ومراحله، ومخرجاته) لأشخاص آخرين غير الزملاء والمعلمين.

يوجد ثلاثة محاور لنجاح التعلّم القائم على المشاريع، هي:

١ العرض: معرفة الطلبة منذ البداية بأنّهم سيقومون بعرض نتاج (مخرج) مشروعهم لآخرين؛ لمشاهدته (ملاحظته)، وإبداء الرأي فيه.

٢ مراحل المشروع المتعددة: مراجعة المعلم لعمل الطلبة (المشروع) في مراحله المتعددة؛ لتقديم تغذية راجعة لهم، ولمعرفة مدى تقدّمهم في المشروع.

٣ النقد البنّاء: عقد جلسات مراجعة لكلّ مرحلة في المشروع، وتقديم ملحوظات بنّاءة في جوٍّ مريح ومحفّز للعمل.

يرى كوك وويفنج (Cook and Weaving ،2013) أنّ تطوير الكفايات الرئيسة من خلال العمل بالمشروع، يقوم على مبادئ التدريس الآتية:

١ التعلم القائم على المهام (التعلم من خلال المَهمّة): يطوّر المتعلمون كفاياتهم الرئيسة من خلال مهام حقيقيّة نَشِطة وأصيلة، يستلزم تنفيذها، وتحقيق أهدافها التعاون بين أفراد المجموعة.

٢ توظيف التعليم التعاوني والفردي: يتعاون الطلبة بعضهم مع بعض، لكنهم أيضاً يعملون بشكلٍ مستقلّ، ويديرون تعليمهم بأنفسهم.

٣ المعلم والمتعلم يقودان العمليّة التعليميّة: بينما يتركز تعلّم الطلبة في المقام الأول على العمل والتجريب والعمل، إلّا أنّ هذا يقترن بالتعليم الصريح من جانب المعلمين، حيث إنّ المتعلمين في حاجة إلى دعم لتطوير قدرتهم على التعلّم بشكلٍ مستقل.

٤ الأنشطة تجديديّة ومبتكرة من الناحية التكنولوجيّة: ينضوي تعلم الكفايات الأساسيّة على استخدام بيداغوجيا محتوى ذات الصلة بتكنولوجيا المعلومات والاتّصالات، وتكنولوجيا الهاتف النقّال.

٥ تنفيذ فعاليّات المشروع داخل المدرسة وخارجها: تعزيز فكرة تنفيذ أنشطة لامنهجيّة متعلقة بالمشروع خارج جدران المدرسة وساعات الدوام المدرسي (Cook and Weaving,2013).

التخطيط لمشروعات التعلم:

تحتاج المشاريع إلى تخصيص الوقت اللازم لإنجازها. وقد تستغرق هذه المشروعات بضعة أيام، أو أسابيع، أو فترة أطول، والتخطيط أمرٌ ضروريّ لتحقيق النجاح، وهو ينضوي على عوامل عدّة، منها: تحديد أهداف ونتائج محددة للتعلم، وربطها بسياقات حياتية، واستخدام المصادر الأوليّة في كثير من الأحيان؛ لدعم التفسير والاكتشاف، وتزويد الطلبة بالتغذية الراجعة المستمرة والثابتة، إضافة إلى مساعدتهم في إدارة الوقت، واستخدام أدوات التعاون الرقميّة عند الحاجة.

وعند تنفيذ فكرة التعلّم بالمشروع، على المعلم أن يراعي الآتي:

على الرغم من أنّ التعلّم القائم على المشروع يزوّد الطلبة بمهارات لا غنى عنها، ويتيح لهم توسيع مداركهم للتفكير فيما وراء المعرفة، كان لا بد من تجنب تكليفهم فوق طاقتهم المادية والاجتماعية، إضافة إلى مراعاة ألّا ينشغل الطلبة بالمشاريع التعليميّة للمواد على حساب تحصيلهم العلمي، ونظراً لكثرة المشاريع التعليميّة في المقرّرات الدراسيّة في الفصل الدراسي الواحد، كان لا بد من الاتفاق بين المعلمين على ألّا تشمل المشاريع جميع المقررات الدراسية للطالب الواحد، مع الحرص على توافق الزمن مع متطلّبات المشروع.

ثامناً استراتيجية الصف المعكوس (المقلوب):

هي استراتيجية تعتمد على التعلّم المتمركز حول الطالب (تنعكس الأدوار جزئياً، أو كلياً بين الطالب والمعلم وَفق الموقف التعليمي)؛ بحيث تصبح نسبة مشاركة الطلبة في الحصّة التعليميّة لا تقلّ عن ٧٠٪، عن طريق تنظيم أنشطة موجّهة، يكون فيها الطالب ذا رأيٍ مسموعٍ، ولكن بتوجيهٍ من المعلم.

والتعلم المعكوس (المقلوب) طريقة حديثة يتمّ فيها توظيف التقنيّات الإلكترونيّة الحديثة بطريقة تتيح للمعلم إعداد الدروس على شكل مقاطع فيديو أو غيرها من الوسائط التعليمية والالكترونية، الهدف منها هو إطلاع الطلبة عليها قبل الحضور للحصة الصفية. ويتمّ تخصيص وقت الحصة لمناقشة الأنشطة والتدريبات والمشاريع وحل المشكلات، وبذلك يضمن المعلم الاستثمار الأمثل لوقت الحصة، حيث يناقش المعلم الطلبة في المادة التي شاهدوها مسبقاً، ويقيّم مستوى فهمهم، ويصمّم الأنشطة والتدريبات بناءً على ذلك لتوضيح المفاهيم والمعلومات، وتطوير المعارف والمهارات. ويشرف على أنشطتهم وتفاعلهم باستمرار، ويقدّم الدعم المناسب، مع مراعاة الفروق الفرديّة. والجدير بالذكر أنّ تعلم الطلبة يصبح في البيت، وخارج الصف، من خلال الوسائط، كالفيديو، والعروض التقديمية، والكتب الإلكترونية المطورة، وغيرها.(Johnson et al, 2014)

وقد عرّف (بيشوب) الصف المقلوب (المعكوس) بأنّه طريقة تعليميّة تتشكّل من مكوّنين أساسيّين، هما: الأنشطة التعاونيّة التفاعليّة الجماعيّة داخل الفصل، ومشاهدة المادة التعليميّة عبر الحاسوب خارج غرفة الصف. (Bishop, 2013)

متطلّبات الصّفّ المقلوب (المعكوس):

- **بيئة تعليميّة مرنة:** حيث تتحوّل البيئة الصفيّة إلى بيئة تفاعليّة نشطة، فيها الحركة، والضوضاء، والنّقاشات، وعلى المعلم تقبُّل هذه البيئة غير التقليديّة، بل تعزيزها، وتشجيعها؛ لتحقيق التعلّم المطلوب.
- **تغيُّر في مفهوم التعلّم:** يتطلّب تبنّي هذا النمط التعليمي تغيير فلسفة التعليم من عمليّة يكون المعلم هو محورها وقائدها إلى عمليّة يكون فيها هو الوسيط والموجّه والميسِّر، بينما يكون الطالب نَشِطاً وإيجابياً ومسؤولاً عن عمليّة تعلّمه.
- **تقسيم المحتوى، وتحليله بشكل دقيق:** لتحديد المادة التعليميّة الواجب تحضيرها بدقة.
- **توافر معلمين مدرَّبين ومهيَّئين:** بما أنّ هذا النمط لا يستغني عن دور المعلّم، تزداد الحاجة إلى وجود معلمين قادرين على التعامل معه، حيث يتطلب اتّخاذ عديد من القرارات المتنوعة المهمّة.

ميزات التعلُّم المعكوس (المقلوب):

من أهم ما يميز التعلم المعكوس (المقلوب) أنه يلبي احتياجات الطلبة في عصر المعرفة، بما يوفرة من التماشي مع متطلبات عصر المعرفة والرقمنة، والمرونة، والفاعلية، ومساعدة الطلبة المتعثرين أكاديمياً، وزيادة التفاعل بين المعلم والطلبة، والتركيز على مستويات التعلم العليا، ومساعدة الطلبة على التفوق، وتحسين التحصيل، والمساعدة في قضية الإدارة الصفية، والشفافية، والتغلب على قضية نقص إعداد المعلمين (Goodwin&Miller, 2013).

ويمكن توضيح ذلك على النحو الآتي:

١. مَنْحُ الطلبةِ الفرصة للاطّلاع الأوّلي على المحتوى قبل الحصة، واستثمار وقت الحصة بشكلٍ أفضل.
٢. تحسين تحصيل الطلبة، وتطوير استيعابهم المفاهيم المجرّدة.
٣. التشجيع على الاستخدام الأمثل للتقنيّة الحديثة في التعليم.
٤. توفير آليّة لتقييم استيعاب الطلبة. فالاختبارات والواجبات القصيرة التي يجريها الطلبة هي مؤشّرٌ على نقاط الضعف والقوة في استيعابهم المحتوى؛ ما يساعد المعلّم على التعامل معها.
٥. توفير الحريّة الكاملة للطلبة في اختيار المكان والزّمان والسّرعة التي يتعلّمون بها.
٦. توفير المعلمين تغذية راجعة فوريّة للطلبة في الحصّة داخل الصف.
٧. تشجيع التواصل بين الطلبة من خلال العمل في مجموعات تعاونيّة صغيرة.
٨. المساعدة في سدّ الفجوة المعرفيّة التي يسبّبها غياب الطلبة القسري أو الاختياري عن الصفوف الدراسية.
٩. يتيح للطلبة إعادة الدرس أكثر من مرة، بناءً على فروقاتهم الفردية.
١٠. يوظّف المعلم وقت الحصة أكثر؛ للتوجيه، والتحفيز، والمساعدة، كما يبني علاقات أقوى بين الطلبة والمعلم، فيتحوّل الطالب إلى باحث عن مصادر معلوماته؛ ما يعزّز التفكير الناقد، والتعلّم الذاتي، وبناء الخبرات، ومهارات التواصل والتعاون بين الطلبة (متولي وسليمان، ٢٠١٥).

التعلّم المعكوس والنظريّة البنائيّة:

تُوجِّهُ الاتجاهات التعليميّة الحديثة أنظارها نحو النظريّة البنائيّة؛ لتغيير العمليّة التعليميّة وتطويرها، والخروج عن النمط التقليدي السائد في التعليم. وترى البنائيّة أنّ المتعلّم نشط، وهو مسؤول عن عمليّة تعلّمه، ويبني معرفته بنفسه. وتعطي البنائيّة أهميّة كبيرة للمعرفة المسبقة التي يمتلكها المتعلّم؛ ليبني عليها معرفته الجديدة، كما تركّز على العمل التعاوني الجماعي، وتطوير مهارات التفكير والعمل لدى المتعلم. وبما أنّ البنائيّة تعطي دوراً أكبر للمتعلّم، فإنّها تحوّل دور المعلم بشكل كبير من دور مركزي يقود العمليّة التعليميّة، ويكون فيه مصدر المعرفة، ليتحول إلى دورٍ توجيهي إرشادي.

وقد بيّنت الدراسات، كدراسة الشكعة (٢٠١٦)، ودراسة (بيشوب Bishop, 2013)، ودراسة قشطة (٢٠١٦)، ودراسة الزين (٢٠١٥) أنّ التعلّم المعكوس هو نمطٌ تعليميّ يمتاز بخصائصه البنائيّة على جميع المستويات، وفي جميع مراحل التنفيذ، حيث توضّح تلك الدراسات أنّ التعلّم المعكوس يقدّم المعرفة اللازمة لبناء المفهوم بشكلٍ مبدئيّ يشاهده الطالب، ويفهمه بنفسه. بينما يُتاح وقت الحصة لمناقشة التعلّم الذي يحمله الطلبة إلى الصف، ومن ثَمّ القيام بالأنشطة والتطبيقات خلال الحصّة، بناء على ذلك. وبهذا يتمّ خارج الصفّ اكتساب المستويات الدنيا من التفكير، مثل: الفهم، والحفظ، والتذكر، بينما يتم التركيز داخل الفصل على مهارات التفكير العليا، مثل: التطبيق، والتقويم، وحلّ المشكلات.

يدعم الصفّ المقلوب التفاعل، والنشاط الجماعي، ويعزز ثقة الطالب بنفسه، ويحفّزه على المشاركة والتفاعل، كما يوفّر التعلّم المعكوس بيئةً صفيّةً غنيّةً بالمثيرات، وأساليب التعلّم المتنوعة؛ ما يحقّق للمتعلم التعليم النوعي والتعليم هذا المعنى، كما يُخرِج الحصّة عن النمط التلقيني المُملّ.

وتتيح طريقة تنفيذ التعلّم المعكوس للمعلم التقييم المستمر خلال الحصة على مستوى المتعلمين، وفهمهم للمادة، وهذا يقدّم ميزتين كبيرتين لهذا النوع من التعليم، هما: التقويم البنائي الذي يضع المعلم على علم مستمر بمستوى الطلبة، وطريقة تقدمهم في المادة، إضافة إلى مراعاة الفروق الفردية بين الطلبة، ووضع الاختبارات والأنشطة الصفيّة الفردية والجماعية، بناء على ذلك (الزين، ٢٠١٥).

تاسعاً استراتيجية لعب الأدوار:

تعدُّ استراتيجية (لعب الأدوار)، وما تتضمّنه من ألعابٍ ومحاكاة، من الأمور المألوفة عند الأطفال، وهذا يؤكّد لنا استعداد الأطفال للتفاعل مع هذه الاستراتيجية بشكلٍ رائع؛ لذا على معلّمي الصفوف الأساسية الاستفادة من هذه الميزة لدى طلبتهم.

ميزات هذه الاستراتيجية:

١. سرعة تعلم الطلبة بهذه الطريقة، واستمرار أثرها عندهم.
٢. تساعد هذه الطريقة على تنمية علميات التفكير والتحليل عند الطلبة.
٣. تُضفي روحاً وجوّاً من الحيوية والمرح على الموقف التعليمي.
٤. تساعد هذه الاستراتيجية على التواصل الإيجابي بين الطلبة، وتنمية الروح الاجتماعيّة، والأُلفة، والمحبة بينهم.
٥. تساعد على اكتشاف ذوي الكفاءات والقدرات المتميّزة العالية من الطلبة.
٦. تعالج السلوكات السلبيّة عند الطلبة، مثل الانطواء.

خطوات تنفيذ هذه الاستراتيجية:

- إعادة صياغة الدرس، باستخدام حوار تمثيلي، وشرح الاستراتيجية للطلبة.
- توزيع الأدوار على الطلبة.
- اعتبار الصف مسرحاً، حتى لو كانت التجهيزات بسيطة.
- اختيار المشاهِدين، والملاحِظين من الطلبة، وتكليفهم بمَهمّات تعتمد على مشاهدتهم.
- انطلاق التمثيل، ولعب الأدوار- المتابعة - إيقاف التمثيل. (عبيد، وليم، ٢٠٠٤)

التعامـل مـع الطلبـة ذوي الاحتياجات الخاصة:

يُعدُّ التعليم -في جميع مراحله- الركيزة الأساسية للمجتمع الفلسطيني، وهو لكلّ شخص كالماء والهواء، وهو ليس مقصوراً على فئة دون الأخرى. إنّ التعليم يسعى إلى إحداث التغيّر المرغوب في سلوك الطلبة؛ من أجل مساعدتهم على التكيُّف في الحياة، والنجاح في الأعمال التي سوف يؤدّونها بعد تخرجهم في الجامعات. وتكفّلت وثيقة الاستقلال بضمان الحق في التعليم لجميع أفراد المجتمع الفلسطيني، بما في ذلك الأفراد من ذوي الاحتياجات الخاصة.

وانسجاماً مع توجّهات وزارة التربية والتعليم تجاه دمج الطلبة ذوي الاحتياجات الخاصة مع زملائهم في المجتمع، وفي بيئة تعلمهم الطبيعية، سنقدّم مجموعة من الإرشادات التفصيلية للمعلم للتعامل مع هؤلاء الطلبة.

إرشادات التعامل مع ذوي الاحتياجات الخاصة:

اهتمت الوزارة بحقوق الأشخاص ذوي الاحتياجات الخاصة، فقد تبنّت عديداً من البرامج التي تُسهم في دمج هؤلاء الطلبة في المدارس، منها: برنامج التعليم الجامع، وبرنامج غرف المصادر. وهذه مجموعة من الإرشادات مقدمة للمعلم، حول كيفية التعامل مع الفئات التي يتم دمجها ضمن الطلبة في المدارس:

١ ذوو الإعاقة البصرية:

- توفير الإضاءة المناسبة في أماكن جلوس الطالب.
- تشجيع الطالب على استعمال الأدوات المعينة عند الضرورة، كالمسجّلات، والنظّارات الطبيّة، مع إعطائه الوقت اللازم.
- استخدام اسم الطالب عندما يكون ضمن جماعة؛ حتى يتأكد أنّ كلام المعلم موجّهاً إليه، وقراءة كلّ ما يُكتب على السبورة.
- السماح للطالب الكفيف كلياً استخدام آلته الخاصة؛ لكتابة ملحوظاته، أو حلّ واجباته، دون أي إحراج.

٢ ذوو الإعاقات السمعيّة:

- التحدُّث بصوت عالٍ مسموعٍ، وليس مرتفعاً، ولتكن سرعتك في الكلام متوسطة.
- إعادة صياغة الفكرة أو السؤال ليصبح مفهوماً، والحصول على التغذية الراجعة من الطالب باستمرار.
- استخدام المعينات البصريّة إلى الحد الأقصى الممكن، مع إعطاء الفرصة للطالب للجلوس في المكان الذي يتيح له الإفادة من المعينات البصريّة.
- تشجيع الطالب سمعياً على المشاركة في النشاطات الصفيّة، وتطوير مهارات التواصل لديه.

٣ الطلبة الذين يعانون اضطرابات نطقيّة:

- التحلّي بالصبر أثناء الاستماع لهم.
- تجنُّب مساعدته أثناء كلامه؛ منعاً للإحراج.
- تشجيع هؤلاء الطلبة على العمل الجماعي، مع تجنّب توجيه التدريب الصارم لهم.
- استخدام اللغة السليمة في مخاطبة الطالب في كلّ المواقف.

٤ ذوو الإعاقة الحركيّة:

- إيلاء الطالب ذي الصعوبات الحركية الاهتمام الكافي في الحدود والمواقف المناسبة.
- توفير البدائل من الأنشطة والمواقف الملائمة لإمكاناته، وقدراته، واحتياجاته.
- العمل على رفع معنوياته عن طريق إقناعه بالقيام بالإنجاز السليم مثل غيره من الطلبة العاديين، وتكليفه بمَهمّات تناسب إمكاناته.
- عدم التعامل معه بشكل مفاجئ، بل لا بدّ لأيّ خطوة تخطوها معه أنْ يكون مخطّطاً لها جيداً.

٥ الطلبة بطيئو التعلّم:

- استخدام أساليب التعزيز المتنوعة مباشرة بعد حصول الاستجابة المطلوبة.
- التنويع في أساليب التعليم المتّبعة التي من أهمها: التعليم الفردي، والتعليم الجماعي.
- الحرص على أنْ يكون التعليم وظيفياً يخدمه في حياته، ويُخطّط له مسبقاً على نحو منظّم.
- التركيز على نقاط الضعف التي يعاني منها هؤلاء الطلبة، وتقوية الجوانب الإيجابية، ونقاط القوة عندهم.

٦ ذوو صعوبات التعلّم:

- ضرورة جلوس هذه الفئة في الصفّ الأمامي؛ لتجنبها كلّ ما يشرد الذهن، ويشتت الانتباه.
- إشراك الطالب في الأنشطة المختلفة، وتكليفه ببعض الأعمال البسيطة التي تلائم قدراته.
- ضرورة تبسيط المفاهيم باستعمال وسائل تربوية (سمعية، وبصرية، ومحسوسات)، بحيث تكون ذات معنى للطالب.
- تحفيز الطالب على المشاركة داخل الصف، وتشجيعه على العمل الجماعي.

٧ الطلبة المتفوّقون:

- إجراء تعديل في مستويات الأنشطة حين اكتشاف المعلم ما يدل على وجود طالب متفوق، بحيث يتولد التحدي عند الطلبة الآخرين، ويرفع من مستوى الدافعية عند هذا الطالب.
- إعلام أولياء أمور الطلبة المتفوقين بشكلٍ دوري ومستمر عن الأنشطة الخاصة بهؤلاء الطلبة، وتوضيح دورهم تجاه أبنائهم المتفوقين، من حيث توفير الجو المناسب، والإمكانات المطلوبة لتنمية مواهبهم وقدراتهم، ورعايتها.

التقويم:

يُعَدّ التقويم ركناً أساسياً من أركان العملية التعليمية وجزءاً لا يتجزأ منها، فهو الوسيلة التي يمكن من خلالها معرفة ما تم تحقيقه من أهداف، ومن خلاله يمكن تحديد الجوانب الإيجابية والسلبية في العملية التعليمية وتشخيص جوانب الضعف والقصور فيها من أجل اتخاذ الإجراءات المناسبة.

وهو عملية منهجية تقوم على أسس علمية؛ لإصدار أحكام تتسم بالدقة والموضوعية على مدخلات أيّ نظام تربوي، وعملياته، ومخرجاته، ومن ثمّ تحديد جوانب القوة والقصور في كل منها، تمهيداً لاتخاذ قرارات مناسبة لإصلاحها. ولا يقتصر الهدف من التقويم على تحديد مستويات الطلبة، بل يتمثل في تحسين العملية التعليمية التعلمية، وفق معايير الجودة والامتياز (كاظم، ٢٠٠٤).

ومن التوجهات التربوية الحديثة ما يعرف بالتقويم الأصيل الذي يعتمد على الافتراض القائل: إنّ المعرفة يتم تكوينها وبناؤها بوساطة المتعلم، وتختلف تلك المعرفة من سياق لآخر. وتقوم فكرة هذا النوع من التقويم على تكوين صورة متكاملة عن المتعلم في ضوء مجموعة من البدائل؛ أي أنّ تعلم الطالب وتقدمه الدراسي يمكن تقييمهما بوساطة أعمال ومهامّ تتطلب منه انشغالاً نشطاً، مثل البحث والتحري لحل المشكلات، والقيام بالتجارب الميدانية، وهذه الطريقة في تقويم الطلبة تعكس تحولها من النظرة الإرسالية للتعلم (التلقين) إلى النظرة البنائية. (ascd, 2005)

تعريف التقويم الأصيل:

هو التقويم الذي يقوم على الافتراض القائل: إنّ المعرفة يتم تكوينها وبناؤها بوساطة المتعلم، وهي تختلف من سياق لآخر. ويقيس التقويم الأصيل أداء الطلبة في مواقف حقيقية قريبة بقدر الإمكان من الواقع، حيث يقوم الطلبة بأداء مهام، وتكليفات مشابهة للمهام الحياتية خارج المدرسة. إنّ التقويم الأصيل يهيئ الطلبة للحياة، فهو واقعي؛ لأنه يتطلب منهم إنجاز مهمات لها معنى، ويحتاجونها في حياتهم الواقعية، كما يتضمن حل مشكلات حياتية.

(Tanner, 2001)

ويمكن تعريف التقويم الحقيقي بأنه تقويم بنائي يعكس إنجازات الطلبة في مواقف حقيقية واقعية، وهو نشاط يرافق عملية التعليم والتعلم، يمارس فيه الطلبة مهارات التفكير العليا، مثل حل المشكلات، واتخاذ القرارات في مواقف حياتية، وهو عملية إنتاجية تفاوضية، تتيح للطلبة التقييم الذاتي، وفق محكات أداء معروفة:

- يقيس المهارات بشكل مباشر، ويدمج بين التقويم الكتابي والأدائي.
- يرصد تعلم الطلبة على مدار الزمن.
- يوجه المنهاج، ويتوافق مع أنشطة التعليم ونتاجاته.
- يشجع التفكير التباعدي والتشعبي.
- يشجع العمل الريادي القائم على التحليل والمبادرة والعمل التعاوني (Campbell, 2000).

تحولات في التقويم: (Popham, 2001)

هو التحول من تحقيق الكفاية إلى تحقيق الجودة والامتياز، ويظهر ذلك من خلال الآتي:

١ التحول من سياسة الاختبارات إلى التقويم المتعدد، واستثمار نقاط القوة للطلبة في جميع المجالات، وتوظيفها في المواقف التعليمي التعلمي.

٢ التحول من اختبار القدرات المعرفية إلى القدرات المتعددة القدرات الإدراكية (حل المشكلات، والتفكير النقدي...)، وكفاءات ما وراء المعرفة (التأمل، والتقييم الذاتي)، وكفاءات اجتماعية (قيادية، والإقناع، والتعاون، والعمل الجماعي...)، التصرفات العاطفية (المثابرة، والدافع الذاتي، والفعالية الذاتية، والاستقلالية، والمرونة...).

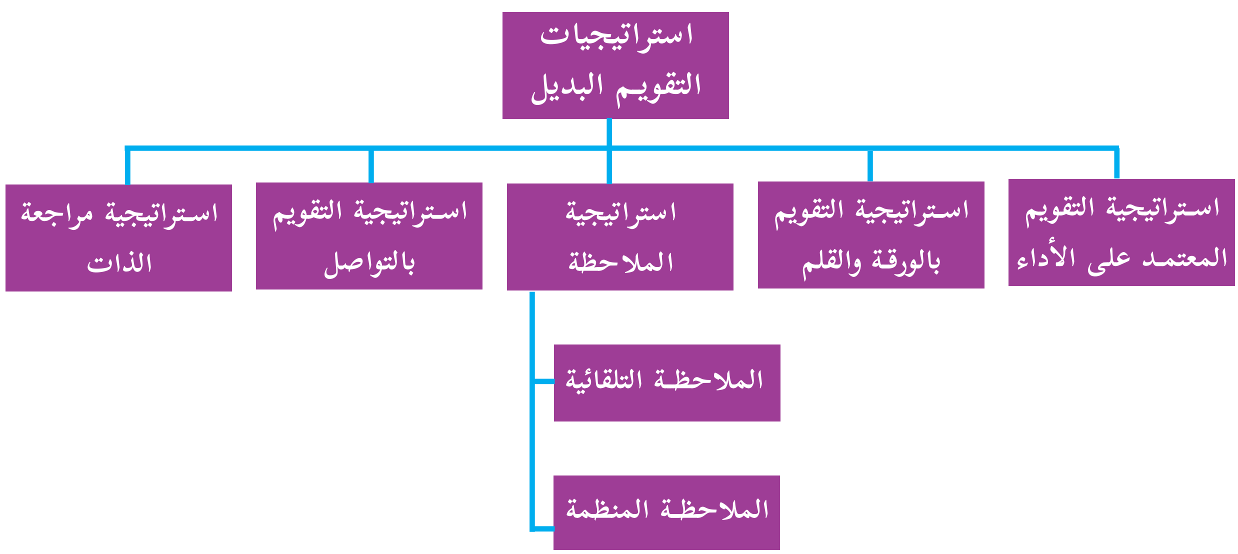
٢ التحول من تقويم منفصل إلى متكامل، وتقويم الطالب على كل ما يستطيع أداءه بالمعارف والمهارات والاتجاهات التي تعلمها، ويربط ذلك بتقويم جميع عناصر النظام التربوي.

استراتيجيات التقويم وأدواته:

الاستراتيجيات: (التقويم المعتمد على الأداء، والورقة والقلم، والملاحظة، والتواصل، ومراجعة الذات).

الأدوات: (سلالم التقدير العددي، وسلالم التقدير اللفظي، وسجل وصف سير التعلم، والسرد القصصي)، ويتم اختيار الأداة أو الأدوات التي تناسب الموقف التعليمي التعلمي. (اللجنة الوطنية المصغرة للمناهج المطورة، ٢٠١٦)

استراتيجيات التقويم البديل: (الفريق الوطني للتقويم، ٢٠٠٤)



أدوات التقويم البديل:

أدوات التقويم البديل: (عودة، ٢٠٠٥)

١ قوائم الرصد أو الشطب، وقائمة الأفعال والسلوكات التي يرصدها المعلم، أو المتعلم لدى قيامه بتنفيذ مهارةٍ ما، وذلك برصد الاستجابات على فقراتها، باختيار أحد تقريرين من الأزواج الآتية: صح أو خطأ، وتُعد من الأدوات المناسبة لقياس مخرجات التعلم.

٢ سلالم التقدير الرقميّة واللفظيّة: تقوم سلالم التقدير على تجزئة المهمّة، أو المهارة التعليمية إلى مجموعة من المهام الجزئية بشكلٍ يُظهر مدى امتلاك الطلبة لها، وَفْقَ تدريج من أربعة أو خمسة مستويات.

٣ سجلّ وصف سير التعلم: من خلال إطلاع المعلم على كتابات الطلبة وتعبيراتهم، بحيث يتم ربط ما تعلموه مع خبراتهم السابقة ومواقف الحياة، وهذا يتطلب بيئة آمنة تشجع الطلبة على التعبير بحرية عما يشعرون به دون خوف.

٤ السجلّ القصصي: يقدم السجل صورة عن جوانب النمو الشامل للمتعلم، من خلال تدوين وصف مستمر لما تمّت ملاحظته على أدائه.

٥ ملف الإنجاز: لتجميع عينات منتقاة من أعمال الطلبة، يختارونها تحت إشراف المعلم، ويتم تقويمها، وفق معايير محددة.

٦ مشروعات الطلبة: عمل نشاط يختاره الطالب بتوجيه المعلم ذي علاقة بموضوع الدراسة، ويتم إنجازه داخل المدرسة وخارجها، وله مراحل عدّة، ويستغرق عدة أيام، أو عدة شهور.

٧ لعروض: يعرض الطلبة إنجازاتهم في أداء المهمّات (تقرير بحث، ولوحة فنية، وحل مسالة...) أمام بقية زملائهم.

٨ صحائف الطلبة: تقارير ذاتيّة، يُعدّها الطالب عن أدائه في إنجاز المهام الحقيقية، شاملة ما يراه من نقاط قوة، ونقاط ضعف، فضلاً عن تأمّلاته الذاتيّة حول الأداء.

مقارنة بين التقويم البديل والتقويم التقليدي: (زيتون، ٢٠٠٣)

التقويم البديل	التقويم التقليدي
يأخذ شكل مهام حقيقية، مطلوب من الطلبة إنجازها، أو أداؤها.	يأخذ شكل اختبار تحصيلي، والأسئلة كتابية، وقد لا يكون لها صلة بواقع الطلبة.
يتطلب تطبيق المعارف والمهارات، ودمجها لإنجاز مَهمة.	يتطلب تذكر معلومات سبق لهم دراستها.
يوظف الطلبة مهارات التفكير العليا؛ لأداء هذه المهمات (مهارات التطبيق، والتحليل، والتقييم، والتركيب).	يوظف الطلبة عادة مهارات التفكير الدنيا؛ لإنجاز المهمات الموكلة إليهم (مهارات التذكر، والاستيعاب).
يستغرق إنجاز المَهمة وقتاً طويلاً نسبياً يمتد لساعات، أو أيام عدة.	تستغرق الإجابة عن الاختبارات التحصيلية وقتاً قصيراً نسبياً (بين ١٥ دقيقة إلى ١٢٠ دقيقة عادة).
يمكن أن يتعاون مجموعة من الطلبة في إنجاز المَهمة.	إجابة الطلبة على الاختبار التحصيلي فردية.
يتم تقدير أداء الطلبة في المهامّ، اعتماداً على قواعد (موازين) تقدير.	يُقدَّر أداء الطلبة في الاختبار بالدرجة (العلامة) التي حصل عليها، بناءً على صحة إجابته عن الأسئلة.
يتم تقييم الطلبة بأساليب عدة: اختبارات الأداء، وحقائب الإنجاز، ومشاريع الطلبة... إلخ.	يقتصر تقييم الطلبة عادة على الاختبارات التحصيلية الكتابية.

نتاجات تعلُّم الرياضيّات:

نتاجات التعلم: كل ما يكتسبه المتعلم من معارف ومهارات وقيم في دراسته لمنهاج معين، وهي خصائص عامة يكتسبها المتعلم، وتتمحور ضمن مجالات ثلاثة، هي:

- **نتاجات عامة**: وهي مهارات الفنون العقلية (نتاجات القدرات العقلية العليا، والتفكير): بحث، وتحليل، وحل مشكلات، والتفكير الإبداعي، والتفكير الناقد...
- **نتاجات عائلة التخصص**: حيث تنتمي الرياضيات للمباحث العلمية، ومن نتاجات عائلة التخصص: البحث العلمي، والتفكير العلمي والمنطقي، والمنهجية التحليلية.
- **نتاجات التخصص**: وهي نتاجات تعلّم مادة الرياضيات.

نتاجات تعلُّم الرياضيّات:

١ امتلاك مهارات التفكير العليا، وحل المشكلات، والاستقراء، والاستنتاج، والاستدلال المنطقي.
٢ نمو مهارة فهم المقروء في حل المشكلات في تطبيقات وسياقات حياتية.
٣ نمو مهارات التقصي، والدقة العلمية، وحب المعرفة.
٤ تطبيق الأسلوب العلمي في قراءة الفرضيات والظواهر، وتفسيرها.
٥ تنمية الحس العددي والحس الفراغي عند الطالب.
٦ توظيف المبادئ الأساسية في الإحصاء والاحتمال في سياقات حياتية.
٧ توظيف أدوات القياس ووحداته؛ لاكتساب مهارات القياس، وفهم العلاقات بين وحدات القياس، والتحويل فيما بينها.
٨ امتلاك مهارات إجراء العمليّات الأربع على الأعداد الطبيعيّة والكسور.

تشمل المبادىء (المعايير) التي يعتمد عليها منهاج الرياضيات ما يأتي:

١ التكامل الأفقي والعمودي:

تدعم مجالات محتوى الرياضيات متعددة، كالهندسة، والجبر، والأعداد، والإحصاء، والاحتمالات، والمنهاج الفلسطيني الترابط الأفقي بين المجالات المختلفة، ويعززها، ويبني على الترابط والتعمق في المفاهيم عمودياً في السنوات والمراحل المختلفة على أساس العلاقات المتبادلة بين مجالات المحتوى، بدلاً من تقديمها كموضوعات منفصلة للطلبة، ويركز على تمييز المتعلّمين لمفاهيم الرياضيات، وتطبيقها خارج سياقاته في التخصصات الأكاديمية، والمواقف الحياتية.

٢ التعلّم:

تُطرح الأفكار الرياضية بطريقة استكشافية تحفز المتعلمين، وتحقق المتعة، وتطوّر الفهم المعمق لهم، ويحتاج الطلبة إلى فهم الرياضيات بعمق، واستخدامها بفاعلية.

ويتطلب الفهم المعمق للرياضيات الانتقال التدريجي من المحسوس إلى شبه المحسوس فالمجرد؛ لبناء المفاهيم وتطويرها، ويشمل بشكل رئيس الحس العددي والحس المكاني، وحل المشكلات، وإدماج الطلبة بتطبيقات رياضية عملية ذات معنى تتحدى تفكيرهم، وتربط بين الإجراءات والمهارات مع المعرفة المفاهيمية.

٣ التواصل:

يُعَدّ التواصل الرياضي جزءاً أساسياً لتطوير الفهم؛ فهو أحد الطرق للمشاركة بالأفكار وإيضاحها، فمن خلال التواصل، تصبح الأفكار الرياضية مجالاً للتأمل والنقاش، وقد ينتج عنها تعديل التفكير، وتساعد في جعل الأفكار الرياضية ومعانيها واضحة للجميع، حيث إنّ الاستماع لتفسيرات الآخرين يتيح فرصاً لتطوير فهم الطلبة، واستكشاف توجهات وأفكار رياضية مختلفة، تطور قدرتهم على التخمين، والربط، وإيجاد علاقات.

٤ التكنولوجيا:

تُعَدّ التكنولوجيا أداة أساسية في تعلم الرياضيات وتعليمها عند توظيفها بشكل مخطط له، ومنظم، ومستمر، والأدوات المستخدمة لكلّ صف يجب أن تكون متوافرة ومألوفة للطلبة والمعلمين، وتسهم في إغناء بيئة التعلّم؛ لتطوير المعرفة الرياضية، أو تطبيقها، وتساعد الطلبة على تبادل الأفكار.

٥ التقييم:

يجب أن يكون نظام التقييم جزءاً لا يتجزأ من عمليات التعليم والتعلم، وأن يتخذ أشكالاً متعددة ومختلفة؛ ليوفر للطلبة تغذية راجعة واضحة ومستمرة عن تعلمهم، ويساعد المعلمين في تطوير أدوات مختلفة؛ لقياس مدى فهم الطلبة للمعرفة الرياضية وتطبيقاتها، ويزود أولياء الأمور بمعلومات حول أداء أبنائهم في سياق أهداف التعليم ومخرجاته، ويوفر للإداريين مؤشرات عن مستويات تعلم الطلبة.

٦ تقاطع مهارات القراءة والكتابة مع المحتوى:

يستند تعليم الرياضيات الفعّال إلى تطوير معارف ومهارات القراءة والكتابة، التي تمكنهم من الفهم المعمق للمفاهيم، ومعاني الرموز والمصطلحات الرياضية، فضلاً عن تطوير مهارات الاستدلال من خلال القراءة، ومن خلال الكتابة، يجب أن يدعم المعلمون باستمرار قدرة الطلبة على الاستدلال، وتحقيق فهم أعمق للمفاهيم، والتعبير عن فهمهم بطريقة مركزة ودقيقة ومقنعة، واكتساب فهم المفاهيم، وتعميقها من المواد المكتوبة؛ بمساعدتهم على اكتساب مهارات الاستيعاب، واستراتيجياته، والإفادة من المواد المتنوعة، بما فيها المقررات الدراسية، والمجلات الرياضية، وسياقات المسائل الرياضية، والبيانات الواردة في وسائل الإعلام.

٧ العدالة:

من حق الطلبة الحصول على تعلّم عالي الجودة، يتوافق واهتماماتهم، والفروق الفردية بينهم، ولتحقيق ذلك، يجب أن يكون لدى المعلمين توقعات عالية من الطلبة جميعهم، وتوفير الفرص لتعلّمهم، وينبغي أن يستفيد الطلبة من مصادر تعليمية عالية الجودة، مع التركيز على الطلبة من ذوي التحصيل المتدني، وذوي الاحتياجات الخاصة، ومن هم أعلى من التوقعات على مستوى الصف.

٨ المبادرات الريادية:

تشجيع المبادرات الريادية، حيث يقع على عاتق المنهاج إبراز هذا الجانب، من خلال قيام الطلبة بعمل مشاريع حسب الصف والوحدة، حيث التركيز على التخطيط للمشروع، والتركيز على الجوانب العلمية والمهنية، وكذلك فهم معنى المخاطرة، وكيفية التعامل مع المواقف الطارئة.

٩ توجهات في التقويم:

التقويم هو تحديد قيمة الأشياء، وهو الحكم على مدى نجاح الأعمال والمشروعات، ويعدّ التقويم أساساً من مقومات العملية التعليمية؛ نظراً لما للتقويم من دور مهمّ، وأهمية كبرى في مجال تطوير التعليم.

ويُعدّ الرياضيات من أبرز الموضوعات التعليمية، وبالتالي، فإنّ تحقيق أهدافها له أهمية خاصة في تحقيق الأهداف التربوية، ومن هنا تبرز أهمية التقويم كعنصر من عناصر المنهاج؛ إذ إنّ الهدف منه هو التحقق من مدى تحقيق الأهداف، ولمادة الرياضيات سمة خاصة لا بد أن تنعكس في طرق التقويم، وأساليبه، وهي:

- اشتمل التقويم على جوانب من التعلم السابق الذي اكتسبه الطالب؛ فالرياضيات مادة تراكمية.
- اعتماد الأسلوب الاستقرائي في معظم الأحيان؛ لأنّ تجزئة المفاهيم، وطرح الأسئلة على هذه الأجزاء يفيد في الاختبارات، وكذلك في التقويم التكويني.
- تركيز التقويم على الغايات التربوية المامولة، التي تنعكس بصورة أهداف واجراءات ذات مستويات معرفية متعددة.
- عدم اقتصار التقويم على الاختبارات فقط، بل لا بد من استخدام وسائل أخرى للتقويم، مثل: تنفيذ المشاريع، وعمل المقابلات، وجمع البيانات وملاحظتها، واستخدام وسائل التقانة؛ من معلومات مكتوبة، أو مسموعة.
- تضمين تمرينات ومسائل؛ لإتقان خوارزميات العمليات الحسابية الأربعة، والتحقق من صحة الحل، والتقدير، والحساب الذهني.
- تضمين استخدام الوسائل المختلفة، والتمثيلات المنوّعة وفق النشاط المراد التعامل معه، مثل (الأدوات الهندسية، وخط الأعداد، وشبكة المربعات، والآلة الحاسبة...).
- عدم اقتصار التقويم على الجوانب المعرفية فقط، بل يتعداها ليغطي الجوانب الإجرائية، وحل المشكلات.

الأهداف العامة لتدريس الرياضيات:

١ اكتساب معارف ومهارات أساسية في فروع الرياضيات.
٢ اكتساب معارف ومهارات تساعد الفرد في الحياة العملية، وتسهم في تنمية المجتمع.
٣ تعرف الطبيعة البنيوية للرياضيات، وتكوينها.
٤ تنمية التفكير المنطقي.
٥ تنمية القدرة على حل المشكلات.
٦ اكتساب مهارات استخدام الحاسبات والحاسوب.
٧ تنمية قيم واتجاهات إيجابية.

المهارات الأساسية في المرحلة (١٠-١٢):

١ يتوقع بعد نهاية الصف العاشر (الأكاديمي والمهني) أن يكون الطالب قادرًا على:

- إجراء بعض الإنشاءات الهندسية باستخدام الفرجار والمسطرة غير المدرجة.
- حساب التطبيقات الرياضية المرتبطة بالسندات والأسهم والدفعات والتأمين.
- تمثيل الاقترانات بيانيًا وجبريًا.
- إيجاد العلاقة بين أشكال هندسية باستخدام التكافؤ.
- التحويل بين وحدات قياس الزاوية في التقديرين الستيني والدائري.
- إيجاد معامل الارتباط بين متغيرين ومعادلة انحدار أحد المتغيرين على الآخر.
- إيجاد مفكوك ذات الحدين من صيغة (أ + ب)^{ن}

٢ يتوقع بعد نهاية الصفين الحادي عشر والثاني عشر أن يكون الطالب قادرًا على:

التمييز بين طرق البحث العلمي، والمقارنة بين العينات الاحتمالية وغير الاحتمالية.

- إيجاد توقع التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل، والاحتمال المطلوب لتوزيع ذات الحدين، وتوظيف التوزيع الطبيعي في حل مسائل حياتية.
- استخدام طرق البرهان الرياضي في إثبات صحة بعض العبارات الرياضية، واستخدام أسس المنطق الرياضي في إثبات تكافؤ عبارات محددة.
- إيجاد عناصر القطوع المخروطية ومعادلاتها في الوضع القياسي.
- إجراء التطبيقات المرتبطة بالمتتاليات والمتسلسلات.
- إيجاد مجموعة الحل لنظام من ٣ معادلات خطية بثلاثة متغيرات، وحل معادلات جذرية وأسية ولوغاريثمية، وتوظيف البرمجة الخطية في حل مسائل حياتية.
- إجراء العمليات المرتبطة بالهندسة الفراغية والمتجهات، و إيجاد المعادلات المتجهة للخط المستقيم في الفراغ.
- إيجاد نهاية اقترانات خطية وخاصة، وتوظيف النظريات الخاصة بالاقترانات المتصلة في تطبيقاتها المختلفة.

- إجراء العمليات على المصفوفات، وحل أنظمة خطية بمتغيرين أو أكثر باستخدام المصفوفات.
- إيجاد مشتقات الاقترانات وتطبيقاتها العملية المختلفة.
- إجراء العمليات على الأعداد المركبة، واستخدام خصائصها في ايجاد الصورة القطبية للعدد المركب وجذوره وقواه.
- إيجاد تكامل الاقترانات المختلفة وتطبيقاتها باستخدام طرق التكامل المختلفة.

بنيـة الوحدة والدرس:

أولاً بنية الوحدة:

- صورة معبرة عن موضوع الوحدة، مع سؤال يمهّد لموضوعها، ويقدّم له.
- الأهداف العامّة للوحدة، من خلال أهداف الدروس المتضمنة.
- تقسيم كلّ وحدة إلى مجموعة دروس متسلسلة في البناء.
- كلّ درس يضم أنشطة تغطي الأهداف الخاصة به.
- إدراج مشروع في آخر كلّ وحدة؛ ليقوم الطلبة بتنفيذها، من خلال استخدام المعرفة، وتطبيق المهارة التي تم تعلمها في سياق حياتيّ تطبيقيّ، إضافة إلى تنمية مهارات حياتية أخرى، وبشكل تكاملي مع مواضيع، أو دروس أخرى.
- في درس المراجعة: ننتهي بسؤال يمهّد للتعلم الجديد.

ثانياً بنية الدرس:

تم ترقيم الأنشطة في الدرس بالأرقام: 1، 2، 3... .

- النشـاط الأول: موقـف حياتـي يعبّـر عـن موضـوع الـدرس، ويعتمـد علـى الخبـرات السـابقة فـي التقديـم لموضـوع الـدرس، ويشـترك الطالـب فـي حلّـه، ويتـرك فراغـاً مناسـباً للحـل.
- النشـاط الثانـي: يتـمّ فيـه اسـتدعاء الخبـرات السـابقة للـدرس، ويكـون هـذا مراعيـاً للمسـتويات الثلاثـة، وفيـه يتأكـد المعلـم مـن جاهزيـة الطلبـة للخبـرة الجديـدة (التقويـم القبلـي). ويمكـن الدمـج بيـن النشـاطين الأول والثانـي.
- النشاط الثالث: يتم فيه عرض المحتوى الجديد ضمن سياق حياتي، أو لعبة تربوية، يتضمن الرسم ما أمكن، ويتم فيه تناول المحتوى الجديد بشكل متسلسل، ويعتمد بشكل متدرج على الخبرات السابقة؛ للوصول إلى الخبرة الجديدة، بحيث يشترك الطلبة فيه بشكل فاعل؛ حتى يتم الوصول إلى الاستنتاج، أو القاعدة، أو التعميم، من خلال ما يأتي:
- الأنشطة اللاحقة: يتم تناول المحتوى من زوايا مختلفة، ويتم مراعاة ما يأتي في أنشطة الدرس:

*** التدرج من السياق الحياتي إلى المجرّد، ومن السهل الى الصعب... .**

- يقوم المنهاج في تنفيذ الأنشطة القائمة على التعلم النشط، بما يحقّق تفاعلاً كبيراً للطالب في الحصة الصفيّة.
- الأنشطة تتنوع بين التعلم الفردي والجماعي، وبين الحل النظري والتطبيق العملي.

الفصل الأول

١) الخطة الفصلية: لكتاب الصف الحادي عشر العلمي

<table dir="rtl">
<tr><th rowspan="2">اسم الوحدة</th><th rowspan="2">عنوان الدرس</th><th rowspan="2">عدد الحصص</th><th colspan="2">الفترة الزمنية</th><th rowspan="2">ملاحظات</th></tr>
<tr><th>الشهر</th><th>الأسبوع</th></tr>
<tr><td rowspan="9">الأولى: المتجهات والهندسة الفراغية</td><td>١-١ الإحداثيات الديكارتية في الفراغ ثلاثي الأبعاد</td><td>٤</td><td rowspan="3">آب+أيلول</td><td rowspan="3">الرابع والأول والثاني</td><td rowspan="9"></td></tr>
<tr><td>١-٢ المتجهات في المستوى</td><td>٣</td></tr>
<tr><td>١-٣ العمليات على المتجهات</td><td>٥</td></tr>
<tr><td>١-٤ المتجهات في الفراغ</td><td>٢</td><td rowspan="3">أيلول</td><td rowspan="3">الثاني والثالث والرابع</td></tr>
<tr><td>١-٥ ضرب المتجهات</td><td>٦</td></tr>
<tr><td>١-٦ الهندسة الفراغية</td><td>٣</td></tr>
<tr><td>١-٧ نظرية الأعمدة الثلاثة</td><td>٥</td><td rowspan="3">تشرين أول</td><td rowspan="3">الأول والثاني</td></tr>
<tr><td>تمارين عامة</td><td>٣</td></tr>
<tr><td>فكرة ريادية</td><td>١</td></tr>
<tr><td rowspan="9">الثانية: المنطق</td><td>٢-١ العبارة الرياضية ونفيها</td><td>٢</td><td rowspan="3">تشرين أول</td><td rowspan="3">الثالث</td><td rowspan="9"></td></tr>
<tr><td>٢-٢ جداول الصواب وأدوات الربط</td><td>٢</td></tr>
<tr><td>٢-٣ أدوات الربط الشرطية</td><td>٣</td></tr>
<tr><td>٢-٤ العبارات الرياضية المتكافئة</td><td>٤</td><td rowspan="3">تشرين أول/ثاني</td><td rowspan="3">الرابع والأول</td></tr>
<tr><td>٢-٥ الجملة المفتوحة</td><td>٣</td></tr>
<tr><td>٢-٦ العبارات الرياضية المسورة</td><td>٢</td></tr>
<tr><td>٢-٧ نفي العبارة المسورة</td><td>٢</td><td rowspan="3">تشرين ثاني</td><td rowspan="3">الأول والثاني</td></tr>
<tr><td>٢-٨ البرهان الرياضي</td><td>٩</td></tr>
<tr><td>تمارين عامة</td><td>٣</td></tr>
</table>

اسم الوحدة	عنوان الدرس	عدد الحصص	الفترة الزمنية		ملاحظات
			الشهر	الأسبوع	
الثالثة: المعادلات والمتباينات	٣-١ حل نظام مكون من ثلاث معادلات خطية	٣	تشرين ثاني	الثالث والرابع	
	٣-٢ حل نظام من معادلتين في متغيرين إحداهما خطية والأخرى تربيعية	٢			
	٣-٣ حل نظام مكون من معادلتين تربيعيتين في متغيرين	٢			
	٣-٤ حل معادلة أسية ولوغاريتمية	٣			
	٣-٥ حل أنظمة المتباينات الخطية بمتغيرين	٤	كانون أول	الأول والثاني	
	٣-٦ حل معادلات تتضمن القيمة المطلقة	٢			
	٣-٧ حل متباينات خطية في متغيرين تتضمن القيمة المطلقة	٤			
	تمارين عامة	٣			

اشتقاق الأهداف

الدرس	معرفة	التكرار	تطبيق	التكرار	استدلال	التكرار
١-١ الإحداثيات الديكارتية في الفراغ الثلاثي الأبعاد	أن يعرّف الطالب نظام الإحداثيات في الفراغ.	١	أن يجد الطالب المسافة بين نقطتين في المستوى.	٢	أن يوظف الطالب قانون المسافة بين نقطتين في الفراغ في حل مسائل.	٣
	أن يوضح الطالب قانون المسافة بين نقطتين في الفراغ.	١	أن يجد الطالب إحداثيّي منتصف قطعة مستقيمة في المستوى.	١	أن يوظف الطالب قانون إحداثي منتصف قطعة مستقيمة في الفراغ في حل مسائل.	٢
	أن يعرّف الطالب قانون إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة في الفراغ.	١	أن يمثّل الطالب نقطة في الفراغ.	٣		
			أن يستخدم الطالب برامج حاسوبية لتمثيل نقطة في الفراغ.	١		
			أن يجد الطالب المسافة بين نقطتين في الفراغ.	١		
			أن يجد الطالب إحداثيي منتصف قطعة مستقيمة في الفراغ.	١		
عدد الأهداف		٣		٩		٥
٢-١ المتجهات في المستوى	أن يذكر الطالب الفرق بين المسافة والإزاحة.	١			أن يوظف الطالب مفهوم تساوي متجهين في حل مسائل.	٢
	أن يوضّح الطالب مفهوم الإزاحة.	١	أن يمثل الطالب المتجه هندسياً في المستوى.	١	أن يوظف الطالب مفهوم الإزاحة في حل مسائل.	١
	أن يعرّف الطالب أنواع الكميات.	١	أن يجد الطالب طول متجه معطى.	٣	أن يحل مسائل تتطلب إيجاد طول متجه.	١
	ان يصنّف الطالب الكميات إلى كمية قياسية أو متجهة.	١				
	أن يعرّف الطالب طول المتجهين من خلال علاقته بالمسافة بين نقطتين.	١	أن يمثل الطالب المتجه بالوضع القياسي.	٢		

الدرس	معرفة	التكرار	تطبيق	التكرار	استدلال	التكرار
٢-١ المتجهات في المستوى	أن يتعرف الطالب الوضع القياسي للمتجه.	١	أن يجد الطالب الزاوية التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.	١	أن يوظف إيجاد الزاوية التي يصنعها متجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات في حل مسائل مرتبطة.	١
	أن يتعرف الطالب مفهوم تساوي المتجهين.	١	أن يكتب الطالب المتجه بدلالة متجهيّ الوحدة الأساسيين.	٢	أن يوظف مفهوم تساوي متجهين في حل مسائل.	١
	أن يعرّف الطالب المتجه الصفري.	١				
	أن يعرّف الطالب متجه الوحدة.	١				
	أن يعرّف الطالب متجهيّ الوحدة الأساسيين.	١				
عدد الأهداف		١٠		٩		٦
٣-١ العمليات على المتجهات	أن يعرّف الطالب جمع المتجهات هندسياً بالطريقتين.	١	أن يجد الطالب جمع المتجهات هندسياً.	١	أن يوظف الطالب جمع المتجهات هندسياً في حل مسائل.	٢
	أن يتعرف الطالب جمع المتجهات جبرياً.	١	أن يثبت الطالب هندسياً أن جمع المتجهات عملية تبديلية.	١	أن يوظف الطالب جمع المتجهات جبرياً في حل مسائل.	١
	أن يتعرّف الطالب ضرب المتجه بعدد حقيقي.	١	أن يثبت الطالب هندسياً أنّ جمع المتجهات عملية تجميعية.	١	أن يوظف الطالب خصائص العمليات على المتجهات في حل مسائل.	١
			أن يجمع الطالب المتجهات جبرياً.	٢		
	أن يعرّف الطالب متجه الوحدة باتجاه متجه معين.	١	أن يجد الطالب ناتج ضرب المتجه في عدد حقيقي.	٢	أن يوظف الطالب خصائص المتجهات في إثبات بعض خصائص الأشكال الهندسية.	١
	أن يعرّف الطالب طرح المتجهات هندسياً.	١	أن يطرح الطالب المتجهات هندسياً.	١		
	أن يتعرف الطالب إلى خصائص جمع المتجهات وضربها في عدد حقيقي.	١	أن يكتب الطالب متجهاً بدلالة متجهات أخرى.	٢		

الدرس	معرفة	التكرار	تطبيق	التكرار	استدلال	التكرار
	أن يوضّح الطالب مفهوم المعادلة المتجهة.	١	أن يحل الطالب معادلة متجه.	٢		
			أن يجد الطالب متجه وحدة باتجاه أو عكس اتجاه متجه معطى.	٢		
عدد الأهداف		٧		١٤		٥
٤-١ المتجهات في الفراغ	أن يعرّف الطالب الوضع القياسي لمتجه في الفراغ	١	أن يكتب الطالب المتجه بالوضع القياسي في الفراغ.	١	أن يوظف الطالب العمليات على المتجهات في الفراغ في حل مسائل حياتية.	٢
	أن يذكر الطالب متجهات الوحدة الأساسية في الفراغ.	١	أن يكتب الطالب المتجه بدلالة متجهات الوحدة الأساسية في الفراغ أو متجه آخر.	٢	أن يوظف الطالب مفهوم التوازي في إيجاد متجه موازٍ لمتجه في الفراغ بطول محدد.	٣
	أن يوضح الطالب مفهوم تساوي متجهين في الفراغ.	١	أن يجمع الطالب المتجهات في الفراغ جبرياً.	٢		
			أن يطرح الطالب المتجهات في الفراغ جبرياً.	٢		
			أن يضرب الطالب المتجه في عدد حقيقي في الفراغ.	٢		
			أن يجد الطالب متجه وحدة باتجاه متجه في الفراغ.	٢		
			أن يجد الطالب قيم متغيرات عند تساوي متجهين.	٢	أن يوظف مفهوم تساوي متجهين في الفراغ في حل مسائل.	١
			أن يجد الطالب طول المتجه في الفراغ.	١	أن يوظف الطالب قانون طول متجه في حل مسائل.	١
عدد الأهداف		٣		١٤		٧

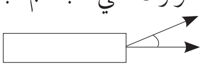
الدرس	معرفة	التكرار	تطبيق	التكرار	استدلال	التكرار
٥-١ ضرب المتجهات	أن يتعرف الطالب مفهوم الضرب القياسي لمتجهين.	١	أن يجد الطالب الضرب القياسي لمتجهين باستخدام التعريف.	١	أن يوظف الطالب خصائص الضرب القياسي في إثبات بعض النظريات، والمتطابقات، وحل المسائل.	٤
	أن يتعرّف الطالب الشغل كتطبيق فيزيائي على الضرب القياسي.	١	أن يجد الطالب الضرب القياسي للمتجهات في الفراغ جبرياً.	٢		
	أن يتعرف الطالب الضرب القياسي جبرياً في الفراغ.	١	أن يستخدم الطالب الضرب القياسي في إثبات تعامد متجهين.	٢		
	أن يذكر الطالب خصائص الضرب الداخلي للمتجهات.	١	أن يجد الطالب الزوايا الاتجاهية لمتجه في الفراغ.	٣	أن يستنتج الطالب مفهوم تعامد متجهين من خلال الضرب القياسي.	١
	أن يعرّف الطالب مفهوم الزوايا الاتجاهية للمتجه.	١				
	أن يتعرف الضرب الخارجي لمتجهين.		أن يجد الطالب الضرب الخارجي لمتجهين باستخدام التعريف.			
	أن يذكر الطالب العلاقة بين جيوب تمام الزوايا الاتجاهية للمتجه في الفراغ.	١	أن يجد الطالب الضرب الخارجي لمتجهين في الفراغ، باستخدام قاعدة اليد اليمنى.	١	أن يوظف الطالب خصائص تعامد متجهين في حل مسائل.	٢
			أن يحل الطالب مسائل باستخدام قانون جيب التمام.	١	أن يوظف الطالب خصائص الزوايا الاتجاهية في حل مسائل	٢
	أن يعرّف الطالب مفهوم قانون جيب التمام.	١	أن يجد الطالب الزاوية المحصورة بين متجهين.	١	أن يثبت صحة صيغ جبرية مرتبطة بأشكال هندسية باستخدام ضرب المتجهات.	٣
	أن يذكر الطالب التطبيقات الهندسية للضرب الخارجي.	١				
عدد الأهداف		٨		١١		١٢

الدرس	معرفة	التكرار	تطبيق	التكرار	استدلال	التكرار
٢-١ الهندسة الفراغية	أن يذكر الطالب مكوّنات البناء الرياضي.	١	أن يمثّل الطالب المسلّمات هندسياً.	١	أن يوظف الطالب المسلّمات في إعطاء أمثلة من الواقع.	١
	أن يعرّف الطالب مفهوم المسلّمات الأولية.	١	أن يحددالطالب العلاقة بين مستقيمين في الفراغ.	٣		
	أن يعرّف الطالب مفهوم المسلّمة.	١	أن يحل الطالب مسائل على العلاقة بين المستقيم والمستوى.	٢	أن يوظف الطالب المسلّمات في حل مسائل.	١
	أن يعرّف الطالب مفهوم النظرية.	١	أن يستنتج الطالب الحالات التي تكوّن المستوى.	١		
	أن يتعرف الطالب إلى بعض المسلمات الهندسية.	١	أن يحل الطالب مسائل على المستويات.	٢	أن يستنتج الطالب ارتباط بعض المسلمات بأشكال ومجسمات معطاة.	١
	أن يوضّح الطالب مفهوم النقاط المستقيمة.	١			أن يحكم على صحة عبارات ذات علاقة بالمسلمات.	٢
	أن يوضّح الطالب مفهوم النقاط المستوية.	١				
	أن يتعرف الطالب العلاقة بين مستقيمين في الفراغ.	١				
	أن يتعرف الطالب العلاقة بين مستقيم ومستوى في الفراغ.	١				
	أن يتعرف الطالب العلاقة بين المستويات في الفراغ.	١				
عدد الأهداف		١٠		٩		٥

الدرس	معرفة	التكرار	تطبيق	التكرار	استدلال	التكرار
٧-١ نظرية الأعمدة الثلاثة	أن يتعرف الطالب نظرية الأعمدة الثلاثة.	١	أن يستخدم الطالب نظرية الأعمدة الثلاثة في حل مسائل.	٢	ان يبرهن الطالب نظرية الأعمدة الثلاثة.	١
	أن يذكر الطالب عكس نظرية الأعمدة الثلاثة.	١			أن يوظف الطالب نظرية الأعمدة الثلاثة في حل مسائل.	٢
					أن يصمم الطالب أدوات من صنعه تبيّن نظرية الأعمدة الثلاثة.	١
					أن يوظف الطالب جميع المفاهيم الواردة في الوحدة في تفسير الواقع الذي يعيش فيه.	١
عدد الأهداف		٢		٢		٥

الأخطاء الشائعة والصعوبات المتوقع أن يواجهها الطالب

الوحدة الأولى: المتجهات والهندسة الفراغية

الوحدة | الدرس	أخطاء وصعوبات متوقعة	حلول مقترحة
(١-١) الإحداثيات الديكارتية في الفراغ ثلاثية الأبعاد	١) تحديد موقع نقطة في الفراغ، وأولويات الخطوات الثماني لتعيين الإحداثيات الديكارتية لتعيينها.	إعداد وسيلة مناسبة لمجسم يوضح نظام الإحداثيات المتعامدة في الفراغ مكون من ثلاثة مستويات شفافة متقاطعة في نقطة.
	٢) ضعف قدرة الطالب على تمثيل نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد في مستوى الورقة أو السبورة.	التدريب المستمر على الرسم، مع الاستفادة من برنامج جيوجبرا في ذلك، ورؤية الرسومات من زوايا ومساقط متنوعة.
	٣) قد يجد الطالب صعوبة في تحديد ترتيب الأثمان الثمانية في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد.	الاستفادة من الوسيلة السابقة ومن تصميم غرفة الصف.
(١-٢) المتجهات في المستوى:	١) عدم التمييز بين الكميات القياسية والكميات المتجهة لضعف معلوماته الفيزيائية والعلمية.	الاستفادة من معلم الفيزياء لإعداد قائمة بالكميات المتجهة والكميات القياسية المختلفة والمشهورة.
	٢) توضيح تساوي متجهين هندسياً (ملحوظة: خلو الكتاب من أنشطة، أو أمثلة توضح ذلك).	طرح مثال إضافي : بالرسم على السبورة، أو من خلال مثال من غرفة الصف مثل : مصابيح (لمبات) الإضاءة، أو حواف اللوح.
	٣) ربط مفهوم المتجه هندسياً، أو جبرياً بالواقع العملي للكميات المتجهة.	من خلال مثال لقوّتين تؤثران في جسم باتجاهين مختلفين. 
(١-٣) العمليات على المتجهات:	١) ضرب المتجه في عدد حقيقي هندسياً، مقداراً واتجاهاً.	يمكن استخدام لوحة المسامير والمطاط .
	٢) إجراء عملية الجمع هندسياً يتطلب دقة متناهية في استخدام الأدوات الهندسية.	فهم عملية جمع المتجهات جبرياً قبل أن يتعرف إلى العملية هندسياً. والتدريب المستمر والمتابعة المستمرة على الرسم.
	٣) القدرة الذهنية على فهم المسائل (العملية)، وتحليلها، وتحديد معطياتها والمطلوب، والشروع في حلها.	توضيح إستراتيجية عامة للتعامل مع مثل هذه المسائل: ١- قراءة المسألة. ٢- تحديد معطياتها والمطلوب. ٣- الرسم التوضيحي. ٤- تحديد الثوابت والمتغيرات. ٥- استحضار المفاهيم والمهارات اللازمة للحل.

<table>
<tr><th>الوحدة | الدرس</th><th>أخطاء وصعوبات متوقعة</th><th>حلول مقترحة</th></tr>
<tr><td rowspan="4">(١-٤) المتجهات في الفراغ</td><td>١) عدم التمييز بين إيجاد متجه طوله مثلاً ثلاثة أضعاف متجه آخر وبين إيجاد متجه طوله ثلاث وحدات.</td><td>يمكن استخدام لوحة المسامير والمغيط المطاط .</td></tr>
<tr><td>٢) يخطئ في إيجاد $|\overleftarrow{\text{أ}}| + |\overleftarrow{\text{ب}}|$، $|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}|$ والتفريق بينهما.</td><td>طرح مثال عددي بسيط يبيّن الفرق.</td></tr>
<tr><td>٣) صعوبة رسم متجه في الفراغ على مستوى الورقة أو السبورة.</td><td>باستخدام وسيلة الفراغ الناتج عن تقاطع ثلاثة مستويات، والتدريب المتواصل على الرسم، وتذكير الطالب بما تعلمه في مبحث التكنولوجيا.</td></tr>
<tr><td>٤) إثبات بعض النظريات الهندسية باستخدام المتجهات.</td><td>إعداد ورقة عمل بالنظريات الهندسية المعروفة، مع بعض الإرشادات العامة</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(١-٥) ضرب المتجهات</td><td>إيجاد $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}}$ حيث $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{١}، \text{أ}_{٢}، \text{أ}_{٣})$
$\overleftarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{١}، \text{ب}_{٢}، \text{ب}_{٣})$.</td><td>تذكير الطالب أن الإحداثي الغائب = صفر، وتطبيق ذلك على مثال عددي.</td></tr>
<tr><td>إيجاد الزاوية بين متجهين من خلال الضرب الخارجي، وعدم الانتباه أن جيب الزاوية موجب في الربعين: الأول والثاني، واختصار الحل على نتيجة واحدة .</td><td>ضرورة مراجعة الوضع القياسي للزاوية والنسب المثلثية له وإشارتها في الأرباع الأربعة، ومفهوم زاوية الإسناد و.........</td></tr>
<tr><td>إثبات قانون جيب التمام باستخدام الضرب الداخلي للمتجهات، وقانون المحصلة (الكتاب صفحة ٣٠)</td><td>استخدام الرسم وبيان أنّ قانون جيب التمام يستخدم الزاوية بين الضلعين لإيجاد طول الضلع الثالث، وأن قانون المحصلة يستخدم الزاوية المكملة لها.</td></tr>
</table>

الوحدة | الدرس	أخطاء وصعوبات متوقعة	حلول مقترحة
الهندسة الفراغية:	١) التفريق بين مفهوم النقاط المستقيمة ومفهوم النقاط المستوية.	من خلال بيئة الصف : نقاط مستقيمة مثل علّاقة الملابس: ونقاط مستوية مثل رؤوس المستطيل الذي يمثّل سقف الصف.
	٢) قد يخطئ في التفريق بين المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتخالفة.	غرفة الصف مزدحمة بالمستقيمات: المتوازية والمتخالفة والمتقاطعة.
	٣) عدم القدرة على الربط بين بعض الظواهر الطبيعية والمسلّمات التي تفسرها.	طرح أمثلة من بيئة الطالب، مثل: لماذا ترتكز كاميرا المهندس على ثلاث أرجل ؟ لماذا يستخدم البنّاء الخيط للحصول على (مدماك) مستقيم؟ لماذا؟
	٤) قد يواجه صعوبة في رسم مستويات متعامدة أو متوازية، وتوضيح العلاقة بين مستوى ومستوى، أو مستقيم ومستوى بالرسم.	الاتفاق مع الطلبة على طريقة معينة لرسم المستويات والعلاقة بينها، مع الاستفادة من بعض المجسمات المتوفرة.
نظرية الأعمدة الثلاثة:	١) عدم القدرة على الرسم التوضيحي للمسألة، وتحديد المعطيات، والمطلوب، والحل أو الإثبات.	عمل مجسم توضيحي للنظرية يضم شروطها ونتائجها.
	٢) ضعف المعرفة بنظريات الهندسة المستوية والفراغية يشكّل عائقاً أمام الطالب في حل المسائل بأنواعها المختلفة.	ورقة عمل تضم النظريات الهندسية المستوية والفراغية التي يحتاجها الطالب في هذا البند.
	٣) صعوبة ربط فكرة النظرية وعكسها بالبيئة المحيطة.	يمكن تمثيل النظرية بسلّم يستند على عمود في البيت، وقاعدته مثبتة على خط تقاطع أرضية الغرفة مع إحدى جوانبها المقابلة للعمود.

نموذج تحضير الدرس (١-٣) المتجهات في الفراغ

عدد الحصص: ٢

أولاً: مرحلة الاستعداد

١) أهداف الدرس:

١- أن يتعرف الطالب إلى الصورة القياسية لمتجهٍ في الفراغ.
٢- أن يمثل الطالب متجهاً بالصورة القياسية في الفراغ.
٣- أن يكتب الطالب متجهاً في الفراغ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.
٤- أن يجد الطالب ناتج جمع متجهين في الفراغ جبرياً.
٥- أن يجد الطالب ناتج طرح متجهين في الفراغ جبرياً.
٦- أن يجد الطالب ناتج ضرب متجه في الفراغ في عدد حقيقي.
٧- أن يجد الطالب طول متجه في الفراغ.
٨- أن يوظف الطالب العمليات على المتجهات في الفراغ في حل التمارين.

٢) المهارات:

١- كتابة المتجه بالصورة القياسية في الفراغ.
٢- كتابة المتجه في الفراغ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.
٣- إيجاد ناتج جمع متجهين في الفراغ جبرياً.
٤- إيجاد ناتج طرح متجهين في الفراغ جبرياً.
٥- إيجاد ناتج ضرب متجه في الفراغ في عدد حقيقي.
٦- إيجاد طول متجه في الفراغ.
٧- إيجاد متجه وحدة في اتجاه متجه.

٣) الخبرات السابقة:

- قانون المسافة بين نقطتين في الفراغ.
- حل المعادلات الخطية، التربيعية

٤) المفاهيم الخاطئة، والصعوبات المتوقّع أن يواجهها الطلبة:

المفاهيم الخاطئة والصعوبات (المتوقعة)	مقترحات الحلول
عدم تمييز الطالب بين متجه طوله خمسة أضعاف متجه آخر، ومتجه طوله خمس وحدات في الحل.	• استخدام عرض (بور بوينت) لتوضيح هذه المفاهيم. • إشراك الطلبة في حل المزيد من التمارين ومناقشتها على السبورة.
حل المعادلات بجميع أنواعها.	• عرض حلول صائبة وخاطئة لحل معادلة ومناقشة الحلول مع الطلبة. • مراجعة الطلبة في حل المعادلات، وإثراؤها بالتمارين .

الصعوبات:

- صعوبات تتعلق بالتحصيل، يمكن الوقوف عند بعضها من خلال الجدول السابق، وتتم عملية المعالجة أثناء تنفيذ الدرس.
- صعوبات تعلّم، ويمكن التعامل معها من خلال إعطاء المعلم الوقت الكافي للطلبة أثناء تنفيذهم الأنشطة .

٥) أصول التدريس:

أ) المحتوى العلمي:

١- كتابة المتجه بالصورة القياسية في الفراغ.
٢- كتابة المتجه في الفراغ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.
٣- إيجاد ناتج جمع متجهين في الفراغ جبرياً.
٤- إيجاد ناتج طرح متجهين في الفراغ جبرياً.
٥- إيجاد ناتج ضرب متجه في الفراغ في عدد حقيقي.
٦- إيجاد طول متجه في الفراغ.
٧- إيجاد متجه وحدة في اتجاه متجه.

ب) استراتيجيات التدريس:

- العمل الفردي: نشاط (١)، نشاط (٢)، نشاط (٣) من الكتاب المدرسي.
- الاستكشاف (مشاركة الطلاب في حل التمارين على السبورة): مثال (١)، مثال (٢) من الكتاب المدرسي.
- العمل التعاوني (تقسيم الطلبة إلى مجموعات حسب نوعية ومستوى الصف، وعدد طلبته) مثال (٢)، نشاط (٤) من الكتاب المدرسي.
- المناقشة وطرح الأسئلة (بشكل عام بعد كل نشاط من خلال عرض الطلبة نتاج عملهم).

٦) آليّات التقويم:

- متابعة استجابات الطلبة الصفية في نشاط (١).
- ملاحظة إجابات الطلبة في الأنشطة والأمثلة وتصحيحها.
- الإجابة عن الأسئلة المطروحة خلال فعاليات الحصة.
- الأسئلة (٣)، (٤) من تمارين ومسائل خلال الحصة.

ثانياً: أثناء تنفيذ الدرس

١) التهيئة

- عرض أهداف الدرس.
- قراءة وتفكُّر: نشاط ١ فردياً لمدة دقيقتين، ومن ثم توجيه الأسئلة للطلبة، ومناقشة إجاباتهم .
- عرض مصدر (مثل فيديو، أو بوربوينت) يوضّح استخدام برنامج الـ "Geo Gebra" ، ويوضح موقع وتفاصيل المتجه في الفراغ، ومن ثم إدارة حوار ومناقشة. كما ويمكن تنفيذ ورقة عمل حول ذلك.

٢) العرض

١- يقوم المعلم بتسمية حواف الغرفة الصفية بأسماء المحاور الإحداثية س،ص، ع ، ويقوم بتثبيت عدد من الكرات في سقف الغرفة الصفية، ويكلف الطلبة قياس أبعاد هذه الكرات، من حيث بُعدها عن كل حائط من الغرفة، وارتفاعها عن أرضيّة الغرفة، والتعبير عن هذه الأبعاد بثلاثي مرتب، وتمثيل المتجه في الوضع القياسي، من خلال استخدام العصيّ، وتتم من خلالها مناقشة الأنشطة: (١)، (٢)، (٣).

٢- مناقشة مفهوم المتجه في الفراغ، والعمليات على المتجهات في الفراغ ، ومن ثم نقوم بتقسيم الطلبة إلى مجموعات عمل غير متجانسة يقومون من خلالها بحل مثال (٢)، ونشاط (٤) ، ومناقشة أهم المفاهيم والعمليات الواردة فيها، ومنها: "جمع وطرح متجهين في الفراغ- تساوي متجهين في الفراغ – متجه وحده في اتجاه متجه أو عكس اتجاه متجه "

وبعد انتهاء كل المجموعات من حل النشاط نناقش الحل مع المجموعات جميعها على السبورة.

٣- عرض أمثلة توضيحية للمتجه في الفراغ والعمليات عليه، من خلال أمثلة معدّة مسبقاً باستخدام برنامج "Geo Gebra" تعرض بوساطة "Data Show"، بالتعاون مع الطلاب ، ثم مناقشة النتائج.

٣) الإغلاق والتقويم

١- متابعة المعلم حلول الطلبة، وتقديم التغذية الراجعة المناسبة.

٢- تكليف الطلبة حل ما تبقّى من أسئلة الدرس، ومتابعة الحلول وتصحيحها، ومن ثم تثبيت الإجابات الصحيحة على السبورة.

٣- مراعاة استمرارية التقويم بجميع أنواعه خلال الحصتين.

أسئلة إثرائيّة على وحدة المتجهات والهندسة الفراغية.

الأسئلة الموضوعية

س١: نقطة في الفراغ بُعدها عن المستوى س ص = ضعفيّ بُعدها عن المستوى س ع = ٣ أمثال بُعدها عن المستوى ص ع = ٦ فأي مما يأتي لا يمكن أن يمثل هذه النقطة؟

أ) (٢ ، ٣، ٦)　　ب) (-٢، -٣،-٦)　　ج) (٢، ٣ ، -٦)　　د) (٦ ، -٣، ٢)

س٢: إذا كان $|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}| = |\overleftarrow{أ}|\,|\overleftarrow{ب}|$، فإنّ: $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} =$

أ) ١　　ب) صفر　　ج) $|\overleftarrow{أ}|\,|\overleftarrow{ب}|$　　د) $|\overleftarrow{أ}| + |\overleftarrow{ب}|$

س٣: قوّتان متساويتان، إذا كان مربع محصّلتيهما يساوي ضعف مربع أحداها، فما قياس الزاوية بينهما؟

أ) $\frac{\pi}{٢}$　　ب) π　　ج) $\frac{٢\pi}{٣}$　　د) صفر

س٤: متجهان مقدار أحدهما مثليّ مقدار الآخر، وقياس الزاوية بينهما ٣٠°، ومقدار حاصل الضرب الخارجي لهما ٤ وحدات فما مقداريّ المتجهين؟

أ) ٤ ، ٨　　ب) ٢ ، ٤　　ج) ٤ ، ١　　د) ٢ ، ٨

س٥: إذا توازى مستويان فأي العبارات الآتية خاطئة؟

أ) إذا قطع مستقيم المستوى الأول فإنّه يقطع المستوى الثاني.

ب) أيّ مستقيم في المستوى الأول يوازي أيّ مستقيم في المستوى الثاني.

ج) من نقطة في المستوى الأول يمكن رسم عمود واحد فقط على الثاني.

د) إذا وازى مستقيم المستوى الأول فإنّه يوازي المستوى الثاني.

الأسئلة المقالية:

س١: إذا كان $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهين في الفراغ، وكان $\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} =$ (-٢، ٣ ، -١) ، $\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب} =$ (٤ ، -١، ٣) ، أوجد: $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}$.

س٢: غرفة طولها ٤ أمتار، وعرضها ٤ أمتار، وارتفاعها ٣ أمتار إذا كان المتجه $\overleftarrow{أ}$ هو المتجه الواصل بين أحد رؤوس زوايا الأرضيّة إلى الزاوية المقابلة لها في السقف، غير المشتركة معها في الجوانب :

أ) جد الزوايا الاتجاهية الثلاث لهذا المتجه معتبراً المتجه في الوضع القياسي.

ب) إحداثيات نقطة تلاقي أقطار سقف الغرفة.

س٣: نقطة تسبح في الفراغ، بحيث: س = **جتاه** ، ص = **جاه** ، ع = ٠ ، وفي لحظةٍ ما كانت الزوايا الاتجاهية للمتجه $\overleftarrow{أ}$ = (س ، ص ، ع) كالآتي: $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi}{٦}$، $هـ_٣$ على الترتيب:

أ) جد المتجه $\overleftarrow{أ}$.

ب) جد $هـ_٣$.

س٤: باستخدام المتجهات أثبت أنّ المستقيم الواصل بين رأس المثلث المتساوي الساقين ومنتصف القاعدة يكون عمودياً عليها.

س٥: إذا كان $\overleftarrow{م}$ = (س ، ص) ، $\overleftarrow{ب}$ = ($\sqrt{٣}$ ، ١) س ، ص ∈ ط ، وكانت قياس الزاوية بينهما ٦٠°،
وكان | $\overleftarrow{م}$ + $\overleftarrow{ب}$ | = $\sqrt{١٢}$ ، أوجد المتجه $\overleftarrow{م}$.

س٦: أب جـ د معين ، دع عمودي على المستوى أب جـ د ، النقطة هـ منتصف $\overline{أجـ}$ ، أثبت أنّ $\overline{ع هـ}$ عمودي على $\overline{أجـ}$.

س٧: باستخدام المتجهات أثبت أنّ القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفيّ ضلعين في المثلث توازي الضلع الثالث وتساوي نصفه.

الحلول

إجابات الأسئلة الإثرائيّة / الرياضيات ١١علمي/ الجزء الأول

الوحدة (١) المتجهات والهندسة الفراغية

١	٢	٣	٤	٥
د	ب	أ	ب	ب

الأسئلة المقالية:

س١: إذا كان $\overleftarrow{م}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهين في الفراغ، وكان $\overleftarrow{م}$ + $\overleftarrow{ب}$ = (-٢، ٣ ، -١)، $\overleftarrow{م}$ - $\overleftarrow{ب}$ = (٤ ، -١، ٣) ، أوجد: $\overleftarrow{م}$. $\overleftarrow{ب}$.

الحل: نفرض: $\overleftarrow{م}$ = ($م_١$ ، $م_٢$ ، $م_٣$) ، $\overleftarrow{ب}$ = ($ب_١$ ، $ب_٢$ ، $ب_٣$)

$م_١ + ب_١ = -٢$ ، $م_٢ + ب_٢ = ٣$ ، $م_٣ + ب_٣ = -١$

$م_١ - ب_١ = ٤$ ، $م_٢ - ب_٢ = -١$ ، $م_٣ - ب_٣ = ٣$

$٢م_١ = ٢$ ومنها: $م_١ = ١$ ، $٢م_٢ = ٢$ ومنها: $م_٢ = ١$ ، $٢م_٣ = ٢$ ومنها: $م_٣ = ١$

$١ + ب_١ = -٢$ ، $ب_١ = -٣$ ، $١ + ب_٢ = ٣$ ، $ب_٢ = ٢$ ، $١ + ب_٣ = -١$ ، $ب_٣ = -٢$

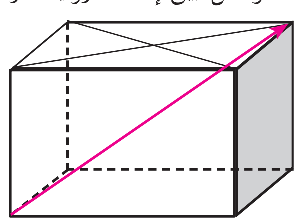
$\overleftarrow{م}$ = (١ ، ١ ، ١) ، $\overleftarrow{ب}$ = (-٣ ، ٢ ، -٢)

$\overleftarrow{م}$. $\overleftarrow{ب}$ = -٣ + ٢ + -٢ = -٣.

س٢: غرفة طولها ٤ أمتار، وعرضها ٤ أمتار، وارتفاعها ٣ أمتار إذا كان المتجه $\overleftarrow{م}$ هو المتجه الواصل بين إحدى زوايا الأرضيّة إلى الزاوية المقابلة لها في السقف، غير المشتركة معها في الجوانب : (انظر الشكل)

أ) جد قياسات الزوايا الاتجاهية الثلاث لهذا المتجه معتبراً المتجه في الوضع القياسي.

ب) إحداثيات نقطة تلاقي أقطار سقف الغرفة.



الحل: أ) إحداثيات المتجه $\overleftarrow{م}$ = (٤ ، ٤ ، ٣)

ظاهـ$_١$ = $\frac{٤}{\sqrt{٤١}}$ = ٠,٦٢٥ ، هـ$_١$ ≈ ٣٢°، ظاهـ$_٢$ = $\frac{٤}{\sqrt{٤١}}$ ، هـ$_٢$ ≈ ٣٢° ، ظاهـ$_٣$ = $\frac{٣}{\sqrt{٤١}}$ ، هـ$_٣$ ≈ ٢٥°

ب) نقطة تلاقي الأقطار هي منتصف أي منهما (خصائص متوازي الأضلاع)
وليكن القطر الذي طرفاه النقطتان: (٠، ٠، ٣) ، (٤، ٤، ٣)
وهي: (٢ ، ٢ ، ٣)

س٣: نقطة تسبح في الفراغ، بحيث: س = جتا ن ، ص = جا ن ، ع = ٠ ، وفي لحظةٍ ما كانت الزوايا الاتجاهية للمتجه $\overleftarrow{م}$ = (س ، ص ، ع) كالآتي: $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi}{٦}$، هـ٣ على الترتيب:
أ) جد المتجه $\overleftarrow{م}$.
ب) جد هـ٣.

الحل: طول المتجه $\overleftarrow{م} = |\overleftarrow{م}| = \sqrt{جتا^٢ن + جا^٢ن + ٠} = ١$
نفرض المتجه $\overleftarrow{م}$ = (س ، ص ، ع)

$$جتاهـ_١ = \frac{س}{|\overleftarrow{م}|} = \frac{س}{١} = جتا\frac{\pi}{٣} = \frac{١}{٢} \Longleftarrow س = \frac{١}{٢}$$

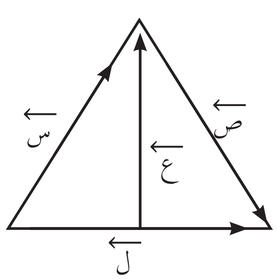
$$جتاهـ_٢ = \frac{ص}{|\overleftarrow{م}|} = \frac{ص}{١} = جتا\frac{\pi}{٦} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \Longleftarrow ص = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

$$\therefore \overleftarrow{م} = (\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢} ، ٠)$$

ب) $جتاهـ_٣ = \frac{ع}{|\overleftarrow{م}|} = ٠ \Longleftarrow هـ_٣ = \frac{\pi}{٢}$

س٤: باستخدام المتجهات أثبت أنّ المستقيم الواصل بين رأس المثلث المتساوي الساقين ومنتصف القاعدة يكون عمودياً عليها.

الحل: $|\overleftarrow{س}| = |\overleftarrow{ص}|$ ، المطلوب إثبات أن $\overleftarrow{ع} \times \overleftarrow{ل} = ٠$



$$\overleftarrow{ل} = \overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}$$

$$\overleftarrow{ع} = \frac{١}{٢}\overleftarrow{ل} - \overleftarrow{ص} = \frac{١}{٢}(\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}) - \overleftarrow{ص} = \frac{١}{٢}\overleftarrow{س} - \frac{١}{٢}\overleftarrow{ص}$$

$$\overleftarrow{ع} = \frac{١}{٢}(\overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص})$$

$$\therefore \overleftarrow{ع} \times \overleftarrow{ل} = \frac{١}{٢}(\overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص}) \times (\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص})$$

$$= \frac{١}{٢}(\overleftarrow{س} \times \overleftarrow{س} - \overleftarrow{س} \times \overleftarrow{ص} + \overleftarrow{ص} \times \overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص} \times \overleftarrow{ص})$$

$= \frac{١}{٢}(|\overleftarrow{س}|^٢ - |\overleftarrow{ص}|^٢) = \frac{١}{٢} \times ٠ = ٠$ (لأن $|\overleftarrow{س}| = |\overleftarrow{ص}|$) معطيات

$\therefore \overleftarrow{ع} \perp \overleftarrow{ل}$ وهو المطلوب.

س٥: إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (س ، ص) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = ($\sqrt{٣}$ ، ١) س ، ص ∈ ط ، وكانت قياس الزاوية بينهما ٦٠°،

وكان | $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$ | = $\sqrt{١٢}$ ، أوجد المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$.

الحل: $\overleftarrow{\text{أ}}$. $\overleftarrow{\text{ب}}$ = $\sqrt{٣}$ س + ص = | $\overleftarrow{\text{أ}}$ | | $\overleftarrow{\text{ب}}$ | **جتا**٦٠°

⟸ $\sqrt{٣}$ س + ص = $\sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢}$ × $\sqrt{٤}$ × $\frac{١}{٢}$ (بتربيع الطرفين)

⟸ ٣ س^٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ س ص + ص^٢ = س^٢ + ص^٢

- س^٢ - ص^٢ - س^٢ - ص^٢

٢ س^٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ س ص = ٠

⟸ ٢ س (س + $\sqrt{٣}$ ص) = ٠ إما س = ٠ أو س = $\sqrt{٣}$ ص ∉ **ط** مرفوضة

أيضاً: | $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$ | = | (س + $\sqrt{٣}$ ، ص + ١) | = $\sqrt{١٢}$

⟸ $\sqrt{(\text{س} + \sqrt{٣})^٢ + (\text{ص}+١)^٢}$ = $\sqrt{١٢}$

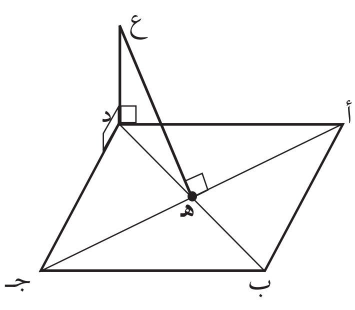
⟸ س^٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ س + ٣ + ص^٢ + ٢ص + ١ = ١٢ ، نعوض س = ٠

⟸ ص^٢ + ٢ص - ٨ = ٠

إما: ص = ٢ أو ص= -٤ مرفوضة

∴ المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٠ ، ٢)

س٦: أب جـ د معين ، $\overleftrightarrow{\text{د ع}}$ عمودي على المستوى أب جـ د ، النقطة هـ منتصف $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، أثبت أنّ $\overleftrightarrow{\text{ع هـ}}$ عمودي على $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$.

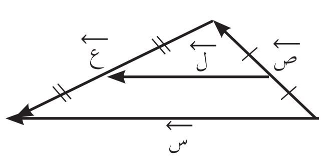


الحل: أب جـ د معين ⟸ أقطاره متعامدة

⟸ $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ يقع في المستوى أب ج د ، $\overleftrightarrow{\text{د ع}}$ ⊥ أ ب جـ د

∴ حسب نظرية الأعمدة الثلاثة ، المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ع هـ}}$ ⊥ $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ ، وهو المطلوب

س٧: باستخدام المتجهات أثبت أنّ القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفيّ ضلعين في المثلث توازي الضلع الثالث وتساوي نصفه.



الحل: $\overleftarrow{\text{ل}}$ = $\frac{١}{٢}$ $\overleftarrow{\text{ص}}$ + $\frac{١}{٢}$ $\overleftarrow{\text{ع}}$ = $\frac{١}{٢}$ ($\overleftarrow{\text{ص}}$ + $\overleftarrow{\text{ع}}$)

⟸ $\overleftarrow{\text{ل}}$ = $\frac{١}{٢}$ $\overleftarrow{\text{س}}$ ∴ $\overleftarrow{\text{ل}}$ ∥ $\overleftarrow{\text{س}}$ ، | $\overleftarrow{\text{ل}}$ | = $\frac{١}{٢}$ | $\overleftarrow{\text{س}}$ |

الدرس	معرفة	التكرار	تطبيق	التكرار	استدلال	التكرار
٢-١ العبارة الرياضية ونفيها	أن يتعرف الطالب مفهوم العبارة.	١	أن يميز الطالب العبارة من غيرها من الجمل.	٢		
	أن يوضح الطالب مفهوم قيمة صواب العبارة.	١	أن يحدد الطالب قيمة الصواب للعبارة.	٢		
	أن يعرّف الطالب نفي العبارة.	١	أن ينفي الطالب العبارة.	٢		
			أن يحدّد الطالب العلاقة بين قيمة صواب العبارة وقيمة صواب نفيها.	١		
عدد الأهداف		٣		٧		
٢-٢ | ٢-٣ جداول الصواب وأدوات الربط	أن يعرّف الطالب العبارة المركّبة بأدوات الربط: ($\vee$، $\wedge$ ، $\leftarrow$، $\leftrightarrow$)	١	أن يميّز الطالب أنواع العبارات.	١	أن يوظف الطالب أدوات الربط في تحديد قيمة الصواب لعبارات مركبة تحوي أدوات ربط متعددة.	١
	أن يتعرّف الطالب جدول الصواب لعبارتين أو أكثر.	١	أن يحدد الطالب قيمة الصواب لعبارتين بينهما أداة الربط (و).	٢	أن يوظف الطالب أدوات الربط في حل مسائل.	١
	أن يتعرّف الطالب جدول قيم الصواب لأداة الربط (و).	١	أن يحدد الطالب قيمة الصواب لعبارتين بينهما أداة الربط (أو).	٢		
	أن يتعرّف الطالب جدول قيم الصواب لأداة الربط (أو).	١	أن يحدد الطالب قيمة الصواب لعبارتين بينهما أداة الربط: إذا كان ... فإنّ.	٢		
	أن يتعرف الطالب جدول قيم الصواب لأداةالربط: إذا كان ... فإنّ.	١	أن يحدّد الطالب قيم الصواب لعبارتين بينهما أداة الربط: إذا وفقط إذا.	٢		
	أن يتعرف الطالب جدول قيم الصواب لأداة الربط: إذا وفقط إذا.	١	أن يعبّر الطالب بالرموز عن عبارات مركّبة.	١	أن يوظف قيم صواب عبارات مركبة في إيجاد قيم صواب عبارات بسيطة.	١
عدد الأهداف		٦		١٠		٣

الدرس	معرفة	التكرار	تطبيق	التكرار	استدلال	التكرار
٢-٤ العبارات الرياضيّة المتكافئة	أن يتعرّف الطالب مفهوم تكافؤ عبارتين.	١	أن يثبت الطالب تكافؤ عبارتين، باستخدام الجداول.	٥	أن يثبت الطالب تكافؤ عبارتين، دون استخدام الجداول.	٥
	أن يعرّف الطالب مفهوم المعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية.	١	أن يجد الطالب المعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية.	٢		
	أن يعرّف الطالب قانونيّ ديمورغان لنفي العبارات التي تحوي أداتيّ الربط: (و)، (أو).	١	أن ينفي الطالب عبارات مركبة تحوي: (و، أو).	٢		
	أن يتعرّف الطالب قاعدة نفي العبارة الشرطية.	١	أن ينفي الطالب العبارة الشرطية.	٢		
	أن يتعرّف الطالب خواص العمليات.	١				
عدد الأهداف		٥		١١		٥
٢-٥ الجملة المفتوحة	أن يتعرّف الطالب مفهوم الجملة المفتوحة.	١	أن يجد الطالب قيم الصواب للجملة المفتوحة عند تعويض قيمة ما.	٢	أن يوظف الطالب تعريف مجموعة حل الجملة المفتوحة المركبة في إيجاد حلها.	٣
	أن يعرّف الطالب مفهوم مجموعة التعويض للجملة.	١	أن يجد الطالب مجموعة الحل للجملة المفتوحة.	٤		
	أن يوضّح الطالب مفهوم مجموعة الحل للجملة.	١	أن يثبت الطالب تكافؤ جملتين مفتوحتين.	٣		
	أن يذكر الطالب رموز الجملة المفتوحة.	١	أن يستخدم الطالب برنامج (مايكروسفت ماثيماتيكس)؛ لتحديد قيم الصواب للجملة.	١		
	أن يوضّح الطالب مفهوم تكافؤ الجمل المفتوحة.	١				
عدد الأهداف		٥		١٠		٣

الدرس	معرفة	التكرار	تطبيق	التكرار	استدلال	التكرار
٢-٦ العبارات الرياضيّة المسورة	أن يتعرف الطالب مفهوم العبارة المسورة كليّاً ورمزها.	١	أن يجد الطالب قيمة الصواب للعبارة المسورة كليّاً.	٥	أن يوظف الطالب خصائص قيم الصواب للعبارة المركّبة المسورة كليّاً في حل مسائل.	١
	أن يتعرف الطالب مفهوم العبارة المسورة جزئياً ورمزها.	١	أن يجد الطالب قيمة الصواب للعبارة المسورة جزئياً.	٣	أن يوظف الطالب خصائص قيم الصواب للعبارة المركبة المسورة جزئياً في حل مسائل.	١
	أن يتعرّف الطالب قيم الصواب للعبارة المسورة كلياً.	١			أن يحكم على صواب أو خطأ عبارات مسورة، موضّحاً السبب.	٢
	أن يتعرّف الطالب قيم الصواب للعبارة المسورة جزئياً.	١				
عدد الأهداف		٤		٨		٤
٢-٧ نفي العبارة المسورة	أن يعرّف الطالب نفي العبارة المسورة كلياً.	١	أن ينفي الطالب العبارة المسورة كلياً.	٣	أن يوظف الطالب خصائص نفي العبارات المركبة في حل مسائل.	١
	أن يعرّف الطالب نفي العبارة المسورة جزئياً.	١	أن ينفي الطالب العبارة المسورة جزئياً بالكلمات، أو الرموز.	٣	أن يحكم على صواب أو خطأ عبارات مسورة منفية.	١
عدد الأهداف		٢		٦		٢
٢-٨ طرق البرهان	أن يوضّح الطالب أهمية البرهان في الحياة اليومية.	١	أن يبرهن الطالب عبارات رياضية بسيطة، باستخدام البرهان المباشر.	٣	أن يوظف الطالب أسلوب البرهان بالتناقض لإثبات صحة نظريّات هندسيّة.	٢
	أن يذكر الطالب استراتيجيّة البرهان المباشر.	١	أن يبرهن الطالب عبارات رياضية بسيطة، باستخدام البرهان غير المباشر.	٢		
	أن يذكر الطالب استراتيجية البرهان غير المباشر.	١	أن يبرهن الطالب عبارات بسيطة باستخدام البرهان بالتناقض.	٢		
	أن يشرح الطالب البرهان بالتناقض.	١	أن يستخدم الطالب الاستقراء الرياضي في إثبات صحة عبارة.	٦	أن يوظف الطالب الاستقراء الرياضي في إثبات صحة متباينات.	٢
	أن يعدد الطالب خطوات البرهان بالاستقراء الرياضي.	١				
عدد الأهداف		٥		١٣		٤

أخطاء وصعوبات متوقّعة الوحدة الثانية: المنطق الرياضي

<table>
<tr><th>الوحدة | الدرس</th><th>أخطاء وصعوبات متوقعة</th><th>حلول مقترحة</th></tr>
<tr><td rowspan="3">(٢-١) العبارة الرياضيّة ونفيها:</td><td>١) عدم تمييز العبارة من غيرها.</td><td>طرح المزيد من الجمل الخبرية، والاستفادة من معلم اللغة العربية.</td></tr>
<tr><td>٢) قد يخطئ في نفي العبارة: كأن ينفي العبارة: عمر بن الخطاب أول الخلفاء الراشدين بقوله: أبو بكر أول الخلفاء الراشدين.</td><td>تذكير الطالب بأنّ نفي العبارة لا يعني تصحيح العبارة إذا كانت خاطئة، أو العكس.</td></tr>
<tr><td>٣) ضعف التحصيل في اللغة، أو الثقافة العامة، أو أساسيّات الرياضيات والعلوم المختلفة.</td><td>يمكن الاستفادة من الإنترنت ومواقع البحث.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">(٢-٢)+ (٢-٣) جداول الصواب وأدوات الربط:</td><td>١) إيجاد قيمة الصواب لعبارة مركبة بأداة ربط معينة؛ لعدم حفظ جداول الصواب لأدوات الربط المختلفة والتمييز بينها.</td><td>إعداد وسائل: مثل وسيلة الدارة الكهربائية الموصلة على التوالي (لأداة الربط و)، والموصلة على التوازي (لأداة الربط أو).</td></tr>
<tr><td>٢) إيجاد قيمة الصواب لعبارة مركبة بأكثر من عبارتين، وأكثر من أداة ربط، وأولويات الحل.</td><td>استخدام الأقواس لتوضيح الأولويات.</td></tr>
<tr><td>٣) عدم التمييز بين مفهوم عكس العبارة الشرطية: (ف ← ن)، (ن ← ف) والمعاكس الإيجابي لها (~ ن ← ~ف).</td><td>طرح أمثلة لنظريات هندسية معروفة للطالب: مثل: إذا كان الشكل مستطيلاً فإنّه متوازي أضلاع صائبة، بينما (ن ← ف) خاطئة. (~ ن ← ~ف) صائبة.</td></tr>
<tr><td>٤) ضعف التحصيل في اللغة، أو الثقافة العامة، أو أساسيات الرياضيات والعلوم المختلفة يُصعب عملية إيجاد قيمة الصواب لبعض العبارات.</td><td>إعداد ورقة عمل تشمل معظم المفاهيم: اللغوية، والعلمية، والرياضية، والثقافية التي يمكن أن ترد خلال الوحدة. واللجوء إلى الإنترنت في بعض الأحيان.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(٢-٤) العبارات الرياضيّة المتكافئة:</td><td>١) قد يخطئ الطالب في ترتيب الأولويات عند إثبات التكافؤ باستخدام الجداول.</td><td>تدريب الطلبة على تصميم الجداول، ووضع خطة مسبقة لأولويات الخطوات قبل الشروع بالتنفيذ.</td></tr>
<tr><td>٢) يخطئ في التمييز بين: (ف ← ن) ≡ ~ف ∨ ن و ~(ف ← ن) ≡ ف ∧ ~ ن</td><td>بالممارسة المستمرة من خلال أمثلة متنوعة من محيطه، بعد أن يكون قد أثبت التكافؤ.</td></tr>
<tr><td>٣) قد يواجه الطالب صعوبة في إثبات التكافؤ دون استخدام الجداول من حيث البداية: هل من الطرف الأيمن؟ أو الأيسر؟ أو العمل على الطرفين؟ وهذا يتطلب خبرة في العبارات المتكافئة التي على الطالب معرفتها مسبقاً، وإلا سيُضطر إلى أسلوب التجربة.</td><td>• يمكن استخدام أسلوب المجموعات، وترك كل مجموعة تستخدم إحدى هذه الاستراتيجيات، ثم الاتفاق على الطريقة الأسهل والأيسر ودراسة ميزاتها وخطواتها.
• عدم تقييد الطلبة بأسلوب محدد وتدريبهم على كل الطرق الممكنة.</td></tr>
</table>

الوحدة | الدرس	أخطاء وصعوبات متوقعة	حلول مقترحة
(٢-٥) الجملة المفتوحة:	١) عدم التمييز بين: أ) أداة الربط أو (٧) تفيد اتحاد مجموعتيّ حلي الجملتين المفتوحتين. ب) أداة الربط و (٨) تفيد تقاطع مجموعتي حلي الجملتين المفتوحتين.	طرح أمثلة على طلبة الصف: دخل المدير إلى غرفة الصف وقال: من يلعب في فريق السلة ويلعب في فريق القدم سيخرج في الرحلة ، من سيخرج ؟؟ وفي الحالة الثانية نستبدل بـ (و) أو، ونطرح السؤال نفسه.
	٢) قد لا ينتبه الطالب إلى مجموعة التعويض بعد إيجاد مجموعة الحل للجملة المفتوحة ليقوم بحذف الحلول التي لا تنتمي إلى مجموعة التعويض.	طرح مثال : المطلوب مجموعة الحل لجملة مفتوحة مع إحداث تغييرات على مجموعة التعويض، وملاحظة اختلاف مجموعة الحل باختلاف مجموعة التعويض.
	٣) إيجاد مجموعة حل الجملة المفتوحة ذات متغيرين.	طرح أمثلة على الضرب الديكارتي.
	٤) ترجمة الجملة المفتوحة من عبارة بالكلمات إلى عبارة رمزية.	التدريب على نماذج مختلفة لجمل مفتوحة متنوعة.
	٥) ضعف خبرة الطالب في كثير من المهارات والمفاهيم الرياضية السابقة في كثير من المواضيع، سواءً المتعلقة بالهندسة المستوية، أو الفراغية، والتحليلية، ومختلف أنواع الاقترانات، وخصائص مجموعات الأعداد و.........	إعداد ورقة عمل تحوي أمثلة وتدريبات متعلقة بتطبيق قوانين الهندسة المستوية، والاقترانات وأصفارها، والتحليل.
(٢-٦) و (٢-٧) العبارات الرياضية المسورة ونفي العبارة المسورة:	١) يخطئ الطالب في إثبات صحة العبارة المسورة كلياً؛ بأن يأتي بأمثلة ليدلل على صحتها.	تدريب الطلبة على التمييز بين قيمة الصواب للعبارة المسورة كلياً في الحالتين: الصواب: إثبات بشكل عام، أو الخطأ: يكفي أن يأتي بمثال.
	٢) في نفي العبارة المسورة بنوعيها: فيقوم بنفي الانتماء لمجموعة التعويض: مثال: انفِ العبارة : $\forall$ س $\in$ ح ، س^{٢} > س نفيها: $\exists$ س $\notin$ ح : س^{٢} $\leqslant$ س	التأكيد للطالب: أنّ النفي لا يكون في مجموعة التعويض نهائياً، وإنما في الجملة المفتوحة المرتبطة بها. والاستزادة من الأمثلة.

الوحدة | الدرس	أخطاء وصعوبات متوقعة	حلول مقترحة
(٢-٨) البرهان الرياضي:	١) عدم قدرة الطالب على اختيار الأسلوب الأفضل من أساليب البرهان المختلفة (المباشر، غير المباشر، التناقض، الاستقراء الرياضي) في إثبات صحة فرضية ما.	في الأمثلة والتمارين المتعلقة بالبرهان: يجب الإشارة إلى السبب وراء اختيارنا لأسلوب دون آخر، مع إمكانية استخدام أسلوب المجموعات، وتكليف كل مجموعة باستخدام طريقة من طرق البرهان، ومناقشة المحاولات المختلفة.
	٢) توحيد المقامات للكسور الجبرية، وتجميع الحدود في عملية البرهان بالاستقراء الرياضي.	إعداد ورقة عمل للتدريب على تجميع واختصار وجمع المقادير الجبرية الكسرية وغيرها.
	٣) في إثبات : إذا كان أ عدداً زوجياً ، ب عدداً فردياً، فإنّ أ + ب عدد زوجي. يخطئ الطالب في فرض أ ، ب فيقوم بفرض: أ = ٢ل ، ب = ٢ل + ١ حيث: ل عدد صحيح ، باستخدام الرمز نفسه في الحالتين.	التوضيح للطالب وبالأمثلة العددية أنّ استخدام الرمز نفسه لن يكون البرهان شاملاً عاماً. (عد ماستخدام نفس المتغير عند الفرض لإثبات صحة عبارة رياضية).
	٤) يجد صعوبة في برهان النظريات الهندسية.	ورقة عمل شاملة للنظريات الهندسية الشائعة موضّحة بالرسم.

أولاً: مرحلة الاستعداد

١) أهداف الدرس:

١- أن يتعرف الطالب الجملة المفتوحة.
٢- أن يتعرف مجموعتيّ الحل والتعويض.
٣- أن يجد قيمة صواب جملة مفتوحة بعد التعويض عن قيم المتغيرات.
٤- أن يجد مجموعة حل جملة مفتوحة.
٥- أن يتعرف تكافؤ جملتين مفتوحتين.
٦- أن يحكم على تكافؤ جملتين مفتوحتين.

٢) المهارات:

١- إعطاء أمثلة على جمل مفتوحة من واقع الحياة.
٢- إيجاد مجموعة حل بعض المعادلات والمتباينات في مجموعات تعويض محددة.
٣- الحكم على تكافؤ جمل مفتوحة.

٣) الخبرات السابقة:

- مفاهيم رياضية مثل :المتغير ، العبارة الرياضية ، قيمة الصواب ، قيم الصواب لعبارات رياضية، المجموعة، المجموعة الجزئية، الانتماء ، التعويض.
- تمييز المجموعات العددية : الطبيعية ط ، الصحيحة ص، النسبية ك، الحقيقة ح .
- تعويض قيم عددية في اقتران أكبر عدد صحيح .
- حل معادلات خطية، تربيعية، متباينات خطية، متباينات خطية مركبة، حل معادلات مثلثية.

٤) المفاهيم الخاطئة، والصعوبات المتوقّع أن يواجهها الطلبة:

قد يقع الطلبة في أخطاء، منها:

المفاهيم الخاطئة والصعوبات (المتوقعة)	مقترحات الحلول
عدم الربط بين مجموعة الحل ومجموعة التعويض عند حل جملة مفتوحة.	توزيع بعض البطاقات التي تعرض إجابات لحل جمل مفتوحة، واكتشاف الطلبة الخطأ في الحل وتعديله.
أخطاء عند حل المعادلات والمتباينات.	توزيع ورقة عمل صفية تعالج الأخطاء في حل المعادلات والمتباينات.
عدم معرفة النسب المثلثية للزوايا الأساسية.	استخدام لعبة تعليمية، مثل: لعبة puzzle ، أو turn over game لتحديد قيم النسب المثلثية.

الصعوبات: تتنوع الصعوبات في المجالات المختلفة وفق مسبباتها، مثلاً:

- صعوبات تتعلق بالتحصيل، يمكن الوقوف عند بعضها من خلال الجدول السابق وتتم عملية المعالجة أثناء تنفيذ الدرس.
- صعوبات تعلم، ويمكن التعامل معها من خلال إعطاء المعلم الوقت الكافي للطلبة أثناء تنفيذهم الأنشطة.
- صعوبات حركية : يمكن تنظيم الصعوبات الحركية من خلال دمج الطلبة في المجموعات التعاونية، وانخراطهم في مناقشة وحل الأنشطة.

٥) أصول التدريس:

أ) المحتوى العلمي:

١- تعريف الجملة المفتوحة.
٢- تعريف مجموعتيّ الحل والتعويض.
٣- إيجاد قيمة صواب جملة مفتوحة بعد التعويض عن قيم المتغيرات.
٤- إيجاد مجموعة حل جملة مفتوحة.
٥- تعريف تكافؤ جملتين مفتوحتين.
٦- الحكم على تكافؤ جملتين مفتوحتين.

ب) استراتيجيات التدريس:

- تعلم تعاوني في مجموعات.
- الحوار والمناقشة.

٦) آليّات التقويم:

١- التقويم التقليدي:
الملاحظة المباشرة عند تنفيذ الطلبة الأنشطة ، وحلهم الأسئلة والتمارين، ومتابعة المعلم تلك الحلول، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
٢- التقويم البديل (الواقعي): إعداد قائمة رصد لتقييم أداء الطلبة أثناء تنفيذ مهام تعاونية.

ثانياً: أثناء تنفيذ الدرس

١) التهيئة

- إعلام الطلبة بأهداف الدرس.
- تنفيذ نشاط ١ من الكتاب المدرسي، أو النشاط الكاشف الآتي بشكل فردي، ثم مناقشة الحل على السبورة:
- توزيع الطلبة على مجموعات تعاونية وتكليفهم حل النشاط الآتي:

اقرأ النشاط الآتي :

جاء ثلاثة إلى جمعية خيرية ليتصدقوا، فطلب المدير إلى الأول أن يضع بقدر ما في الصندوق من النقود، ثم ذهب المدير وأخذ ٤٠ درهماً ثم طلب إلى الثاني أن يضع بقدر ما في الصندوق من النقود، ثم ذهب وأخذ ٤٠ درهماً وأخيراً طلب إلى الثالث ما طلب من رفيقيْه، وأحصى الصندوق فكان فيه ٤٠ درهماً ، فكم كان في الصندوق قبل تصدُّق الثلاثة ؟

أكوّن جملة مفتوحة للمسألة ، ثم أحلُّها.

نفرض أنّ ما في الصندوق يساوي س، فيكون في الصندوق بعدما تصدق الأول هو ٢س -٤٠

ما في الصندوق بعدما تصدّق الثاني = ...

ما في الصندوق بعدما تصدّق الثالث = ...

المعادلة الممثلة للمسألة هي: ....

حلها هو: ....

نشاط :أجد مجموعة الحل للجمل المفتوحة الآتية:

١- س^{٢} + ١ = ٠ ، س $\in$ ص

٢- ١+ جا ٢س =٢ ، س $\in$ [٠ ، π]

٣- (س-١)^{٤}=٨١

٢) العرض

١- أنشطة لتحقيق أهداف الدرس:

- مناقشة مثال (١) صفحة ٦٧ على السبورة، ومن خلال الحوار والمناقشة استدراج إجابات الطلبة لتحديد قيم الصواب.
- تكليف الطلبة حل نشاط٢، نشاط ٣ صفحة ٦٧ بشكل فردي، ثم حله على السبورة بمساعدة الطلبة وعلاج الأخطاء إن وُجدت.
- تقسيم الطلبة على شكل مجموعات تعاونية، وتوزيع بطاقات لأسئلة متنوعة حول الجمل المفتوحة، وتكليف الطلبة بحث تكافؤ الجمل المفتوحة المعطاة.
- تكليف الطلبة حل السؤال الأول كتدريب صفي، ومناقشة الحل .

٣) الإغلاق والتقويم

١- التقويم الختامي من خلال مجموعة من الأسئلة الموجهة على شكل لعبة، مثل: صندوق يختار الطالب منه ورقة ويجيب عن السؤال المعروض في الورقة أمام جميع الطلبة، وهكذا حتى تتحقق التغذية الراجعة لدى المعلم حول مدى تحقيق أهداف الدرس.

٢- تكليف الطلبة حل بقية الأسئلة كواجب بيتي، ومعالجته في الحصة القادمة.

أسئلة إثرائيّة على وحدة المنطق.

س١: ما نفي العبارة: $\forall$ س$\in$**ص**، E ص$\in$**ص**: **ص** = ٢س ؟

س٢: ما نفي العبارة: E (س، ص)$\in$ **ع** × **ع**: س - ص = ٤ و س $>$ ٣؟

س٣: ما نفي العبارة: $\forall$ س$\in$] $-\infty$، ٠] إذا كان س$\in$**ص** فإن س^{٢}$\in$**ص** ؟

س٤: انفِ كلاً من العبارات الآتية:

١- (٤ +٥ = ٩) $\longleftarrow$ (٣ $\leqslant$ ٥ $>$ ٧)

٢- أنا أفكر إذا وفقط إذا أنا موجود.

٣- ٩ عدد أولي فقط إذن: ٥٢ يقبل القسمة على ٥.

٤- $\forall$ س$\in$**ع** ، -١ $\leqslant$ **جا**س $\leqslant$ ١.

٥- بعض كتب اللغة العربية مطالعة أو قواعد.

٦- $\forall$ س، E ص $>$ ٠ : س $\leqslant$ ص.

٧- ($\forall$ س، **هـ**(س)) $\wedge$ (E س: **ن**(س))

الحل: ١- ٤ + ٥ = ٩ و ٥ $\leqslant$ ٧ أو ٥ $>$ ٣

٢- أنا أفكر ولست موجوداً أو أنا موجود ولا أفكر.

٣- ٩ عدد أولي و ٥٢ لا يتقبل القسمة على ٥

٤- E س $\in$**ع** : **جا**س $\notin$ [-١، ١]

٥- جميع كتب اللغة العربية ليست مطالعة وليست قواعد.

٦- E س ، $\forall$ ص $>$ ٠ ، س $>$ ص.

٧- (E س : $\sim$ **هـ**(س)) $\vee$ ($\forall$ س، $\sim$ **ن**(س))

س٥: برهن كلاً من العبارات الآتية:

١- إذا وُجد عدد صحيح بين العددين الصحيحين: **ن** + ٣ ، **ن** + ٤ ، فإنه يوجد عدد صحيح بين العددين: ٣، ٤.

٢- لا يمكن رسم مثلث يكون فيه مجموع قياسيّ أيّ زاويتين أقل من ١٢٠°.

٣- إذا كان أ ، ب عددين فرديين متتالين فإنّ حاصل ضربهما عددٌ فرديّ.

٤- إذا كان س + ٨ عدداً فردياً فإنّ س عددٌ فردي.

الحل: إذا كان س + ٨ عدداً فردياً فإن س عدد فردي
نستخدم البرهان غير المباشر (~ن ⟵ ~ف)
نفرض أن س عدد زوجي
س = ٢ك
س + ٨ = ٢ك + ٨
= ٢ (ك + ٤)
= ٢م

الحلول:

- ∀ س∈ص، E ص∈ص: **ص** = ٢س
  الحل : E س∈ص: ∀ ص∈ص، **ص** ≠ ٢س

- E (س، **ص**)∈ ع × ع: س - **ص** = ٤ و س > ٣
  الحل : ∀(س، **ص**)∈ع×ع، (س - **ص** ≠ ٤ أو س ⩽ ٣)

- ∀ س∈] $^-\infty$، ٠[، س∈**ص** فإن س^{٢}∈**ص**
  الحل: E س∈] $^-\infty$، ٠[: س∈**ص** وس^{٢}∉ **ص**

أسئلة إثرائيّة على درس طرق البرهان

س١: أثبت أنّ: إذا كان باقي قسمة أ على ٧ يساوي ٥، فإنّ باقي قسمة أ^{٢} على ٧ يساوي ٤، حيث أ∈**ص**$^{+}$.

س٢: أثبت أنّ: إذا كان أ،ب ∈ص فإنّ: أ^{٢}- ٤ب ≠ ٢.

س٣: أثبت أنّ: إذا كان س عدداً زوجياً فإنّ (س^{٢}+ س) عددٌ زوجي.

س٤: باستخدام الاستقراء الرياضي أثبت أنّ:

$$٢ + ٦ + ١٢ + ... + ن (ن+١) = \frac{(ن^{٢}+ن) (٢ن +٤)}{٦}$$

الدرس	معرفة	التكرار	تطبيق	التكرار	استدلال	التكرار
٣-١ حل نظام مكوّن من ثلاث معادلات خطية	أن يذكر الطالب خطوات حل نظام من ثلاث معادلات خطية.	١	أن يقرر الطالب صحة إجابة ما، ويبرر ذلك.	١	أن يوظف الطالب حل معادلات خطية بمتغير واحد في حل مسائل عملية.	١
			أن يحل الطالب نظاماً مكوّناً من معادلتين خطيتين.	٢	أن يوظف الطالب حل نظام من معادلات خطية بمتغيرين في حل مسائل حياتية.	١
			أن يحل الطالب نظاماً مكوناً من ثلاث معادلات خطية.	١	أن يوظف الطالب حل نظام من ثلاث معادلات خطية في حل مسائل حياتية.	٥
عدد الأهداف		١		٤		٧
٣-٢ حل نظام من معادلتين في متغيرين إحداهما خطية والأخرى تربيعية	أن يشرح الطالب خطوات حل نظام من معادلتين إحداهما خطية، والأخرى تربيعية.	١	أن يجد الطالب نقطة تقاطع خط مستقيم مع منحنى علاقة تربيعية.	٤	أن يوظف الطالب حل نظام من معادلتين إحداهما خطية، والأخرى تربيعية في حل مسائل كلامية	٥
			أن يحل الطالب نظاماً من معادلتين إحداهما خطية، والأخرى تربيعية.	١		
عدد الأهداف		١		٥		٥
٣-٣ حل نظام مكون من معادلتين تربيعيتين في متغيرين	أن يوضّح الطالب خطوات حل نظام من معادلتين تربيعيتين في متغيرين.	١	أن يحل الطالب نظاماً من معادلتين تربيعيتين في متغيرين.	٢	أن يوظف الطالب حل نظام من معادلتين تربيعيتين في متغيرين في حلّ مسائل كلامية.	٦
عدد الأهداف		١		٢		٦

الدرس	معرفة	التكرار	تطبيق	التكرار	استدلال	التكرار
٣-٤ حل معادلة أُسيّة ولوغاريتمية	أن يتعرف الطالب المعادلة الأسيّة.	١	أن يكتب الطالب الكميات الصغيرة باستخدام الأسس.	١	أن يوظف الطالب قوانين الأسس والمعادلات في حل معادلة أسيّة تحتاج مهارات عليا.	٢
	أن يتعرف الطالب المعادلة اللوغاريتمية.	١	أن يحل الطالب المعادلة الأسيّة.	٣	أن يوظف الطالب قوانين الأسس والمعادلات في حل مسائل حياتية.	٢
			أن يحل الطالب المعادلة اللوغاريتمية.	٤	أن يوظف الطالب قوانين اللوغاريتمات، والمعادلة اللوغاريتمية في حل مسائل تحتاج مهارات عليا.	٤
عدد الأهداف		٢		٨		٨
٣-٥ حل أنظمة المتباينات الخطية بمتغيرين	أن يتعرف الطالب نظام متباينات خطية بمتغيرين.	١	أن يحوّل الطالب المسألة الكلامية إلى نظام من متباينتين بمتغيرين.	٢	أن يوظف الطالب حل نظام من متباينات خطية بمتغيرين بيانياً في تمثيل مجموعة الحل بيانياً لمسألة حياتية.	٢
	أن يتعرف الطالب خطوات حل من متباينات خطية بمتغيرين.	١	أن يحدد الطالب مجموعة حل نظام من متباينات خطية بمتغيرين بيانياً.	٣	أن يحدد الطالب نظام المتباينات الممثل لمنطقة حل معطاة.	٢
عدد الأهداف		٢		٥		٤
٣-٦ حل معادلات تتضمن القيمة المطلقة	أن يعرّف الطالب مفهوم القيمة المطلقة.	١	أن يطبق القيمة المطلقة في تحويل مسائل كلامية إلى معادلات قيمة مطلقة.	٢	أن يوظف الطالب القيمة المطلقة لاقتران خطي في حل معادلات ذات مهارات عليا.	٣
	أن يذكر الطالب خصائص القيمة المطلقة.	١	أن يحلّ الطالب معادلات تشمل القيمة المطلقة لاقتران خطيّ.	٤	أن يوظف حل معادلات تشمل القيمة المطلقة في حلّ مسائل حياتية.	١
عدد الأهداف		٢		٦		٤

الدرس	معرفة	التكرار	تطبيق	التكرار	استدلال	التكرار
٣-٧ حل متباينات تتضمن القيمة المطلقة	أن يذكر الطالب خاصية تحويل القيمة المطلقة الى متباينة. |س| ⩾ أ ، |س| ⩽ أ	١	أن يحل الطالب متباينات تشمل القيمة المطلقة لاقتران خطي.	٣	أن يوظف الطالب حل متباينات تشمل القيمة المطلقة لاقتران خطي في حل متباينات ذات مهارات عليا.	١
			أن يمثل الطالب مجموعة حل متباينة تشمل القيمة المطلقة لاقتران خطي بيانياً.	٣	أن يوظف المهارات التي تعلمها في الوحدة لإعداد أفكار ريادية.	١
عدد الأهداف		١		٦		٢

الوحدة | الدرس	أخطاء وصعوبات متوقعة	حلول مقترحة
(٣-١) حل نظام مكون من ثلاث معادلات خطية	ترجمة المسألة العملية إلى نظام من المعادلات.	توضيح إستراتيجية عامة للتعامل مع مثل هذه المسائل: ١- قراءة المسألة ٢- تحديد معطياتها والمطلوب. ٣- الرسم التوضيحي ٤- تحديد الثوابت والمتغيرات. ٥- وبناءً عليه يتم وضع المعادلات التي تعبر عن المسألة.
	عدم القدرة على ترجمة المصطلحات: مثل: لا تزيد عن، على الأقل، لا تقل عن ، الفرق بين ضعف العدد وضعفي العدد،	إعداد قائمة كاملة بهذه المصطلحات ومعانيها على شكل ورقة عمل ومناقشتها، وطرح أمثلة سهلة على كل حالة، وتوزيعها على الطلبة.
	قد يجد صعوبة في اختيار المتغير الذي يفضل حذفه، أو الذي يجعله موضوع القانون.	تدريب الطالب على كيفية اختيار المتغير الأسهل حذفه.
	يواجه صعوبة في رسم المجسمات، أو بعض الأشكال الهندسية وبعض أنواع المنحنيات.	يمكن العمل على برنامج جيوجبرا، واستخدام مجسمات جاهزة.
(٣-٢) و (٣-٣) حل نظام من معادلتين إحداهما خطية والأخرى تربيعية، وحل نظام من معادلتين تربيعيتين:	عندما يكون للنظام أكثر من حل قد يخطئ الطالب في رفض بعضها وقبول الآخر.	تدريب الطالب على الانتباه: يعتمد رفض أو قبول الحل على طبيعة المسألة، وعلى طبيعة مجموعة التعويض.
	إيجاد معادلة الخط المستقيم بأشكالها المتنوعة حسب ما يتوفر من معطيات.	تذكير الطالب بالحالات المختلفة لإيجاد معادلة الخط المستقيم التي سبق له تعلمها في الصف التاسع.
	عدم معرفته المسبقة عن القطوع المخروطية المختلفة، مثل: القطع المكافئ، والقطع الناقص، والقطع الزائد، ومعادلة كل قطع، وشكل منحناه البياني.	إعداد ورقة عمل يتم من خلالها التنويه إلى مثل هذه المسميات، وسبب التسمية، ومعادلة كلّ منها وكيفية التمييز بينها.
	قلة خبرته السابقة عن مفهوم المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بشروط محددة.	وضْع تعريف واضح للمحل الهندسي مع طرح أمثلة شائعة مثل الدائرة: نقطة تتحرك في المستوى بحيث تبقى على بعد ثابت بينها وبين نقطة ثابتة تُسمّى مركز الدائرة.

<table>
<tr><th>الوحدة | الدرس</th><th>أخطاء وصعوبات متوقعة</th><th>حلول مقترحة</th></tr>
<tr><td rowspan="3">(٣-٤) حل معادلات أسية ولوغاريتمية:</td><td>التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية وبالعكس .</td><td>مراجعة تعريف اللوغاريتم وعلاقته بالأسس، مع طرح بعض الأمثلة العددية البسيطة.</td></tr>
<tr><td>في المعادلة اللوغارتمية يتجاهل الطالب رفض القيم التي تتناقض مع تعريف المعادلة اللوغاريتمية.</td><td>تعويد الطالب على التحقق من الحل بالتعويض، ورفض القيم التي تتناقض مع تعريف اللوغاريتم.</td></tr>
<tr><td>تحويل المسائل المتعلقة بخصم أو زيادة نسبة مئوية على سعر سلعة ما إلى معادلة أسية أو لوغاريتمية.</td><td>استخدام أسلوب الاستنتاج بالنمط من خلال تعويض قيم متتالية ن=١، ثم ن=٢ ، وهكذا........، ثم استنتاج المعادلة الأسية، أو اللوغاريتمية المناسبة للمسألة .</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(٣-٥) حل المتباينات الخطية في متغيرين:</td><td>يخطئ الطالب في تفسير المصطلحات : لا تزيد عن ، لا تقل عن ، على الأقل ، على الأكثر ، يزيد عن ، يقل عن ، بين ---و -- ، يتراوح بين --- و--- ، من--- إلى----........</td><td>إعداد قائمة كاملة بهذه المصطلحات ومعانيها على شكل ورقة عمل ومناقشتها، وطرح أمثلة سهلة لكل حالة وتوزيعها على الطلبة، ثم اختبارهم فيها.</td></tr>
<tr><td>تفسير المتباينات المركبة وكيفية فصلها ليتمكن من تمثيلها بيانياً.</td><td>بالأمثلة البسيطة يمكن تدريب الطالب على التمييز بين المتباينات المركبة بأداة الربط (و)، والمركبة بأداة الربط (أو)</td></tr>
<tr><td>تمثيل منطقة الحل يتطلب دقة متناهية في الرسم البياني.</td><td>استخدام الألوان في الرسم وعلى الطالب تمييز تقاطع الألوان الذي يمثل منطقة الحل.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">(٣-٦) و (٣-٧) حل معادلات ومتباينات تتضمن القيم المطلقة:</td><td>قد يخطئ الطالب في العلاقة بين:
أ) | س - ص | ، | ص - س |
ب) | س+ ص | ، | س | + | ص |</td><td>بالأمثلة العددية يمكن للطالب استنتاج العلاقات المذكورة:
أ) | س - ص | = | ص - س |
ب) | س + ص | ⩽ | س | + | ص |</td></tr>
<tr><td>حل معادلة أو متباينة تتضمن مجموع، أو فرق مقدارين تظهر فيهما القيمة المطلقة.</td><td>توضيح إستراتيجية واضحة الخطوات لحل معادلة أو متباينة تتضمن مجموع أو فرق بين مقدارين تظهر فيها القيمة المطلقة.</td></tr>
<tr><td>تفسير المسائل العملية إلى نظام من المعادلات، أو المتباينات التي تتضمن القيمة المطلقة.</td><td>العلاج مكرر في بنود سابقة مشابهة.</td></tr>
<tr><td>ضعف خبرة الطالب في خصائص القيمة المطلقة؛ لذا يواجه صعوبة في حل المعادلات والمتباينات التي تتضمن القيمة المطلقة.</td><td>مراجعة خصائص القيمة المطلقة بأشكالها، مع طرح أمثلة على كل خاصية.</td></tr>
</table>

نموذج تحضير الدرس (٣-١) حل نظام مكون من ثلاث معادلات خطية

عدد الحصص: ٣

أولاً: مرحلة الاستعداد

١) أهداف الدرس:

١- أن يتعرف الطالب نظاماً مكوّناً من ثلاث معادلات خطية.
٢- أن يحل الطالب نظاماً مكوّناً من معادلتين خطيتين.
٣- أن يحل الطالب نظاماً مكوّناً من ثلاث معادلات خطية.
٤- أن يحوّل الطالب مسأله حياتية إلى نظام ثلاث معادلات خطية.

٢) المهارات المتوقع أن يمتلكها الطلبة بعد الدرس:

سوف يمتلك الطالب المهارة الكافية لما يأتي:
١- حل نظام مكوّن من معادلتين خطيتين.
٢- حل نظام مكوّن من ثلاث معادلات خطية.
٣- تحويل مسأله حياتية إلى نظام معادلتين خطيتين، وحلها.
٤- تحويل مسألة حياتية إلى نظام ثلاث معادلات خطية وحلها.
٥- مناقشة حلٍّ ما، والحكم على صحته، أو خطئه.

٣) الخبرات السابقة:

- مفهوم المعادلة.
- عدد المتغيرات في المعادلة.
- حل معادلة خطية بمتغير واحد.
- طريقة الحذف والتعويض في حل نظام من معادلتين خطيتين.

٤) المفاهيم الخاطئة، والصعوبات المتوقّع أن يواجهها الطلبة:

قد يقع الطالب في أخطاء، منها :

المفاهيم الخاطئة والصعوبات (المتوقعة)	مقترحات الحلول
يحذف المتغير س مثلاّ من معادلتين ، ويحذف متغيراً آخر ص من معادلتين أخريْن ، وبالتالي يجد صعوبة في الحل.	وجّه انتباه الطلبة إلى ضرورة حذف المتغير نفسه في الحالتين؛ بهدف الحصول على معادلتين للمتغيرين نفسهما، من أجل حذف أحدهم للوصول إلى معادلة بمتغير واحد ويكون ذلك من خلال عرض مجموعة من المعادلات تحتوي على متغيرات عدة، بحيث تحتوي كل معادلة على متغيرين فقط، والطلب إلى الطلاب، وبشكل فردي تحديد أي من المعادلات. يمكن أن تُستخدم كنظام مكوّن من معادلتين يمكن حله وإيجاد قيمة المتغيرين.
عند حذف أحد المتغيرات يضرب أحد طرفي المعادلة في عدد معين، وعدم ضرب الطرف الآخر.	وجه انتباه الطلبة إلى ضرورة ضرب الطرفين في العدد نفسه، ويكون ذلك من خلال توزيع بطاقات على الطلاب تحوي حلولاً عدة، والطلب إليهم تحديد الصواب والخطأ في الحل.

الصعوبات: تتنوع الصعوبات في المجالات المختلفة وفق مسبباتها، مثلاً:

- صعوبات تتعلق بالتحصيل، يمكن الوقوف عند بعضها من خلال الجدول السابق، وتتم عملية المعالجة أثناء تنفيذ الدرس.
- صعوبات تعلم، ويمكن التعامل معها من خلال إعطاء المعلم الوقت الكافي للطلبة أثناء تنفيذهم الأنشطة، وتفعيل ذوي الحركة الزائدة في تدوين أنظمة المعادلات على بطاقات، وإلصاقها على السبورة.
- صعوبات حركية أثناء تنفيذ النشاط، وذلك من خلال كتابة حل النشاط على ورق A3، ثم التوجه إلى السبورة وإلصاق الورق عليها لعرض الحل ومناقشته مع باقي المجموعات، ويمكن التعامل معها من خلال إعطاء الفرصة للطلبة بالإجابة عن الأسئلة المطروحة أثناء المناقشة.

٥) أصول التدريس:

أ) المحتوى العلمي:

١- حل نظام مكون من معادلتين خطيتين.
٢- حل نظام مكون من ثلاث معادلات خطية.
٣- تحويل مساله حياتية إلى نظام معادلتين خطيتين.
٤- تحويل مسألة حياتية الى نظام ثلاث معادلات خطية.

ب) استراتيجيات التدريس:

استخدام طريقة أو طريقتين من طرق التعلم النشط، مثل:

١- (فكر ، زاوج ، شارك على مستوى مجموعتك وعلى مستوى الصف) نشاط (١) من كتاب الطالب.
٢- العمل الفردي حل التمارين من كتاب الطالب.
٣- لعبة الكلمة الضائعة (طريقة حل المعادلة الخطية ونظام من معادلتين خطيتين) نشاط مقترح.
٤- استخدام مصدر تعليمي، مثل: فيديو يوضح العالم الذي أسهم في حل المعادلات.
٥- العمل التعاوني (مجموعات) نشاط (٢) ، نشاط (٣) ، نشاط (٤) من كتاب الطالب.
٦- المناقشة وطرح الأسئلة (بشكل عام قبل كل نشاط لإثارة تفكير الطلبة، وبعد كل نشاط من خلال عرض الطلبة نتائج عملهم).
٧- الاستنتاج (مفهوم نظام مكون من ثلاث معادلات خطية وطريقة حله) ، وذلك من خلال عرض البوربوينت التفاعلي.
٨- استخدام استراتيجيات التعلم البديل، مثل سلالم التقدير Robric.

٦) آليّات التقويم:

١- الملاحظة وتصحيح إجابات الطلبة (نشاط ١ ونشاط ٢، ونشاط ٣، ونشاط ٤)، وذلك من خلال قائمة الشطب.
٢- مراجعة الذات، وذلك من خلال يوميات الطالب، وتشجيع الطلبة على تدوين ما تعلموه في الدرس، وتدوين الأمور التي ما زالت غامضة بالنسبة إليهم.
٣- تكليف الطلبة حل التمارين ١-٢ الواردة في كتاب الطالب خلال الحصة، مع متابعة الحل (جزء من التقويم التكويني)
٤- الإجابة عن الأسئلة المطروحة خلال فعاليات الحصة.

ثانياً: أثناء تنفيذ الدرس

١) التهيئة

- تفقد حضور وغياب الطلبة، وتذكيرهم باليوم والتاريخ، وموضوع الحصة.
- مناقشة صورة الوحدة، وطرح أسئلة عليها، وتلقّي استجابات الطلبة دون إصدار حكم على الإجابات.
- مراجعة الطلبة في مفهوم المعادلة والمعادلة الخطية.
- تقسيم الطلبة إلى مجموعات (٣-٤ طلاب).

- مراجعة الطلبة في طريقة حل المعادلة الخطية بمتغير واحد، وذلك من خلال لعبة الكلمة الضائعة حيث يتم توزيعها على المجموعات، ويتم حلها من قبل الطلاب داخل المجموعة بحيث تقوم كل مجموعة بكتابة الكلمة الضائعة، وهي عبارة عن اسم العالم الذي كان له الفضل في حل المعادلات على بطاقة، وإلصاقها على السبورة .
- عرض فيديو يوضّح من خلاله عالم الرياضيات الذي كان له الفضل في حل المعادلات.

٢) العرض

- قراءة وتفكّر: نشاط (١) الوارد في كتاب الطالب فردياً لمدة دقيقة، ومن ثم توجيه الأسئلة للطلبة:

ما الالفاظ التي تعّبر عن المتغيرات الموجودة في النص؟ ما معنى ١٠٪ من الراتب؟ ما معنى ٣٪ من الراتب؟ اكتب معادلة مناسبة للنص، أوجد مجموعة حل المعادلة، أيهما أصح حل كمال، أم حل سامر؟

- تقسيم الطلبة إلى مجموعتين: الأولى تُكلَّف بالبحث عن الحل الصحيح، والثانية تُكلَّف بالبحث عن الحل الخطأ، ثم كتابة الأسباب والتوضيحات التي دعتهم إلى اختيار الحل الصحيح أو الخطأ . ثم تقوم كلّ مجموعة بكتابة اسم الطالب الذي اختارته على ورق A٣ ، وبيان الأسباب وإلصاقها على السبورة، ثم إدارة مناقشة بين المجموعتين.
- مراجعة الطلبة في مفهوم نظام معادلتين خطيتين بمتغيرين، وطريقة حلهم وذلك من خلال عرض بوربوينت تفاعلي، حيث يقوم الطلبة بالإجابة عن الأسئلة المطروحة داخل البوربوينت.
- تنفيذ نشاط (٢) الوارد في كتاب الطالب من قبل الطلبة بشكل تعاوني ضمن مجموعات رباعية، حيث تقوم كل مجموعة بعد مناقشة النشاط بتكوين نظام المعادلات، وكتابته على بطاقة، ومن ثم عرض العمل من خلال رفع البطاقة لتقييم عمل المجموعة، وتقديم المعلم التغذية الراجعة، ومن ثم يقوم الطلاب بحل نظام المعادلات داخل المجموعات، مع متابعة وملاحظة المعلم الحل، وإظهار الصح والخطأ، ومناقشة الصعوبات التي قد تواجههم وفي النهاية يقوم الطلبة بإلصاق البطاقة التي تحوي الحل على السبورة.
- تكليف الطلبة بشكل فردي حل السؤال (١) ، (٢) ص٩٢ في دفاترهم، وملاحظة الحل وتصحيحه، ومناقشة الصعوبات التي قد تواجه بعضهم.
- مناقشة الطلبة ومساعدتهم لاستنتاج مفهوم نظام ثلاث معادلات خطية، وآلية الحل، وذلك من خلال عرض بوربوينت تفاعلي مع استخدام السبورة والطباشير الملونة.
- تنفيذ نشاط (٣) الوارد في كتاب الطالب من قبل الطلبة بشكل تعاوني ضمن مجموعات رباعية ،حيث تقوم كل مجموعة بعد مناقشة النشاط بتكوين نظام المعادلات وكتابته على بطاقة، ومن ثم عرض العمل من خلال رفع البطاقة لتقييم عمل المجموعة، وتقديم المعلم التغذية الراجعة ، ومن ثم يقوم الطلاب بحل نظام المعادلات داخل المجموعات مع متابعة وملاحظة المعلم الحل، وإظهار الصح والخطأ، ومناقشة الصعوبات التي قد تواجههم مع التركيز على عملية تحويل المعلومات اللفظية إلى رموز ومعادلات لإكسابهم المهارات المطلوبة، وفي النهاية يقوم الطلبة بإلصاق البطاقة التي تحوي الحل على السبورة.
- تنفيذ نشاط (٤) الوارد في كتاب الطالب من قبل الطلبة بشكل تعاوني ضمن مجموعات رباعية، وكتابة الحل على بطاقة وإلصاقها على السبورة.
- تكليف الطلبة بشكل فردي حل الأسئلة: (٣)، (٤)، (٥) ص٩٢ ، وملاحظة الحل ومناقشة الصعوبات التي قد تواجه بعضهم، مع تصحيح الدفاتر.
- كتابة بعض المفاهيم والمصطلحات التي وردت في الدرس على شكل كلمات متفرقة، ثم تكليف الطلبة كتابة الكلمات، وماذا تعني كل كلمة، وما الرابط بينها.

٣) الإغلاق والتقويم

١- تكليف الطلبة حل ما تبقى من التمارين الواردة في كتاب الطالب، مع متابعة الحلول وتصحيحها، وتقديم التغذية الراجعة المناسبة، ومن ثم تثبيت الإجابات الصحيحة على السبورة.

٢- تكليف الطلبة كتابة مسائل حياتية على نظام مكون من ثلاث معادلات خطية.

ملحوظة: هذه نماذج يمكن للمعلم أن يستبدل بها أي أنشطة أخرى يراها مناسبة تتلاءم وبيئة الطلبة. مع مراعاة استمرارية التقويم بجميع أنواعه على مدار الحصص الثلاث.

الوحدة الثالثة (المعادلات والمتباينات)

س١: أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات الآتية:

١- $\text{لو}_{\sqrt{\text{م}}}\,٣ = \text{لو}_{\text{م}}\,\text{س}$

٢- $١٠^{\text{س}} - ٥^{\text{س}-١} \times ٢^{\text{س}-٢} = ٩٥٠$

٣- $٥^{\text{س}-١} = \frac{٦^{\text{س}}}{٣٦}$

س٢: أوجد مجموعة حل الأنظمة الآتية:

١- $٢^{\text{س}} + ٢^{\text{ص}} = ٦$

$٤^{\text{س}+١} - ٤^{\text{ص}+١} = -٤٨$

٢- $٣^{\text{س}} \times ٥^{\text{ص}} = ٧٥$

$٣^{\text{ص}} \times ٥^{\text{س}} = ٤٥$

٣- $٣^{\text{س}} \times ٣^{\text{ص}} = ٢٧$

$٣^{\text{س}} + ٣^{\text{ص}} = ١٢$

٤- $٤^{\text{س}+\text{ص}} = ١٢٨$

$٥^{\text{س}-٢\text{ص}-٢} = ١$

س٣: عددان الفرق بينهما ٥، ومجموع مقلوبيهما يساوي $\frac{٩}{١٤}$، فما العددان؟

س٤: قطعة ارض مستطيلة الشكل مساحتها ١٨م^{٢}، وطول قطرها $٣\sqrt{٥}$ ، فما بُعداها؟

س٥: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١- إذا كان $٢^{\text{س}} = ٤^{٢٠} + ٤^{٢٠}$ فإنّ قيمة س هي:

أ) ٤١ ب) ٨٠ جـ) ٤٠ د) ٨١

٢- إذا كانت س + ص + ع = ٢٠ ، وكانت ٣ س + ٣ ص + ٥ ع = ٩٠ فإن قيمة ع :

أ) ١٥ ب) ١٨ جـ) ١٤ د) لا يمكن إيجادها

٣- يوجد للنظام: س ص = ١، س + ص = ٢ :

أ) حل حقيقي واحد فقط. ب) حلان حقيقيان.

جـ) أربعة حلول حقيقية. د) ثلاثة حلول حقيقية.

٤- حل النظام: ٥س + ٤ص − ع = ٠، ١٠ ص − ٣ع = ١١، ع = ٣ هو:

أ) س = −١، ص = ٢، ع = ٣ ب) س = ١، ص = ٢، ع = ٣

جـ) س = ٥، ص = −٢، ع = ٣ د) س = ٢، ص = ٥، ع = ٣

٥- النقطة (١، -٢) تصلح أن تكون حلاً لأحد الأنظمة الآتية:

أ) س^{٢} + ص^{٢} = ٥ ، س^{٢} − ص^{٢} = ٣

ب) س + ص = −١ ، س^{٢} + ص^{٢} = ٣

جـ) س^{٢} + ص^{٢} = ٥ ، س + ص = −١

د) س^{٢} − ص^{٢} = −٣ ، س − ص = −١

حلول أسئلة إثرائية للوحدة الثالثة (المعادلات والمتباينات)

س١: أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات الآتية:

١- $لو_{\sqrt{م}}٣ = لو_{م}س$

الحل: $لو_{\sqrt{م}}٣ = ص \Longleftarrow (\sqrt{م})^{ص} = ٣$

$لو_{م}س = ص \Longleftarrow (م)^{ص} = س$

س = ٩

٢- $١٠^{س} − ٥^{س-١} × ٢^{س-٢} = ٩٥٠$

الحل: $٥^{س} × ٢^{س} − ٥^{س} × ٥^{-١} × ٢^{س} × ٢^{-٢} = ٩٥٠$

$٥^{س} × ٢^{س} (١ − \frac{١}{٥} × \frac{١}{٤}) = ٩٥٠$

$٥^{س} × ٢^{س} = ٩٥٠ × \frac{٢٠}{١٩}$

$١٠^{س} = ١٠٠٠ = ١٠^{س} \Longleftarrow س = ٣$

٣- $٥^{س-١} = \frac{٦^{س}}{٣٦}$

الحل: $لو_{هـ}٥^{س-١} = لو_{هـ}٦^{س-٢}$

(س−١) لو$_{هـ}$ ٥ = (س−٢) لو$_{هـ}$ ٦

س لو$_{هـ}$ ٥ − س لو$_{هـ}$ ٦ = لو$_{هـ}$ ٥ −٢ لو$_{هـ}$ ٦

$س = \frac{لو_{هـ}٥ − ٢ لو_{هـ}٦}{لو_{هـ}٥ − لو_{هـ}٦}$

س٢: أوجد مجموعة حل الأنظمة الآتية:

١- $٢^{س} + ٢^{ص} = ٦$

$٤^{س+١} - ٤^{ص+١} = -٤٨$

الحل: نفرض $٢^{س} = ع$ ، $٢^{ص} = ك$

$ع + ك = ٦ \Leftarrow ع = ٦ - ك$ .... (١)

$٤ \times ٢^{٢س} - ٤ \times ٢^{٢ص} = -٤٨ \Leftarrow ٤ع^{٢} - ٤ك^{٢} = -٤٨$

$٤ع^{٢} - ٤ك^{٢} = -٤٨$

$٤(٦ - ك)^{٢} - ٤ك^{٢} = -٤٨$

$٤(٣٦ - ١٢ك + ك^{٢}) - ٤ك^{٢} = -٤٨$

$١٤٤ - ٤٨ك + ٤ك^{٢} - ٤ك^{٢} = -٤٨$

$١٤٤ + ٤٨ = ٤٨ك$

$١٩٢ = ٤٨ك \Leftarrow ٤ = ك$

$٤ = ك$

$٢^{٢} = ٢^{ص}$

لكن $ع = ٦ - ك$

$= ٦ - ٤$ ع $= ٢$

لكن $ع = ٢^{س}$

$٢^{١} = ٢^{س} \Leftarrow س = ١$

٢- $٣^{س} \times ٥^{ص} = ٧٥$

$٣^{ص} \times ٥^{س} = ٤٥$

الحل: $لـو٣^{س} + لـو٥^{ص} = لـو٧٥$

س لـو٣ + ص لـو٥ = لـو ٢٥ × ٣

س لـو٣ + ص لـو٥ = ٢ لـو ٥ + لـو٣

(س−١) لـو٣ + (ص−٢) لـو٥ = ٠

$لـو٣^{ص} + لـو٥^{س} = لـو٤٥$

ص لـو٣ + س لـو٥ = لـو٥×٩

(ص−٢) لـو٣ + (س−١) لـو٥ = ٠

(س−١) لـو٣ × لـو٥ + (ص−٢) $(لـو٥)^{٢} = ٠$

(ص−٢) $(لـو٣)^{٢}$ + (س−١) لـو٣ × لـو٥ = ٠

(ص−٢) $((لـو٥)^{٢} - (لـو٣)^{٢}) = ٠$

ص = ٢ ، س = ١

٣- $٣^{س} \times ٣^{ص} = ٢٧$

$٣^{س} + ٣^{ص} = ١٢$

الحل: نفرض أنّ: ع = $٣^{س}$ ، ك = $٣^{ص}$

ع × ك = ٢٧

ع + ك = ١٢

$ع + \frac{٢٧}{ع} = ١٢$

$ع^{٢} - ١٢ع + ٢٧ = ٠$

(ع − ٣) (ع − ٩) = ٠

ع = ٣ ، ع = ٩

ك = ٩ ، ك = ٣

س = ١ ، ص = ١

س = ٢ ، ص = ٢

٤- $٤^{س+ص} = ١٢٨$

$٥^{س-٢ص-٢} = ١$

الحل: $٤^{س+ص} = ١٢٨$

$٥^{س-٢ص-٢} = ١ \Longleftarrow$ س − ٢ص −٢ = ٠

س = ٢ص +٢

$٤^{٢ص+٢+ص} = ١٢٨$

$(٢^{٢})^{٣ص+٢} = ١٢٨$

$٢^{٦ص+٤} = ٢^{٧}$

٦ص +٤ = ٧

$ص = \frac{١}{٢}$

س = ٣

س٣: عددان الفرق بينهما ٥، ومجموع مقلوبيهما يساوي $\frac{٩}{١٤}$، فما العددان؟

الحل: س − ص = ٥

$\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = \frac{٩}{١٤}$

١٤ص + ١٤س = ٩ س ص

١٤ص + ١٤ (٥ + ص) = ٩ (٥+ص) ص

٩ص^{٢} + ١٧ص − ٧٠ = ٠

(٩ص + ٣٥) (ص − ٢) = ٠

ص = $\frac{-٣٥}{٩}$ ، ص = ٢

س = $\frac{١٠}{٩}$ ، س = ٧

س٤: قطعة ارض مستطيلة الشكل مساحتها ١٨م^{٢}، وطول قطرها ٣ $\sqrt{٥}$ ، فما بُعداها؟

الحل: س × ص = ١٨

س^{٢} + ص^{٢} = ٤٥

س^{٢} + $\left(\frac{١٨}{س}\right)^{٢}$ = ٤٥

س^{٤} − ٤٥ س^{٢} + ٣٢٤ = ٠

(س^{٢} − ٣٦) (س^{٢} − ٩) = ٠

س = ∓٦ ، س = ∓٣

ص = ∓٣ ، ص = ∓٦

س٥: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١- إذا كان ٢^{س} = ٤^{٢٠} + ٤^{٢٠} فأي قيمة س؟

أ) ٤١ ب) ٨٠ جـ) ٤٠ د) ٤١

٢- إذا كانت س + ص + ع = ٢٠ ، وكانت ٣ س + ٣ ص + ٥ ع = ٩٠ فإن قيمة ع :

أ) ١٥ ب) ١٨ جـ) ١٤ د) لا يمكن إيجادها

٣- كم حلاً حقيقياً للنظام: س ص = ١، س + ص = ٢؟

أ) حل حقيقي واحد فقط. ب) حلان حقيقيان.

جـ) أربعة حلول حقيقية. د) ثلاثة حلول حقيقية.

٤- ما حل النظام: ٥س + ٤ص −ع = ٠، ١٠ ص −٣ ع = ١١، ع = ٣؟

أ) س = −١، ص= ٢، ع = ٣ ب) س = ١، ص= ٢، ع = ٣

جـ) س = ٥، ص= −٢، ع = ٣ د) س = ٢، ص= ٥، ع = ٣

٥- أي الأنظمة الآتية تصلح النقطة (١، ٢) لأن تكون حلاً له؟

أ) س^{٢}+ ص^{٢} = ٥ ، س^{٢}− ص^{٢} = ٣

ب) س+ ص = −١ ، س^{٢}+ ص^{٢} = ٣

جـ) س^{٢}+ ص^{٢} = ٥ ، س+ ص = −١

د) س^{٢}− ص^{٢} = −٣ ، س− ص = −١

الحل:

الرقم	١	٢	٣	٤	٥
رمز الإجابة	د	أ	أ	أ	جـ

نموذج امتحان الفصل الأول

س١: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي: (١٥علامات)

١- اذا كان $\overleftarrow{أ}$ (٢، ٤، ١) وكانت نقطة بداية المتجه (٠ ،١، -١) فما نقطة نهايته؟

أ) (-١، -٣، -٣) ب) (-١، -٥، -١) جـ) (١، ٥، ١) د) (١، ٣، ٣)

٢- ما قياس الزاوية بين المتجهين: $\overleftarrow{أ}$ = (١، ٠، -١)، $\overleftarrow{ب}$ = (٠، ١، ١)؟

أ) $\frac{٢\pi}{٣}$ ب) $\frac{\pi}{٣}$ جـ) $\frac{٣\pi}{٤}$ د) $\frac{٤\pi}{٣}$

٣- ما ناتج $\overleftarrow{و}_٢ \times (\overleftarrow{-و}_٢ \times \overleftarrow{و}_٣)$ ؟

أ) $-و_٣$ ب) $و_٣$ جـ) $-و_١$ د) $\overleftarrow{٠}$

٤- إذا كانت قياسات الزوايا الاتجاهية التي يصنعها المتجه الواقع في الثُمن الأول مع المحاور الإحداثية الموجبة س، ص،ع هي: $هـ_١$ = ٤٥° و $هـ_٢$ = ٩٠° فما قيمة $هـ_٣$؟

أ) ٤٥° ب) {٤٥°، ٣١٥°} جـ) ٣٠° د) ٦٠°

٥- ما المفهوم المناسب: المستقيمان اللذان لا يتقاطعان ولا يجمعهما مستوى واحداً؟

أ) متقاطعان. ب) متوازيان. جـ) متخالفان. د) متعامدان.

٦- ما يكافئ العبارة ~(ف ⟵ ~ر)؟

أ) ~ف $\wedge$ ~ر ب) ف $\wedge$ ~ر جـ) ف $\wedge$ر د) ~ف ⟵ ر

٧- ما العبارة الرياضية الصائبة فيما يأتي؟

أ) $\forall$ س$\in$ع ، س^٢ $\neq$ ٢س ب) $\forall$ س$\in$ص ، س^٢ > ٠

جـ) E س$\in$ع : |س| = -٢ د) E س$\in$ص : $\sqrt[٣]{س}$ = -٢

٨- ما مجموعة حل الجملة المفتوحةس^٢ - ٨١ = ٠ ؟

أ) ∓٩ ب) -٩ جـ) ٩ د) $\sqrt{١٢}$

٩- ما حل المتباينة |٢س -٣| ⩽ ٧ ؟

أ)]-٢، ٥[ب)]-∞ ، -٥]∪[٥، -∞[جـ) [-٢، ٥] د) [-١٠، ١٠]

١٠- أي مما يأتي يمثل نقطة تقاطع المستقيم س + ص = ٣ مع المنحنى س^٢ – ص^٢ = ١٥ ؟

أ) (٤، -١) ب) (-١، ٤) جـ) (٢، ١) د) (-٤، ٧)

س٢: (٨علامات)

أ) إذا كان $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهين وكان $|\overleftarrow{أ}| = ٦$ ، $|\overleftarrow{ب}| = ١٠$ وكانت الزاوية بينهما ٦٠° أوجد $|\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}|$:

ب) إذا كان $\overleftarrow{أ} = \overleftarrow{و}_{١} - \overleftarrow{و}_{٢} + ٢\overleftarrow{و}_{٣}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهاً بدايته: (٠، -٤، -٣)، ونهايته: (-١، -٦، -٢)، $\overleftarrow{جـ}$ متجه ضعفي المتجه $\overleftarrow{ب}$ وعكسه في الاتجاه، جد ما يأتي:

١- متجه طوله ٣ وحدات باتجاه المتجه $(\overleftarrow{أ} + ٢\overleftarrow{جـ})$

٢- حل المعادلة المتجهة: $٢\overleftarrow{س} + ٣\overleftarrow{ب} - \overleftarrow{أ} = ٢\overleftarrow{جـ} + ٣\overleftarrow{س} + \overleftarrow{و}_{٢}$

س٣: (٦ علامات)

أ) دون استخدام جدول الصواب أثبت أنّ ~ (~ف ⟵ (ف ∨ ن)) ≡ ~ (ف ∨ ن)

ب) أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي أن: ٢ + ٤ + ٦ + ...+ ٢ن = ن (ن+١)

س٤: (٦ علامات)

أ) حل المعادلة: $٢^{٢س} - ٢^{س+٣} = -١٢$

ب) عددان موجبان مجموع مربعيهما ١٠٠، ويزيد ضعفا مربع أحدهما عن مربع الآخر بمقدار ٨ ما العددان؟

س٥: بين أنّ المتجهين $\overleftarrow{أ}$ = (جا٢س، جاس)، $\overleftarrow{ب}$ = (-١، ٢جتاس) متعامدان. (٦ علامات)

س٦: حل المعادلة الآتية: $(لـوس)^{٢} + لـوس^{٢} = (لـو ٢)^{٢} - ١$

س٧: أثبت أنّ الزاوية المحيطية المقابلة لقطر الدائرة قائمة.

انتهت الأسئلة

الإجابة النموذجية:

س١:

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
جـ	أ	ب	أ	جـ	جـ	د	جـ	جـ	أ

س٢:

أ) إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهين وكان $|\overleftarrow{\text{أ}}| = ٦$ ، $|\overleftarrow{\text{ب}}| = ١٠$ وكانت الزاوية بينهما ٦٠° أوجد $|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}|$:

الحل: $\left(|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}|\right)^{٢} = \left(\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}\right) . \left(\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}\right)$

$= |\overleftarrow{\text{أ}}|^{٢} + |\overleftarrow{\text{ب}}|^{٢} + ٢\,|\overleftarrow{\text{أ}}|\,|\overleftarrow{\text{ب}}|\,\text{جتا}٦٠^{\circ}$

$= ٣٦ + ١٠٠ + ١٢٠ \times \frac{١}{٢}$

$= ١٣٦ + ٦٠$

$= ١٩٦$

$|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}| = ١٤$

ب) إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{\text{و}}_{١} - \overleftarrow{\text{و}}_{٢} + ٢\overleftarrow{\text{و}}_{٣}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهاً بدايته: (٠، -٤، -٣)، ونهايته: (-١، -٦، -٢)، $\overleftarrow{\text{جـ}}$ متجه ضعفي المتجه $\overleftarrow{\text{ب}}$ وعكسه في الاتجاه، جد ما يأتي:

١- متجه طوله ٣ وحدات باتجاه المتجه $(\overleftarrow{\text{أ}} + ٢\overleftarrow{\text{جـ}})$

الحل: $\overleftarrow{\text{أ}} = (١، -١، ٢)$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (-١، -٢، ١)$ ، $\overleftarrow{\text{جـ}} = (٢، ٤، -٢)$

$\overleftarrow{\text{أ}} + ٢\overleftarrow{\text{جـ}} = (٥، ٧، -٢)$

$|\overleftarrow{\text{أ}} + ٢\overleftarrow{\text{جـ}}| = \sqrt{٧٨}$

متجه طوله وحدة واحدة باتجاه المتجه $(\overleftarrow{\text{أ}} + ٢\overleftarrow{\text{جـ}}) = \dfrac{(\overleftarrow{\text{أ}} + ٢\overleftarrow{\text{جـ}})}{|\overleftarrow{\text{أ}} + ٢\overleftarrow{\text{جـ}}|}$

المتجه المطلوب $= ٣\left(\frac{٥}{\sqrt{٧٨}}، \frac{٧}{\sqrt{٧٨}}، \frac{-٢}{\sqrt{٧٨}}\right) = \left(\frac{١٥}{\sqrt{٧٨}}، \frac{٢١}{\sqrt{٧٨}}، \frac{-٦}{\sqrt{٧٨}}\right)$

٢- حل المعادلة المتجهة: $٢\overleftarrow{س} + ٣\overleftarrow{ب} - \overleftarrow{أ} = ٢\overleftarrow{جـ} + ٣\overleftarrow{س} + \overleftarrow{و}_٢$

الحل: تصبح المعادلة $\overleftarrow{س} = ٣\overleftarrow{ب} - \overleftarrow{أ} - ٢\overleftarrow{جـ} - \overleftarrow{و}_٢$

$\overleftarrow{س} = (-٣، -٦، ٣) - (١، -١، ٢) - (٤، ٨، -٤) - (٠، ١، ٠)$

$\overleftarrow{س} = (-٨، -١٤، ٥)$

س٣:

أ) دون استخدام جدول الصواب أثبت أنّ $\sim (\sim ف \longrightarrow (ف \vee ل)) \equiv \sim(ف \vee ل)$

الحل: الطرف الأيمن: $\sim (\sim ف \longrightarrow (ف \vee ل)) \equiv \sim ف \wedge \sim(ف \vee ل)$

$\equiv \sim ف \wedge \sim ف \wedge \sim ل$

$\equiv \sim ف \wedge \sim ل$

$\equiv \sim(ف \vee ل)$ الطرف الأيسر، وهو المطلوب

ب) أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي أن: $٢ + ٤ + ٦ + ... + ٢ل = ل \ (ل + ١)$

الحل: ١- نثبت أن العبارة صحيحة عندما: $ل = ١ \Longleftarrow ٢ \times ١ = ١ \times (١+١)$

$\Longleftarrow ٢ = ٢$

٢- نفرض أن العبارة صحيحة عندما: $ل = ك$

$٢ + ٤ + ٦ + ... + ٢ك = ك \ (ك+١)$

٣- نثبت صحة العلاقة عندما: $ل = ك + ١$

أي أن: $٢ + ٤ + ٦ + ... + ٢ك + ٢(ك+١) = (ك+١) \ (ك+١) \ (ك+٢)$

الطرف الأيمن: $٢ + ٤ + ٦ + ... + ٢ك + ٢(ك+١)$

$= ك \ (ك+١) + ٢ \ (ك+١)$ بأخذ (ك+١) عامل مشترك

$= (ك+١)(ك+٢)$ الطرف الأيسر وهو المطلوب

س٤:

أ) حل المعادلة: $٢^{٢س} - ٢^{س+٣} = -١٢$

الحل: نفرض أن: $ص = ٢^{س}$

تصبح المعادلة: $ص^٢ - ٨ص + ١٢ = ٠$

$(ص - ٦) \ (ص - ٢) = ٠$

$ص = ٦$ ، $ص = ٢$

إما ص = ٦ $\Leftarrow$ ٢^س = ٦

$\Leftarrow$ س = لـو$_{٢}$ ٦

أو ص = ٢ $\Leftarrow$ ٢^س = ٢

$\Leftarrow$ س = ١

ب) عددان موجبان مجموع مربعيهما ١٠٠، ويزيد ضعفا مربع أحدهما عن مربع الآخر بمقدار ٨ ما العددان؟

الحل: س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠ .... (١)

٢س^{٢} = ص^{٢} + ٨ .... (٢)

بالتعويض نجد أن: س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠

٣س^{٢} = ١٠٨

س^{٢} = ٣٦

س = ∓ ٦ نرفض القيمة السالبة

س = ٦ ، ص = ٨

س٥: بين أنّ المتجهين $\overleftarrow{أ}$ = (جا٢س، جاس)، $\overleftarrow{ب}$ = (-١، ٢جتاس) متعامدان.

الحل: $\overleftarrow{أ}$. $\overleftarrow{ب}$ = (جا٢س، جاس) .(-١، ٢ جتاس)

= − جا٢س + ٢جا س جتاس

= − جا٢س + جا٢س

= صفر (المتجهان متعامدان)

س٦: حل المعادلة الآتية: (لـوس)^{٢} + لـوس^{٢} = (لـو ٢)^{٢} −١

الحل: نفرض أن: ص = لـوس

(ص)^{٢} + ٢ص − (لـو ٢)^{٢} +١ = ٠

المميز: ٤ − ٤ × ١ × (١ − (لـو ٢)^{٢}) = ٤ (لـو ٢)^{٢}

ص = $\frac{-٢ \mp ٢(لـو ٢)}{٢}$ = −١ ∓ (لـو ٢)

إما: ص = −١ + (لـو ٢) $\Leftarrow$ لـوس = −١ + (لـو ٢) $\Leftarrow$ س = ٠,٢

أو : ص = −١ − (لـو ٢) $\Leftarrow$ لـوس = −١ − (لـو ٢) $\Leftarrow$ س = ٠,٠٥

انتهت الإجابة

فكرة رياديّة

ورشة إنتاج تحف وهدايا مصنوعة من الأخشاب

يعاني الشباب من البطالة، وبإيجاد مثل هذه الورشات يمكن أن يتم استيعاب العديد من الكفاءات في سوق العمل مستقبلاً، بقليل من التدريب والإعداد، وتكثر في مناطقنا الزراعية ومحيطنا البيئي أشجار الزيتون، والأشجار الحرجية: كالسرو، والبلوط، والكينا، وغيرها، سنتناول في هذا المشروع إعداد جدوى اقتصادية لعمل ورشة عمل في المدرسة؛ لتتضح فيها النفقات، والمخاطر، والأضرار، وتوقّع الأرباح، والعائدات، والنجاحات المتوقعة التي ستجنيها المدرسة والطلبة المشاركون من هذا المشروع.

المخاطر	الأضرار	النجاحات المتوقعة
البيئية		
المالية		
الاجتماعية		
الزمنية		

إدارة الزمن:

....

....

مصادر التمويل:

....

....

الأدوات والمواد اللازمة للإنتاج:

....

....

المواد المنتجة:

....

....

كيفية تسويقها:

....

....

إجراءات التنفيذ:

تقسيم الطلبة إلى مجموعات، والمهام الموكلة بكل مجموعة:

....

....

....

....

....

معايير تقييم المنتج:

المجال	المؤشرات
معايير جمالية	
معايير هندسية	
معايير مادية	

النتائج المتوقعة:

....

....

....

....

....

توصيات:

....

....

....

....

....

الفصل الثّاني

الخطة الفصلية للفصل الدراسي الثاني

١) الخطة الفصلية: لكتاب الصف الحادي عشر العلمي

اسم الوحدة	عنوان الدرس	عدد الحصص	الفترة الزمنية: الشهر	الفترة الزمنية: الأسبوع	ملاحظات
الرابعة: الاحتمالات والإحصاء (٢١ حصة)	٤-١ المتغير العشوائي المنفصل	٢	كانون ثاني	الرابع	
	٤-٢ التوزيع الاحتمالي	٢			
	٤-٣ التوقع	٢			
	٤-٤ التوزيع ذو الحدين	٣	شباط	الأول	
	٤-٥ العلامة المعيارية	٣			
	٤-٦ التوزيع الطبيعي المعتدل	٣		الثاني	
	٤-٧ التطبيقات	٣			
	تمارين عامة	٢		الثالث	
	فكرة ريادية	١			
الخامسة: المتتاليات والمتسلسلات (٢١ حصة)	٥-١ المتتاليات	٣	شباط	الثالث	
	٥-٢ المتسلسلات	٣		الرابع	
	٥-٣ المتتالية الحسابية (العددية)	٣			
	٥-٤ مجموع المتسلسلة الحسابية	٣	آذار	الأول	
	٥-٥ المتتالية الهندسية	٣			
	٥-٦ المتسلسلة الهندسية المنتهية ومجموعها	٣		الثاني	
	تمارين عامة	٢			
	فكرة ريادية	١			
السادسة: القطوع المخروطية (١١ حصة)	٦-١ القطع المكافىء	٣	آذار	الثالث	
	٦-٢ القطع الناقص	٣			
	٦-٣ القطع الزائد	٣		الرابع	
	تمارين عامة	١			
	فكرة ريادية	١			

اسم الوحدة	عنوان الدرس	عدد الحصص	الفترة الزمنية		ملاحظات
			الشهر	الأسبوع	
السابعة: النهايات والإتصال (٢٣ حصة)	٧-١ نهاية الاقتران عند نقطة	٣	نيسان	الأول	
	٧-٢ نظريات النهايات	٣			
	٧-٣ النهايات والصور غير المعينه	٣		الثاني	
	٧-٤ نهايات الاقترانات الدائرية	٣			
	٧-٥ نهاية الافتران عندما س تؤول الى المالانهاية	٢		الثالث	
	٧-٦ الاتصال	٣			
	٧-٧ نظرية بلزانو	٣		الرابع	
	تمارين عامة	٢			
	فكرة ريادية	١			
مراجعة			أيار	الأول	
مجموع الحصص		٧٦			

الدرس	معرفة	التكرار	تطبيق	التكرار	استدلال	التكرار
(٤-١) المتغير العشوائي المنفصل	يُعرّف مفهوم المجال والمدى لمتغير عشوائي منفصل.	١	يكتب الفضاء العيني لتجربة عشوائية.	٢		
	يتعرف إلى مفهوم المتغير العشوائي المنفصل.	١	يمثل المتغير العشوائي بمخطط سهمي.	١		
			يجد مدى المتغير العشوائي المنفصل لتجربة عشوائية.	١٠		
			يجد احتمال قيم المتغير العشوائي المنفصل.	١		
عدد الأهداف		٢		١٤		
(٤-٢) التوزيع الاحتمالي	يتعرف التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل (اقتران الكثافة الاحتمالية).	١	يكوّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل .	٤	يحكم على الجداول التي تمثل توزيعاً احتمالياً.	١
	يتعرف خصائص التوزيع للمتغير العشوائي المنفصل.	١	يكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل، كمجموعة أزواج مرتبة.	٣	يوظف مفهوم اقتران الكثافة الاحتمالية والتوزيع الاجتمالي في ايجاد مجاهيل.	٥
عدد الأهداف		٢		٧		٦
(٤-٣) التوقع	يُعرّف التوقع.	١	يحسب التوقع لمتغير عشوائي منفصل إذا عُلم توزيعه الاحتمالي.	٤	يوظف مفهوم التوقع للمتغير العشوائي المنفصل لحل مسائل حياتية غير روتينية.	١
	يذكر قانون التوقع للمتغير العشوائي المنفصل (رمزياً).	١	يحسب التوقع لمتغير عشوائي منفصل لتجربة عشوائية.	٣	يوظف مفهوم التوقع في إيجاد مجاهيل.	٢
	يذكر العلاقة بين الوسط الحسابي والتوقع لمتغير عشوائي منفصل.	١				
	يتعرف إلى خصائص التوقع.	١	يستخدم خصائص التوقع في حسابه.	٢		
عدد الأهداف		٤		٩		٣

الدرس	معرفة	التكرار	تطبيق	التكرار	استدلال	التكرار
(٤-٤) التوزيع ذو الحدين	يتعرف إلى توزيع ذي الحدين.	١	يحسب مدى المتغير العشوائي لتوزيع ذي الحدين.	٢	أن يوظف توزيع ذات الحدين في حل مسائل كلامية.	٤
	يذكر شروط توزيع ذي الحدين.	١	يحسب احتمال نجاح تجربة المتغير العشوائي لتوزيع ذي الحدين.	٨		
	يذكر قانون حساب احتمال نجاح التجربة (ر) من المرات.	١	يحسب التوقع لمتغير عشوائي ذي حدين.	٨		
	يذكر قانون التوقع لمتغير عشوائي ذي حدين.	١				
	عدد الأهداف	٤		١٨		٤
(٤-٥) العلامة المعيارية	يتعرف إلى العلامة المعيارية وعلاقتها بالعلامة الخام.	١	يحول العلامة الخام إلى علامة معيارية.	٥	أن يوظف قانون العلامة المعيارية في إيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري.	١
	يتعرف إلى خصائص العلامة المعيارية: (الوسط الحسابي لجميع العلامات المعيارية لتوزيع ما يساوي صفراً ، والانحراف المعياري يساوي ١).	١	يوظف خصائص العلامة المعيارية في إيجاد قيم المجاهيل.	٢		
	عدد الأهداف	٢		٧		١
(٤-٦) التوزيع الطبيعي	يتعرف المنحنى الطبيعي.	١	يجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعتدل (المعياري).	٩	أن يوظف مفهوم التوزيع الطبيعي في إيجاد مجاهيل.	٣
	يتعرف خصائص المنحنى الطبيعي.	١	يستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعتدل؛ لإيجاد العلامة المعيارية لمساحة معلومة تحت المنحنى الطبيعي المعتدل.	٧		
	يتعرف المنحنى الطبيعي المعياري وخصائصه.	١	يجد احتمال لمتغير عشوائي طبيعي غير معياري.	٦		
	يتعرف مفهوم المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري.	١	يحسب الوسط الحسابي أو الانحراف المعياري لتوزيع طبيعي إذا عُلم احتماله،(بحيث تكون المعلومات كافية).	٥		

الدرس	معرفة	التكرار	تطبيق	التكرار	استدلال	التكرار
	يتعرف جدول التوزيع الطبيعي المعياري، وكيفية استخدامه.	١				
عدد الأهداف		٥		٢٧		٣
(٤-٧) تطبيقات			يحول مسائل تتخذ شكل التوزيع الطبيعي إلى مسائل تأخذ شكل التوزيع الطبيعي المعتدل.	٣	يوظف خصائص التوزيع الطبيعي وجدول المساحات الخاصة به في حل مشكلات عملية.	٦
					ينفذ الطلبة رحلات معرفية حول موضوعات الوحدة.	١
عدد الأهداف				٣		٧
المجموع		١٩		٨٥		٢٤

الأخطاء الشائعة والصعوبات المتوقّع أن يواجهها الطلبة

الوحدة الرابعة: الاحتمالات والإحصاء

الوحدة | الدرس	أخطاء وصعوبات متوقعة	العلاج المقترح
(٤-١) المتغير العشوائي المنفصل:	كتابة الفضاء العيني للتجربة العشوائية.	إعداد ورقة عمل يكون مضمونها تجارب عشوائية متنوعة يَكتبُ فضاءها العيني. توظيف شجرة الاحتمال لكتابة نواتجها.
	يخطئ بعض الطلبة في حساب الاحتمال، فقد يحسبون قيمة الاحتمال بالسالب، أو أكبر من ١.	التذكير باستمرار بقيم الاحتمال الممكنة ل(س) أكبر من أو يساوي صفراً، وأقل من، أو يساوي١.
	ضعف قدرة بعض الطلبة في الربط بين فضاء العينة Ω وتعريف ما يمثله المتغير العشوائي لحساب مدى المتغير العشوائي.	تركيز انتباه الطلبة إلى قراءة متمعنة وواعية للسؤال لتحديد قيم مدى المتغير العشوائي. طرح المزيد من الأمثلة أثناء الشرح وإعطاء متغيرات عشوائية متنوعة.
(٤-٢) التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل:	إيجاد المدى للمتغير العشوائي المنفصل.	التوسع في عرض الأمثلة على التجارب العشوائية، والتنويع في المتغيرات العشوائية. إعداد ورقة عمل تتضمن حل أمثلة، أو أسئلة ذات علاقة. توجيه الطلبة لصقل معلوماتهم بالتوجه إلى مواقع متخصصة على الإنترنت.
	تكوين جدول التوزيع الاحتمالي.	
	بعض الطلاب يجد صعوبة في التعامل مع التوزيع الاحتمالي كاقتران كثافة احتمالية، مثل: ل (س) = $\frac{\text{س}+٢}{١٤}$ ، $\forall$ س $\in$ {٠، ١، ٢، ٣}.	
	عدم التمييز بين السحب مع الإرجاع والسحب دون إرجاع.	تنفيذ بعض التجارب عملياً.
	إيجاد قيمة / قيم الثابت في جدول التوزيع الاحتمالي بأشكاله المختلفة.	التنويع في الأمثلة المطروحة والمزيد من الأسئلة.
(٤-٣) التوقّع للمتغير العشوائي المنفصل:	كتابة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل.	تنفيذ مهام ذاتية على دفاتر الطلبة تتطلب كتابة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل، ومتابعة المعلم تلك المهام.
	كتابة أو حفظ قانون التوقع: ت(س) = $\sum_{ر=١}^{ك}$ س$_ر$ × ل(س$_ر$)	كتابة القانون على جدارية تُعلق في غرفة الصف.
	إيجاد قيمة / قيم الثوابت في جدول التوزيع الاحتمالي بأشكاله المختلفة إذا علم التوقع.	الاستزادة من طرح الأمثلة.

الوحدة | الدرس	أخطاء وصعوبات متوقعة	العلاج المقترح
(٤-٤) التوزيع ذو الحدين:	كتابة قانون احتمال نجاح التجربة العشوائية ر من المرات عند تكرار التجربة ن مرة.	عرض القانون باستخدام جدارية تُعلق امام الطلبة.
	إيجاد مدى المتغير العشوائي لتوزيع ذي حدين.	إعداد ورقة عمل علاجية تتضمن العديد من الأمثلة.
	إيجاد احتمال النجاح م، واحتمال الفشل (١ − م).	قراءة متفحصة لمعطيات السؤال أو المثال.
	قد يخطئ بعض الطلبة في التعبير عن العبارات الآتية: على الأقل، أو على الأكثر بالرموز، فيكتبون: ثلاثة على الأقل س ⩽ ٣، وثلاثة على الأكثر س ⩾ ٣	تركيز المعلم على انتباه الطلبة عند الحديث عن ألفاظ، مثل: على الأقل، أو على الأكثر إلى الاهتمام بإشارة المساواة.
	عدم مقدرة الطالب تحديد ما إذا كانت التجربة ذات حدين أم لا حسب الشروط لذات الحدين.	التذكير باستمرار شروط كون التجربة ذات حدين.
(٤-٥) العلامة المعيارية:	قد يخطئ بعض الطلبة في كتابة قانون العلامة المعيارية، فيكتبونها كالآتي : ع = $\frac{\mu - \text{س}}{\sigma}$ والصحيح ع = $\frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$	لفت انتباه الطلبة إلى الصيغة الصحيحة. عرضه على جدارية دائمة على السبورة.
	يخطئ بعض الطلبة، ويعتبر أنّ الوسط الحسابي لجميع العلامات المعيارية لتوزيعٍ ما يساوي ١ ، وانحرافها المعياري يساوي صفراً.	ربط الانحراف المعياري لجميع العلامات المعيارية = ، بانتفاء المقدرة على حساب العلامة المعيارية (المقام يصبح صفراً !!).
	يعتقد بعض الطلبة أن العلامات المعيارية **تتأثر** إذا أُضيف مقدار ثابت لكل علامة من العلامات الخام الأصلية ، أو ضُربت كل علامة خام في عدد موجب.	على المعلم التوضيح أنه في حالة الضرب في عدد سالب فقط تتأثر العلامة المعيارية وتتغير إشارة العلامة المعيارية.
	صعوبة في إيجاد σ، μ إذا عُلمت العلامات الخام والعلامات المعيارية المناظرة لها، وخاصة في حل المعادلات.	التذكير بطرق حل نظام من معادلتين خطيتين.
	صعوبة في الفهم وخاصة عند المقارنة بين علامات الطلاب يجب حساب العلامة المعيارية، ثم المقارنة مثل: سؤال ٦ كان أداء سعيد في الكيمياء أفضل من الفيزياء، رغم أن العلامة الخام في الفيزياء أكبر من العلامة الخام في الكيمياء.	إعادة متكررة أنّ عند المقارنة يجب تحويل العلامات الخام إلى معيارية ثم الحكم.

العلاج المقترح	أخطاء وصعوبات متوقعة	الوحدة | الدرس
شرح استخدام الجدول من خلال جهاز العرض LCD.	قد يخطئ بعض الطلبة في استخدام الجدول للحالات المختلفة وبتفاوت.	(٤-٦) التوزيع الطبيعي المعياري:
طرح الأمثلة الكافية والمتنوعة.	إيجاد قيمة الثابت إذا عُلمت المساحة.	
ضرورة توظيف القانون بدقة لحساب العلامة المعيارية.	تحويل العلامة الخام إلى معيارية فيكتب: ع = $\frac{\mu - س}{\sigma}$ بدل ع = $\frac{س - \mu}{\sigma}$	(٤-٧) تطبيقات:
التركيز على خطوات حل المسألة الذي يتطلب قراءتها ، وفهمها، ومعرفة المعطى والمطلوب، والتحقق من معقولية الحل.	صعوبة في ترجمة المسائل العملية على التوزيع الطبيعي، والتعبير عن المعطيات بالرموز أثناء التنفيذ.	

نموذج تحضير الدرس (٤-٣)　　التوقع

عدد الحصص: ٢

أولاً: مرحلة الاستعداد

١) أهداف الدرس:

١- يتعرف الطالب مفهوم التوقع (الوسط الحسابي).
٢- يكتب الطالب قانون التوقع للمتغير العشوائي المنفصل (رمزياً).
٣- يتعرف الطالب إلى خصائص التوقع.
٤- يحسب التوقع لمتغير عشوائي منفصل إذا عُلم توزيعه الاحتمالي.
٥- يحسب التوقع لمتغير عشوائي منفصل لتجربة عشوائية.
٦- يستخدم خصائص التوقع في حسابه.
٧- يوظف مفهوم التوقع للمتغير العشوائي المنفصل لحل مسائل حياتية غير روتينية.
٨- يجد قيم الثوابت في جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل بمعلوميّة التوقع.

٢) المهارات

١- إيجاد المدى للمتغير العشوائي.
٢- تكوين جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

الأخطاء المفاهيمية (المتوقعة)	مقترحات حلول
يخطئ بعض الطلبة في كتابة الفضاء العيني للتجربة العشوائية.	التأكيد للطلبة على أنه يمكن معرفة الفضاء العيني بأكثر من طريقة، وخاصة طريقة الشجرة، وإعطاء أمثلة متنوعة لتجارب عشوائية.
يخطئ بعض الطلبة في حساب احتمال، فقد يحسبون قيمة الاحتمال بالسالب أو أكبر من ١	التأكيد على أنّ : $٠ \leqslant$ ل(س) $\leqslant ١$.
يخطئ بعض الطلبة في حساب الاحتمال؛ لعدم معرفة عدد عناصر الفضاء العيني.	التأكيد على قاعدة حساب عدد عناصر الفضاء العيني.
يخطئ بعض الطلبة في حساب المدى للمتغير العشوائي المنفصل.	التأكيد على الطلبة اتّباع تعريف المتغير العشوائي في متن السؤال، وأهمية كتابة الفضاء العيني في بعض الأسئلة، والاستعانة به في كتابة المدى، مع إعطاء أمثلة على ذلك.
يعتقد بعض الطلبة أن قيمة المدى يجب أن تكون موجبة، ويعتقد أنها مثل الاحتمال.	من خلال الأمثلة فرّقْ بين مفهوم المدى والاحتمال، وبيّنْ أنّ قيمة المتغير العشوائي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية فيمكن أن تكون موجبة، أو سالبة، أو صفراً، أو أيّ عدد حقيقي.
يخطئ بعض الطلبة في تكوين جدول التوزيع الاحتمالي.	توجيه الطلبة للتحقق من صحة جدول التوزيع الاحتمالي، من خلال التأكيد على أنّ: $\sum_{ر=١}^{ن}$ ل(سر) = ١ ، $٠ \leqslant$ ل(س) $\leqslant ١$.

بعض الطلبة يجد صعوبة في التعامل مع التوزيع الاحتمالي، كاقتران كثافة احتمالية مثل: $ل(س) = \frac{س+٢}{١٤}$ ، $\forall$ س $\in$ {٠، ١، ٢، ٣}.	تدريب الطلبة على التعويض وعمل جدول توزيع احتمالي، ثم التحقق من صحة الجدول، كما ذُكر سابقاً.
يجد بعض الطلبة صعوبة وخاصة في إيجاد قيمة / قيم الثابت في جدول التوزيع الاحتمالي بأشكاله المختلفة.	بعد إيجاد الثابت يمكن التحقق من خلال التعويض في الجدول، ثم التحقق من صحة التوزيع الاحتمالي.
يخطئ بعض الطلبة في حساب التوقع عند طلب إيجاد الوسط الحسابي.	التأكيد على أنّ التوقع للمتغير العشوائي المنفصل هو الوسط الحسابي نفسه.

الصعوبات المتوقّع أن يواجهها الطلبة:

تتنوع الصعوبات حسب المجالات المختلفة وفق مسبباتها، فمثلاً :

- صعوبات تتعلق بالتحصيل وقد تم توضيح بعضها سابقاً.
- صعوبات تعلّم قد تعود إلى صعوبات تعلم نمائية متعلقة بالعمليات العقلية والمعرفية، التي يحتاجها الطالب في تحصيله الأكاديمي أو مشكلات متعلقة بالانتباه، والإدراك ،والذاكرة، والتفكير، واللغة، أو صعوبة المطابقة بين الرموز والأرقام، أو عدم تذكر القواعد

  العلاج: توظيف بعض استراتيجيات التدريس، مثل استراتيجيات التعلم النشط، مثل: التعلم التعاوني؛ ليستفيد الطالب من أقرانه، وعلى المعلم التدرج في العرض والبداية من الأسهل إلى الأصعب، وإتاحة الوقت الكافي للطلاب في تنفيذ الأنشطة، أو حل المسائل.
- صعوبات حركية أثناء تنفيذ الأنشطة سواء كانت حركة زائدة أو خمولاً.

  العلاج: على المعلم إتاحة الفرصة للطلبة وتشجيع المشاركة في الحل والمناقشة، مع التنظيم.
- صعوبات نفسية وخاصة الاتجاه السلبي لبعض الطلبة نحو الرياضيات.

  العلاج:
  - إبراز أهمية الموضوع.
  - التعاون مع المرشد في حل بعض المشكلات النفسية التي يعاني منها بعض الطلبة، وخاصة بسبب المشكلات الأسرية التي ينجم عنها عدم انتباه أو تركيز.
  - التعاون مع أولياء الأمور لمعالجة بعض المشكلات.
  - توظيف أسلوب التدريس الفردي (تفريد التعليم).

أصول التدريس:

أ) المحتوى العلمي:

المتغير العشوائي - المدى - التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل - التوقع (الوسط الحسابي) - خصائص التوقع.

ب) استراتيجيات التدريس:

استراتيجية التعلم التعاوني، واستراتيجية حل المشكلات - الكرسي الساخن.

ج) مصادر المعرفة المستخدمة:

الكتاب المدرسي / الحاسوب / الشبكة العنكبوتية.

آليّات التقويم: الورقة والقلم.

١- مراجعة الذات وذلك من خلال يوميات الطالب، وتشجيع الطلبة على تدوين ما تعلموه في الدرس، وتدوين الأمور التي ما زالت غامضة بالنسبة إليهم.

٢- تكليف الطلبة حل التمارين ٤-٣ الواردة في الكتاب المدرسي.

ثانياً: أثناء تنفيذ الدرس

١) التهيئة

- تقسيم الطلبة إلى مجموعات (٤- ٦ طلاب).
- مراجعة الطلبة في مفهوم الفضاء العيني للتجربة العشوائية، وكيفية إيجاد المدى للمتغير العشوائي، وكتابة جدول التوزيع الاحتمالي بأكثر من طريقة، ويمكن أن يتم ذلك بمناقشة سؤال الواجب الذي يُطلب فيه إيجاد الفضاء العيني، والمدى، والتوزيع الاحتمالي، أو يُعطي المعلم سؤالاً يتضمن ما سبق.

٢) العرض

١- تنفيذ لعبة الكلمة الضائعة:

- إعداد الطلبة بطاقات مدوناً عليها تعريفات للمفاهيم المراد شطبها.
- كتابة المفاهيم المراد شطبها على السبورة وهي: الفضاء العيني - المتغير العشوائي المنفصل - المدى - التوقع - التوزيع الاحتمالي - التجربة العشوائية.
- اختيار أحد الطلبة بطاقة يقرأ محتواها، ويطلب إلى أحد الطلبة شطب المفهوم المعبر عنها.
- تبقى الكلمة التي تمثل عنوان الدرس: التوقع.

٢- يبدأ المعلم بعرض مشكلة تثير تساؤلات، وتحتمل إجابات مختلفة بالنسبة للطلاب: ماذا نستفيد من إيجاد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ؟ أو عرض نشاط (١) صفحة ١١، والسؤال هو: إذا اختيرت عينة عشوائية من مئة شتلة من هذه الأشتال ، باعتقادك كم شتلة منها ستنمو ؟ وهل تستطيع إيجاد عدد الأشتال التي ستنمو من الثلاثة آلاف شتلة التي زرعت؟

٣- يترك المعلم الفرصة للمجموعات للتفكير، وطرح أسئلة، وجمع بعض المعلومات حول المشكلة.

٤- يمكن أن يساعد المعلم الطلبة بعرض قانون التوقع أو الوسط الحسابي للمتغير العشوائي: $ت(س) = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر \times ل(س_ر)$، أو يبحث الطلبة عنه في الشبكة العنكبوتية.

٥- من خلال التفكير والعصف الذهني يبحث الطلبة عن الحلول ويتوصلون إلى أنه: لحساب التوقع للمتغير العشوائي عليهم توظيف ما سبق تعلمه وهو إيجاد الفضاء العيني، والمدى، والتوزيع الاحتمالي، ثم حساب التوقع باستخدام القانون:

$$ت(س) = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر \times ل(س_ر).$$

٦- تعطي كل مجموعة تفسيرها لمفهوم التوقع، أو الوسط الحسابي للمتغير العشوائي المنفصل.

٧- يناقش المعلم مع الطلبة مثال (١) من الكتاب المدرسي.

٨- تكليف الطلبة تنفيذ نشاط (٢) ضمن المجموعات.

٩- التعرف إلى خصائص التوقع.
١٠- يناقش المعلم مع الطلبة مثال (٢) الكتاب المدرسي.

٣) الإغلاق والتقويم

١- حل سؤال (١) صفحة ١٣ في الكتاب المدرسي ضمن المجموعات، ثم يتم عرض الحلول ومناقشتها وتحديد الصعوبات وكيفية التغلب عليها .

٢- حل السؤال الآتي ضمن المجموعات : إذا كان **ن** ، ع متغيرين عشوائيين في فراغ عيني، وكان ت(**ن**) = ٢، ت(**ك**) = -٣ جد:

أ) ت (٢**ن** + ٣)　　ب) ت (٢**ن** - ع + ١). يتم عرض الحلول ومناقشتها.

٣- تكليف الطلبة حل سؤال (٢) ، (٣) واجباً بيتياً، وتتم متابعته، وحلّه مع الطلبة الحصة القادمة، ومناقشة الصعوبات التي تواجه البعض.

٤- يمكن للمعلم الاستفادة من توظيف أوراق عمل لإثراء المحتوى.

٥- توظيف استراتيجية الكرسي الساخن في غلق الدرس؛ حيث تقوم الفكرة على طرح أسئلة من قبل الطلبة على زميلهم الذي يجلس على كرسي، بحيث يكون محور الأسئلة محدداً حسب الموضوع وكإنجاز له، يحسب له عدد الأسئلة التي أجاب عنها بشكل صحيح، ثم يعطي الجالس في النهاية ملخصاً للموضوع.

أسئلة إثرائية الوحدة الرابعة: الاحتمالات والإحصاء

س١: وعاء يحوي ٤ كرات بيضاء ، و٦ كرات سوداء ، سُحبت من الوعاء كرتان دفعة واحدة، وعُرّف المتغير العشوائي ۍ بأنه عدد الكرات السوداء المسحوبة.

أ) عين مدى ۍ. ب) اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ۍ. ج) جد توقع ۍ.

س٢: إذا كان التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل ۍ معطى بالصورة: ل(س) = $\frac{٢س + ٣}{٥ا - ٣}$ حيث س ∈ {١، ٢، ٣، ٤}

جد: أ) قيمة ا. ب) التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ۍ ج) ت(ۍ)

س٣: إذا كان س متغيراً عشوائياً منفصلاً، توزيعه الاحتمالي مبين في الجدول الآتي، حيث، ٠ < ا < ١ :

س	-٣	صفر	٣	٦
ل(س)	ا	ا^٢	٢ا^٢	ا

جد: أ) قيمة ا. ب) التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي **س** ج) ت(س)

س٤: لتكن التجربة اختيار عدد فردي س **حيث:** ٢ ≤ س ≤ ١٥ ، **إذا دل ال**متغير العشوائي ۍ على أنه باقي قسمة العدد س على ٣، فأوجد: ت(٧ۍ - ١).

س٥: إذا كان س متغيراً عشوائياً ذا حدين حيث: ں = ٦ ، واحتمال النجاح ا = $\frac{١}{٣}$ ، أوجد:

١) ل(س < ٥). ٢) ل(٤ > س ≤ ٦). ٣) ل(٣ > س > ٤).

س٦: عائلة لديها ٦ أطفال، عُرف المتغير العشوائي ۍ بأنه عدد الذكور، احسب:

١) احتمال أن يكون لديها ٤ أطفال ذكور فقط. ٢) احتمال أن يكون في العائلة طفل ذكر على الأقل ٣) ت(ۍ).

س٧: تقدّم طالب لامتحان مكون من ٢٠ فقرة من نوع الاختيار من متعدد، لكل منها ٤ خيارات واحد فقط منها صحيح ، فإذا أجاب طالب عنها بصورة عشوائية، وكان لكل فقرة منها ٥ علامات، فأوجد:

١- احتمال أن يحصل الطالب على العلامة ٦٠.
٢- احتمال أن يحصل الطالب على تقدير ممتاز، علماً بأنّ الحد الأدنى لعلامة الامتياز هو ٩٠.
٣- توقّع علامة الطالب.

س٨: احتمال نجاح عملية جراحية في المخ = ٠,٨ ، أُدخل ٥ أشخاص لإجراء العملية.
١- ما احتمال نجاح جميع العمليات؟
٢- ما احتمال نجاح ٤ عمليات على الأكثر؟
٣- احسب توقّع الفشل عند إجراء ٢٥ عملية جراحية.

س٩: الوسط الحسابي والانحراف المعياري لمجموعة من القيم هما: ٧٠ ، ٥ على الترتيب.
١- ما العلامة المعيارية المقابلة للقيمة ٨٠ ؟
٢- ما العلامة الخام المقابلة للعلامة المعيارية -٢ ؟
٣- إذا ضُربت كلّ علامة خام في ٢، فما العلامة المعيارية للقيمة ٨٠ ؟

س١٠: أ) حُوّلت المفردات في توزيع ما إلى علامات معيارية، فكانت كالآتي:
٣ م ، م ، ٠ ، ٠,٥ ، ١,٥ فما قيمة م؟

ب) إذا كانت علامتا طالبين في مبحث الفيزياء هما: ٨٠، ٧٠، وكانت علامتاهما المعياريتان المناظرتان ١,٢ ، -٠,٨ على الترتيب. ما هو الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعلامات في الامتحان؟

س١١: إذا كان ع متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً، فأوجد قيمة (ك) إذا كان: ل(ك ⩽ ع ⩽ ٢,٥) = ٠,١٧ .

س١٢: إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً، وسطه الحسابي μ = ٥٠ ،وانحرافه المعياري σ، فأوجد قيمة σ بحيث يكون:
ل(س ⩽ ٣٧,٢٥) = ٠,٠٤٤٦ .

س١٣: تقدّم عدد من الطلبة للالتحاق بإحدى الكليات العسكرية فكان متوسط أطوالهم ١٦٣ سم بانحراف معياري ٤سم، وعند الكشف الطبي وُجد أنّ ١٦ ٪ من المتقدمين دون الحد الأدنى من الطول المطلوب ؛ ولذلك رسبوا في الكشف الطبي. فإذا كانت أطوال الطلبة المتقدمين تتبع توزيعاً طبيعياً قريباً من التوزيع الطبيعي، فاحسب الحد الأدنى للطول الذي تقبله الكلية .

س١٤: ينتج مصنع سبائك من النيكل على شكل أقراص دائرية ، فإذا كان طول نصف قطر السبيكة متغيراً عشوائياً طبيعياً بوسط حسابي ٢,٥ سم ، وانحراف معياري ٠,٠٥ سم ، وتُعَدّ السبيكة صالحة إذا كان طول قطرها لا يقل عن ٤,٨ سم، ولا يزيد عن ٥,٢ سم. فإذا أخذت عشوائياً سبيكة من إنتاج المصنع، فأوجد احتمال أن تكون السبيكة معيبة.

س١٥: إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً وسطه الحسابي μ، وانحرافه المعياري σ وكان: ل(س ⩽ ٤٠) = ٠,١٥٨٧ ،
ل(س > ٥٠) = ٠,٤٠١٣ ، أوجد كلاً من μ، σ.

إجابة السؤال الأول:

أ) مدى ن = {٠، ١، ٢}.

ب) جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي:

س	٠	١	٢
ل (س)	$\frac{٢}{١٥}$	$\frac{٨}{١٥}$	$\frac{١}{٣}$

ج) ت (ن) = $\frac{٦}{٥}$

إجابة السؤال الثاني:

أ) قيمة م = ٧.

ب) جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي:

س	١	٢	٣	٤
ل (س)	$\frac{٥}{٣٢}$	$\frac{٧}{٣٢}$	$\frac{٩}{٣٢}$	$\frac{١١}{٣٢}$

ج) ت (ن) = $\frac{٤٥}{١٦}$.

إجابة السؤال الثالث:

أ) قيمة م = $\frac{١}{٣}$.

ب) جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي:

س	−٣	٠	٣	٦
ل (س)	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{١}{٣}$

ج) ت (ن) = $\frac{٥}{٣}$.

إجابة السؤال الرابع: ت(٧ن − ١) = ٥

◀ إجابة السؤال الخامس:

١) ل(س > ٥) = ل(٦) = $\binom{٦}{٦}\left(\frac{١}{٣}\right)^{٦}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٠} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{٦}$.

٢) ل(٤ < س ≥ ٦) = ل(٥) + ل(٦) = $\binom{٦}{٥}\left(\frac{١}{٣}\right)^{٥}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{١} + \binom{٦}{٦}\left(\frac{١}{٣}\right)^{٦}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٠} = \frac{١٣}{٧٢٩}$.

٣) ل(٣ < س < ٤) = ٠.

◀ إجابة السؤال السادس:

١) ل(س= ٤) = $\binom{٦}{٤}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = \frac{١٥}{٦٤}$.

٢) ل(س ≥ ١) = ١ − ل(٠) = ١− $\binom{٦}{٠}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٠}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٦} = \frac{٦٣}{٦٤}$.

٣) ت (ن) = ٣.

◀ إجابة السؤال السابع:

١) ل (العلامة = ٦٠) عند الإجابة عن ١٢ سؤالاً إجابة صحيحة.

ل(١٢) = $\binom{٢٠}{١٢}\left(\frac{١}{٤}\right)^{١٢}\left(\frac{٣}{٤}\right)^{٨}$

٢) ل (يحصل على تقدير ممتاز ٩٠ علامة) وذلك عندما يجيب عن ١٨ سؤالاً إجابة صحيحة على الأقل.

ل(١٨) + ل(١٩) + ل(٢٠) = $\binom{٢٠}{١٨}\left(\frac{١}{٤}\right)^{١٨}\left(\frac{٣}{٤}\right)^{٢} + \binom{٢٠}{١٩}\left(\frac{١}{٤}\right)^{١٩}\left(\frac{٣}{٤}\right)^{١} + \binom{٢٠}{٢٠}\left(\frac{١}{٤}\right)^{٢٠}\left(\frac{٣}{٤}\right)^{٠}$.

٣) توقّع عدد الأسئلة التي أجاب عنها الطالب = ٢٠ × ٠,٢٥ = ٥ أسئلة.

توقّع علامة الطالب = ٥ × ٥ = ٢٥ علامة

◀ إجابة السؤال الثامن:

١) ل(س= ٥) = $\binom{٥}{٥}\left(٠,٨\right)^{٥}\left(٠,٢\right)^{٠}$

٢) احتمال نجاح ٤ عمليات على الأكثر = ل(٠) + ل(١) + ل(٢) + ل(٣) + ل(٤)

= ١ − ل(٥) = ١− $\binom{٥}{٥}\left(٠,٨\right)^{٥}\left(٠,٢\right)^{٠}$

٣) توقع الفشل عند إجراء ٢٥ عملية جراحية = ٢٥ × ٠,٢ = ٥ عمليات.

◀ إجابة السؤال التاسع:

١) العلامة المعيارية المقابلة للقيمة ٨٠ (ع٨٠ = ٢).

٢) العلامة الخام المقابلة للعلامة المعيارية -٢ تساوي ٦٠.

٣) لا تتأثر العلامة المعيارية إذا ضُرب في عدد موجب؛ أي تبقى كما هي.

◀ إجابة السؤال العاشر:

أ) قيمة ﻫ = -٥,٠.

ب) μ = ٧٤، σ = ٥.

◀ إجابة السؤال الحادي عشر: ك = ٠,٩٣.

◀ إجابة السؤال الثاني عشر: σ = ٧,٥.

◀ إجابة السؤال الثالث عشر: ك = ١٥٩سم.

◀ إجابة السؤال الرابع عشر: احتمال أن تكون السبيكة معيبة = ٠,٠٤٥٦.

◀ إجابة السؤال الخامس عشر: μ = ٤٨، σ = ٨.

الوحدة الخامسة: المتتاليات والمتسلسلات

الدرس	معرفة	التكرار	تطبيق	التكرار	استدلال	التكرار
(٥-١) المتتاليات	يتعرف مفهوم المتتالية.	١	يكتب حدود متتالية إذا عُلم حدها العام.	٤	يحل مسألة غير روتينية على الحد العام للمتتالية.	٣
	يتعرف مفهوم المتتالية المنتهية وغير المنتهية.	١	يجد الحد العام للمتتالية.	٧		
	يتعرف مفهوم الحد العام (الحد النوني)	١				
عدد الأهداف		٣		١١		٣
(٥-٢) المتسلسلات	يتعرف مفهوم المتسلسلة.	١	يجد مفكوك المتسلسلة.	٣	يوظف: $\sum_{ر=1}^{ن} ر$ ، $\sum_{ر=1}^{ن} ر^{2}$ في إثبات صحة بعض العلاقات.	٣
	يتعرف رمز المتسلسلة $\sum$.	١	يعبر عن المتسلسلة باستخدام الرمز $\sum$.	٥	يجد قيمة الثابت لمتسلسلة إذا عُلم مجموعها.	١
	يتعرف المتسلسلة المنتهية.	١	يجد مجموع المتسلسلة.	٤		
	يتعرف المتسلسلة غير المنتهية.	١				
	يتعرف خصائص المجموع $\sum$.	١				
عدد الأهداف		٥		١٢		٤
(٥-٣) المتتاليات الحسابية (العددية)	يتعرف مفهوم المتتالية الحسابية.	١	يميز المتتالية الحسابية من غيرها.	٥	يوظف قانون الحد العام للمتتالية الحسابية في تحديد رتبة أول حد موجب، أو رتبة أول حد سالب لبعض المتتاليات الحسابية	٢
	يتعرف الحد الأول وأساس المتتالية الحسابية.	١	يجد الحد الأول وأساس المتتالية الحسابية.	١	يوظف قانون الحد العام لمتتالية حسابية في حل مسائل حياتية.	٢
	يذكر الصورة العامة للمتتالية الحسابية.	١	يجد قيمة الحد النوني.	١	يحل مسائل غير روتينية على إدخال الأوساط الحسابية.	٢
	يتعرف قانون الحد العام للمتتالية الحسابية.	١	يجد المتتالية الحسابية.	٢		

الدرس	معرفة	التكرار	تطبيق	التكرار	استدلال	التكرار
	يتعرف مفهوم الأوساط الحسابية.	١	يجد رتبة الحد لمتتالية حسابية إذا عُلمت قيمته.	٢		
	يتعرف أن قيمة $\text{د} = \frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{ن} + ١}$ لإدخال ن من الأوساط الحسابية بين أ ، ب.	١	يدخل عدة أوساط حسابية بين عددين .	٢		
			يجد عدد حدود متتالية حسابية منتهية.	١		
عدد الأهداف		٦		١٤		٦
(٤-٥) مجموع المتسلسلة الحسابية	يتعرف قانون مجموع أول ن حداً من المتسلسلة الحسابية: $\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}(\text{أ} + \text{ل})$.	١	يجد مجموع أول ن حداً من حدود متسلسلة حسابية.	٥	يوظف مجموع أول ن حداً من حدود متسلسلة حسابية في حل مسائل منتمية.	٤
	يتعرف قانون مجموع أول ن حداً من المتسلسلة الحسابية: $\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}(٢\text{أ} + (\text{ن} - ١)\text{د})$.	١	يجد المتتالية الحسابية إذا عُلمت قاعدة مجموع متتالية حسابية بدلالة ن.	١		
عدد الأهداف		٢		٦		٤
(٥-٥) المتتالية الهندسية	يتعرف مفهوم المتتالية الهندسية.	١	يميز المتتالية الهندسية من غيرها.	٤	يوظف قانون الحد العام لمتتالية هندسية في حل مسائل حياتية.	٢
	يتعرف مفهوم الحد الأول وأساس المتتالية الهندسية.	١	يجد الحد الأول وأساس المتتالية الهندسية.	٢	يجد قيم المجهول في متتالية هندسية.	١
	يذكر الصورة العامة للمتتالية الهندسية.	١	يجد قيمة الحد النوني لمتتالية هندسية.	٢	يحل مسائل غير روتينية على الوسط الهندسي.	١
	يتعرف قانون الحد العام للمتتالية الهندسية.	١	يجد المتتالية الهندسية.	٢	يحل مسائل تتضمن متتالية حسابية وهندسية.	٢
	يتعرف مفهوم الأوساط الهندسية.	١	يجد رتبة الحد لمتتالية هندسية إذا علمت قيمته.	٢		
			يدخل عدة أوساط هندسية بين عددين.	١		
		٥		١٣		٦

الدرس	معرفة	التكرار	تطبيق	التكرار	استدلال	التكرار
(٦-٥) المتسلسلة الهندسية المنتهية ومجموعها	يتعرف قانون مجموع أول ن حد من المتسلسلة الهندسية: $جـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$، ر ≠ ١. $جـ_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر}$، ر ≠ ١.	١	يجد مجموع أول ن حداً من حدود متسلسلة هندسية.	٧	يوظف قانون مجموع أول ن حد من حدود متسلسلة هندسية في حل تمارين منتمية.	٨
	يستنتج أن: عندما ر = ١ فإن: $جـ_ن = أن$.	١	يجد المتتالية الهندسية إذا علمت قاعدة مجموع متتالية هندسية بدلالة ن.	٢	يكتب الطالب تقريراً عن دور علماء العرب والمسلمين في اكتشاف المتتاليات والمتسلسلات واستخدامها.	١
عدد الأهداف		٢		٩		٩
المجموع		٢٣		٥٧		٣٢

الأخطاء الشائعة والصعوبات المتوقّع أن يواجهها الطلبة

الوحدة الخامسة: المتتاليات والمتسلسلات

الوحدة | الدرس	أخطاء وصعوبات متوقعة	العلاج المقترح
(٥-١) المتتاليات:	يخطئ بعض الطلبة في إيجاد الحد العام لمتتالية حدودها معلومة.	عرض أمثلة متنوعة عن الموضوع. ويمكن إعداد ورقة عمل فيها العديد من المتتاليات وحدودها العامة.
	صعوبة في الربط بين حدود المتتالية لاكتشاف النمط وكتابة الحد العام.	زيادة التمارين والأمثلة ذات العلاقة. قراءة حثيثة للنمط.
(٥-٢) المتسلسلات:	يخطئ بعض الطلبة في التعويض عند إيجاد مجموع متسلسلة معبراً عنها بالرمز $\sum$، خصوصاً التي تحوي تعابير أسية.	تحديد الحد العام بدقة، والتذكير ببعض الخبرات السابقة كقوانين الأسس.
	يخطئ بعض الطلبة في كتابة متسلسلات باستخدام الرمز $\sum$.	تحديد الحد العام بدقة ، والتذكير ببعض الخبرات السابقة .
	يجد بعض الطلبة صعوبة في حفظ القوانين: $\sum_{ر=١}^{ن} ر = \frac{ن(ن+١)}{٢}$ ، $\sum_{ر=١}^{ن} ر^٢ = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٢}$	الإعادة والتكرار من قبل المعلم. إعداد لوحة جدارية بالقوانين تُعلق في غرفة الصف.
	إيجاد قيمة أو قيم الثابت تتطلب استخدام القوانين: $\sum_{ر=١}^{ن} ر$، $\sum_{ر=١}^{ن} ر^٢$، وخصائص $\sum$.	عرض المزيد من الأمثلة التوضيحية.
(٥-٣) المتتالية الحسابية (العددية):	يخطئ بعض الطلبة في حساب أساس المتتالية الحسابية بإجراء عملية الطرح فيكتبون: $ء = ح_١ - ح_٢$	التركيز المستمر على التمكن من حفظ الصيغ الجبرية للقوانين التي تمثل الحد الأدنى للبدء بالحل الصحيح. يمكن تجميع القوانين الخاصة بالدرس وإعداد جدارية بها وتعليقها، والرجوع اليها عند ورودها.
	يخطئ بعض الطلبة فيكتبون مثلاً : $ح_{١٠} = أ + ١٠ ء$	
	يخطئ بعض الطلبة في إدخال عدد من الأوساط الحسابية بسبب كتابة: $ء = \frac{أ - ب}{ن + ١}$ والصحيح $ء = \frac{ب - أ}{ن + ١}$.	
	يخطئ بعض الطلبة في إدخال عدد من الأوساط الحسابية؛ لعدم معرفتهم أنّ عدد الحدود = عدد الأوساط + ٢	

الوحدة | الدرس	أخطاء وصعوبات متوقعة	العلاج المقترح
(٥-٣) المتتالية الحسابية (العددية):	صعوبة في تحديد رتبة أول حد موجب أو سالب من حدود متتالية حسابية؛ لضعف بعض الطلبة في حل المتباينات.	طرح بعض الأسئلة التشخيصية الكاشفة للتحقق من توفر هذه الخبرات السابقة قبيل البدء بعرض المحتوى الجديد، وعلاجه بورقة عمل علاجية.
	صعوبة في إيجاد المتتالية الحسابية إذا عُلمت قيمة حدين منها؛ بسبب ضعف بعض الطلبة في حل معادلتين خطيتين بمتغيرين.	
	صعوبة في إيجاد عدد حدود المتتالية الحسابية المنتهية؛ بسبب عدم تحديد العلاقة بين رتبة الحد الأخير وعدد حدود المتتالية الحسابية.	التركيز على خطوات حل المسألة وما بعد قرائتها وفهمها، بتحديد المعطى والمطلوب ورسم خطة الحل وتنفيذها.
	صعوبة في ترجمة المسائل اللفظية، وتحديد المتغيرات، واختيار القانون المناسب مثل: نشاط ٣ صفحة ٤٢، سؤال ٤، ٥ صفحة ٤٥ الكتاب المدرسي.	
(٥-٤) مجموع المتسلسلة الحسابية:	إيجاد مجموع الأعداد المحصورة بين عددين، وتقبل القسمة على عدد، وخاصة في تحديد آخر حد.	التذكير بقابلية قسمة عدد على آخر.
	صعوبة تحديد أو معرفة حد إذا عُلم مجموع ن حداً الأولى في المتتالية الحسابية فمثلاً: $ع_{١} = جـ_{١}$ ، $ع_{٢} = جـ_{٢} - جـ_{١}$ وهكذا.	طرح المزيد من الأمثلة والأسئلة العلاجية.
	صعوبة في التفريق بين: $\sum_{ر=١}^{ن}$ ، $\sum_{ر=١}^{٢ن}$ كما في سؤال (٥) صفحة ٤٨	
	صعوبة في ترجمة المسائل اللفظية وتحديد المتغيرات واختيار القانون المناسب مثل: نشاط ٢ صفحة ٤٧، سؤال ٢، ٣، ٤ صفحة ٤٨ الكتاب المدرسي.	التركيز على خطوات حل المسألة وما بعد قراءتها وفهمها بتحديد المعطى والمطلوب ورسم خطة الحل وتنفيذها.
(٥-٥) المتتالية الهندسية:	يخطئ بعض الطلبة في حساب أساس المتتالية الهندسية بقسمة أحد الحدود على الذي يليه، أو اختيارات أخرى غير صحيحة.	لفت نظر الطلبة إلى بنية وتكوين المتتالية الهندسية، والطريق الصحيحة لإيجاد أساسها.
	يخطئ بعض الطلبة فيكتب مثلاً : $ع_{١٠} = أ ر^{١٠}$	التركيز على دقة كتابة القانون والتعويض الدقيق فيه.
	يخطئ بعض الطلبة في إيجاد رتبة الحد في متتالية هندسية؛ بسبب ضعفه في حل المعادلات الأسية.	استثارة الخبرات السابقة كحل المعادلات الأسية، وحل المعادلات التربيعية مثل: $س^{٢} = ٩$ وحل المعادلات بالاعتماد على التحليل قبيل البدء بعرض أمثلة، أو بحل أسئلة متعلقة بتلك الخبرات.
	يخطئ بعض الطلبة في حل المعادلة : $س^{٢} = ٩$ مثلاً فيعتبر $س = ٣$ فقط وهذا غير صحيح.	

الوحدة | الدرس	أخطاء وصعوبات متوقعة	العلاج المقترح
	صعوبة في إيجاد المتتالية الهندسية إذا عُلمت قيمة حدين منها؛ بسبب ضعف بعض الطلبة في حل المعادلتين وحل المعادلات المعتمدة على تحليل المقادير الجبرية.	
	يخطئ بعض الطلبة في إدخال عدد من الأوساط الهندسية؛ لعدم معرفته عدد الحدود.	توضيح أنّ عدد الحدود يساوي عدد الأوساط +٢ عند إدخال عدد من الأوساط.
	صعوبة في ترجمة المسائل اللفظية، وتحديد المتغيرات، واختيار القانون المناسب مثل: نشاط ٣ صفحة ٥٠، الأسئلة: ٢، ٣، ٤ صفحة ٥٢ الكتاب المدرسي.	الاهتمام بفهم المقروء، واستخراج المعطيات، وتوظيف بخطوات منطقية للتوصل للحل النهائي.
	صعوبة في إيجاد قيمة أو قيم المجاهيل اعتماداً على الوسط الهندسي.	التمرين من خلال عرض عدد كاف من الأمثلة.
	الخلط في استخدام القوانين المتعلقة بالمتتالية الحسابية والهندسية.	تصميم منظم متقدم يوضح كل من: المتتاليتين، والمفاهيم المتعلقة بهما، والقوانين المستخدمة في الحسابات.
	صعوبة في التعامل مع المسألة المركبة مثل : سؤال ٣ التي تجمع بين المتتالية الحسابية والهندسية.	تشجيع العمل في مجموعات الذي يتخلله تعلم الأقران. التزام خطوات حل المسألة.
(٥-٦) المتسلسلة الهندسية المنتهية ومجموعها:	يخطئ بعض الطلبة عند التعويض في قانون المتسلسلة الهندسية مثل: كتابة البسط $أ ر^{ن} - ١$، وأي خطأ آخر في كتابة القانون.	إعداد بطاقات بصيغ القوانين المطلوبة وتزويد الطلبة بها، للاحتفاظ بها واستخدامها متى لزم. الإيعاز إلى الطلبة توخي الدقة في التعامل مع تلك القوانين، والتعويض بدل المتغيرات المتضمنة فيها بشكل مستمر.
	يخطئ بعض الطلبة فيكتب: $جـ_{ن} = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{ر - ١}$، $ر \neq ١$، أو أي خطأ آخر.	
	يخطئ بعض الطلبة فيكتب: $جـ_{ن} = \frac{ل ر - أ}{١ - ر}$، $ر \neq ١$، أو أي خطأ آخر.	
	يجد بعض الطلبة صعوبة في تحديد القانون المناسب استخدامه لإيجاد مجموع متسلسلة هندسية : $جـ_{ن} = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$، $ر \neq ١$، أو : $جـ_{ن} = \frac{أ - ل ر}{١ - ر}$، $ر \neq ١$.	
	يخطئ بعض الطلبة فيجد $ح_{ن}$ بدلاً من $جـ_{ن}$.	
	صعوبة في ترجمة المسائل اللفظية وتحديد المتغيرات، واختيار القوانين المناسبة المتعلقة في المتسلسلة الهندسية مثل : سؤال ٤ ، ٥ ، ٦ صفحة ٥٦ الكتاب المدرسي .	إعطاء الوقت الكافي للطلبة للتفكير في إجراءات الحل . تفعيل العمل في مجموعات والإفادة من تعليم الأقران.

نموذج تحضير الدرس (٥-٤)

مجموع المتسلسلة الحسابية

عدد الحصص :٢

أولاً: مرحلة الاستعداد

١) أهداف الدرس:

١- أن يجد الطالب مجموع أول ن حد من متسلسلة حسابية معلومة الحدود.

٢- أن يجد الطالب مجموع متسلسلة حسابية معطى حدها العام.

٣- أن يستنتج : $\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}(\text{أ} + \text{ل}) = \frac{\text{ن}}{٢}(٢\text{أ} + (\text{ن}-١)\text{د})$

٤- أن يحل مسائل تطبيقية وحياتية تتضمن إيجاد مجموع متسلسلة حسابية.

٥- أن يوظف برنامج Microsoft Mathematics في إيجاد مجموع متسلسلة حسابية.

٢) المهارات المتوقع امتلاكها من الطلبة بعد نهاية الدرس

١- حساب مجموع متسلسلة حسابية منتهية.

٢- حل مسائل حياتية مرتبطة بالموضوع.

٣- توظيف برامج حاسوبية في إيجاد مجموع متسلسلة حسابية.

٣) الخبرات السابقة:

- مفهوم المتسلسلة الحسابية ، حدودها ، أساسها.
- قانونا حساب مجموع المتسلسلة الحسابية.
- التحقق باستخدام برنامج Microsoft Mathematics من صحة مجموع المتسلسلة الحسابية.

٤) المفاهيم الخاطئة، والصعوبات المتوقّع أن يواجهها الطلبة:

قد يقع الطلبة في أخطاء، منها:

المفاهيم الخاطئة والصعوبات (المتوقعة)	مقترحات الحلول
توظيف القانون المناسب في إيجاد المجموع.	ضرورة قراءة المعطيات بعناية، والمطلوب بدقة قبل البدء بالحل.
دقة كتابة القانون حيث ينسى بعض الطلبة قسمة ن على ٢ عند كتابة أي من صيغتي قانون مجموع المتسلسلة الحسابية.	تدوين القانون على جدارية وتعليقه على جدار الغرفة الصفية والتذكير بدقة استخدامه.

الصعوبات المتوقّع أن يواجهها الطلبة:

تتنوع الصعوبات المتوقع أن يواجهها الطلبة حسب المجالات المختلفة وفق مسبباتها، فمثلاً :

- صعوبات تتعلق بالتحصيل، وقد تم توضيح بعضها سابقاً .
- صعوبات تتعلق بالتكنولوجيا تتمثل في عدم امتلاك الطلبة للبرامج الحاسوبية اللازمة لتوظيفها في الدرس ، أو ضعف القدرة على استخدامها.

العلاج: يتلخص في توفير هذه البرامج ، والتدريب على استخدامها.

- صعوبات تعلم قد تعود إلى نقص الخبرات السابقة لدى الطلبة والانحدار، والانزلاق السريع في تقديم المفاهيم والمصطلحات والرموز والإجراءات الجديدة من بعض المعلمين.

العلاج: التشخيص الدقيق لنقاط القوة والضعف في أداء الطلبة، والعمل على تطويق نقاط الضعف ، وتوظيف بعض استراتيجيات التدريس النشط مثل: تعليم الأقران، والعصف الذهني، والاستقصاء، والاستقراء في تقديم الخبرات الجديدة.

- صعوبات حركية أثناء تنفيذ الأنشطة سواء كانت حركة زائدة أو خمول.

العلاج: يتلخص في إتاحة الفرصة للطلبة، وتشجيع المشاركة والمناقشة في الحل مع التنظيم.

- صعوبات نفسية تتعلق بالهالة من المبحث والاتجاه السلبي لدى بعض الطلبة نحوه.

العلاج:

- الحديث عن أهمية الموضوع في الحياة العملية.
- التعاون مع المرشد ومدير المدرسة في حلّ بعض المشكلات النفسية التي يعاني منها بعض الطلبة وخاصة بسبب المشكلات الأسرية، والزملاء التي ينجم عنها عدم انتباه أو تركيز.
- التواصل الدائم مع أولياء الأمور للمساعدة في حل بعض المشكلات.
- توظيف أسلوب التدريس الفردي (تفريد التعليم).

أصول التدريس:

أ) المحتوى العلمي:

مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية ، قانونا حساب هذا المجموع.

ب) استراتيجيات التدريس:

الصف المقلوب ، تعليم تعاوني ، عروض حاسوب، عصف ذهني.

ج) مصادر المعرفة المستخدمة:

الكتاب المقرر ، السبورة ، بوسترات ، كمبيوتر + ال سي دي ، برامج حاسوبية مثل Microsoft Mathematics، لوحات جدارية

آليّات التقويم:

١- الملاحظة المباشرة أثناء المناقشة وأثناء عمل المجموعات.
٢- الاطلاع على أعمال الطلبة الذاتية، وتقديم التغذية الراجعة الفورية أو المؤجلة.
٣- سلم تقدير لتقييم عروض الطلبة وآخر لتقييم استخدام البرنامج المحوسب.

ثانياً: أثناء تنفيذ الدرس

تفقّد وجود الطلبة وتوفر وسائلهم التعليمية، وجاهزية عمل المجموعات لتنفيذ الدرس.

العرض

١- تدوين عنوان الدرس وأهدافه على السبورة.

٢- تقسيم الطلبة إلى(٤-٥) مجموعات مسبقاً، وتوزيع المهام بينها:

- تتولى المجموعة الأولى البحث عن المتسلسلة الحسابية للتذكير بها وبحدودها وبحدها العام، يمكن أن يكون ذلك من خلال ملصقات أو الكتابة على السبورة، ويناقش الطلبة في تلك المفاهيم، توزع المهام الخاصة بين أعضاء هذه المجموعة : أحدهم يعد الملصق، وآخر يعلقه على السبورة، وآخر يكتب ملخصات ما يُقرّه الصف من مفاهيم، وآخر يقيّم أداء الطلبة ...
- تتولى المجموعة الثانية تنفيذ النشاط الأول، تُوزّع المهام الخاصة بأفراد هذه المجموعة بحيث يقرأ الأول متن النشاط (١)، والثاني يحضر تقريراً عن قانون العمل الفلسطيني يتضمن: متى تم إعداده؟ ومن أقره؟ بعض فقراته الخاصة بالحد الأدنى لأجور العاملين ......، والثالث يحكم فيما إذا كانت الأجور تشكّل متسلسلة حسابية، وآخر يعرض قانون مجموع المتسلسلة الحسابية ....
- يقوم أحد أفراد المجموعة الثالثة بعرض قانون حساب مجموع المتسلسلة الحسابية الثاني، بينما يتولى آخر التحقق من صحة المجموع لبعض المتسلسلات الحسابية باستخدام القانونيْن، ويقوم آخر بإثبات صحة إحدى صيغتيّ قانون مجموع المتسلسلة الحسابية، ويقوم رابع بحلّ مثال (١)، بينما آخر يعرض حل مثال (٢) باستخدام برنامج مايكروسوفت ماثيماتيكس لإيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية.
- تتولى المجموعة الرابعة عرض حل مثال (٣)، وتنفيذ حل تمرينيّ ١، ٢ من تمارين ومسائل ٥-٤، وتُعِدُّ المجموعة عرض بوربوينت لعرض حل المثال أو التمرينين، وتُوزع المهام فيما بين أعضاء المجموعة.
- تتولى المجموعة الأخيرة مهام تنفيذ حل مثال ، وحلول تمارين ومسائل ٣، ٤، ٥، تُوظّف استراتيجية العصف الذهني يتبعها عرض الحلول باستخدام بوربوينت، وتُوزع المهام بين أعضاء المجموعة.

٣- المعلم ميسّر ومتابع للطلبة في مراحل عمل المجموعات كافة.

الإغلاق والتقويم

يُجمل المعلم أفكار الدرس ، ويذكر الطلبة بقانونيّ حساب مجموع المتسلسلة الحسابية، ويمكن تزويد الطلبة بأنشطة الإثراء اللازمة:

نشاط إثرائي مقترح:

- في المتسلسلة ٩ + ١٨ + ٢٧ + ... + ٩٠٠ ، أجد مجموع آخر ١٥ حداً بطرق مختلفة.
- أجد مجموع أول ١٠ حدود بدءاً من الحد العاشر للمتسلسلة : (١٥ + ٢٤) + (١٧ +٢٦) + (١٩ + ٢٨) + ... بأكثر من طريقة.

س١: اكتب الحد العام لكل من المتتاليات الآتية:

أ) ٠، ٢، ٦، ١٢، ....

ب) ١، $\frac{٢}{٣}$، $\frac{٤}{٥}$، $\frac{٨}{٧}$، ....

س٢: اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية (ح~ن~):

أ) ح~ن~ = ٢جتا $\frac{ن\pi}{٣}$.

ب) $ح_ن = \begin{cases} ٢ & ،\ ن = ١ \\ ح^٢_{ن-١} & ،\ ن > ١ \end{cases}$ ، ن $\in$ ص$^+$.

س٣: للمتتالية ح~ن~ = (أ^ن + ب ن) حيث أ، ب $\in$ ح إذا كان ح~١~ = ١، ح~٢~ = ٥ فأوجد:

١) أ، ب. ٢) ح~٤~.

س٤: اكتب المتسلسلة الآتية باستخدام رمز المجموع $\sum$:

أ) $\frac{١}{٤} + \frac{٤}{٥} + \frac{٩}{٦} + \frac{١٦}{٧} + ... + \frac{١٤٤}{١٥}$.

ب) ٢ × ٤ + ٤ × ٥ + ٦ × ٦ + ...

س٥: في المتتالية الحسابية: ٥٧، ٥٤، ٥١، ... أوجد:

١) رتبة وقيمة أول حد سالب. ٢) عدد الحدود الموجبة. ٣) هل يوجد حد قيمته −٢٠ في المتتالية؟

س٦: قاعة اجتماعات في إحدى المدارس، فيها عدد من الكراسي مرتبة في ٢٠ صفاً، فإذا كان في الصف الأول ١٠ كراسي، وفي الصف الثاني ١٢ كرسياً، وفي الصف الثالث ١٤ كرسياً ... وهكذا.

أ) ما عدد الكراسي الموجودة في الصف الثامن من صفوف القاعة؟

ب) ما مجموع الكراسي في القاعة؟

جـ) إذا خُصّصت الكراسي في الصفوف الثلاثة الأولى لأعضاء مجلس الآباء والمعلمين، والصفوف الأخرى للطلبة، وكانت جميع مقاعد القاعة مشغولة، فما عدد الطلبة؟

س٧: متوازي مستطيلات حجمه ١٠٥سم^{٣} ، أوجد أبعاده الثلاثة إذا عُلم أنّ مجموعها ١٥سم، وأنها في تتابع حسابي.

س٨: متسلسلة حسابية حدها السادس والثلاثون يساوي صفراً، إذا كان مجموع ن حداً الأولى منها يساوي ضعفيّ مجموع الحدود الخمسة الأولى منها فأوجد ن، ومن ثم أجد مجموع ٤٩ حداً الأولى من هذه المتسلسلة ابتداء من حدها الثاني عشر.

س٩: إذا كان م وسطاً حسابياً بين ل، ن فأثبت أن : $٣\left(\frac{\text{٣م} + \text{٢ن}}{\text{م} - \text{ل}}\right) + ٥\left(\frac{\text{م} + \text{٢ل}}{\text{م} - \text{ن}}\right) = ١٦$.

س١٠: حنفية تصب المياه في حوض، فأفرغت فيه ٤٠ لتراً في الساعة الأولى، ثم بعد ذلك أخذت تصب فيه بزيادة ٣ لترات في كل ساعة عن الساعة السابقة لها. فبعد كم ساعة يكون في الحوض ٤٠٤ لترات؟

س١١: متتالية هندسية حدها الثالث ١٢، وحدها الثامن −٣٨٤ أوجد المتتالية، وأثبت أنّ: $\text{ح}_{١١} + ٣٢\,\text{ح}_{٦} = ٠$.

س١٢: ما رتبة أول حد قيمته أكبر من ١٠٠٠ في المتتالية الهندسية : ٣، ٦، ١٢، ......؟

س١٣: صهريج مياه سعته ٦٣٠٥ لترات، كان فارغاً ثم ملئ بالماء بواسطة صنبور يصب في الساعة الأولى ١٢٨ لتراً ، ويصب في كل ساعة تالية مرة ونصف مرة قدر ما صبّه في الساعة السابقة. بعد كم ساعة يمتلئ الصهريج ؟

س١٤: إذا أدخلت ٤ أوساط هندسية بين عددين وكان مجموع الوسطين الأول والرابع يساوي ٩٠ ، ومجموع الوسطين الثاني والثالث يساوي ٦٠ ، فما هما العددان ؟

س١٥: ثلاثة أعداد في تتابع حسابي مجموعها ١٥ ، فإذا طُرح من أولهما واحد ومن ثانيهما واحد، وأضيف إلى ثالثهما واحد كوّنت ثلاثة حدود متتالية من متتالية هندسية. أوجد الأعداد الثلاثة.

س١٦: إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د أربع كميات متتالية من متتالية هندسية.
أثبت أنّ: أب + أد + د جـ > ٣ ب جـ

إجابة الأسئلة الإثرائية:

إجابة السؤال الأول:

أ) ($ح_ن = ن^٢ - ن$).

ب) ($ح_ن = \frac{٢^{ن-١}}{٢ن - ١}$).

إجابة السؤال الثاني:

أ) الإجابة : (١، -١، -٢، -١، ١) .

ب) الجواب : المتتالية (٢، ٤، ١٦، ٢٥٦، ٦٥٥٣٦).

إجابة السؤال الثالث:

١) (أ = ٣، ب = -٢) أو (أ = -١، ب = ٢).

٢) $ح_٤ = ٧٣$ أو $ح_٤ = ٩$.

إجابة السؤال الرابع:

أ) $\sum_{ر=١}^{١٢} \frac{ر^٢}{ر+٣}$

ب) $\sum_{ر=١}^{\infty} ٢ر (ر+٣)$

إجابة السؤال الخامس:

١) رتبة أول حد سالب ن = ٢١، وقيمته $ح_{٢١} = -٣$.

٢) عدد الحدود الموجبة ١٩ .

٣) لا.

إجابة السؤال السادس:

أ) ٢٤ كرسي

ب) مجموع الكراسي ٥٨٠ كرسياً.

جـ) عدد الطلبة = ٥٤٤ طالباً.

▸ **إجابة السؤال السابع:** الأبعاد الثلاثة هي: ٣، ٥، ٧ أو ٧، ٥، ٣ .

▸ **إجابة السؤال الثامن :** (ن = ١١، ن = ٦٠)

▸ **إجابة السؤال التاسع:**

إذا كان م وسطاً حسابياً بين ل، ن فأثبت أن : $٣\left(\frac{٣م + ٢ن}{م - ل}\right) + ٥\left(\frac{م + ٢ل}{م - ن}\right) = ١٦$.

الإثبات : ل = أ، م = أ + د، ن = أ + ٢د نعوض في الطرف الأيمن فيتحقق الاثبات.

▸ **إجابة السؤال العاشر:** الجواب : بعد ٨ ساعات.

▸ **إجابة السؤال الحادي عشر:** (٣، −٦، ١٢، ....)

▸ **إجابة السؤال الثاني عشر:** رتبة أول حد أكبر من ١٠٠٠ تساوي ١٠ .

▸ **إجابة السؤال الثالث عشر:** الصهريج يمتلئ بعد ٨ ساعات.

▸ **إجابة السؤال الرابع عشر:** الجواب : ٥، ١٦٠ .

▸ **إجابة السؤال الخامس عشر:** (الأعداد الثلاثة هي : ٣، ٥، ٧ أو ٩، ٥، ١)

▸ **إجابة السؤال السادس عشر:**

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د أربع كميات موجبة متتالية من متتالية هندسية، أثبت أنّ: أب + أد + د جـ > ٣ ب جـ

الحل: $\frac{أ + جـ}{٢}$ > ب ومنها أ + جـ > ٢ب ...... (١)

$\frac{ب + د}{٢}$ > جـ ومنها ب + د > ٢جـ ...... (٢) بضرب المعادلة (١) في (٢)

(أ + جـ) (ب + د) > ٢ب × ٢جـ

أب + أد + ب جـ + د جـ > ٤ ب جـ

ومنها أب + أد + د جـ > ٣ ب جـ

الدرس	معرفة	التكرار	تطبيق	التكرار	استدلال	التكرار
(٦-١) القطع المكافئ	يعرِّف القطع المكافئ.	١	يجد معادلة القطع المكافئ إذا عُلم اثنان من عناصره (الرأس، البؤرة، الدليل).	٦	يجد معادلة القطع المكافئ في الوضع القياسي المار بنقطة معلومة.	٣
	يتعرف شكل منحنى القطع المكافئ.	١	يرسم منحنى القطع المكافئ إذا عُلم اثنان من عناصره(الرأس، البؤرة، الدليل).	٢	يبرهن أن المعادلتين الوسيطتين تمثلان قطعاً مكافئاً.	٣
	يتعرف معادلة القطع المكافئ في الوضع القياسي.	١	يحدد رأس القطع المكافئ، وبؤرته، ودليله إذا عُلمت معادلته.	٥		
	يتعرف إحداثيا البؤرة للقطع المكافئ.	١	يرسم منحنى القطع الناقص إذا عُلمت معادلته.	١		
	يتعرف معادلة الدليل للقطع المكافئ.	١				
	يذكر قانون القطع المكافئ حسب اتجاه الفتحة.	١				
عدد الأهداف		٦		١٤		٦
(٦-٢) القطع الناقص	يعرِّف القطع الناقص.	١	يرسم منحنى القطع الناقص إذا عُلمت معادلته.	٢	يبرهن أنّ المعادلتين الوسيطتين تمثلان قطعاً ناقصاً.	١
	يتعرف شكل منحنى القطع الناقص.	١	يحدد نوع القطع الناقص.	٤	يحل مسائل تطبيقية على القطع الناقص.	٢
	يتعرف معادلة القطع الناقص في الوضع القياسي (السيني، الصادي).	١	يجد معادلة القطع الناقص إذا عُلم ما يكفي من عناصره: (الرأسان، البؤرتان، الاختلاف المركزي ...)	٥		
	يتعرف أن: طول المحور الأكبر= ٢أ	١	يجد معادلة القطع الناقص كمحل هندسي.	٢		
	يتعرف أنّ طول المحور الأصغر = ٢ب .	١	يجد رأسيّ القطع الناقص، وبؤرتيه، ومركزه، واختلافه المركزي، وطول المحور الأكبر ومعادلته، وطول المحور الأصغر ومعادلته إذا عُلمت معادلته.	٥		

الدرس	معرفة	التكرار	تطبيق	التكرار	استدلال	التكرار
	يتعرف أنّ البعد بين البؤرتين هو ٢جـ .	١				
	يوضح أن : $أ^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢}$.	١				
	يعرِّف الاختلاف المركزي للقطع الناقص.	١				
عدد الأهداف		٨		١٨		٣
(٦-٣) القطع الزائد	يعرِّف القطع الزائد.	١	يرسم منحنى القطع الزائد إذا عُلمت معادلته.	٤	يجد قيمة الثابت لكي يمثل معادلة قطع مخروطي زائد في الوضع القياسي.	٢
	يتعرف شكل منحنى القطع الزائد.	١	يجد معادلة القطع الزائد إذا عُلم ما يكفي من عناصره (الرأسان، البؤرتان ،الاختلاف...) .	٥	يبرهن أن المعادلتين الوسيطتين تمثلان قطعاً زائداً.	١
	يتعرف معادلة القطع الزائد في الوضع القياسي (السيني ، الصادي).	١	يجد رأسيّ القطع الزائد، وبؤرتيه، ومركزه، واختلافه المركزي، وطول المحور القاطع، وطول المحور المرافق إذا عُلمت معادلته.	٧	يوظف الطالب برنامج جيوجبرا في تمثيل القطوع المخروطية.	١
	يتعرف أن طول المحور القاطع = ٢أ.	١	يجد معادلة القطع الزائد كمحل هندسي.	٢		
	يتعرف أن طول المحور المرافق = ٢ب.	١				
	يتعرف أن البعد بين البؤرتين هو ٢جـ.	١				
	يستنتج أن : $جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$.	١				
	يعرِّف الاختلاف المركزي للقطع الزائد.	١				
عدد الأهداف		٨		١٨		٤
المجموع		٢٢		٥٠		١٣

الأخطاء الشائعة والصعوبات المتوقّع أن يواجهها الطلبة

الوحدة السادسة: القطوع المخروطية

الوحدة | الدرس	أخطاء وصعوبات متوقعة	العلاج المقترح
(٦-١) القطع المكافئ:	يخطئ بعض الطلبة في كتابة معادلة القطع المكافئ، لضعفهم في تحديد القانون المناسب حسب اتجاه الفتحة.	التركيز على أنه عندما يكون التربيع في المعادلة لـ س، فإن اتجاه فتحة هذا القطع تكون للأعلى أو للأسفل حسب إشارة معامل ص ، بينما تكون الفتحة لليمين أو اليسار إذا كان التربيع لـ ص. تصميم منظم متقدم (مخطط سهمي) يوضّح الحالات كافة، وعرضه أمام الطلبة.
	كتابة معادلة الدليل بدلاً من معادلة التماثل والعكس صحيح .	التركيز على دقة المفاهيم والاستعانة بالرسم حيثما تتطلب ذلك.
	إيجاد قيمة أ (سالبة) وهي دائماً موجبة.	
	خطأ بعض الطلبة في اختيار الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافيء، أو عند تحديد عناصره.	التأكيد على الرسم وإعطاء تدريبات كافية.
	صعوبة في تحديد الحالة الخاصة بالقطع المكافئ حسب الجهة المفتوحة: (يمين - يسار - للأعلى - للأسفل).	عرض الأمثلة المتنوعة وبالعدد الكافي. إعداد ورقة عمل إثرائية تركز على الخبرات المقابلة. تكليف الطلبة التعبير عن الحالات المختلفة للقطع المكافيء، والفروق بينها بلغته الخاصة. تكليف الطلبة إعطاء الأمثلة.
	تعامل الطالب مع حالة واحدة عند إيجاد معادلة القطع المكافئ في الوضع القياسي المار بنقطة معلومة.	
	صعوبة في برهنة أنّ معادلتين وسيطتين تمثلان قطعاً مكافئاً، وخاصة في التعامل مع المتطابقات المثلثية.	
(٦-٢) القطع الناقص:	يخطئ بعض الطلبة في اختيار الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص، وهل هو سيني أو صادي؟ أو عند تحديد عناصره.	التأكيد على أهمية الرسم أثناء الحل وإعطاء تدريبات كافية .
	يخطئ بعض الطلبة في إيجاد معادلة القطع الناقص من خلال توظيف تعريفه الأساسي كمحل هندسي.	التركيز على المفهوم ووصفه الدقيق.
	يخطئ بعض الطلبة فيكتب مثلاً : $جـ^2 = أ^2 + ب^2$، أو أي صورة خاطئة أخرى.	يُعِد الطلبة عرض بور بوينت يتضمن حالتيّ القطع الناقص ، يوضح العلاقات بين الثوابت المتضمنة في معادلة القطع المذكور ، والمفاهيم الأخرى، وآليّة إيجاد قيمها .
	كتابة الاختلاف المركزي هـ على الصورة $هـ = \frac{أ}{جـ}$ أو أي صورة خاطئة أخرى.	

الوحدة | الدرس	أخطاء وصعوبات متوقعة	العلاج المقترح
	يخطئ بعض الطلبة فيجد طول المحور الأكبر بدلاً من الأصغر والعكس.	التفريق بينهما من خلال الرسوم التوضيحية.
	عدم التمييز بين القطع الناقص السيني والقطع الناقص الصادي.	ذكر الفرق بين معادلتيّ القطعين السيني والصادي بلغة الطلبة يتضمن العلاقة بين الثابتين: أ ، ب
	عند إيجاد معادلة قطع ناقص ما بنقطتين يواجه صعوبة في حل المعادلات.	التحقق من قدرات الطلبة على حل المعادلات من خلال طرح بعض الأسئلة الكاشفة.
	صعوبة في برهنة أنّ معادلتين وسيطتين تمثلان قطعاً ناقصاً، وخاصة في التعامل مع المتطابقات المثلثية.	التدريب على التعامل مع هذا النوع من الأسئلة والتذكير ببعض المتطابقات المثلثية.
القطع الزائد: (٦-٣)	يخطئ بعض الطلبة في اختيار الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد، وهل هو سيني أم صادي ؟ أو عند تحديد عناصره.	الاهتمام بالرسم عند عرض الأمثلة وحل الأسئلة، وإعطاء تدريبات كافية، والتذكير بنوع القطع والعلاقة بين الثوابت الواردة في المعادلة.
	يخطئ بعض الطلبة في إيجاد معادلة القطع الزائد، من خلال توظيف تعريفه الأساسي كمحل هندسي.	التركيز على المفهوم ووصفه الدقيق.
	يخطئ بعض الطلبة فيكتب مثلاً :$\text{أ}^{٢} = \text{جـ}^{٢} + \text{ب}^{٢}$ أو أي صورة خاطئة أخرى.	يعد الطلبة ملصقاً، يوضّح العلاقات بين الثوابت المتضمنة في معادلة القطع المذكور ، والمفاهيم الأخرى وآليّة إيجاد قيمها.
	كتابة الاختلاف المركزي هـ على الصورة $\text{هـ} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}}$ أو أي صورة خاطئة أخرى.	
	يخطئ بعض الطلبة فيجد طول المحور القاطع بدلاً من المرافق والعكس.	
	عدم التمييز بين القطع الزائد السيني والقطع الزائد الصادي.	ذكر الفرق بين معادلتيّ القطعين السيني والصادي بلغة الطلبة، الذي يتضمن العلاقة بين الثابتين: أ ، ب.
	عند إيجاد معادلة قطع ناقص ما بنقطتين صعوبة في حل المعادلات.	توقع وجود الصعوبة وطرح الأمثلة الكفيلة بعلاجها.
	صعوبة في برهنة أن معادلتين وسيطتين تمثلان قطعاً زائداً، وخاصة في التعامل مع المتطابقات المثلثية.	التدريب على التعامل مع هذا النوع من الأسئلة، والتذكير ببعض المتطابقات المثلثية.
	صعوبة في التعامل مع بعض المسائل العملية مثل: نشاط ٣ صفحة ٧٧ الكتاب المدرسي.	تشجيع العمل التعاوني في مجموعات ، وإعطاء الزمن الكافي للتفكير في آلية العمل ، تقديم الدعم من المعلم أثناء عمل المجموعات.
	تحديد نوع القطع المخروطي إذا كان في معادلته ثابتاً، وتحديد القيم المحتملة للثابت مثل: سؤال ٥ صفحة ٧٨ الكتاب المدرسي.	

عدد الحصص: ٤

أولاً: مرحلة الاستعداد

١) أهداف الدرس:

١- أن يتعرف القطع الناقص كمحل هندسي لنقطة تتحرك في المستوى.
٢- أن يتعرف القطع الناقص بوضعه القياسي.
٣- ان يتعرف مفاهيم متعلقة بالقطع الناقص: الرأسين ، البؤرتين، المحورين ، الاختلاف المركزي.
٤- أن يتعرف القطع الناقص السيني.
٥- أن يكتب معادلة القطع الناقص السيني.
٦- أن يرسم شكلاً تقريبياً لقطع ناقص سيني أو صادي.
٧- أن يجد عناصر القطع الناقص: الرأسين ، البؤرتين، المحورين ، الاختلاف المركزي، إذا عُلمت معادلته.
٨- أن يجد طوليّ المحورين إذا عُلمت معادلة القطع الناقص، أو بعض عناصره.
٩- أن يحل مسائل عملية على القطع الناقص.
١٠- أن يرسم القطع الناقص بطرق مختلفة.

٢) المهارات المتوقع امتلاكها من الطلبة بعد نهاية الدرس

١- إعطاء أمثلة في الطبيعة على القطع الناقص.
٢- تكوين قطع ناقص من مخروط من مادة لينة كالمعجونة، أو البطاطا.
٣- رسم قطع ناقص على لوحة كرتونية أو خشبية.
٤- تحديد نوع القطع الناقص "سيني أو صادي من خلال معادلته، أو بؤرتيه، أو رأسيه.
٥- كتابة معادلة قطع ناقص مرسوم ممثلة عليه بعض عناصره.
٦- تمييز أشكال الدائرة، والقطع المكافئ، والقطع الناقص.

٣) الخبرات السابقة:

١- المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى.
٢- قطع مخروطي، قطع مكافىء.
٣- حل معادلات تربيعية.
٤- حل نظام من المعادلات التربيعية.
٥- مهارات حسابية تتضمن الجمع والطرح والقسمة والعمليات على الجذور التربيعية.....

٤) المفاهيم الخاطئة، والصعوبات المتوقّع أن يواجهها الطلبة:

المفاهيم الخاطئة والصعوبات المتوقعة	مقترح الحلول
عدم التمييز بين القطع الناقص السيني والصادي.	التركيز على أنّ $أ^2$ هي الأكبر، وأن المقام الأكبر يحدد نوع القطع فإذا كان المقام الأكبر مقام $س^2$ فهو سيني، وإذا كان المقام الأكبر مقام $ص^2$ فهو صادي.

الخلط بين عناصر القطع الناقص، مثل: استخدام إحداثيات البؤرتين بدل الرأسين، أو بدل ب.	التركيز في كل مثال وسؤال على أن (٢) أكبر من (جـ)، وتمثل الإحداثي السيني أو الصادي للرأس، بينما جـ هي الأصغر وتمثل الإحداثي السيني أو الصادي للبؤرة.
الخلط بين القطع الناقص والدائرة والخط المستقيم.	إحدى صور معادلة الخط المستقيم هي : $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{ب} = ١$ التركيز على أنه إذا كانت ٢ = ب في معادلة القطع الناقص فإنّ المعادلة تصبح للدائرة.

الصعوبات التي يمكن أن تواجه الطلبة:

- صعوبات تتعلق بإجراء العديد من العمليات الرياضية على الأعداد والحدود الجبرية.

  العلاج: الاهتمام بالكشف عن هذه الصعوبات في بداية الدرس، وتقديم العديد من الأمثلة والتمارين لتلافيها.
- صعوبات في التمييز بين أنواع القطع وتحديد عناصره.

  العلاج:
  - إعداد عرض محوسب باستخدام بوربوينت، أو إعداد ورقة عمل تركّز الخبرات وتيسير تلك الصعوبات.
  - عرض الأمثلة بالعدد الكافي التي توضح الحالات كافة.
  - تصميم منظم متقدم يوضح المعادلة بالحالات الممكنة، والعلاقات بين الثوابت وتوظيفه في التعليم.
- صعوبات تتعلق بالعلاقات بين الثوابت الواردة في معادلة القطع الناقص.

أصول التدريس:

أ) المحتوى العلمي:

- مفهوم القطع الناقص السيني والصادي وتحديد عناصره، معادلته في الوضع القياسي.
- تصميم نموذج لمقطع من مخروط بشكل قطع ناقص.
- تنفيذ نشاط لرسم قطع ناقص في ساحة المدرسة أو على أرضية الصف.
- التمييز بين القطع الناقص السيني والصادي.
- إيجاد معادلة قطع ناقص إذا علم ما يكفي من عناصره والعكس.
- استخدام خصائص ومعادلات القطع الناقص بنوعيه لحل مسائل حياتية.

ب) استراتيجيات التدريس:

- الاستكشاف من خلال تكليف بعض الطلبة إحضار صور من الطبيعة ومقاطع فيديو عن الموضوع.
- اللعب وتبادل الأدوار وتمثيل منحنى قطع ناقص.
- العمل التعاوني في تصميم الرحلات المعرفية ومن خلال تنفيذ حل نشاط (٣).
- المناقشة وطرح الأسئلة بعد كل نشاط، وكل مفهوم يعرض على الطلبة.

آليّات التقويم:

١- متابعة إجابات الطلبة عن الأمثلة والأسئلة والأنشطة المنفذة خلال الحصة.
٢- متابعة الدقة في العمل أثناء الرسم والالتزام بالوقت في الأعمال الموكلة اليهم.
٣- تصميم نموذج لتقييم الرحلات المعرفية المنفذة من قبل الطلبة.

ثانياً: أثناء تنفيذ الدرس

التهيئة:

- تفقد حضور وغياب الطلبة، وكتابة اليوم والتاريخ على السبورة وعنوان الدرس.
- مناقشة القطع الناقص على أنه أحد القطوع المخروطية وسبب تسميته بذلك.
- إحضار نموذج مخروط من البطاطا، وعمل مقطع منه يشكل قطعاً ناقصاً.
- قراءة الطلبة النشاط (١) ثم توجيه أسئلة للطلبة ومناقشة إجاباتهم.

أنشطة لتحقيق الدرس:

١- تكليف مجموعة من الطلبة بجمع معلومات حول القطع الناقص من الطبيعة لأشكال إهليلجية تمثل قطعاً ناقصاً، كصور ورسومات تُعرض باستخدام البوربوينت.

٢- تنفيذ نشاط رسم قطع ناقص داخل غرفة الصف، أو في ساحة المدرسة بواسطة مسمارين يمثلان البؤرتين ،وخيط ، وقلم بمشاركة الطلبة. وأطرح السؤال :هل هناك طرق أخرى للرسم؟ اطلب إلى الطلبة إحضار مقطع فيديو يبين طريقة أخرى لرسمه.

٣- طرح الجزء الأول من الدرس، وهو تعريف القطع الناقص، وعرض فيديو يوضح ذلك.

٤- تكليف الطلبة تصميم رحلات معرفية في مجموعات.

إجراءات التنفيذ

- أرسم قطعاً ناقصاً سينياً، وأبيّن عناصره، وصفاته.
- أعرض مثال (١).
- أكلف الطلبة في المجموعة الأولى تطبيق نشاط (٢) عملياً، وبيان أهمية النشاط كونه يربط معادلة القطع الناقص وعناصره بمسائل عملية.
- أناقش الطلبة في الحالة الثانية من القطع الناقص - القطع الناقص الصادي - حيث أعرض رسماً للقطع، وأبين عناصره والفرق بينه وبين القطع الناقص السيني، وأكلف الطلبة تنفيذ نشاط (٣) في مجموعة.
- أعرض حل المثال الثاني وأطلب تنفيذ حل السؤال الثاني من تمارين ومسائل(٦-٢) لحلّه بشكل فردي، ثم متابعة الحل.
- تكليف طلاب المجموعة الثالثة بعرض ما فهموه عن القطع الناقص، وعرض أمثلة عليه، وكذلك عرض نشاط ٤
- - يتم عرض مثال (٤) وسؤاليّ: ١ ،٣ من قبل المجموعة الرابعة ومناقشتها من قبل المجموعة على السبورة.
- تكليف المجموعة الخامسة تنفيذ نشاط ٥، وحل السؤالين: الرابع والخامس بشكل فردي، ثم تقييم حلولهم . (يدير أعضاء المجموعة النقاش والمتابعة).
- تخصيص وقت لعرض الرحلات المعرفية التي صمّمها الطلبة.

الإغلاق والتقويم

١- الاطّلاع على دفاتر الطلبة ومتابعة الحلول وتقديم الدعم من إرشاد أو تعزيز.

٢- تقييم الرحلات المعرفية التي صمّمها الطلبة.

٣- إبراز بعض الأخطاء المفاهيمية والإجرائية، ومعالجة الأخطاء التي تنتج أثناء الحل .

٤- مراجعة مفاهيم وإجراءات الدرس، والاستماع لما يطرحه الطلبة من أسئلة.

٥- إعطاء أسئلة إثرائية للمادة في نهاية الدرس.

س١: جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠، ٠)، ومعادلة دليله ص = − ٤، ثم ارسم شكلاً تقريبياً له.

س٢: جد إحداثيات البؤرة للقطع المكافئ $س^٢ + ص = ٠$.

س٣: جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل، ويمر بالنقطة (−٢، −٨)، ثم جد معادلة دليله.

س٤: إذا كان القطع المكافئ $ص^٢ = ٤ ﻡ س$ يمر بالنقطة (١، ٢) أوجد: الرأس، وإحداثييّ البؤرة، ومعادلتيّ محور التماثل، والدليل لهذا القطع المخروطي.

س٥: جد معادلة القطع الناقص الذي إحداثيات رأسيْه: (٠، ∓٢٠)، والبعد بين بؤرتيْه ٢٤.

س٦: جد معادلة القطع الناقص الذي إحداثيات رأسيْه: (∓١٠، ٠)، واختلافه المركزي $\frac{٣}{٥}$.

س٧: جد معادلة القطع الناقص الذي اختلافه المركزي $\frac{١}{٢}$، والبعد بين بؤرتيه يساوي ٨.

س٨: أوجد معادلة القطع الناقص السيني الذي فيه بُعد الرأس عن البؤرة القريبة = ١، وبُعده عن البؤرة البعيدة = ٥.

س٩: أ ب جـ مثلث محيطه = ٣٠ سم، إذا كانت: ب = (٠، −٥)، جـ = (٠، ٥)، وكانت النقطة ﻡ تتحرك في المستوى الديكارتي. جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ﻡ، وبيّن نوع المنحنى الذي يمثل هذه المعادلة.

س١٠: جد معادلة القطع الناقص السيني الذي يمر بالنقطتين: (−٢، ٢)، (٣، $\frac{\sqrt{٦}}{٢}$).

س١١: جد معادلة القطع الزائد، ثم ارسم منحناه إذا علمت أنّ البؤرتين (٠، ∓٢)، ويقطع محور الصادات عند ص = ∓١.

س١٢: جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره المرافق ٤، وينطبق على محور السينات، ويمر بالنقطة (٢، $\sqrt{١٠}$).

س١٣: جد معادلة القطع الزائد الذي اختلافه المركزي (٢)، وبؤرتاه نفس بؤرتيّ القطع الناقص: $٩س^٢ + ٢٥ص^٢ = ٢٢٥$.

س١٤: أ) جد الفرق المطلق للبعد بين النقطة (٢، $٣\sqrt{٢}$)، وبؤرتي القطع المخروطي $٤ص^٢ - ٩س^٢ = ٣٦$.
ب) ما معادلة القطع الزائد السيني الذي فيه طول المحور القاطع = مثليّ طول المحور المرافق = ٨.

س١٥: قطع زائد معادلته $س^٢ - ٣ص^٢ = ١٢$، عيّنْ إحداثيات البؤرتين، ثم جد معادلة القطع الناقص الذي اختلافه المركزي $\frac{١}{٢}$، وينطبق رأساه على بؤرتيّ القطع الزائد المذكور.

إجابة الأسئلة الإثرائية:

▶ **إجابة السؤال الأول:** $س^2 = ١٦$ ص .

▶ **إجابة السؤال الثاني:** البؤرة $(٠، \frac{-١}{٤})$.

▶ **إجابة السؤال الثالث:** $س^2 = \frac{-١}{٢}$ ص الدليل ص $= -\frac{١}{٨}$ ، $ص^2 = -٣٢$ س، الدليل س $= -٨$

▶ **إجابة السؤال الرابع:** الرأس (٠ ، ٠)، البؤرة (١ ، ٠) ، معادلة الدليل س = − ١ ، معادلة محور التماثل هو محور السينات ص = ٠ .

▶ **إجابة السؤال الخامس:** $\frac{ص^2}{٤٠٠} + \frac{س^2}{٢٥٦} = ١$

▶ **إجابة السؤال السادس:** $\frac{س^2}{١٠٠} + \frac{ص^2}{٦٤} = ١$

▶ **إجابة السؤال السابع:** قطع ناقص سيني $\frac{س^2}{٦٤} + \frac{ص^2}{٤٨} = ١$

قطع ناقص صادي $\frac{ص^2}{٦٤} + \frac{س^2}{٤٨} = ١$

▶ **إجابة السؤال الثامن:** $\frac{س^2}{٩} + \frac{ص^2}{٥} = ١$

▶ **إجابة السؤال التاسع:** $\frac{ص^2}{١٠٠} + \frac{س^2}{٧٥} = ١$

▶ **إجابة السؤال العاشر:** $\frac{س^2}{١٢} + \frac{ص^2}{٦} = ١$

▶ **إجابة السؤال الحادي عشر:** $\frac{ص^2}{١} - \frac{س^2}{٣} = ١$

▶ **إجابة السؤال الثاني عشر:** $\frac{ص^2}{٥} - \frac{س^2}{٤} = ١$

▶ **إجابة السؤال الثالث عشر:** $\frac{س^2}{٤} - \frac{ص^2}{١٢} = ١$

▶ **إجابة السؤال الرابع عشر:** أ) الفرق المطلق = ٦ .

ب) $\frac{س^2}{١٦} - \frac{ص^2}{٤} = ١$

▶ **إجابة السؤال الخامس عشر:** بؤرتا القطع الزائد السيني هما: (∓٤، ٠)، معادلة القطع الناقص السيني: $\frac{س^2}{١٦} + \frac{ص^2}{١٢} = ١$

الوحدة السابعة: النهايات والاتصال

الدرس	معرفة	التكرار	تطبيق	التكرار	استدلال	التكرار
(٧-١) نهاية الإقتران عند نقطة	يتعرف مفهوم نهاية الاقتران عند نقطة.	١	يرسم منحنى الاقتران ق(س).	٢	يوظف شرط وجود النهاية عند نقطة في إيجاد قيمة المجهول.	١
	يفسر مفهوم نهاية الاقتران عند نقطة.	١	يجد نهاية الاقتران عند نقطة بيانيا (منحنى الاقتران).	٦		
	يتعرف مفهوم جوار العدد أ.	١	يجد نهاية الاقتران عند نقطة حسابياً (باستخدام الجدول).	٢		
	يتعرف مفهوم النهايتين: اليمنى واليسرى.	١	يبحث وجود نهاية الاقتران عند نقطة.	١		
	يذكر متى يكون للاقتران نهاية عند نقطة.	١				
	يتعرف قوانين النهايات.	١				
	يذكر شرط وجود نهاية الاقتران عند نقطة.	١				
عدد الأهداف		٧		١١		١
(٧-٢) نظريات في النهايات	يتعرف نهاية اقتران كثير حدود عند نقطة.	١	يجد نهاية اقتران كثير حدود عند نقطة.	١	أن يوظف مفهوم نهاية الاقتران عند نقطة في إيجاد قيم المجاهيل.	٣
	يتعرف نهاية الاقتران النسبي علماً بأن نهاية المقام ≠صفر.	١	يحسب نهاية الاقتران الناتج من إجراء عمليات: الجمع، والطرح، والضرب، والرفع لقوة على كثيرات حدود.	١	أن يوظف إقتران أكبر عدد صحيح في ايجاد نهايات.	٤
	يتعرف نهاية مجموع وفرق اقترانين.	١			أن يوظف إقتران القيمة المطلقة في ايجاد نهايات.	٣
	يتعرف نهاية حاصل ضرب وخارج قسمة اقترانين.	١	يجد نهاية اقتران نسبي عندما لا تكون نهاية المقام صفراً .	٢		
	يوضح: $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} (ق(س))^{ن} = (\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} ق(س))^{ن}$، $ن \in ص^{+}$	١	يحسب نهاية اقتران الجذر عند نقطة (إن أمكن).	٣		

الدرس	معرفة	التكرار	تطبيق	التكرار	استدلال	التكرار
	يوضح أن: $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}(\text{ق(س)})^{\frac{1}{\text{ن}}} = (\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\text{ق(س)})^{\frac{1}{\text{ن}}} = \text{ل}^{\frac{1}{\text{ن}}}$ بشرط ل>٠، حيث ن عدد زوجي موجب.	١	يحسب النهاية لاقتران متعدد القاعدة عند (نقطة طرفية، أو داخلية، أو نقطة تحول).	١		
	يتعرف أن: $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{جاس} = \text{جاأ}$	١	يجد نهاية اقتران يتضمن جاس، أو جتاس (جمع، أو طرح، أو ضرب) بسيط.			
	يتعرف أن: $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{جتاس} = \text{جتاأ}$	١				
عدد الأهداف		٨		٨		١٠
(٧-٣) النهايات والصور غير المعينة.	يتعرف مفهوم الكمية غير المعينة $\frac{٠}{٠}$	١	يجد نهاية الاقتران عند نقطة في الحالات غير المعينة عن طريق التبسيط بالتحليل، أو الضرب بالمرافق، أو توحيد المقامات...	٥	يجد قيمة الثابت أو الثوابت لنهاية اقتران عند نقطة، على صورة كمية غير معينة موجودة، أو قيمتها معلومة.	٢
	يتعرف طرق حساب النهاية في الحالات غير المعينة.	١	يميز بين نهاية الاقتران عند نقطة وقيمته عند تلك النقطة.	١	يستخدم التعميم: $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ن}\,\text{أ}^{\text{ن}-١}$ في ايجاد نهاية اقترانٍ ما عند نقطة معطاة.	١
	يذكر قانون: $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ن}\,\text{أ}^{\text{ن}-١}$، $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$	١	يجد نهاية الاقتران عند نقطة على الشكل: $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}}$	٤		
عدد الأهداف		٣		١٠		٣
(٧-٤) نهاية الاقترانات الدائرية.	يتعرف أن: $\underset{\text{س}\to٠}{\text{نهـا}}\frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$ س بالتقدير الدائري.	١	يجد: $\underset{\text{س}\to٠}{\text{نهـا}}\frac{\text{جاأس}}{\text{ب س}}$ لقيم أ، ب المختلفة.	٤	يوظف نظريات النهايات وقوانين حساب المثلثات في إيجاد نهايات اقترانات دائرية عند نقطة.	٦
	يتعرف أن: $\underset{\text{س}\to٠}{\text{نهـا}}\frac{\text{جاأس}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ س بالتقدير الدائري.	١			يجد قيمة الثوابت لنهاية اقترانات تتضمن اقترانات مثلثية في حال وجود النهاية عند النقطة.	١

الدرس	معرفة	التكرار	تطبيق	التكرار	استدلال	التكرار
	يتعرف أن: $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = ١$ س بالتقدير الدائري.	١	يجد: $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{ظا أس}}{\text{ب س}}$ لقيم أ، ب المختلفة.	٤		
	يتعرف أن: $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{ظا أس}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ س بالتقدير الدائري.	١	يجد نهاية اقترانات كسرية تتضمن اقترانات دائرية.	٨		
عدد الأهداف		٤		١٦		٧
(٧-٥) نهاية الاقتران عندما س $\longleftarrow \mp\infty$	يتعرف مفهوم نهاية الاقتران عندما س $\longleftarrow \mp\infty$.	١	يحسب نهاية اقتران كثير حدود عندما س $\longleftarrow \mp\infty$.	٣	يجد قيمة المجاهيل إذا كانت نهاية اقتران نسبي، عندما تؤول س إلى $\mp\infty$ معلومة القيمة.	١
	يوضح أن: $\lim_{\text{س}\to\pm\infty} \frac{\text{أ}}{\text{س}} = ٠$	١	يحسب نهاية اقتران نسبي عندما يقترب المتغير $\mp\infty$.	٧		
	يوضح أن: $\lim_{\text{س}\to\pm\infty} \text{جـ} = \text{جـ}$ حيث: جـ عدد حقيقي.	١	يحدد الحالات التي تكون فيها نهاية الاقتران ∞، $^-\infty$.	٢		
	يتعرف قواعد العمليات على الرمزين: ∞، $^-\infty$.	١				
	يتعرف الصور غير المعينة، مثل: $\infty-\infty$، $٠\times\infty$، $\frac{\infty}{\infty}$	١				
عدد الأهداف		٥		١٢		١
(٧-٦) الاتصال	يتعرف مفهوم الاتصال عند نقطة من خلال الرسم البياني لمنحنى الاقتران.	١	يبحث اتصال منحنى الاقتران عند نقطة باستخدام الشروط.	٣	يجد قيمة المجهول ليكون الاقتران متصلاً عند نقطة، أو على مجاله.	١
	يتعرف شروط اتصال منحنى الاقتران عند نقطة.	١	يبحث اتصال منحنى الاقتران عند نقطة أو فترة من الرسم.	٣	أن يحل مسائل على اتصال اقتران أكبر عدد صحيح.	٥
	يذكر أمثلة لاقترانات متصلة وأخرى غير متصلة.	١	يبحث في اتصال الاقتران على فترة.	٣		
	يتعرف إلى نظريات اتصال الاقترانات الناتجة من جمع، أو طرح، أو ضرب ، أو قسمة اقترانين متصلين مع تحديد بعض الشروط.	١	يوظف نظريات اتصال الاقترانات الناتجة من جمع، أو طرح، أو ضرب، أو قسمة اقترانين متصلين في الحكم على اتصال اقترانات معطاة.	٤		

الدرس	معرفة	التكرار	تطبيق	التكرار	استدلال	التكرار
	يتعرف الطالب أن: اقتران كثير الحدود متصل ∀س∈ح.	١	يبحث اتصال اقتران متعدد القاعدة عند نقطة تغير القاعدة (نقطة التحول).	٤		
	يتعرف الطالب أن: الاقتران النسبي متصل ∀س∈ح ما عدا أصفار المقام.	١				
	يتعرف الطالب أن: إذا كان ق(س) متصلاً ∀س∈ح فإن: (ق(س))^{ن} متصل ∀س∈ح.	٢				
	يتعرف الطالب أن: ق(س) = جا س، ق(س) = جتا س متصلان ∀س∈ح.	١				
	يتعرف الطالب أن: ق(س) = | هـ (س) | متصل ∀س∈ح عندما هـ(س) متصل.	١				
	يتعرف الاتصال من اليمين عند نقطة.	١				
	يتعرف الاتصال من اليسار عند نقطة.	١				
	يتعرف الاتصال على فترة.	١				
عدد الأهداف		١٣		١٧		٦
(٧-٧) نظرية بلزانو	يتعرف نظرية بلزانو بيانياً.	١	يبحث توفر شروط نظرية بلزانو من خلال الرسم.	١	يوظف نظرية بلزانو لإيجاد قيمة تقريبية لصفر الاقتران، أو جذور المعادلات، أو الجذور الصماء.	٦
	يذكر شروط نظرية بلزانو.	١	يبحث شروط نظرية بلزانو.	٥	يوظف نظرية بلزانو لإثبات أنّ عدداً ينتمي إلى مدى الاقتران ق(س).	١
			يجد قيمة جـ التي تعطيها نظرية بلزانو.	٤	يُعِدّ الطالب وحدة تعليمية بمساعدة معلم المبحث لنظرية بلزانو.	١
عدد الأهداف		٢		١٠		٨
المجموع		٤٢		٨٤		٣٦

الأخطاء الشائعة والصعوبات المتوقّع أن يواجهها الطلبة

الوحدة السابعة: النهايات والاتصال

الوحدة | الدرس	أخطاء وصعوبات متوقعة	العلاج المقترح
(٧-١) نهاية الاقتران عند نقطة:	قد يجد بعض الطلبة قيمة الاقتران عند نقطة بدلاً من إيجاد قيمة نهاية الاقتران عند تلك النقطة، وخاصة في الاقترانات المتشعبة.	توضيح الفرق بين إيجاد صورة عنصر، أو إيجاد النهاية عند اقتراب س من ذلك العنصر.
	إعادة تعريف بعض الاقترانات، مثل : اقتران القيمة المطلقة، أو اقتران صحيح س.	مراجعة هذه الاقترانات الخاصة، وآلية إعادة تعريفها كاقترانات متشعبة، وعرض الأمثلة الكافية.
	صعوبة في تمثيل بعض الاقترانات بيانياً.	الاهتمام بتمثيل الاقترانات المتشعبة بدقة حسب قواعدها في أجزاء المجال الموضحة في السؤال ، عرض الأمثلة والتمارين المتنوعة والمناسبة.
(٧-٢) نظريات في النهايات:	قد يخطئ بعض الطلبة في توزيع النهاية على ناتج: الجمع، الطرح، الضرب. قسمة اقترانين دون وجود نهاية أحدهما أو كليهما.	التركيز على الشروط المحيطة عند استخدام أي تعميم.
	قد يخطئ بعض الطلبة في تحديد نهاية الاقتران ق(س)= جـ عندما: س ⟵ أ ويعتقد الطالب أنها تساوي جـ×أ.	التعميم بشكل واضح أنّ: نهاية الثابت تساوي نفسه، وبغض النظر عن إلى ما تقترب منه س.
	قد يخطئ بعض الطلبة في تحديد أولويات العمليات الحسابية.	التذكير بأولويات إجراء العمليات الحسابية.
	إعادة تعريف بعض الاقترانات مثل: اقتران القيمة المطلقة، أو اقتران صحيح س.	عرض الأمثلة الكافية، الاهتمام بتمثيل إشارة الاقتران باستخدام خط الأعداد، وتوضيح العمل بمساعدة خط الأعداد.
	صعوبة في إيجاد : $\|س^{٢}-٩\| + \|س-٣\|$ كما في مثال ٤ صفحة ٩١ الكتاب المدرسي.	
(٧-٣) النهايات والصور غير المعينة	قد يخطئ بعض الطلبة فيجد قيمة الاقتران بدل نهاية الاقتران.	التفريق المستمر بين قيمة الاقتران عند نقطة ونهايته عندما يقترب منها، وعرض الأمثلة التي توضح ذلك من خلال التمثيل البياني، ودراسة سلوك الاقتران حول نقطة.
	يخطئ بعض الطلبة عند حساب نهاية أو قيمة الاقتران النسبي عند نقطة، فإذا كانت النتيجة $\frac{٠}{٠}$، أو عدد ≠ صفر ÷ صفر يعتبر أن قيمة الاقتران صفر.	التذكير بالصور غير المعينة، والحذر من كون المقام يساوي صفراً، حيث يتطلب إيجاد النهاية هنا السير في إجراءات خاصة؛ كالتحليل إلى العوامل، أو الضرب في المرافق ....

الوحدة | الدرس	أخطاء وصعوبات متوقعة	العلاج المقترح
	يخطيء بعض الطلبة في الضرب في المرافق بسطاً ، ولا يضرب في المقام وقد يحدث العكس.	مراجعة آليّة الضرب في المرافق والاهتمام بدقة تنفيذها، واستنفاذ شرح الحالات كافة ، التي يمكن أن نحسب فيها النهاية بالتحليل إلى العوامل، كإخراج العامل المشترك ، وتحليل العبارة التربيعية ، وفرق بين مربعين .... من خلال إعداد ورقة عمل علاجية، ومناقشتها مع الطلبة.
	قد يخطيء بعض الطلبة في تبسيط المقادير الجبرية، كما في مثال (٥) ، نشاط (٥) صفحة ٩٨ الكتاب المدرسي.	
	صعوبة في تحليل المقادير الجبرية.	
	إيجاد قيمة أو قيم المجاهيل في حال معرفة قيمة النهاية عند نقطة، أو في حال النهاية موجودة.	تكثيف التمرينات على الموضوع.
(٧-٤) نهايات الاقترانات الدائرية:	قد يخطئ بعض الطلبة في حساب نهاية اقتران دائري بسبب ضعفه في التعامل مع المتطابقات المثلثية، التعويض في الاقتران الدائري.	التذكير بالمتطابقات المثلثية اللازمة، وقيم الاقترانات المثلثية الأساسية للزوايا المشهورة بإعداد ورقة عمل وتوزيعها على الطلبة، ونشرها على موقع الصف، أو المدرسة على الإنترنت.
	قد يخطئ بعض الطلبة في اعتبار أنّ : $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا س}}{\text{س}} = ١$	التركيز على دقة استخدام النظرية $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$ وليس سواها، والإشارة إلى أنّ النظرية لا تنطبق على اقتران جتاس، وتوخّي الحذر في التعامل مع أمثلة كالمثال المقابل، ومن الضروري الاستزادة في عرض الأمثلة. الاستعانة ببرنامج ميكروسوفت ماثيماتيكس للتحقق من صحة حساب بعض النهايات.
	قد يخطئ بعض الطلبة فيعتبر مثلاً : $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^٢ \text{ ٥س}}{\text{س}^٢} = ٥$ والصحيح ٢٥، وهكذا.	
	قد يجد بعض الطلبة صعوبة في معرفة قيمة أو قيم الثابت أ إذا علمت نهاية اقتران دائري ، انظر تمرين (٤) صفحة ١٠٢ الكتاب المدرسي.	توجيه الطلبة للبحث عن تمارين مشابهة في مواقع متخصصة على الإنترنت. تكثيف أسئلة مثل تلك الصورة. توجيه الطلبة للبحث في الكتب المتخصصة.
(٧-٥) نهاية الاقتران عندما س $\leftarrow \mp \infty$	قد يخطيء البعض في حساب النهاية عند س $\leftarrow \mp\infty$ من خلال التعامل مع درجة البسط ودرجة المقام وعلاقتهما بالنهاية، وخاصة في بعض الاقترانات التي تحتاج لتوحيد مقامات أو غير ذلك.	الإكثار من عرض الأمثلة والتمارين.
	قد يخطيء بعض الطلبة في حساب النهاية عندما س $\leftarrow -\infty$ لاقتران يحوي اقتران قيمة مطلقة.	توجيه الطلبة لإعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة قبل الشروع في حساب التهاية.
	صعوبة في تحديد الكميات غير المعينة والمتعلقة بـ ∞.	توجيه الطلبة لإعداد تقرير يوضح المقادير غير المعينة بالرجوع إلى مصادر المعلومات المتخصصة.

الوحدة | الدرس	أخطاء وصعوبات متوقعة	العلاج المقترح
	قد يجد بعض الطلبة صعوبة في معرفة قيمة أو قيم الثوابت إذا عُلمت قيمة نهاية الاقتران عندما: س ⟵ ∓∞، كما في سؤال ٢ صفحة ١٠٥، سؤال ٣ صفحة ١٢١ الكتاب المدرسي.	التنويع في الأمثلة، وتوضيح الشروط التي تساعد في الحل.
(٧-٦) الاتّصال	يخطئ بعض الطلبة عند بحث اتصال الاقتران عند نقطة؛ لعدم مقدرته في إيجاد النهاية عند هذه النقطة.	التحقق من امتلاك الطلبة المهارات الكافية لحساب نهاية اقتران عند نقطة قبل البدء بالاتصال.
	يخطئ بعض الطلبة عند بحث اتصال الاقتران عند نقطة التحول، فيحسب النهاية اليمنى أو النهاية اليسرى فقط، ويقارنها بقيمة الاقتران عند تلك النقطة.	التذكير باستمرار أن وجود نهاية يعني أنّ النهاية من اليمين = النهاية من اليسار عند اقتراب س من نقطة ما.
	يخطئ بعض الطلبة عند بحث اتصال الاقتران على فترة مغلقة ولتكن [أ، ب] فيكتفي ببحث الاتصال على الفترة المفتوحة]أ، ب[فلا يبحث الاتصال من جهة اليسار ومن جهة اليمين.	إشاعة ضرورة بحث اتصال الاقتران على كل مجاله بما فيها أطراف الفترة، والتركيز على ذلك فيعرض الأمثلة وحل التمارين.
	يخطئ بعض الطلبة في إيجاد قيم الثوابت، وذلك عندما يكون الاقتران متصلاً على مجاله، وخاصة في اقتران متعدد القاعدة ؛ لعدم توظيفه مفهوم أنّ الاقتران إذا كان متصلاً على فترة، فإنه متصل عند كل نقطة في الفترة. مثل: (سؤال ٤ صفحة ١١٣) الكتاب المدرسي.	طرح الأمثلة والتمارين الكافية.
	يجد بعض الطلبة صعوبة في إعادة تعريف اقتران أكبر عدد صحيح س لبحث الاتصال على مجاله.	التذكير بآلية إعادة تعريف اقتران أكبر عدد صحيح بعرض الأمثلة الكافية.
(٧-٧) نظرية بلزانو:	يخطئ بعض الطلبة فيعتبر بعد تحقق شروط بلزانو أنّه توجد على الأقل: جـ∋[أ، ب] بحيث ق(جـ) = ٠ بدلاً من جـ∋]أ، ب[	التذكير الدائم بشروط ونتيجة نظرية بلزانو. ضرورة استيفاء شروط بلزانو قبل الحديث عن نتيجتها. عرض التدريبات والتمارين بمقدار كافٍ.
	يخطئ بعض الطلبة فلا يبحث شرط الاتصال على الفترة [أ، ب] فيعتبرها تحصيل حاصل.	
	يخطئ بعض الطلبة فيعتبر عدم تحقق شروط بلزانو يجزم بعدم وجود : جـ∋]أ، ب[بحيث ق(جـ) = ٠.	توضيح أن النظرية تسير باتجاه واحد؛ بمعنى إذا انطبقت شروطها وجب وجود ج بحيث ق(جـ) = ٠ ولكن عند عدم تحقّق الشروط كافة، فهذا يعني عدم ضرورة لوجود مثل جـ السابقة ، والتنويع في الأمثلة.
	يجد بعض الطلبة صعوبة في إيجاد قيمة جـ أو قيم ق(جـ) = ٠، وخاصة لاقترانات تكعيبية أو مثلثية.	عرض الأمثلة بشكل يضمن اكتساب الطلبة للمهارتين المقابلتين.
	يجد بعض الطلبة صعوبة في إيجاد التقريب للجذور الصماء، وذلك في كتابة الاقتران أو باختيار الفترة المغلقة المناسبة.	

نموذج تحضير الدرس (٧-٣) النهايات والصور غير المعينة

عدد الحصص :٣

أولاً: مرحلة الاستعداد

١) أهداف الدرس:

١- يتعرف مفهوم الكمية غير المعينة

٢- يتعرف طرق حساب النهاية في الحالات غير المعينة .

٣- يميز بين نهاية الاقتران عند نقطة وقيمته عند تلك النقطة .

٤- يجد نهاية الاقتران عند نقطة في الحالات غير المعينة عن طريق التبسيط بالتحليل، أو الضرب بالمرافق، أو توحيد المقامات . . .

٥- يذكر قانون: $\underset{س \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{س^{ن} - \text{أ}^{ن}}{س - \text{أ}} = ن \text{أ}^{ن-١}$ ، $ن \in ص^{+}$

٦- يجد قيمة الثابت أو الثوابت لنهاية اقتران عند نقطة على صورة كمية غير معينة موجودة، أو قيمتها معلومة.

٧- يستخدم التعميم $\underset{س \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{س^{ن} - \text{أ}^{ن}}{س - \text{أ}} = ن \text{أ}^{ن-١}$ في إيجاد نهاية اقتران ما عند نقطة معطاة .

٢) المهارات المتوقع امتلاكها من الطلبة بعد نهاية الدرس

١- التعويض في الاقتران.

٢- تحليل المقادير الجبرية على عواملها بأنواعه المختلفة.

٣- توحيد المقامات والتبسيط للاقترانات الكسرية.

٤- التمييز بين الكمية المعرفة والكمية غير المعينة.

٥- مهارة البحث عبر الشبكة العنكبوتية عن الكميات غير المعينة الأخرى.

٦- البحث والاستقصاء.

٣) الخبرات السابقة:

- التعويض لإيجاد قيمة الاقتران عند س = أ.
- تحديد مجال الاقتران.
- تحليل المقادير الجبرية إلى عواملها الأولية.
- الضرب في المرافق للتبسيط.
- توحيد مقامات الاقترانات الكسرية.
- إيجاد نهاية الاقتران عند نقطة ناتج تعويضها عدد حقيقي.
- إيجاد نهاية الاقتران من جهة اليمين، أو من جهة اليسار (ناتج التعويض عدد حقيقي).

٤) الأخطاء المفاهيمية، والصعوبات المتوقّع أن يواجهها الطلبة

قد يقع الطلبة في أخطاء، منها:

الأخطاء والصعوبات المتوقعة	مقترحات الحلول
الانطباع الأولي عن عدم ارتباط الموضوع بالحياة الواقعية.	• إبراز أهمية الموضوع، وخاصة أنه مرتبط لاحقاً بعلم التفاضل والتكامل، وهناك العديد من التطبيقات في علم التفاضل والتكامل.
ضعف بعض الطلبة في تحليل المقادير الجبرية إلى عواملها الأولية.	• تنفيذ أوراق عمل علاجية خاصة بالتحليل إلى العوامل، وكتابة طرق التحليل المختلفة. • يفضل أن ينفذ المعلم حصة، أو جزءاً منها لمراجعة تحليل المقادير الجبرية إلى عواملها الأولية.
ضعف بعض الطلبة في تبسيط المقادير الجبرية.	• توضيح مفهوم التبسيط بداية بالعدد النسبي، وكيف يتم ذلك بحيث يكون القاسم المشترك الأعلى = ١ • التأكيد على توظيف التحليل في تبسيط الاقترانات الكسرية. • في حال النهاية على الصورة $\frac{\text{٠}}{\text{٠}}$ التأكيد على أنّه عند التبسيط علينا إظهار العامل الصفري وهو :(س−أ)، وذلك عندما س ⟵ أ.
البعض يضرب في المرافق بسطاً ولا يضرب في المقام، وقد يحدث العكس .	• التأكيد على الطلبة أننا نضرب في المرافق بسطاً ومقاماً، وهذا عملياً يعني الضرب في واحد صحيح (المحايد الضربي)، والهدف تغيير شكل الاقتران وليس قيمته من أجل إظهار العامل الصفري واختصاره.
عدم التفريق بين قيمة الاقتران ونهاية الاقتران عند نقطة.	• التأكيد على أن النهاية عند نقطة هي الاقتراب من جهتيّ اليمين واليسار، فالمعلم يطرح أمثلة متنوعة لاقتران غير معرّف عند س= أ ولكن له نهاية عندما س ⟵ أ. • توظيف الرسوم التوضيحية لتوضيح الفرق بين قيمة الاقتران ونهاية الاقتران عند نقطة.
عدم مقدرة بعض الطلبة على إيجاد نهاية اقتران من خلال تحويله على الصورة $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}}$ من خلال الفرض .	• عندما نفرض لتحويل النهاية حسب القانون التأكيد على الخطوات ومتابعة التغيرات . • التدرج في الأسئلة مع التبسيط . • التنويع في طرق الحل. يمكن اتباع طريقة أخرى بدل الفرض.
إيجاد قيمة أو قيم المجاهيل في حال معرفة قيمة النهاية عند نقطة، أو في حال وجود النهاية .	• التأكيد في حال وجود النهاية لاقتران كسري وقيمة المقام عندما: س ⟵ أ تساوي صفراً ، فيجب أن تكون قيمة البسط عندما س ⟵ أ تساوي صفراً، ويمكن البسط = صفر والنهاية موجودة فيكون المقام =صفر . • في حال قيمة النهاية معلومة وكان البسط = صفر فهذا يعني أن المقام = صفر عندما: س ⟵ أ وبالتخلص من العامل الصفري نعوض فتكون قيمة النهاية. • تدريب الطلبة من خلال توظيف أوراق عمل.

الصعوبات المتوقع أن يواجهها الطلبة :

تتنوع الصعوبات في المجالات المختلفة وفق مسبباتها، فمثلاً :

- صعوبات تتعلق بالتحصيل، وقد تم توضيح بعضها سابقاً.
- صعوبات تعلُّم قد تعود إلى صعوبات تعلُّم نمائية متعلقة بالعمليات العقلية والمعرفية التي يحتاجها الطالب في تحصيله الأكاديمي، أو مشكلات متعلقة بالانتباه، والإدراك، والذاكرة، والتفكير، واللغة، أو صعوبة المطابقة بين الرموز والأرقام، أو عدم تذكر القواعد.

العلاج: توظيف بعض استراتيجيات التدريس مثل: الخرائط المفاهيمية، وتفعيل استراتيجيات التعلم النشط مثل: التعلم التعاوني؛ ليستفيد الطالب من أقرانه. على المعلم التدرج في العرض والبداية من الأسهل إلى الأصعب، وإتاحة الوقت الكافي للطلاب في تنفيذ الأنشطة، أو حل المسائل.

- صعوبات حركية أثناء تنفيذ الأنشطة، سواء كانت حركة زائدة أو خمولاً.

العلاج : على المعلم إتاحة الفرصة للطلبة، وتشجيع المشاركة والمناقشة في الحل مع التنظيم.

- صعوبات نفسية وخاصة الاتجاه السلبي لدى بعض الطلبة نحو الرياضيات.

العلاج :

- بيان أهمية الرياضيات، وتوظيف استراتيجية التعلم باللعب أو الدراما.
- التعاون مع المرشد في حلّ بعض المشكلات النفسية التي يعاني منها بعض الطلبة، وخاصة بسبب المشكلات الأسرية التي ينجم عنها عدم انتباه أو تركيز.
- التعاون مع أولياء الأمور لمعالجة بعض المشكلات.
- توظيف أسلوب التدريس الفردي (تفريد التعليم).

أصول التدريس:

أ) المحتوى العلمي:

النهاية عند نقطة – الصورة غير المعنية $\frac{٠}{٠}$ – التحليل إلى العوامل – العامل المرافق – نهاية الاقتران الكسري أو النسبي – نهاية اقتران متعدد القاعدة – نظرية $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن\, أ^{ن-١}$ ، حيث $ن \in ص^{+}$.

ب) استراتيجيات التدريس:

"التعلم باللعب - التعلم التعاوني، الاكتشاف الموجه، حل المشكلات، الكرسي الساخن" .

جـ) مصادر المعرفة المستخدمة :

الكتاب المدرسي / أوراق عمل / الحاسوب LCD +PowerPoint/ اللوحة البيانية / الشبكة العنكبوتية .

آليّات التقويم:

١- التقويم القبلي: بنود اختبارية لقياس مدى امتلاك الطلبة للخبرات السابقة المنتمية للدرس.
٢- اختبار الورقة والقلم، حل أسئلة تناسب كل حصة من الكتاب المدرسي.
٣- التقويم المعتمد على الأداء من خلال تنفيذ مجموعة من الأنشطة.

٤- يُكلَّف طالب أو مجموعة من الطلبة بالبحث عبر الشبكة العنكبوتية أو التواصل مع الخبراء لاستنتاج قاعدة لإيجاد $\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}}$، وعرض ما تم التوصل إليه باستخدام LCD +PowerPoint

٥- يعد الطالب بحثاً بسيطاً يبين التطبيقات المختلفة المعتمدة على إيجاد نهاية الاقتران عند نقطة، التي سيدرس بعضها لاحقاً.

ثانياً: أثناء تنفيذ الدرس

التهيئة:

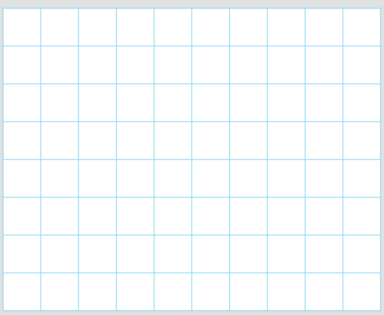
١- تنفيذ نشاط كاشف.

تنفيذ النشاط الآتي :

• محمد وأحمد طالبان في الصف الحادي عشر العلمي، قال محمد لصديقه أحمد : تعلمنا في الحصص السابقة إيجاد نهاية الاقتران بالتعويض المباشر فتكون النتيجة عدداً حقيقياً، أو إيجاد النهايتين اليمنى واليسرى لاقتران متعدد القاعدة عند نقطة تغير القاعدة، في حال التساوي تكون النهاية موجودة ولكن واجهتني مشكلة، فعند حساب $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣}$ كانت النتيجة : صفر ÷ صفر فهل هذا يعني أن النتيجة صفر، أم غير موجودة، أم غير ذلك ؟

فكّر أحمد وقال : إنها حقاً مشكلة، دعنا نمثل الاقتران بيانياً، ثم نحاول إيجاد نهاية الاقتران عندما س ⟵ ٣.

بعد التمثيل البياني نناقش: $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣}$ = ...



قال محمد: هل هذه الطريقة الوحيدة لإيجاد النهاية ؟ قال أحمد: علينا البحث عن طريقة أخرى، دعنا نبحث في الشبكة العنكبوتية، أو في المكتبات العلمية، أو نسأل الخبراء .

العرض:

١- مناقشة مثال (١) صفحة ٩٥ الكتاب المدرسي، ثم ينفذ الطلبة كمجموعات مكونة من(٤- ٦) نشاط (٢) صفحة ٩٥ من الكتاب المدرسي.

٢- مناقشة مثال (٣) صفحة ٩٦ بمشاركة الطلبة لتحديد قيمة المجهول، عندما تكون النهاية موجودة وعند التعويض قيمة البسط = ٠، فيجب أن تكون قيمة المقام =٠ .

٣- تنفيذ نشاط (٣) مع طرح أمثلة مشابهة ، ومن خلال الطريقة الاستقرائية يكتشف الطلبة أنّ : $\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ن}\,\text{أ}^{\text{ن}-١}$، حيث $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$.

٤- مناقشة مثال (٢) صفحة ٩٦ من الكتاب المدرسي.

٥- تنفيذ نشاط (٤) صفحة ٩٧ الكتاب المدرسي، ثم مناقشة مثال ٤ صفحة ٩٧ والتأكيد على الضرب بالمرافق بسطاً ومقاماً لإظهار العامل الصفري (س– أ).

٦- مناقشة مثال ٥ ونشاط (٥)، صفحة ٩٨ والتأكيد على أهمية إتقان مهارة توحيد المقامات.

الإغلاق والتقويم

- حل سؤال (١) ، (٢) ورقة عمل رقم (١) متابعة الحلول وتقويمها، ثم تثبيت الإجابة الصحيحة .
- تكليف الطلبة حل س١ (أ ، ب ، ج) ، س٣ الكتاب المدرسي صفحة ٩٩ واجباً بيتياً ، وتتم متابعته وحله مع الطلبة الحصة القادمة، ومناقشة الصعوبات التي تواجه البعض .
- حل س١ ورقة عمل رقم (٢). متابعة الحلول وتقويمها، ثم تثبيت الإجابة الصحيحة .
- تكليف الطلبة حل س١ الفرع (د) الكتاب المدرسي، وحل س٢، ورقة عمل رقم (٢) واجباً بيتياً ، وتتم متابعته وحله مع الطلبة الحصة القادمة، ومناقشة الصعوبات التي تواجه البعض.
- حل س١ (ب) ، س٢ (ب) ورقة عمل رقم (٣) .
- تكليف الطلبة : حل س١ (أ) ، س٢ (أ) ورقة عمل رقم (٣) واجباً بيتياً ، وتتم متابعته وحله مع الطلبة الحصة القادمة، ومناقشة الصعوبات التي تواجه البعض.
- توظيف استراتيجية الكرسي الساخن في غلق الدرس حيث تقوم الفكرة على طرح أسئلة من قبل الطلبة على طالب مميز، أو معلم يجلس على كرسي بحيث يكون محور الأسئلة محدداً حسب الموضوع ، ويعطي ملخصاً للموضوع .

ورقة عمل (١)

الهدف: أن يجد الطالب نهاية اقتران كسري على الصورة: (صفر ÷ صفر).

س١: جد كلاً من النهايات الآتية:

أ) $\underset{س \leftarrow -٤}{\text{نهـــا}} \dfrac{٢س^{٢} + ٧س - ٤}{س + ٤}$

....

....

....

....

....

....

ب) إذا كانت: $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \dfrac{أ\, س^{٢} - ١٠س + ٣}{س - ٣}$ موجودة، جد قيمة / قيم الثابت أ.

....

....

....

....

....

....

س٢: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١- $\underset{س \leftarrow \frac{١}{٢}}{\text{نهـــا}} \dfrac{٢س^{٢} - س}{٢س - ١}$ يساوي:

أ) $-\dfrac{١}{٢}$ ب) $\dfrac{١}{٢}$ جـ) ١ د) -١

٢- $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \dfrac{س^{٤} + س^{٢} - ٢}{س^{٣} - ١}$ يساوي:

أ) -١ ب) $\dfrac{٥}{٣}$ جـ) ٢ د) غير موجودة

ورقة عمل (٢)

الهدف: أن يجد الطالب نهاية اقتران كسري على الصورة: $\lim\limits_{س \to م} \frac{س^ن - م^ن}{س - م} = ن م^{ن-١}$

س١: جد كلاً من النهايات الآتية:

أ) $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{س^٥ + ٣٢}{س + ٢}$

....

....

....

....

....

....

ب) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{(س-٢)^٧ - ١}{س - ٣}$

....

....

....

....

....

....

س٢: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١- $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{١٠} - ١}{س^٥ - ١}$ يساوي:

أ) ١٠　　　ب) ٢　　　جـ) ١٥　　　د) غير موجودة.

٢- $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٥ + س^٣ - ٢}{س - ١}$ يساوي:

أ) ٨　　　ب) $\frac{٥}{٣}$　　　جـ) $\frac{٣}{٥}$　　　د) غير موجودة.

ورقة عمل (٣)

الهدف: أن يجد الطالب نهاية اقتران كسري على الصورة: (صفر ÷ صفر).

س١: جد كلاً من النهايات الآتية:

أ) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{\sqrt{س+٧} - ٣}{س - ٢}$

....

....

....

....

ب) $\lim\limits_{س \leftarrow -١} \frac{س + ١}{\sqrt{س^{٣}+٥} - ٢}$

....

....

....

....

س٢: جد كلاً من النهايات الآتية:

أ) $\lim\limits_{س \leftarrow ٦} \frac{\frac{٢}{س - ٣} - \frac{٢}{٣}}{س - ٦}$

....

....

....

....

ب) $\lim\limits_{س \leftarrow ٤} \left(\frac{١}{س} - \frac{١}{٤}\right)\left(\frac{١}{س^{٢} - ١٦}\right)$

....

....

....

س١: إذا كان: $ق(س) = \begin{cases} [٢س + ١] & ،\ س < ٣ \\ |١٠ - ٢س| & ،\ س \geq ٣ \end{cases}$

جد: ١) $\lim_{س \leftarrow ٣^-} ق(س)$ ٢) $\lim_{س \leftarrow ٣^+} ق(س)$ ٣) $\lim_{س \leftarrow ٣} ق(س)$

س٢: إذا كان ق اقتراناً كثير حدود، وكانت: $\lim_{س \leftarrow ٣} \frac{ق(س) + ٥}{س - ٣} = ٤$، وكانت $\lim_{س \leftarrow ٣} (ق(س) - ٢س + ٣ب) = ٧$:
فجد قيمة الثابت ب.

س٣: جد : أ) $\lim_{س \leftarrow -١} \frac{س^٤ + س}{س + ١}$ ب) $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{١}{\sqrt{س+١}} - ١ \right)$

س٤: إذا كان: $ق(س) = \begin{cases} \frac{|س^٢ - ٤س - ٥|}{|س - ٥|} & ،\ س > ٥ \\ أجتا \frac{\pi}{٥} س + ٥ & ،\ س < ٥ \end{cases}$ ، وكانت: $\lim_{س \leftarrow ٥} ق(س)$ موجودة، فما قيمة الثابت أ؟

س٥: جد: أ) $\lim_{س \leftarrow -٣} \frac{س^٣ + ٥س^٢ + ٣س - ٩}{س^٣ + ٦س^٢ + ٩س}$ ب) $\lim_{س \leftarrow ٣} \frac{\sqrt{س+١} - ٢}{\sqrt{س + ٦} - ٣}$

س٦: جد: أ) $\lim_{س \leftarrow -٤} \frac{(س+٣)^٧ + ١}{س + ٤}$ ب) $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٧ + س^٤ - ١٤٤}{س^٥ - ٣٢}$

س٧: إذا كانت: $\lim_{س \leftarrow ١} \frac{أس^٢ + ٢ب س + ٢}{س - ١} = ١$،جد قيمة كلٍّ من: أ، ب.

س٨: جد: أ) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - جتا٦س}{جتا٨س - ١}$ ب) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ + ظاس\,جاس - جتا٢س}{س^{٢}}$

س٩: جد: أ) $\underset{س \leftarrow \pi}{\text{نهـا}} \frac{جاس}{\pi^{٢} - س^{٢}}$ ب) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \left(\frac{جا٢س}{س^{٢} - \frac{\pi}{٢}س} \right)$

س١٠: إذا كان: $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{س^{٢} - ب\,س}{س + ١} - أس \right) = -٣$، جد قيمة أ، ب.

س١١: جد: $\underset{س \leftarrow -\infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{س^{٣}}{٢ - س^{٢}} + \frac{١ - س^{٤}}{٢ - س^{٣}} \right)$

س١٢: إذا كان: $ق(س) = \begin{cases} \frac{٩س^{٢} - ١}{\sqrt{١ - ٦س + ٩س^{٢}}} & ، -\frac{١}{٣} < س < \frac{١}{٣} \\ -٢ & ، س = \frac{١}{٣} \\ -٦س - [س] & ، \frac{١}{٣} < س < \frac{٤}{٣} \end{cases}$ ، ابحث اتصال الاقتران: ق(س) عند $س = \frac{١}{٣}$

س١٣: إذا كان: $ق(س) = \begin{cases} ٢ + ٢س & ، س < ١ \\ ٣س^{٢} & ، س \geq ١ \end{cases}$ ، $هـ(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، س < ١ \\ |٢س| & ، س \geq ١ \end{cases}$

ابحث اتصال (ق+هـ)(س) عند س = ١.

س١٤: إذا كان: $ق(س) = \frac{س^{٢} - ٣س - ٥}{س^{٢} - ٢س + ٢جـ}$ متصلاً على ح فجد مجموعة قيم الثابت: جـ.

س١٥: إذا كان: ق(س) = $س^{٢} - ٢س - أ$ يحقق شروط نظرية بلزانو على الفترة [−٣، ٣]، جد جميع قيم الثابت أ.

س١٦: إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على الفترة [٠، ١] وكان $٠ < ق(س) < ١$ ، $\forall س \in [٠، ١]$، فأثبت أنه يوجد $جـ \in]٠، ١[$ حيث إن ق(جـ) = جـ.

س١٧: مكعب حجمه ٥٠سم^{٣} فما طول ضلعه لأقرب منزلتين عشريتين ؟

س١٨: ق ،هـ كثيرا حدود موجبان في الفترة [١، ٣] بحيث: ق(١) - $\frac{٢}{هـ(١)}$ > ٠، ق(٣) - $\frac{٢}{هـ(٣)}$ < ٠،

بيّنْ أنّه يوجد على الأقل جـ ∈]١، ٣[بحيث: ق(جـ) × هـ(جـ) = ٢ .

إجابة الأسئلة الإثرائية:

▶ **إجابة السؤال الأول:** ١) ٦. ٢) ٤. ٣) غير موجودة.

▶ **إجابة السؤال الثاني:** قيمة الثابت ب = ٦

▶ **إجابة السؤال الثالث :** أ) -٣ . ب) $\frac{-١}{٢}$.

▶ **إجابة السؤال الرابع:** ﺃ = -١

▶ **إجابة السؤال الخامس:** أ) $\frac{٤}{٣}$. ب) $\frac{٣}{٢}$.

▶ **إجابة السؤال السادس:** أ) ٧. ب) ٦.

▶ **إجابة السؤال السابع:** ﺃ = ٣، ب = $\frac{-٥}{٢}$.

▶ **إجابة السؤال الثامن:** أ) $\frac{-٩}{١٦}$ ب) ٣

▶ **إجابة السؤال التاسع:** أ) $\frac{١}{٢\pi}$ ب) $\frac{-٤}{\pi}$

▶ **إجابة السؤال العاشر:** ﺃ = ١، ب =٢.

▶ **إجابة السؤال الحادي عشر:** صفر

▶ **إجابة السؤال الثاني عشر:** ى(س) متصل عند س = $\frac{١}{٣}$

▶ **إجابة السؤال الثالث عشر:** (ى+ هـ)(س) متصل عند س= ١

ملحوظة :ى(س) غير متصل عند س = ١ ، هـ(س) غير متصل عند س = ١

▶ **إجابة السؤال الرابع عشر:** قيم الثابت جـ ∈]$\frac{١}{٢}$، ∞[

▶ **إجابة السؤال الخامس عشر:** قيم الثابت أ ∈]٣، ١٥[

▶ **إجابة السؤال السادس عشر:** إرشاد : افرض ل(س) = ى(س) –س ثم طبق نظرية بلزانو.

▶ **إجابة السؤال السابع عشر:** طول ضلع المكعب = $\sqrt[٣]{٥٠}$ نفرض:ل(س) = س^{٣} – ٥٠

$\sqrt[٣]{٣^{٣}} < \sqrt[٣]{٥٠} < \sqrt[٣]{٤^{٣}}$ ، ٣ $< \sqrt[٣]{٥٠} <$ ٤ نختار الفترة [٣، ٤]

لأقرب منزلتين عشريتين ٣,٧٥.

▶ **إجابة السؤال الثامن عشر:** إرشاد: افرض ل(س) = ى(س) × هـ(س) – ٢ ثم طبق نظرية بلزانو، واستفد من المعلومات.

نموذج امتحان الفصل الثاني

س١: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي: (٣٠ علامات)

١- في تجربة سحب ثلاث كرات دفعة واحدة من صندوق يحتوي على ٥ كرات بيضاء، وكرتين سوداوين، إذا دل المتغير العشوائي س على عدد الكرات السوداء المسحوبة، فما مدى س ؟

أ) {١، ٢، ٣}. ب) {٠، ١، ٢، ٣}. جـ) {٠، ١، ٢}. د) {١، ٢، ٣، ٤}.

٢- معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠ ، ٠) وبؤرته (٠ ، -٥) هي:

أ) $ص^٢ = -٢٠س$. ب) $ص^٢ = ٢٠س$. جـ) $س^٢ = ٢٠ص$. د) $س^٢ = -٢٠ص$.

٣- ما عدد حدود المتتالية الهندسية: ٨١، ٢٧، ٩، ....، $\frac{١}{٨١}$ ؟

أ) ٨. ب) ٩. جـ) ١٠. د) ١٧.

٤- في تجربة إلقاء قطعتيّ نقد منتظمتين ١٢ مرة، إذا دل المتغير العشوائي ق على عدد ظهور صورتين فإن: ت(ق):

أ) ٦. ب) ٠,٥. جـ) ٣. د) ٠,٢٥.

٥- إذا كان $جـ_ن = (ن^٢ + ٢ن)$ يمثل مجموع ن حداً الأولى في متتالية حسابية، فإن قيمة الحد الخامس عشر تساوي:

أ) ٢٥٥. ب) ٣٣. جـ) ٣١. د) ٢٢٤.

٦- المعادلة $\frac{س^٢}{٢ - ك} + \frac{ص^٢}{ك} = ١$، ك > ٥ تمثل معادلة قطع:

أ) زائد سيني. ب) زائد صادي. جـ) ناقص سيني. د) ناقص صادي.

٧- إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على ح، وكانت $\lim_{س \leftarrow ١}$ (٥ق(س+٢) -٢س) = ١٨ فإن ق(٣) تساوي:

أ) ٤,٨. ب) ٢٠. جـ) ٤. د) ٣,٢.

٨- إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من القيم هو ٦٥، والانحراف المعياري σ = ٥ فما العلامة المعيارية المقابلة للقيمة ٥٥؟

أ) ٢. ب) ٠,٥. جـ) -٢. د) - ٠,٥.

٩- الاقتران ق(س) = [س+٤ , ٠] متصل عند س تساوي:

أ) صفر. ب) ٠,٦. جـ) ١,٦. د) - ٠,٤.

١٠- $\lim_{س \leftarrow -\infty} \frac{(س^٢ - ٢)(٢س + ٣)}{س^٢ - ٤س^٣}$ يساوي:

أ) - ٠,٥. ب) ٠,٥. جـ) ∞. د) صفر

١١- $\lim\limits_{س \leftarrow -٣} \frac{|س^٢ - ٩|}{س - ٣}$:

أ) ٦.　　ب) −٦.　　جـ) صفر.　　د) غير موجودة.

١٢- إذا كان $\sum\limits_{ر=١}^{٦} (ر^٢ + أ ر) = ٢٨$، فإن قيمة أ تساوي :

أ) −٣.　　ب) −٢.　　جـ) ٣.　　د) ٢.

١٣- ١٣) إذا كانت: أ ، ٢٤ ، ب ، ٣٢ ، **جـ** حدود متتالية حسابية فما قيمة **جـ**؟

أ) ٢٠.　　ب) ٢٨.　　جـ) ٣٦.　　د) ٤٠.

١٤- إذا كان س متغيراً عشوائياً وكان ت (٢س − ٣) = ٧، فما ت (٣س + ١)؟

أ) ٥.　　ب) ١٦.　　جـ) ٢.　　د) ٧.

١٥- $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{س\, جاس - ظا٣س}{جا٤س - ٢س}$ تساوي :

أ) −١.　　ب) ١.　　جـ) $-\frac{١}{٢}$.　　د) $-\frac{٣}{٢}$.

١٦- قطع ناقص معادلته $٨س^٢ + ٩ص^٢ = ٧٢$ ، ما طول محوره الأكبر ؟

أ) ٦.　　ب) ٣.　　جـ) $٤\sqrt{٢}$.　　د) ٢

١٧- ما الحد العام للمتتالية ١ ، −١ ، ١ ، −١ ، ..... ؟

أ) $ح_ن = (-١)^{ن+١}$.　　ب) $ح_ن = ن^ن$.　　جـ) $ح_ن = (-ن)^ن$.　　د) $ح_ن = (-١)^ن$

١٨- معادلة الدليل للقطع المكافئ الذي معادلته $ص^٢ = -٤س$ هي:

أ) س = −١ .　　ب) س = ١ .　　جـ) ص = ١ .　　د) ص = −١.

١٩- إذا كان $\lim\limits_{س \leftarrow ٤} \frac{س^٢ - أس + ٤}{س - ٤}$ موجودة فإنّ قيمة الثابت أ تساوي:

أ) ٥.　　ب) −٥.　　جـ) ٣.　　د) −٣.

٢٠- إذا كان ع متغيراً عشوائياً معيارياً، وكان ل(ع < **ك**) = ٠,٠٨٠٨ فإن **ك** تساوي:

ع	−١,٤	−٠,٨٤	٠,٨٤	١,٤
المساحة تحت ع	٠,٠٨٠٨	٠,١٩٧٧	٠,٨٠٢٣	٠,٩١٩٢

أ) −١,٤.　　ب) ١,٤.　　ج) ٠,٨٥.　　د) −٠,٨٥.

س٢: (١٤علامة)

أ) متتالية هندسية حدودها موجبة وحدها الثاني ٦، وحدها الثالث يزيد عن حدها الأول بمقدار ٩. (٨ علامات)
جد: مجموع أول ٨ حدود منها.

ب) إذا كان س متغيراً عشوائياً، مداه = {٠، ١، ٢، ٣، ٤} وكان ل(٠) = ل(٤) = $\frac{١}{٦}$، ل(١) = ل(٣) = $\frac{١}{٤}$.
أوجد : ١ـ اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س. ٢ـ احسب توقّع س. (٦ علامات)

س٣: (١٤علامة)

أ) جد معادلة منحنى القطع الزائد الذي مركزه (٠ ، ٠)، والبعد بين بؤرتيه ١٠، واختلافه المركزي $\frac{٥}{٣}$، ومحوره القاطع ينطبق على محور السينات، ثم ارسم منحناه. (٦ علامات)

ب) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{\sqrt{س + ٣} - ٢}{س - ١} & ، س > ١ \\ أ & ، س = ١ \\ س^٢ + ب & ، س < ١ \end{cases}$ ، متصلاً على ح، جد قيم الثابتين أ، ب.
(٨علامات)

س٤: (١٤علامة)

أ) جد: ١ـ $\lim_{س \leftarrow ١} \frac{(س + ١)^٦ - ٦٤}{س^٢ - س}$ ٢- $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{جتا٤س - جتا٢س}{س^٢}$ (٩ علامات)

ب) إذا كان احتمال أن يصيب رجل هدفاً هو $\frac{٢}{٣}$، وأطلق الرجل على الهدف ٥ مرات متتالية، ما احتمال أن يصيب الرجل الهدف ٣ مرات فقط؟ (٥ علامات)

س٥: (١٤علامة)

أ) استخدم نظرية بلزانو لإيجاد التقريب الثاني للعدد $\sqrt[٣]{١٢}$ في الفترة] ٢، ٣[. (٨ علامات)

ب) تتحرك النقطة ن (س، ص) في المستوى، بحيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين (٠، ٤) ، (٠، -٤) يساوي ١٠ وحدات دائماً.
أوجد معادلة المحل الهندسي لهذه النقطة. (٦ علامات)

س٦:

(١٤علامة)

أ) أدخل ٥ أوساط حسابية بين: ٢، ٢٠. (٧ علامات)

ب) إذا كان الدخل الشهري لعدد ١٠٠٠ أسرة في إحدى المدن هو متغير عشوائي وسطه الحسابي ١٧٠ ديناراً، وانحرافه المعياري ٢٠ ديناراً. إذ اختيرت أسرة عشوائياً من هذه الأسر فأوجد: (٧ علامات)

١- احتمال أن يكون دخلها ينحصر بين ١٦٠ ديناراً ، ٢٠٠ دينار.

٢- عدد الأسر التي يزيد دخلها عن ١٥٠ ديناراً .

ع	-١,٥	-١	-٠,٥	٠,٥	١	١,٥
المساحة	٠,٠٦٦٨	٠,١٥٨٧	٠,٣٠٨٥	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢

فكرة رياديّة

تحسين البيئة

المشكلة: تعاني إحدى القرى الفلسطينية من مشكلة عدم توفر مكب للنفايات خاصة الصُّلبة منها، فيلجأ بعض سكانها إلى التخلص منها بإلقائها على حواف الشارع على مداخل القرية. كيف نساعد هذه القرية لتغيير هذا الواقع السلبي بالعمل على جمعها، والتخلص منها، والحصول على مدخل حضاري جميل؟

يقوم الطلبة بتحديد المخاطر الناجمة عن هذه الظاهرة، كما في الجدول المرفق- على سبيل المثال لا الحصر-

المخاطر	الأضرار	النجاحات المتوقعة
مخاطر مادية	تراكم أكوام الصخور والحجارة (الباطون) الجاهز على جانبيّ الطريق.	الإزالة والنقل إلى أماكن خاصة.
مخاطر بيئية وصحية	مناظر بيئية وصحية سلبية، وجود الجيف، والحيوانات الميتة، والروائح الكريهة، والكلاب الضالة، والدخان الناجم عن حرق المخلفات القابلة للاحتراق، كالأخشاب وبقايا الحدائق المنزلية.	التخلص من كل النفايات وإلزام شركات الباطون الجاهز بعدم إلقاء النفايات من جديد. تجميل المكان بزراعة الأشجار بأشكال هندسية دوائر وقطوع ناقصة، بشكلٍ متتالٍ.
مخاطر نفسية	إزعاج المارة من الشارع بمناظر غير لائقة، وروائح كريهة. الخوف من المرور مشياً على الأقدام ليلاً. خوف الأطفال من صوت الكلاب الضالة ليلاً.	إزالة كل هذه المخاطر النفسية.
مخاطر اجتماعية	إثارة المشاكل والفتن بين من يقومون بإلقاء النفايات وبين أصحاب الأراضي والمنازل القريبة.	

مصادر التمويل:

المجلس البلدي، مجلس أولياء الأمور، مؤسّسات البلدة: الصحة، النادي ....

الأدوات والمواد اللازمة:

شاحنة، جرافة، أشتال، نظام ري، حجارة أرصفة.

النواتج المتوقعة: أشجار مزروعة ، أرصفة ، مقاعد.

كيفية تسويق الفكرة:

مقابلات، اجتماعات، حضور جلسات المجلس البلدي، منشورات وملصقات، ومن خلال صفحات مواقع التواصل الاجتماعي.

▶ يقوم المعلم بمناقشة الطلبة بأهمية التخلص من النفايات والأنقاض لأسباب يناقشها مع الطلبة، ويجملها فيما يأتي:

* ....

* ....

* ....

الإجراءات:

أولاً: تقسيم الطلبة إلى مجموعات عمل، وتدوين المهام الكلية التي ستنفذها المجموعات، ثم تقسيم تلك المهام على المجموعات.

....

....

....

....

....

....

التأمل:

▶ يطرح المعلم على الطلبة التساؤلات الآتية:

ماذا تتوقعون في مراحل العمل المختلفة ؟

يجيب الطلبة: * ....

* ....

* ....

وهناك إجابات أخرى...

▶ ما توقعك للمبلغ المطلوب الذي ستوفره لتنفيذ كلّ محطة من المشروع؟

النتائج: • توعية الطلاب بأهمية العمل التطوعي.

• تنمية روح الانتماء إلى المدرسة والبلدة .

• تنمية الشعور بالمسؤولية.

وهناك نتائج أخرى...

التوصيات:

* ....

* ....

* ....

مصفوفة المفاهيم التتابعية

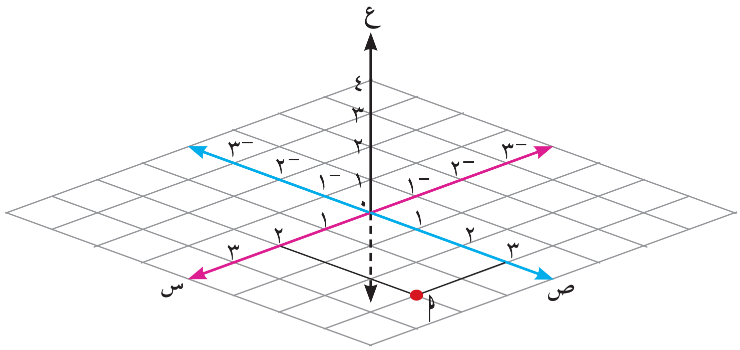
الصف/المحور	الأعداد والعمليات عليها	الهندسة والقياس	الإحصاء والاحتمال	الجبر
العاشر	قيمة لوغاريتم لعدد معطى. قيمة عدد بمعرفة الأس والأساس.	تكافؤ الأشكال الهندسية. إنشاءات هندسية. رسم الاقترانات.	الارتباط والانحدار. مبدأ العد والتباديل والتوافيق.	حل معادلة لوغاريتمية وأسية. المجال والمدى للاقتران وتطبيقات عليها.
الحادي عشر	المتتاليات والمتسلسلات. مجموع المتسلسلات.	الهندسة الفراغية والمتجهات وتطبيقات عليها. نظرية الأعمدة الثلاثة.	المتغير العشوائي.	النهايات وتطبيقاتها. المعادلات والمتباينات. القطوع المخروطية.
الثاني عشر	الأعداد المركبة. المصفوفات.	تفسير سير الاقترانات من خلال المشتقات وإثبات مساحات وحجوم من خلال التكامل.	-----	التفاضل وتطبيقاته. التكامل وتطبيقاته.

حلول أسئلة الكتاب

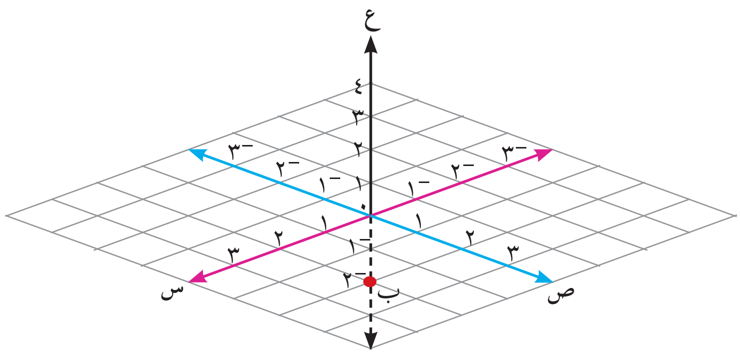
حلول الوحدة الأولى: الهندسة والمتجهات ١- ٢٨

تمارين ومسائل: (١ - ١)

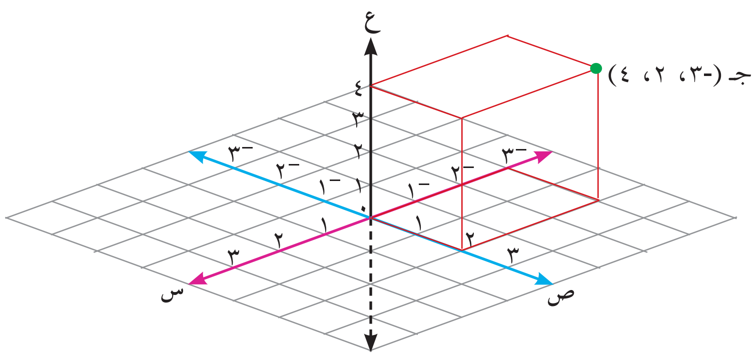
س١: يتم رسم النقاط في الفراغ النقطة أ (٢، ٣، ٠) تقع في مستوى س ص.



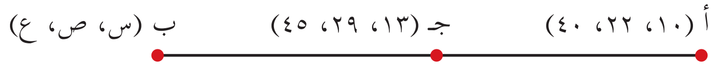
النقطة ب (٠، ٠، -٢) تقع على الجزء السالب من محور ع.



النقطة جـ (-٣، ٢، ٤) تقع في الفراغ (ملحوظة: يمكن استخدام برنامج جيوبرا في التمثيل).



س٢:



١- $\frac{\text{س} + ١٠}{٢}$ = ١٣ ومنها: س = ١٦، $\frac{\text{ص} + ٢٢}{٢}$ = ٢٩ ومنها: ص = ٣٦

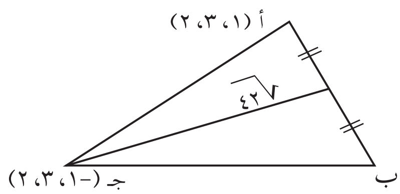
$\frac{\text{ع} + ٤٠}{٢}$ = ٤٥ ومنها: ع = ٥٠ ومنها: ب (١٦، ٣٦، ٥٠)

٢- $\overline{\text{أب}} = \sqrt{(١٦-١٠)^{٢} + (٣٦-٢٢)^{٢} + (٥٠ - ٠)^{٢}} = \sqrt{٣٦ + ١٩٦ + ١٠٠} = \sqrt{٣٣٢}$ = ١٨,٢٢م

س٣: بُعد النقطة عن مستوى س ص = ٢ ؛أي أن: ع = ± ٢ ، وبُعدها عن س ع = ٧ ؛ أي أنّ:
ص = ± ٧ وبُعدها عن ص ع = ٣ ؛ أي أن: س = ± ٣ إذن: النقطة هي (±٣، ±٧، ± ٢) وفي هذه الحالة توجد ٨ نقاط،
وهي: (٣، ٧، ٢)، (٣، ٧، −٢)، (٣، −٧، ٢)، (٣، −٧، −٢)
(−٣، ٧، ٢)، (−٣، ٧، −٢)، (−٣، −٧، ٢)، (−٣، −٧، −٢)

ملحوظة: يمكن استخدام الشجرة لتحديد الحالات الممكنة.

س٤: $(\text{س} + ١)^{٢} + (-٥)^{٢} + (\text{س} - ٤)^{٢} = ٤٢$



$\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١ + ٢٥ + \text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ١٦ = ٤٢$

$٢\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٤٢ = ٤٢$

$\text{س}^{٢} - ٣\text{س} = ٠$ إذن إمّا: س=٠ وترفض، أو: س=٣

إذن: د (٣، −٢، ١) لكن: أ (١، ٣، ٢)، ب (س ، ص ، ع)

$\frac{\text{س} + ١}{٢} = ٣ \Longleftarrow$ س = ٥ ، $\frac{\text{ص} + ٣}{٢} = -٢ \Longleftarrow$ ص = −٧ ، $\frac{\text{ع} + ٢}{٢} = ١ \Longleftarrow$ ع = ٠ ؛إذن: ب (٥، -٧، ٠)

س٥: أ (س، ٠، ٠)، ب (٠، ص، ٠)، ج (٠، ٠، ع)

د (٢، -٤، ٠) منتصف أ ب ؛ إذن: $\frac{\text{س} + ٠}{٢}$ = ٢ ومنها: س=٤ ، وكذلك:

$\frac{\text{ص} + ٠}{٢}$ = −٤ ومنها: ص = −٨ ، هـ منتصف ب جـ ،ومنها: $\frac{\text{ع} + ٠}{٢}$ = ٤ ومنها: ع = ٨

إذن: أ (٤، ٠، ٠)، ب (٠، -٨، ٠) ، ج (٠، ٠، ٨)
النقطة و هي منتصف ج أ = (٢، ٠، ٤)

س٦: ن $\left(\frac{٦+٨}{٢}، \frac{٤+-٤}{٢}، ٠\right)$ =(٧، ٠، ٠)

$(\text{ن م})^{٢} = (\text{س} - ٧)^{٢} + \frac{\text{س}^{٢}}{٤} + ٠ = \frac{٤٩}{٤}$ بترتيب المعادلة ينتج:

$٥\text{س}^{٢} - ٥٦\text{س} + ١٤٧ = ٠$ ومنها: (٥ س − ٢١) (س − ٧) = ٠ ومنها:

س = $\frac{٢١}{٥}$ تهمل، أو: س = ٧ ومنها: م (٧، −٥, ٣، ٠)

(م جـ)^٢ = (٧ − ٤)^٢ + (−٥, ٣ + ٢)^٢ + ٠ = ٩ + $\frac{٩}{٤}$ = $\frac{٤٥}{٤}$ ومنها: م جـ = ٣ $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ = ٣ م أ

(م أ)^٢ = ١ + $\frac{١}{٤}$ + ٠ = $\frac{٥}{٤}$ ومنها: م أ = $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$

∴ $\overline{\text{م جـ}}$ = ٣ $\overline{\text{م أ}}$ وهو المطلوب

تمارين ومسائل: (١ - ٢)

س١: أ) $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = ب - أ = (٤، ٢) = ٤و$_١$+٢و$_٢$

$\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ = جـ - أ =(٦، ٠) = ٦و$_١$+٠و$_٢$= ٦و$_١$

ب) ||$\overleftarrow{\text{أ ب}}$|| = $\sqrt{٤^٢ + ٢^٢}$ = $\sqrt{٢٠}$ وحدة

||$\overleftarrow{\text{أ جـ}}$|| = ٦ وحدات

س٢: ٢س + ٣ = ص

ص-٢ = س + ٣ نعوض المعادلة الأولى في الثانية وينتج: (٢س + ٣) − ٢ = س + ٣ وينتج: س = ٢ بالتعويض بقيمة س

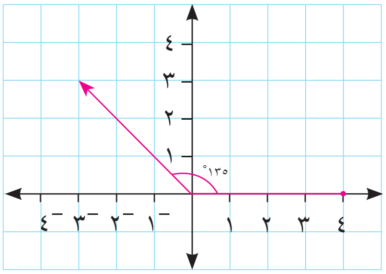
ينتج: ص = ٢ × ٢ + ٣ =٧

س٣: أ) محيط الدائرة = ٢ × ١٤ ×π = ٢٨ π، والمطلوب بالمسافة نصفها فقط.

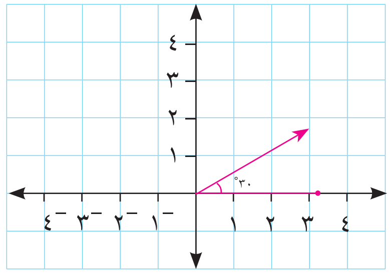
المسافة الكلية = ٢٠ + ١٤π + ٢٠ = (٤٠ + ١٤ π) متر

ب) الإزاحة الكلية = ٢٠ + ١٤ +١٤ +٢٠ = ٦٨م شرقاً

س٤: الحل: ظا هـ$_١$ = -١ ومنها: هـ$_١$ = ١٣٥



ظا هـ$_٢$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنها: هـ$_٢$ = ٣٠



قياس الزاوية بين المتجهين = ١٣٥ – ٣٠ = ١٠٥

س٥: تحركت نقطة من النقطة: أ (-٣، ٥) إلى النقطة: ب (٠، ٨)، ثم تحركت إلى النقطة: جـ (س، ٢)

حيث: س> ٠ ، فإذا كانت المسافة الكلية التي قطعتها تساوي ٩ $\sqrt{٢}$. جد إزاحة هذه النقطة مقداراً واتجاهاً.

الحل: ف = أب + ب جـ

$\sqrt{١٨}$ + $\sqrt{س^٢+٣٦}$ = ٩ $\sqrt{٢}$

٣ $\sqrt{٢}$ + $\sqrt{س^٢+٣٦}$ = ٩ $\sqrt{٢}$

$\sqrt{س^٢+٣٦}$ = ٦ $\sqrt{٢}$ (بتربيع الطرفين)

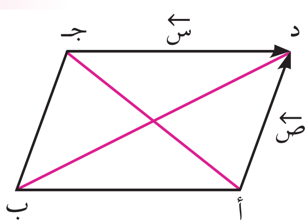
س٢ + ٣٦ = ٧٢ ومنها: س = ٦ ، -٦ (-٦ تهمل)

جـ (٦ ، ٢)

الإزاحة $\overleftarrow{ع}$ = جـ – أ = (٩ , -٣)

| $\overleftarrow{ع}$ | = $\sqrt{٩٠}$ والاتجاه **ظاهـ** = $\frac{١}{٣}$ (حيث **هـ** قياس الزاوية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات)، ومنها: **هـ** تساوي تقريبا ١٩ درجة.

تمارين ومسائل: (١ - ٣) العمليات على المتجهات



س١: أ) $\overleftarrow{أجـ}$ = $\overleftarrow{أب}$ + $\overleftarrow{بجـ}$ = $\overleftarrow{-س}$ + $\overleftarrow{ص}$

ب) $\overleftarrow{دب}$ = $\overleftarrow{دجـ}$ + $\overleftarrow{جـب}$ = – ($\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$)

س٢: ٥- (-٣، ٥) + ٢(٣، ٤) = (١٥، -٢٥) + (٦، ٨) = (٢١، -١٧)

س٣: نكتب المتجهات بالوضع القياسي

$\overleftarrow{\text{أب}}$ = (٥، ٠)، $\overleftarrow{\text{ءجـ}}$ = (٥، ٠)؛ لأنّ: $\overleftarrow{\text{أب}}$ = $\overleftarrow{\text{ءجـ}}$ ، إذن: تساوى وتوازى ضلعان متقابلان في شكل رباعي؛ لذلك الشكل هو متوازي أضلاع.

س٤: $|\overleftarrow{\text{أب}}|^{٢}$ = (س−٥)^{٢} + (−٢−س)^{٢} ⟸ ٢٥ = س^{٢}−١٠س +٢٥ + ٤ + ٤س + س^{٢}

ومنها: ٢س^{٢}−٦س +٤ = ٠ ⟸ س^{٢}−٣س +٢ = ٠

(س − ١)(س − ٢) =٠ ⟸ س = ١ ، س = ٢

س٥: ٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٢ $\overleftarrow{\text{أ}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{ب}}$ وبالتعويض: ٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٢(٣، −٥) = ٣(٢، −٦)

٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ = (٦، −١٨) + (٦، −١٠) ⟸ ٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ = (١٢، −٢٨) ⟸ $\overleftarrow{\text{س}}$ =(٣، −٧)

س٦: $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ + $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ = (٥، ٧)

(٢، ٤)+ $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ = (٥، ٧) ومنها: $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ =(٣، ٣) = ٣و$_{١}$+ ٣و$_{٢}$

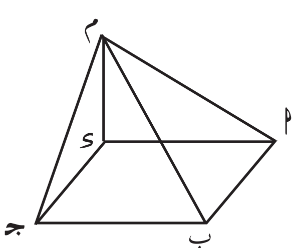
س٧: أ) متجه طوله ٥ وحدات وعكس $\overleftarrow{\text{أ}}$ = −٥ × $\frac{(-٢،٦)}{\sqrt{٤+٣٦}}$ = ($\frac{١٠}{\sqrt{٤٠}}$ ، $\frac{-٣٠}{\sqrt{٤٠}}$)

ب) ٥ أمثال المتجه أ وباتجاه $\overleftarrow{\text{أ}}$ هو ٥(−٢، ٦) = (−١٠، ٣٠)

س٨: $\overleftarrow{\text{أء}}$ = $\overleftarrow{\text{أم}}$ + $\overleftarrow{\text{مء}}$

أيضاً: $\overleftarrow{\text{بجـ}}$ = $\overleftarrow{\text{أء}}$ = $\overleftarrow{\text{بم}}$ + $\overleftarrow{\text{مجـ}}$

نجمع المعادلتين وينتج: ٢ $\overleftarrow{\text{أء}}$ = $\overleftarrow{\text{أم}}$ + $\overleftarrow{\text{مء}}$ + $\overleftarrow{\text{بم}}$ + $\overleftarrow{\text{مجـ}}$ ، وهو المطلوب.



س١: $\overleftarrow{\text{ن}}_{١} + \overleftarrow{\text{ن}}_{٢} = (١، ٢، ٦) = \overleftarrow{\text{و}}_{١} + ٢\overleftarrow{\text{و}}_{٢} + ٦\,\overleftarrow{\text{و}}_{٣}$

س٢: أ (-٦، ٢، ٣)، ب (٢، ٤، ٨)

أ) $\pm ٤\,\overleftarrow{\text{أب}} = \pm ٤(٨، ٢، ٥)$

ب) $٤\,\dfrac{\overleftarrow{\text{أب}}}{|\overleftarrow{\text{أب}}|} = \left(\dfrac{٣٢}{\sqrt{٩٣}}، \dfrac{٨}{\sqrt{٩٣}}، \dfrac{٢٠}{\sqrt{٩٣}}\right)$

ج) متجه وحدة عكس اتجاه $\overleftarrow{\text{أب}} = \dfrac{\overleftarrow{\text{أب}}}{|\overleftarrow{\text{أب}}|} = -\left(\dfrac{٨}{\sqrt{٩٣}}، \dfrac{٢}{\sqrt{٩٣}}، \dfrac{٥}{\sqrt{٩٣}}\right)$

س٣: إذا كان: $\overleftarrow{\text{أ}} = (-٢، ٤، ٦)$ وكان: $٢\,\overleftarrow{\text{أ}} + ٣\,\overleftarrow{\text{ب}} = ٢\,\overleftarrow{\text{و}}_{١} + ٢٣\,\overleftarrow{\text{و}}_{٢}$ جد $\overleftarrow{\text{ب}}$

$٣\,\overleftarrow{\text{ب}} = (٢، ٢٣، ٠) - (-٤، ٨، ١٢) = (٦، ١٥، -١٢)$، ومنها:

$\overleftarrow{\text{ب}} = (٢، ٥، -٤) = ٢\,\overleftarrow{\text{و}}_{١} + ٥\,\overleftarrow{\text{و}}_{٢} - ٤\,\overleftarrow{\text{و}}_{٣}$

س٤: $٣\,\overleftarrow{\text{أ}} + ٣\,\overleftarrow{\text{ب}} = (-٦، ١٢، ٣)$

$٢\,\overleftarrow{\text{أ}} - ٣\,\overleftarrow{\text{ب}} = (-٧، -١، -١٣)$

بحل المعادلتين ينتج: $\overleftarrow{\text{أ}} = \left(\dfrac{-١٣}{٥}، \dfrac{١١}{٥}، ٢\right)$، ومنها: $\overleftarrow{\text{ب}} = \left(\dfrac{٣}{٥}، \dfrac{٩}{٥}، ٣\right)$ ومنها:

$\overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}} = \left(\dfrac{-١٩}{٥}، \dfrac{٢}{٥}، -٥\right)$، ومنها $|\overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}}| = \sqrt{٣٥,٤}$

س٥: الحل: $٢\,\overleftarrow{\text{أ}} + ٣\,\overleftarrow{\text{ب}} = (٢\text{م} + ٣\text{ن}، -٤\text{م} + ٦\text{ن}، ٨)$

يتضمن : $٢\text{م} + ٣\text{ن} = ١٩$ .... (١)

$-٤\text{م} + ٦\text{ن} = -٢$ .... (٢)

وعند حل النظام السابق ينتج أن: م = ٥، ن = ٣

س٦: ليكن: $\overleftarrow{\text{أ}} = (١، -٣، ٢)$، $\overleftarrow{\text{ب}} = (\text{س}+٣، -\text{س}، ٢\text{س}-٣)$ أجد قيمة / قيم س بحيث إنّ: $|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}| = \sqrt{٢٢}$ وحدة طول.

الحل: $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}$ = (١ + س + ٣، -٣ + -س، ٢ + ٢س − ٣)

$\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}$ = (٤ + س، -٣ + -س، -١ + ٢س)

$|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}| = \sqrt{(\text{٤+س})^{\text{٢}} + (\text{−٣−س})^{\text{٢}} + (\text{−١+٢س})^{\text{٢}}}$

$\sqrt{\text{٢٢}} = \sqrt{\text{س}^{\text{٢}} \text{+ ٨س + ١٦ + س}^{\text{٢}} \text{+ ٦س + ٩ + ٤س}^{\text{٢}} \text{− ٤س + ١}}$

٢٢ = ٦س$^{\text{٢}}$ + ١٠س + ٢٦

٣س$^{\text{٢}}$ + ٥س + ١٣ = ١١

٣س$^{\text{٢}}$ + ٥س + ١٣ = ١١

٣س$^{\text{٢}}$ + ٥س + ٢ = ٠

(٣س + ٢) (س + ١) = ٠

س = $\frac{\text{−٢}}{\text{٣}}$، س = −١

تمارين ومسائل: (١ - ٥)

س١: أ) (٥، ٣، ٠) (-١، ٢، ٢) = -٥ + ٦ + ٠ = ١

ب) $\overrightarrow{\text{و}_{\text{١}}} \cdot \overrightarrow{\text{و}_{\text{٢}}}$ = صفر متعامدان

س٢: (١، ٤، ٣)، (٣، ١٢، ٩)

(٣، ١٢، ٩) = ٣ (١، ٤، ٣) إذن: المتجهان متوازيان وبالاتجاه نفسه هـ = صفر°

(ملحوظة: يمكن الحل عن طريق قانون الزاوية بين متجهين).

س٣: أ) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (س ، $\sqrt{\text{٣}}$)، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (-س ، $\sqrt{\text{٣}}$) وقياس الزاوية بينهما ٦٠°

جتا٦٠° = $\frac{\text{−س}^{\text{٢}}\text{ + ٣}}{\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}\text{+٣}} \times \sqrt{\text{س}^{\text{٢}}\text{+٣}}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$ وبترتيب المعادلة ينتج: س = ± ١

ب) (جتاس، -جاس) × (جتاس، ١+جاس) = ٠

جتا$^{\text{٢}}$س− جاس − جا$^{\text{٢}}$س = ٠ ومنها ١- جا$^{\text{٢}}$س- جاس − جا$^{\text{٢}}$س = ١- جاس - ٢جا$^{\text{٢}}$س=٠

(١ − ٢جاس) (١+ جاس) = ٠ ∴ جاس= $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ او جاس = -١ ومنها: س= ٣٠° أو ١٥٠°

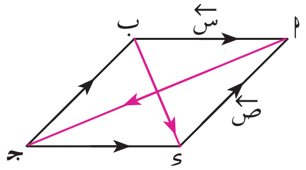
أو س = ٢٧٠° ترفض ، إذن: س = $\frac{\pi}{\text{٦}}$ او ٥ $\frac{\pi}{\text{٦}}$

س٤: $\text{جتا}^{٢}\frac{\pi}{٤} + \text{جتا}^{٢}\frac{\pi}{٣} + \text{جتا}^{٢}\,\text{هـ}_{٣} = ١$ ومنها: $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \text{جتا}^{٢}\,\text{هـ}_{٣} = ١$

$\text{جتا}^{٢}\,\text{هـ}_{٣} = \frac{١}{٤}$ ومنها: $\text{جتا}\,\text{هـ}_{٣} = \pm\frac{١}{٢}$

ومنها: $\text{هـ}_{٣} = \frac{\pi}{٣}$

س٥: أثبت باستخدام المتجهات أنّ قطري المعين متعامدان.



$|\overleftarrow{\text{س}}| = |\overleftarrow{\text{ص}}|$ أضلاع المعين متساوية في الطول.

المطلوب: إثبات أنّ: جـ أ عمودي على د ب

$\overleftarrow{\text{جـ أ}} = (\overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}})$، $\overleftarrow{\text{ب د}} = (\overleftarrow{\text{س}} - \overleftarrow{\text{ص}})$

$\overleftarrow{\text{جـ أ}} \,.\, \overleftarrow{\text{د ب}} = (\overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}}) \,.\, (\overleftarrow{\text{س}} - \overleftarrow{\text{ص}}) = \overleftarrow{\text{س}} \,.\, \overleftarrow{\text{ص}} - |\overleftarrow{\text{س}}|^{٢} + |\overleftarrow{\text{ص}}|^{٢} - \overleftarrow{\text{س}} \,.\, \overleftarrow{\text{ص}} = ٠$

$\therefore$ القطران متعامدان

س٦: إذا كان: $\overleftarrow{\text{أ}}$ يعامد $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، وكان: $\overleftarrow{\text{أ}}$ يعامد $\overleftarrow{\text{جـ}}$ أثبت أنّ: $\overleftarrow{\text{أ}}$ يعامد $\overleftarrow{\text{ء}}$

حيث $\overleftarrow{\text{ء}} = \text{م}\overleftarrow{\text{ب}} + \text{ن}\overleftarrow{\text{جـ}}$ ، م، ن $\in$ ح*

الحل: $\overleftarrow{\text{أ}} \,.\, \overleftarrow{\text{ء}} = \overleftarrow{\text{أ}} \,.\, (\text{م}\overleftarrow{\text{ب}} + \text{ن}\overleftarrow{\text{جـ}}) = \overleftarrow{\text{أ}} \,.\, \text{م}\overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{أ}} \,.\, \text{ن}\overleftarrow{\text{جـ}}$

$= \text{م}\overleftarrow{\text{أ}} \,.\, \overleftarrow{\text{ب}} + \text{ن}\overleftarrow{\text{أ}}\,\overleftarrow{\text{جـ}} = ٠$.

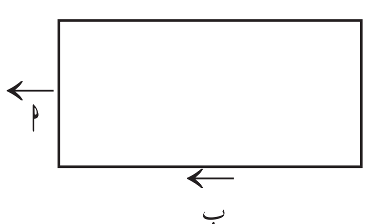
$\therefore$ المتجهان متعامدان.

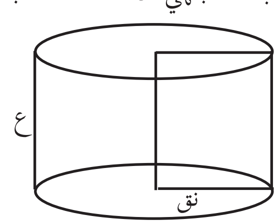
$\text{ش} = |\overleftarrow{\text{ق}}|\,|\overleftarrow{\text{ف}}|\,\text{جتا}\,٥ = ٣ \times ٨ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{٢٤}{\sqrt{٢}}$

س٧: أ) هـ = ٤٥° أو هـ = ١٣٥°

ب) $|٢\overleftarrow{\text{أ}} + ٣\overleftarrow{\text{ب}}| = \sqrt{١٩٢١}$ ويساوي تقريبًا ٤٤ وحدة.

س٨: أثبت باستخدام الضرب المتجهي أن المساحة الجانبية للاسطوانة = ٢ π نق ع





المساحة الجانبية للاسطوانة القائمة = مساحة المستطيل (الناتج من شبكة الإسطوانة)

= | $\overleftarrow{\text{أ}}$ × $\overleftarrow{\text{ب}}$ | = | $\overleftarrow{\text{أ}}$ | × | $\overleftarrow{\text{ب}}$ | **جاهـ**

= ع × ٢π نق × **جا** ٩٠°

= ٢π نق ع

تمارين ومسائل: (١ - ٦)

س١:

١	٢	٣	٤	٥
أ	أ	ج	ب	أ

س٢:

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
صح	خطأ	خطأ	صح	خطأ	خطأ	خطأ	صح	خطأ

س٣: أ) عدد لا نهائي. ب) عدد لا نهائي. ج) واحد فقط.

س٤: ١- مستقيمان متوازيان (أ س // ب ص)

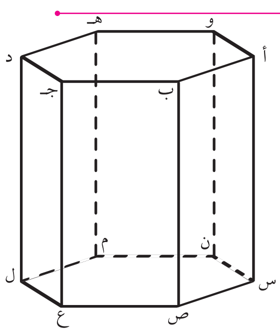
٢- مستقيمان متخالفان (أب و س ن)

٣- مستقيمان متعامدان (جـ ع، ع ص)

٤- مستويان متقاطعان (أ س ص، س ص ع)

٥- مستويان متوازيان (أ ب جـ، س ص ع)

٦- مستقيم يقع في مستوى (ن م يقع في المستوى س ص ع)



تمارين ومسائل: (علمي فقط) (١ - ٧) نظرية الأعمدة الثلاثة

س١: المثلث أ ب جـ فيه الزاوية ب قائمة، رسم جـ د ⊥ المستوى أ ب جـ، ثم وصل أ د، نصف ب جـ في هـ، وكذلك نصف أ د، في و. أثبت أن : و هـ ⊥ ب جـ.

المعطيات: الزاوية ب قائمة، جـ د ⊥ المستوى أ ب جـ.

هـ، و منتصفا ب جـ، أ د

المطلوب: إثبات أنّ: و هـ ⊥ ب جـ

العمل: ننصف أ جـ في ل، نصل ل هـ، ل و

البرهان: بما أنّ: هـ منتصف ب جـ ، ل منتصف أ جـ

بما أنّ: ل هـ يوازي أ ب ∴ الزاوية ل هـ جـ قائمة

وبما أنّ: ل منتصف أ جـ، و منتصف أ د ∴ ل و يوازي جـ د

وبما أنّ: ل و ⊥ على المستوى أ ب جـ ∴ يكون و هـ مائلاً على المستوى أ ب جـ

مسقطه ل هـ عمودي على ب جـ الواقع في المستوى أ ب جـ

∴ المائل و هـ ⊥ ب جـ وهو المطلوب.

س٢: أ ب جـ مثلث، رُسم جـ د عمودياً على المستوى أ ب جـ ، ثم وُصل د أ، ونصف أ د، أ جـ، ب جـ في م، ل، ن على الترتيب. ثم وُصل م ن، فكان عمودياً على ب جـ . أثبت أنّ الزاوية أ ب جـ قائمة.

البرهان: بما أنّ: م ل يوازي د جـ

جـ د ⊥ على المستوى أ ب جـ

م ل ⊥ على المستوى أ ب جـ

∴ ل ن هو مسقط المائل م ن على المستوى أ ب جـ

وبما أنّ المائل م ن ⊥ ب جـ الواقع في المستوى أ ب جـ.

∴ مسقطه ل ن ⊥ ب جـ

∴ الزاوية ل ن جـ قائمة

وبما أنّ: ل ن يوازي أ ب ∴ الزاوية أ ب جـ قائمة.

س٣:

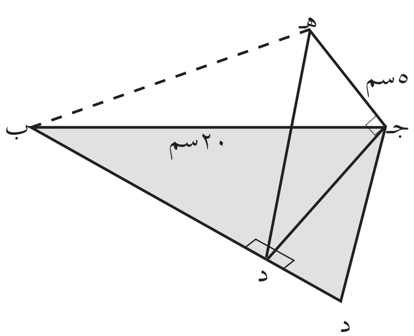
الحل: $(هـ ب)^2 = (ب و)^2 + (و هـ)^2 = ٢٠٠ + ٢٢٥ = ٤٢٥$ ومنها هـ ب = $\sqrt{٤٢٥}$

$(هـ ب)^2 = (ب جـ)^2 + (جـ هـ)^2 = ٢٠٠ + ٢٢٥ = ٤٢٥$ ومنها ص = $\sqrt{٤٢٥}$

جـ و = وب = س

$٢(س)^2 = ٤٠٠$ ومنها س = جـ و = $\sqrt{٢٠٠}$

$(هـ و)^2 = ٢٠٠ + ٢٥ = ٢٢٥$ ومنها: هـ و = ١٥



تمارين عامة

س١:

الفرع	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الرمز	أ	ج	ب	أ	ب	د	ب	أ	ب	د
الجواب	١	لا يقعان في مستوى واحد ولا يتقاطعان	٣	٩٠	٣	(١٧، ٢، ٦)	٢	متساوي الأضلاع	$\overleftarrow{\text{أ}}$ و $\overleftarrow{\text{ب}}$ في الإتجاه نفسه	١٠٨

س٢: $\overleftarrow{\text{أ}} = (١، ٠، -١)$، $|\overleftarrow{\text{أ}}| = \sqrt{١+٠+١} = \sqrt{٢}$

جتاهـ$_١ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ومنها هـ$_١$ = ٤٥°، **جتاهـ**$_٢$ = ٠ . ومنها: هـ$_٢$ = ٩٠°، **جتاهـ**$_٣ = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ومنها: هـ$_٣$ = ١٣٥°

س٣: $\overleftarrow{\text{أ}} . \overleftarrow{\text{ب}} = (\text{س}، \sqrt{٧٥}) . (\text{س}، ٠) = \text{س}^٢$

جتاهـ $= \frac{\text{س}^٢}{\sqrt{\text{س}^٢+٧٥} \times \sqrt{\text{س}^٢}} = \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^٢+٧٥}} = \frac{١}{٢}$ وبتربيع الطرفين وترتيب المعادلة س = ± ٥، س = -٥ ترفض

س٤: $\overleftarrow{\text{أ}} = (-١، -٢)$ وكان $\overleftarrow{\text{ب}} = (\text{م}، -١)$

أ) $\frac{-٢}{-١} = \frac{-١}{\text{م}}$ ومنها: $\text{م} = \frac{-١}{٢}$ ملحوظة: يمكن الحل باستخدام **جتاهـ**

ب) $(-١، -٢) . (\text{م}، -١) = ٠$ ، ومنها: $-\text{م} +٢ = ٠$ ومنها: م = ٢

جـ) **جتا**٤٥ $= \frac{-\text{م}+٢}{\sqrt{٥} \times \sqrt{\text{م}^٢+١}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ وبتربيع الطرفين وحل المعادلة: $\text{م} = \frac{١}{٣}$ او -٣

س٥: $|\overleftarrow{\text{أ}}| = ٤$، $|\overleftarrow{\text{ب}}| = ١٠$ هـ = ٦٠

١) $\overleftarrow{\text{أ}} . \overleftarrow{\text{ب}} = ٤ \times ١٠ \times \frac{١}{٢} = ٢٠$

٢) $|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}|^٢ = |\overleftarrow{\text{أ}}|^٢ + ٢|\overleftarrow{\text{أ}}| \times |\overleftarrow{\text{ب}}|$ **جتا**٦٠° $+ |\overleftarrow{\text{ب}}|^٢ = ١٦ + ٤٠ + ١٠٠ = ١٥٦$ ومنها: $|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}| = \sqrt{١٥٦}$

٣) $|\overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}}|^٢ = ١٦ - ٤٠ + ١٠٠ = ٧٦$ ومنها: $|\overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}}| = \sqrt{٧٦}$

س٦: أ (٢، ٢)، ب (−٢، ٥)، ج (٧، −٥)، د (−٣، ٨)

$\overleftarrow{م}$ = (−٩، ٢٤) = ٣(−٣، ٨) = ٣ $\overleftarrow{د}$ أي ان $\overleftarrow{م}$ // $\overleftarrow{د}$

حل آخر: $\overleftarrow{م}$ = (−٩، ٢٤)

ظاهـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٢٤}{-٩}$ = $\frac{-٨}{٣}$

$\overleftarrow{د}$ = (−٣، ٨) ظاهـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٨}{-٣}$ ∴ $\overleftarrow{م}$ // $\overleftarrow{د}$

س٧: أ (٧، ١، ٣) ، ب (٥، ٣، ٤) جـ (٣، ٥، ٣)

$\overleftarrow{أب}$ = ب − أ = (-٢، ٢، ١) ومنها: طول $\overleftarrow{أ ب}$ = ٣

$\overleftarrow{أجـ}$ = جـ − أ = (-٤، ٤، ٠) ومنها: طول $\overleftarrow{أ جـ}$ = $\sqrt{٣٢}$

$\overleftarrow{بجـ}$ = جـ − ب = (-٢، ٢، -١) ومنها: طول $\overleftarrow{ب جـ}$ = ٣ إذن: المثلث متساوي الساقين.

س٨: ١) بما أن: $\overleftarrow{أ}$ // $\overleftarrow{ب}$ إذن: $\frac{ك}{١}$ = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{م}{٢}$ ومنها: ك = $\frac{١}{٢}$ و م = ١

$\overleftarrow{ب}$ = (ك، ٣، م) = ($\frac{١}{٢}$ ، ٣، ١) و $\overleftarrow{جـ}$ = (ك، م، ك + م)= ($\frac{١}{٢}$ ، ١، $\frac{٣}{٢}$)

٢|$\overleftarrow{جـ}$|^{٢} − ٤ $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{ب}$ = ٢×($\frac{١٤}{٤}$) − ٤×($\frac{٤١}{٤}$) = -٣٤

٢) ٤($\overleftarrow{ب}$. $\overleftarrow{جـ}$) ($\overleftarrow{أ}$) = ٤($\frac{١}{٤}$ + ٣ +$\frac{٣}{٢}$) . (١، ٦، ٢) = ١٩ (١، ٦، ٢)

= (١٩، ١١٤، ٣٨)

س٩: جتا^{٢}هـ$_{١}$ + جتا^{٢}هـ$_{٢}$ + جتا^{٢}هـ$_{٣}$ =١ لكن: هـ$_{١}$ = هـ$_{٢}$ = هـ$_{٣}$ اذن

٣جتا^{٢}هـ =١ ومنها: جتا^{٢}هـ = $\frac{١}{٣}$ ومنها: جتاهـ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{أ_{١}}{٨\sqrt{٣}}$ = $\frac{أ_{٢}}{٨\sqrt{٣}}$ = $\frac{أ_{٣}}{٨\sqrt{٣}}$

ومنها: أ(٨، ٨، ٨) ومنها: $\overleftarrow{أ}$ = ٨ $\overleftarrow{و_{١}}$ +٨ $\overleftarrow{و_{٢}}$ + ٨ $\overleftarrow{و_{٣}}$

س١٠: أثبت أن | $\overleftarrow{أ}$ × $\overleftarrow{ب}$ |^{٢} + ($\overleftarrow{أ}$. $\overleftarrow{ب}$)^{٢} = | $\overleftarrow{أ}$ |^{٢} | $\overleftarrow{ب}$ |^{٢}

الطرف الأيمن: | $\overleftarrow{أ}$ × $\overleftarrow{ب}$ |^{٢} + ($\overleftarrow{أ}$. $\overleftarrow{ب}$)^{٢} = (| $\overleftarrow{أ}$ | | $\overleftarrow{ب}$ | جاهـ)^{٢} + (| $\overleftarrow{أ}$ | | $\overleftarrow{ب}$ | جتاهـ)^{٢}

= | $\overleftarrow{أ}$ |^{٢} | $\overleftarrow{ب}$ |^{٢} جا^{٢}هـ + | $\overleftarrow{أ}$ |^{٢} | $\overleftarrow{ب}$ |^{٢} جتا^{٢}هـ

= | $\overleftarrow{أ}$ |^{٢} | $\overleftarrow{ب}$ |^{٢} × (جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ)

= | $\overleftarrow{أ}$ |^{٢} | $\overleftarrow{ب}$ |^{٢} × ١ = | $\overleftarrow{أ}$ |^{٢} | $\overleftarrow{ب}$ |^{٢}

حلول الوحدة الثانية: المنطق

تمارين ومسائل: (٢ - ١)

س١: الجمل التي تمثل عبارات رياضية هي: أ، ب، جـ ، د . لكن: هـ، و لا تمثل عبارات رياضية.

س٢: ١)خ ٢) خ ٣) خ ٤) ص ٥) ص ٦) ص

س٣: نفي العبارات : ١) منحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{}$س غير متماثل حول نقطة الأصل.

٢) $\sqrt{٤٥} \leqslant \sqrt[٣]{١٣٥}$

٣) ق(س) = س^{٢} ليس اقتراناً فردياً.

٤) العدد ٢ ^{١٠} ليس من مضاعفات العدد ٣٢

٥) الصفر عدد غير نسبي.

٦) المستقيم الذي معادلته س = ٢ لا يعامد المستقيم الذي معادلته ص = $\frac{١}{٢}$

س٤:

١	٢	٣	٤	٥
ب	أ	جـ	د	أ

تمارين ومسائل: (٢ - ٢)

س١: أ) النيون من العناصر النبيلة، والكبريت ليس فلزاً.

ب) النيون ليس من العناصر النبيلة، والكبريت ليس فلزاً.

ج) النيون ليس من العناصر النبيلة، أو الكبريت فلز.

س٢: أ) خ ب) ص ج) خ

س٣:

١	٢	٣	٤
ج	أ	د	أ

تمارين ومسائل: (٢ - ٣)

س١: ١) إذا كان الوتر أطول أضلاع المثلث قائم الزاوية فإن مجموع قياسات زوايا الخماسي الداخلية = ٥٤٠°

٢) إذا كان مجموع قياسات زوايا الشكل الخماسي الداخلية لا يساوي ٥٤٠° ، فإنّ الوتر ليس أطول أضلاع المثلث قائم الزاوية.

٣) الوتر ليس أطول أضلاع المثلث قائم الزاوية، إذا وفقط إذا مجموع قياسات زوايا الخماسي الداخلية = ٥٤٠ درجة

س٢: ١- ص.   ٢- خ.   ٣- ص.   ٤- ص.

س٣: ١- م ← ك   ٢- ك ↔ ع   ٣- (م ∧ ع) ← ك   ٤- (ع ∨ م) ← ك

س٤: يجيب الطلبة بعبارات من إنشائهم

س٥:

-١

ف	ك	ف ← ك	~ف	(ف ← ك)∧~ف
ص	ص	ص	خ	خ
ص	خ	خ	خ	خ
خ	ص	ص	ص	ص
خ	خ	ص	ص	ص

-٢

ف	ك	~ف	~ف∨ك	~ك	ف∧~ك	~(ف∨ك) ← (ف∧~ك)
ص	ص	خ	ص	خ	خ	خ
ص	خ	خ	خ	ص	ص	ص
خ	ص	ص	ص	خ	خ	خ
خ	خ	ص	ص	ص	خ	خ

-٣

ف	ك	م	ف ← ك	~(ف ← ك)	~م	~(ف∨ك) ← (ف∧~ك)
ص	ص	ص	ص	خ	خ	خ
ص	ص	خ	ص	خ	ص	خ
ص	خ	ص	خ	ص	خ	خ

ص	خ	خ	خ	ص	ص	ص
خ	ص	ص	ص	خ	خ	خ
خ	خ	خ	ص	خ	ص	خ
خ	ص	ص	ص	خ	خ	خ
خ	خ	خ	ص	خ	ص	خ

س٦:

ف	ن	~ل	~ل ← ف	~ ف ∧ ~ ن	(~ف∧~ل) ← ف
ص	ص	خ	ص	خ	ص
ص	خ	ص	ص	خ	ص
خ	ص	خ	ص	خ	ص
خ	خ	ص	خ	ص	خ

الحل أعلاه يمثل أحد الحلول، بالإمكان البحث عن آخر ...

تمارين ومسائل: (٢ - ٤)

س١:

ف	ل	~ل	ف ← ~ل	~ف	~ف∧ل
ص	ص	خ	خ	خ	خ
ص	خ	ص	ص	خ	خ
خ	ص	خ	ص	ص	ص
خ	خ	ص	ص	ص	خ

أ) بملاحظة قيم صواب العبارتين: ف ← ~ل ، ~ف∧ل المتناظرة، نجد أنهما غير متكافئتين.

ف	ى	ف∧ى	~ف	ف∧ى ← ~ف	~ى	~ف∨~ى
ص	ص	ص	خ	خ	خ	خ
ص	خ	خ	خ	ص	ص	ص
خ	ص	خ	ص	ص	خ	ص
خ	خ	خ	ص	ص	ص	ص

ب) بملاحظة قيم صواب العبارتين: ف∧ى ← ~ف ،~ف∨~ى نجد أنهما متكافئتان.

س٢: ١) $\sqrt{2}$ ∉ ص ← ٣ ∉ ط

٢) إذا كان السمك غير عالي القيمة الغذائية إذن: التدخين غير مضر بالصحة والفواكه ليست مفيدة.

س٣: ١) المثلث متساوي الأضلاع وغير حاد الزوايا.

٢) المنطق من فروع الرياضيات، والرياضيات ليست لغة العلوم.

س٤: ١) ~(ف ← ~ى) ≡ ف∧ى

الحل: ~(ف ← ~ى) ≡ ف∧~(~ن) ≡ ف∧ى

٢) ف ← (ف ∨ ~ى) ≡ ~ف ∨ (ف ∨ ~ى)

≡ ~ف ∨ ~ى ∨ ف (خاصية التبديل)

≡ ~(ف∧ى) ∨ ف

≡ (ف∧ى) ← ف

٣) (~ف∨ى) ← (ف∧~ى) ≡ ~(ف ← ى)

الحل: (~ف∨ى) ← (ف∧~ى) ≡ ~(~ف∨ى)∨(ف∧~ى)

≡ (~~ف∧~ى)∨(ف∧~ى)

≡ (ف∧~ى)∨(ف∧~ى)

≡ (ف∧~ى)

≡ ~(ف ← ى)

٤) ف ← (ى∧~م) ≡ (ف ← ى)∧(ف ← ~م)

≡ ~ف∨(ى∧~م)

≡ (~ف∨ى) ∧ (~ف∨~م))

≡ (ف ← ى) ∧ (ف ← ~م)

٥) (ف ⟵ ~~ن~~) $\vee$ (م) ⟵ ل) ≡ (ف$\wedge$م) ⟵ (ن $\vee$ ل)

الحل: (ف ⟵ ن) $\vee$ (م) ⟵ ل) ≡ (~ف$\vee$ن) $\vee$ (~م$\vee$ ل)

≡ (~ف$\vee$~م) $\vee$ (ن$\vee$ل)

≡ ~(ف$\wedge$م) $\vee$ (ن$\vee$ل)

≡ (ف$\wedge$م) ⟵ (ن$\vee$ل)

تمارين ومسائل: (٢ - ٥)

س١: ١- د. ٢- ب. ٣- أ. ٤- ب.

س٢: ١- {٠، ١}. ٢- ∅. ٣- {-٥، ٥}. ٤- {٥، ٦}. ٥- ص

٦-{(٢، ٤)، (٤، ٢)، (٨، ١)، (١، ٨)، (-٢، -٤)، (-٤، -٢)، (-٨، -١)، (-١، -٨)} ٧- {$\frac{\pi}{2}$}

س٣: ١) س − ٢ ⩾ ٢ ومنها: س ⩾ ٤ مجموعة حل **ق**(س) = {١، ٢، ٣، ٤}

٢س+١ = ٧ ومنها: س = ٣ مجموعة حل **هـ**(س) = {٣}

٢) مجموعة حل **ق**(س) $\vee$ **هـ**(س) = {١، ٢، ٣، ٤}

٣) مجموعة حل **ق**(س) $\wedge$ **هـ**(س) = {٣}

٤) مجموعتا حليهما غير متساويتين، إذن: غير متكافئتين.

س٤: **الحل:** حل **ق**(س) = ٢جا^{٢}س − ٣جاس + ١ = ٠

= (٢جاس − ١) (جاس − ١) = ٠

إمّا: (٢جاس − ١)= ٠ ⟸ جاس = $\frac{١}{٢}$ ⟸ س = $\frac{\pi}{٦}$، $\frac{٥\pi}{٦}$

أو: (جاس − ١) = ٠ ⟸ جاس = ١ ⟸ س = $\frac{\pi}{٢}$ مجموعة حل **ق**(س) = {$\frac{\pi}{٦}$، $\frac{\pi}{٢}$، $\frac{٥\pi}{٦}$}

حل **هـ**(س) = ظا^{٢}س − $\sqrt{٣}$ ظاس = $\frac{-٢}{٣}$ ⟸ ٣ظا^{٢}س − ٣$\sqrt{٣}$ ظاس + ٢ = ٠

⟸ ($\sqrt{٣}$ ظاس −٢)($\sqrt{٣}$ ظاس − ١) = ٠

إما: ظاس = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ⟸ س = $\frac{\pi}{٦}$، $\frac{٧\pi}{٦}$ أو: ظاس = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ∴ س تساوي تقريباً $\frac{٤٩\pi}{١٨٠}$

∴ مجموعة حل **ق**(س) $\wedge$ **هـ**(س) = {$\frac{\pi}{٦}$} (العناصر المشتركة)

س٥: ١- ص ← خ العبارة خاطئة.

٢- خ ← ص العبارة صائبة.

٣- خ $\vee$ خ العبارة خاطئة.

٤- خ ← (ص $\wedge$ خ) العبارة صائبة.

تمارين ومسائل: (٢ - ٦)

س١: ١) ج. ٢) أ. ٣) د.

س٢: ١) ص. ٢) خ. ٣) ص. ٤) خ. ٥) خ

س٣: ١) ص. ٢) خ. ٣) ص. ٤) ص. ٥) ص

تمارين ومسائل: (٢ - ٧)

س١: ١) ج. ٢) ب

س٢: ١) ص. ٢) خ. ٣) ص

س٣: ١) بعض المربعات ليست معينات.

٢) كل الاقترانات ليست دائرية.

٣) $\forall$ (س، ص) $\in$ ط×ط ، س > ص

٤) بعض مماسات الدائرة ليست عمودية على أنصاف أقطارها.

تمارين ومسائل: (٢ - ٨)

س١: أثبت أنّ :إذا كان **ك** عدداً فردياً، فإنّ **ك**^{٢} عدد فردي.

نفرض ف: **ك** عدد فردي

ن: **ك**^{٢}

المطلوب إثبات: ف ← ن.

ك = ٢م + ١، **ك**^{٢} = (٢م + ١)^{٢} = ٤م^{٢} + ٤م + ١ = ٢(٢م^{٢} + ٢م) + ١

= ٢و + ١ = عدد فردي.

س٢: أثبت أنّ: إذا كان $ك$، ل ، م، ثلاثة أعداد صحيحة موجبة ، وكان باقي قسمة $ك$ على م = باقي قسمة ل على م فإنّ: $ك$ – ل يقبل القسمة على م.

البرهان

نفرض ف: باقي قسمة $ك$ على م = باقي قسمة ل على م

ن: $ك$ – ل يقبل القسمه على م.

المطلوب إثبات: ف ⟵ ن.

نفرض $ك$ = ر م + و، ل = ع م + و، ر، م، ع، و ∈ ص

$ك$ – ل = ر م + و – ع م – و = ر م – ع م = م (ر – ع) = ح م حيث: ح ∈ ص.

إذن: ك – ل يقبل القسمة على م.

س٣: أثبت أنّ: إذا كان أ، ب عددين حقيقيين، فإنّ: $\sqrt{أ^2 + ب^2} \leqslant |أ| + |ب|$.

نفرض ف: أ، ب عددان حقيقيان، المطلوب إثبات: ف ⟵ ن.

ن: $\sqrt{أ^2 + ب^2} \leqslant |أ| + |ب|$

∵ $|أ| \geqslant 0$، ∵ $|ب| \geqslant 0$ ⟸ $|أ| \times |ب| \geqslant 0$ نضرب الطرفين في العدد ٢، فينتج:

$2 |أ| \times |ب| \geqslant 0$ ، بإضافة $أ^2 + ب^2$ إلى الطرفين ينتج أنّ:

$أ^2 + ب^2 + 2|أ||ب| \geqslant أ^2 + ب^2$ لكن: $أ^2 = |أ|^2$، $ب^2 = |ب|^2$ ومنه:

$|أ|^2 + |ب|^2 + 2|أ||ب| \geqslant أ^2 + ب^2$، إذن: $(|أ| + |ب|)^2 \geqslant أ^2 + ب^2$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين ينتج أنّ: $|أ| + |ب| \geqslant \sqrt{أ^2 + ب^2}$

س٤: استخدم البرهان غير المباشر لإثبات أنّ: إذا كان $ك^2$ يقبل القسمة على ٣ فإنّ: $ك$ يقبل القسمه على ٣.

ف: $ك^2$ يقبل القسمة على ٣.

ن: $ك$ يقبل القسمه على ٣.

المطلوب إثبات أنّ: ف ⟵ ن، وبطريقة الإثبات غير المباشر نثبت صحة:

~ن ⟵ ~ف حيث ~ن: $ك$ لا يقبل القسمه على ٣.

~ف: $ك^2$ لا يقبل القسمة على ٣.

$ك$ لا يقبل القسمه على ٣ ، إذن: $ك$ = ٣ل + و ، و = ١ ، ٢ (وهي الباقي)

$ك^2$ = (٣ل + و)^2 = ٩ل^2 + ٦ل و + و^2 = ٣ (٣ل^2 + ٢ل و) + و^2 ، ومنه:

$ك^2$ = ٣ ع + و^2 ، وهذا لا يقبل القسمة على ٣ ؛لأن: و^2 = ١ ، أو ٤ لا تقبل القسمة على ٣ .

س٥: قطع وليد مسافة تزيد عن ٣٦٠ كم في رحلة ، وتوقف أثناء سفره مرتين فقط، استخدم البرهان بالتناقض؛ لإثبات أنّ وليداً قطع أكثر من ١٢٠ كم في إحدى مراحل رحلته الثلاث على الأقل.

س: المسافة المقطوعه في المرحلة الأولى.

ص: المسافة المقطوعه في المرحلة الثانية.

ع: المسافة المقطوعه في المرحلة الثالثة.

ف: س + ص + ع > ٣٦٠ ، ن : س> ١٢٠ ، أو ص > ١٢٠ ، أو ع > ١٢٠

المطلوب: إثبات أنّ: ف $\leftarrow$ ن، البرهان بالتناقض.

نفرض: ف صحيحه، ن خاطئة، إذن: $\sim$ن: س $\leqslant$ ١٢٠و ص $\leqslant$ ١٢٠ و ع $\leqslant$ ١٢٠

إذن: س + ص + ع $\leqslant$ ٣٦٠، وهذا يتناقض مع كون س + ص + ع > ٣٦٠

إذن: الافتراض خاطئ، ومنه: س> ١٢٠، أو ص > ١٢٠ ، أو ع > ١٢٠

س٦: أثبت أن : $(٨)^{ن}$ − ١ يقبل القسمه على ٧.

نثبت صحة هذه العباره باستخدام الاستقراء الرياضي

عندما ن = ١ ، $٨^{١}$ − ١ = ٧ تقبل القسمه على ٧

نفرض أنّ العبارة صحيحة عندما: ن = **ك** ، أي أن: $(٨)^{ك}$ -١ يقبل القسمه على ٧.

نثبت صحة العبارة عندما: ن = **ك** + ١

$(٨)^{ك}$ -١ يقبل القسمه على ٧، ومنه: $(٨)^{ك}$ -١= ٧ **ك** ، إذن: $(٨)^{ك}$ = ٧**ك** + ١

بضرب الطرفين في العدد ٨: $(٨)^{ك+١}$ = ٥٦**ك** + ٨ بطرح ١ من الطرفين ينتج:

$(٨)^{ك+١}$ − ١ = ٥٦**ك** + ٧ = ٧(٨**ك** + ١) ومنه $(٨)^{ك+١}$ − ١= ٧و

أي أن: $(٨)^{ك+١}$ − ١ يقبل القسمة على ٧.

س٧: أثبت أنّ : $(٢)^{١} + (٢)^{٢} + (٢)^{٣} + \ldots + (٢)^{ن} = (٢)^{ن+١} - ٢$.

نثبت صحة هذه العباره باستخدام الاستقراء الرياضي

عندما ن = ١، $٢^{١}$ = ٢، $(٢)^{١+١}$ − ٢= ٤ − ٢ = ٢ العباره صحيحة

نفرض أنّ العبارة صحيحة عندما ن = **ك**،

أي أنّ: $(٢)^{١} + (٢)^{٢} + (٢)^{٣} + \ldots + (٢)^{ك} = (٢)^{ك+١} - ٢$.

نثبت صحة العبارة عندما: ن = ك + ١، بمعنى:

$(٢)^{١} + (٢)^{٢} + (٢)^{٣} + \ldots + (٢)^{ك+١} = (٢)^{ك+٢} - ٢$

$(٢)^{١} + (٢)^{٢} + (٢)^{٣} + \ldots + (٢)^{ك} = (٢)^{ك+١} - ٢$ بإضافة $(٢)^{ك+١}$ إلى الطرفين

$(٢)^{١} + (٢)^{٢} + (٢)^{٣} + \ldots + (٢)^{ك} + (٢)^{ك+١} = (٢)^{ك+١} - ٢ + (٢)^{ك+١}$

$(٢)^{١} + (٢)^{٢} + (٢)^{٣} + \ldots + (٢)^{ك} + (٢)^{ك+١} = ٢(٢)^{ك+١} - ٢$

$(٢)^{١} + (٢)^{٢} + (٢)^{٣} + \ldots + (٢)^{ك} + (٢)^{ك+١} = (٢)^{ك+٢} - ٢$

س٨: بالتناقض نفرض أنّ: أ > ٠ و $\frac{\text{أ} + ١}{\text{أ} + ٢} \geqslant \frac{\text{أ} + ٢}{\text{أ} + ٣}$

ومنها: $\frac{\text{أ} + ١}{\text{أ} + ٢} - \frac{\text{أ} + ٢}{\text{أ} + ٣} \geqslant ٠$

بتوحيد المقامات والاختصار ينتج: $\frac{-٢}{\text{أ}^{٢} + ٤\text{أ} + ٤} \geqslant ٠$

إذن: يوجد تناقض؛ لأنّ هذا المقدار أصغر من صفر.

تمارين عامة الوحدة الثانية

س١:

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
د	ب	د	أ	ج	ج	أ	د	د

س٢: أ) ص. ب) ص. ج) ص. د) ص. هـ) ص.

س٣:

ف	ل	ف ← ل	ل ← ف
ص	خ	خ	ص
ص	ص	ص	ص
خ	ص	ص	خ
خ	خ	ص	ص

أ) من خلال الجدول نلاحظ أنّ: ف ← ل $\not\equiv$ ل ← ف

ب)

ف	ل	ف ← ل	~ ف	~ ل	~ ف ← ~ ل	~ ل ← ~ ف
ص	ص	ص	خ	خ	ص	ص
ص	خ	خ	خ	ص	ص	خ
خ	ص	ص	ص	خ	خ	ص
خ	خ	ص	ص	ص	ص	ص

جـ) نلاحظ من الجدول السابق أن ف ← ل $\equiv$ ل ← ~ ف

س٤: أ) (ف ⟵ ن) ∨ (ف ⟵ م) $\overset{?}{\equiv}$ ف ⟵ (ن ∨ م)

الطرف اليمين: (ف ⟵ ن) ∨ (ف ⟵ م) ≡ (~ف ∨ ن) ∨ (~ف ∨ م)

≡ ~ف ∨ ن ∨ م

≡ ~ف ∨ (ن ∨ م)

≡ ف ⟵ (ن ∨ م)

ب) ~ف ∨ (ن ∧ ~م) $\overset{?}{\equiv}$ ~((ف ⟵ ن) ⟵ (ف ∧ م))

الطرف الأيسر: ~((ف ⟵ ن) ⟵ (ف ∧ م))

≡ (ف ⟵ ن) ⟵ ~(ف ∧ م)

≡ ~ف ∨ ن (~ف ∨ ~م)

≡ ~ف ∨ ن ∧ ~ف ∨ ~م

≡ ~ف ∨ (ن ∧ ~م)

س٥: ف خاطئة، ن صائبة

س٦: أثبت أن: إذا كان س ≠ ص فإن: $\text{أ}^{\text{س}} \neq \text{أ}^{\text{ص}}$ ، حيث: أ > ٠ ، أ ≠ ١

ف: س ≠ ص، ن : $\text{أ}^{\text{س}} \neq \text{أ}^{\text{ص}}$، حيث: أ > ٠، أ ≠ ١

المطلوب إثبات أنّ : ف ⟵ ن، البرهان بالتناقض

نفرض ف صحيحه، ن خاطئة، إذن: ~ن: $\text{أ}^{\text{س}} = \text{أ}^{\text{ص}}$

$\text{أ}^{\text{س}} = \text{أ}^{\text{ص}}$ بأخذ $\text{لو}_{\text{أ}}$ للطرفين، $\text{لو}_{\text{أ}} \text{أ}^{\text{س}} = \text{لو}_{\text{أ}} \text{أ}^{\text{ص}}$ ومنه: س = ص وهذا يتناقض مع كون س ≠ ص إذن: $\text{أ}^{\text{س}} \neq \text{أ}^{\text{ص}}$.

س٧: أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي أنّ: $(١)^٣ + (٢)^٣ + (٣)^٣ + \ldots + (\text{ن})^٣ = (\text{ن}^٢(\text{ن}+١)^٢) \backslash ٤$

نثبت صحة هذه العباره باستخدام الاستقراء الرياضي

عندما ن = ١ ،$(١)^٣$ = ١، $(١^٢(١+١)^٢)\backslash ٤ = ١$. العباره صحيحة

نفرض أنّ العبارة صحيحة عندما ن = ك ،

أي أنّ: $(١)^٣ + (٢)^٣ + (٣)^٣ + \ldots + (\text{ك})^٣ = (\text{ك}^٢(\text{ك}+١)^٢)\backslash ٤$

نثبت صحة العبارة عندما: ن = ك +١ أي نثبت أنّ:

$(١)^٣ + (٢)^٣ + (٣)^٣ + \ldots + (\text{ك}+١)^٣ = (\text{ك}+١)^٢ (\text{ك}+٢)^٢\backslash ٤$

$(١)^٣ + (٢)^٣ + (٣)^٣ + \ldots + (\text{ك})^٣ = (\text{ك}^٢(\text{ك}+١)^٢)\backslash ٤$ باضافة $(\text{ك}+١)^٣$ للطرفين

$(١)^٣ + (٢)^٣ + (٣)^٣ + \ldots + (\text{ك})^٣ + (\text{ك}+١)^٣ = (\text{ك}^٢(\text{ك}+١)^٢)\backslash ٤ + (\text{ك}+١)^٣$ بتوحيد المقامات

$(١)^٣ + (٢)^٣ + (٣)^٣ + \ldots + (\text{ك})^٣ + (\text{ك}+١)^٣ = (\text{ك}^٢(\text{ك}+١)^٢ + ٤(\text{ك}+١)^٣) \backslash ٤$

$(١)^٣ + (٢)^٣ + (٣)^٣ + \ldots + (\text{ك})^٣ + (\text{ك}+١)^٣ = (\text{ك}+١)^٢ (\text{ك}^٢ + ٤\text{ك} + ٤) \backslash ٤$

$(١)^٣ + (٢)^٣ + (٣)^٣ + \ldots + (\text{ك})^٣ + (\text{ك}+١)^٣ = (\text{ك}+١)^٢ (\text{ك}+٢)^٢\backslash ٤$

س٨: نثبت أنها صحيحة عندما: $ن = ١$

$١ \leqslant ٢ - \frac{١}{١} = ١$

نفرض أنّها صحيحة عندما: $ن = ك$

$١ + \frac{١}{٤} + \ldots + \frac{١}{ك^٢} \leqslant ٢ - \frac{١}{ك}$ ونثبت صحتها عندما: $ن = ك + ١$

بإضافة: $\frac{١}{(ك+١)^٢}$ للطرفين في (١)

$$١ + \frac{١}{٤} + \frac{١}{(ك)^٢} + \frac{١}{(ك+١)^٢} \leqslant ٢ - \frac{١}{ك} + \frac{١}{(ك+١)^٢}$$

هنا يصبح المطلوب اثبات أن $٢ - \frac{١}{ك} + \frac{١}{(ك+١)^٢} \overset{؟}{\leqslant} ٢ - \frac{١}{ك}$

أي أن $- \frac{١}{ك} + \frac{١}{(ك+١)^٢} \overset{؟}{\leqslant} - \frac{١}{ك+١}$

بتوحيد المقامات $\frac{-١(ك+١)^٢}{ك(ك+١)^٢} + \frac{ك \times ١}{ك(ك+١)^٢} \overset{؟}{\leqslant} - \frac{-١ \times ك(ك+١)}{ك+١ \times ك(ك+١)}$

$-ك^٢ - ٢ك - ١ + ك \overset{؟}{\leqslant} -ك^٢ - ك$

$-ك - ١ \overset{؟}{\leqslant} - ك$

$-١ \leqslant ٠$ وهي صحيحة

العبارة صحيحة عند $ن = ك + ١$

حلول الوحدة الثالثة: المعادلات والمتباينات

تمارين ومسائل: (٣ - ١)

س١: س + ص = $\sqrt{٨}$ ، س − ٢ص = ٥ $\sqrt{٢}$

س + ص = $\sqrt{٨}$ $\Leftarrow$ س + ص = ٢ $\sqrt{٢}$ .... (١)

س − ٢ص = ٥ $\sqrt{٢}$ .... (٢)

٢× (س + ص = ٢ $\sqrt{٢}$)

$\Leftarrow$ ٢س + $\cancel{٢ص}$ = ٤ $\sqrt{٢}$ .... (١)

س − $\cancel{٢ص}$ = ٥ $\sqrt{٢}$ .... (٢)

٣س = ٩ $\sqrt{٢}$

س = ٣ $\sqrt{٢}$

نعوض قيمة س في المعادلة رقم (١) ٣ $\sqrt{٢}$ − ٢ص = ٥ $\sqrt{٢}$

ص = − $\sqrt{٢}$

س٢: ٣جا م + ٢جتا ب = $\frac{١}{٢}$ ، ٢جا م − ٣ جتا ب = $\frac{٥}{٢}$

٣× (٣جا م + ٢جتا ب = $\frac{١}{٢}$)

٢× (٢جا م − ٣ جتا ب = $\frac{٥}{٢}$)

٩جا م + $\cancel{٦جتا ب}$ = $\frac{٣}{٢}$

٤جا م − $\cancel{٦ جتا ب}$ = ٥

١٣جا م = $\frac{١٣}{٢}$

ومنه: ١٣جا م = $\frac{١٣}{٢}$ $\Leftarrow$ جا م = $\frac{١}{٢}$ ∴ م = $\frac{\pi}{٦}$ ، ٥ $\frac{\pi}{٦}$

نعوض ونجد قيمة ب هي: جتا ب = $\frac{-١}{٢}$ $\Leftarrow$ ب = $\frac{٢\pi}{٣}$

س٣: ٧س + ٥ص − ٣ع = −٨ .... (١)

٣س − ٥ص + ٢ع = −٤ .... (٢)

٥س + ٣ص + ع = ٠ .... (٣)

نجمع ١ مع ٢

٧س + ~~٥ص~~ − ٣ع = −٨ .... (١)

٣س − ~~٥ص~~ + ٢ع = −٤ .... (٢)

١٠س − ع = −١٢ .... (٤)

المعادلة ٢ مع ٣

٣×(٣س − ٥ص + ٢ع = −٤) .... (٢)

٥×(٥س + ٣ص + ع = ٠) .... (٣)

٩س − ١٥ص + ٦ع = −١٢ .... (٢)

٢٥س + ١٥ص + ٥ع = ٠ .... (٣)

٩س − ~~١٥ص~~ + ٦ع = −١٢ .... (٢)

٢٥س + ~~١٥ص~~ + ٥ع = ٠ .... (٣)

٣٤س + ١١ع = −١٢ .... (٥)

نأخذ المعادلة ٤ مع ٥

١١×(١٠س − ع = −١٢)............ (٤)

٣٤س + ١١ع = −١٢ .... (٥)

⟸

١١٠س − ~~١١ع~~ = −١٣٢ .... (٤)

٣٤س + ~~١١ع~~ = −١٢ .... (٥)

١٤٤س = −١٤٤ ∴ س = −١

ونعوض ونجد قيمة: ع = ٢، ص = ١

س٤: نفرض أنّ عدد الدقائق العرض الأول: س، والثاني: ص، والثالث: ع.

س + ص + ع = ٤٥٠ .... (١)

س + ص = ٢٥٠ .... (٢)

ص + ع = ٣٥٠ .... (٣)

بتعويض (٢) في (١) ينتج: ٢٥٠ + ع = ٤٥٠ ⟸ ع = ٢٠٠

ص = ٣٥٠ − ٢٠٠ ⟸ ص = ١٥٠

س = ٢٥٠ − ١٥٠ ⟸ س = ١٠٠

س٥: عدد شجيرات الزيتون = س، اللوز = ص، التفاح = ع

ص + ع = ٥٠ .... (١)

س + ع = ٦٠ .... (٢)

س + ص = ٧٠ .... (٣)

نطرح (٢) من (١) ينتج:

س + ع = ٦٠ .... (٢)

ص + ع = ٧٠ .... (١)

ص − س = −١٠ .... (٤)

ص − ~~س~~ = −١٠ .... (٤)

~~س~~ + ص = ٧٠ .... (٣)

٢ص = ٦٠ ⟸ ص = ٣٠، ع = ٢٠، س = ٤٠

س٦: ف = ﺃﻫ + ب ﻫ^{٢} + جـ

ف (١) = ﺃ + ب + جـ = ٤٥ ....(١)

ف (٢) = ٢ﺃ + ٤ب + جـ = ٦٠ ....(٢)

ف (٣) = ٣ﺃ + ٩ب + جـ = ٦٥ ....(٣)

بحل المعادلات ينتج: ﺃ = ٣٠م/ ث (السرعة الابتدائية) ، ب = −٥ ومنها: التسارع ٢ب = −١٠ م/ ث٢ ، جـ = ٢٠م (ارتفاع البناية)

س١: س + ص = ٥ .... (١) ⟸ س = ٥ − ص

٣س^{٢} − ٢ص^{٢} = ١٩ .... (٢)

نعوض: ٣(٥ − ص)^{٢} − ٢ص^{٢} = ١٩

٣(٢٥ − ١٠ ص + ص^{٢}) − ٢ص^{٢} = ١٩

ص^{٢} − ٣٠ص + ٥٦ = ٠

(ص − ٢٨) (ص − ٢) = ٠

ص = ٢٨ ، ص = ٢

س = −٢٣، س = ٣

(−٢٣، ٢٨)، (٣، ٢)

س٢: نفرض طول السجادة = س، عرض السجادة = ص.

س= ص+١

س^{٢} + ص^{٢} = ١٣ نعوض: (ص+١)^{٢} + ص^{٢} = ١٣

ص^{٢} +٢ص + ١ +ص^{٢} = ١٣

ص^{٢} +ص − ٦ = ٠

(ص + ٣) (ص − ٢) = ٠ ومنه: ص = ٢ متر، س = ٣ أمتار

س٣: معادلة المستقيم هي: ص−٥ = ٣ (س − ٢) ⟸ ص−٥ = ٣س −٦ ⟸ ص = ٣ س − ١

نعوض قيمة ص في المعادلة: ٢(٣س−١)^{٢} −٣س^{٢}= ٥

٢(٩س^{٢}−٦س+١) − ٣ س^{٢} = ٥

١٨س^{٢}−١٢س +٢−٣س^{٢}=٥

٥س^{٢}−٤س −١ = ٠ ومنها: (٥س +١) (س − ١) = ٠

⟸ س = $\frac{-١}{٥}$ ، س = ١ ⟸ ($\frac{-١}{٥}$ ، $\frac{-٨}{٥}$)

⟸ ص= $\frac{-٨}{٥}$ ، ص= ٢ ⟸ (١، ٢)

س٤: المستقيم ٣س + ٣ص = ٦ ، مع المنحنى $(٢س + ص)^٢ + (٢س - ص)^٢ = ٨$

$٣س + ٣ص = ٦ \Longleftarrow ص = \frac{٦ - ٢س}{٣}$

$٤س^٢ + \cancel{٤س ص} + ص^٢ + ٤س^٢ - \cancel{٤س ص} + ص^٢ = ٨$

$٨س^٢ + ٢ص^٢ = ٨$

$٤س^٢ + ص^٢ = ٤$

$٤س^٢ + (\frac{٦ - ٢س}{٣})^٢ = ٤$

$٩ \times \left(٤س^٢ + \frac{(٣٦ - ٢٤س + ٤س^٢)}{٩} = ٤ \right)$

$٣٦س^٢ + \cancel{٣٦} - ٢٤ س + ٤س^٢ = \cancel{٣٦}$

$٤٠س^٢ - ٢٤ س = ٠$

$س(٤٠س - ٢٤) = ٠$

$س = ٠ ، \quad س = \frac{٢٤}{٤٠} = \frac{٣}{٥} \qquad \Longleftarrow (\frac{٣}{٥} ، \frac{٩}{٥})$

$ص = ٢ ، \quad ص = \frac{٦ - \frac{٢٤}{٤٠}}{٣} = \frac{٩}{٥} \qquad \Longleftarrow (٠ ، ٢)$

س٥: بتعويض قيم ص وحل المعادلة تكون نقاط التقاطع هي: $(\frac{\pm ١}{\sqrt{١٩}} ، \pm ٤ \sqrt{\frac{٣}{١٩}})$، (ملحوظة: يمكن التقريب بالآلة الحاسبة)

س٦: معادلة الدائرة: $(س - ٣)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٦١$ ، ومعادلة المستقيم ص = س

نعوض ص وبفك الأقواس فتكون نقط التقاطع: (٨، ٨)، (-٣ ، -٣)

تمارين ومسائل: (٣ - ٣)

س١: أ) س = ± ٦ ، ص = ± ٨

ب) س=٣ ص = ٤

س٢: $س^{٢} + ص^{٢} = ٣٤$ .... (١)

$٨ص^{٢} + ١٠٣ = ٧س^{٢}$ .... (٢)

$\Rightarrow$

$٧ \times (س^{٢} + ص^{٢} = ٣٤)$

$٨ص^{٢} + ١٠٣ = ٧س^{٢}$

$٧س^{٢} + ٧ص^{٢} = ٢٣٨$

$-٧س^{٢} + ٨ص^{٢} = -١٠٣$

$١٥ص^{٢} = ١٣٥ \Rightarrow ص^{٢} = ٩ \Rightarrow ص = ٣$

$س^{٢} + ٩ = ٣٤ \Rightarrow س^{٢} = ٢٥ \Rightarrow س = ٥$

س٣: ٢: $س^{٢} \cancel{-٦س ص} + ٩ص^{٢} + س^{٢} \cancel{+٦س ص} + ٩ص^{٢} = ٢٢$ (ملحوظة: تعدل المعادلة الثانية إلى: $س^{٢} - ٤ص^{٢} = -٢$)

$٢س^{٢} + ١٨ص^{٢} = ٢٢ \Rightarrow س^{٢} + ٩ص^{٢} = ١١$

$س^{٢} + ٩ص^{٢} = ١١$

$س^{٢} - ٤ص^{٢} = -٢$

$١٣ص^{٢} = ١٣$

$ص^{٢} = ١ \Rightarrow ص = \pm ١$

$س^{٢} = ٢ + ٤ص^{٢}$

$س^{٢} = ٢ + ٤ \Rightarrow س = \pm\sqrt{٦}$

$(\pm\sqrt{٦} ، \pm ١)$

س٤: $٤س^{٢} + ٩ص^{٢} = ٢٥٠٠$، $س^{٢} + ص^{٢} = ٥٠٠$

$٤س^{٢} + ٩ص^{٢} = ٢٥٠٠$

$٤س^{٢} + ٤ص^{٢} = ٢٠٠٠$

$٥ص^{٢} = ٥٠٠$

$ص^{٢} = ١٠٠ \Rightarrow ص = ١٠$

$س^{٢} = ٥٠٠ - ١٠٠$

$س^{٢} = ٤٠٠ \Rightarrow س = ٢٠$

النوع الأول أبعاده: ٤٠×٣٠، والثاني ٢٠×١٠

س٥: $٤س^٢ + ص^٢ = ٢٥٠٠$، $ص^٢ = س^٢ + ١٦٠٠$

$٤س^٢ + \cancel{ص^٢} = ٢٥٠٠$ .... (١)
$س^٢ - \cancel{ص^٢} = -١٦٠٠$ .... (٢)

$٥س^٢ = ٩٠٠$

$س^٢ = ١٨٠ \Leftarrow س = \sqrt{١٨٠} = \frac{٣٠}{\sqrt{٥}} \approx ١٣,٤$

المحيط = أب + ب جـ + جـ ء + ء أ
$= ٢٦,٨ + ١٣,٤ + ٤٠ + ٥٠$
$= ١٣٠,٢ \approx ١٣٠$م

س٦: $س^٢ - ص^٢ = قا^٢ هـ - ظا^٢ هـ = ١$

$س^٢ + ص^٢ = ٧$

بحل المعادلتين بالحذف تكون نقط التقاطع: $(\pm ٢، \pm \sqrt{٣})$

تمارين ومسائل: (٣ - ٤)

س١: أ) $٤^{س^٢} - ٨^{س} = ٠$

$(٢^٢)^{س^٢} = (٢^٣)^{س} \Leftarrow ٢^{٢س^٢} = ٢^{٣س} \Leftarrow ٢س^٢ = ٣س$

$٢س^٢ - ٣س = ٠$

$س(٢س - ٣) = ٠$

$س = ٠$ ، $(٢س - ٣) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ١,٥$

ب) $هـ^{٢س} - ٥ هـ^{س} + ٦ = ٠$

$(هـ^{س} - ٢)(هـ^{س} - ٣) = ٠$

$هـ^{س} = ٢$، $هـ^{س} = ٣$

$هـ^{س} = ٢$

$لو_{هـ} هـ^{س} = لو_{هـ} ٢$

$س = لو_{هـ} ٢$

$س = لو_{هـ} ٢$، $س = لو_{هـ} ٣$

جـ) بفك الاقواس والاختصار: س=٢

س٢: $٣^{(٢س+١)} - ٣^{(س+١)} - ٣^{(س+٤)} + ٨١ = ٠$

$٣^{٢س} \times ٣^{١} - ٣^{س} \times ٣^{١} - ٣^{س} \times ٣^{٤} + ٨١ = ٠$

$٣^{٢س} \times ٣ - ٨٤ \times ٣^{س} + ٨١ = ٠$

$٣^{٢س} - ٢٨ \times ٣^{س} + ٢٧ = ٠$

$(٣^{س} - ٢٧)(٣^{س} - ١) = ٠$

$٣^{س} = ٢٧$ ، $٣^{س} = ١$

$٣^{س} = ٣^{٣}$ ، $٣^{س} = ٣^{٠}$

س = ٣ ، س = ٠

س٣: لـو$_٢$س - لـو$_٢$(س-٤) = ٣

لـو$_٢$ $\frac{س}{س-٤}$ = ٣ ⟸ $\frac{س}{س-٤}$ = ٨

٨س - ٣٢ = س ⟸ ٧س = ٣٢ ⟸ س = $\frac{٣٢}{٧}$

س٤: ١) ٢لـو$_٢$س + لـو$_٢$١٦ = ٢

٢لـو$_٢$س + ٤ = ٢

٢لـو$_٢$س = -٢

لـو$_٢$س = -١ ⟸ س = $\frac{١}{٢}$

٢) س= ١ ، أو: س= ١٠٠

س٥: لـو$_٢$س^٣ = ٥ - لـو$_٢$س^٢

لـو$_٢$س^٣ + لـو$_٢$س^٢ = ٥

لـو$_٢$س^٣ × س^٢ = ٥

س^٥ = ٢^٥

س = ٢

س٦:

$ص = أ \times ٢^{٠,٢ن}$

$ص = أ \times ٢^{٠} = ١٥٠٠٠$

$ص = أ \times ٢^{٠,٢ن}$

$٦٠٠٠٠ = ١٥٠٠٠ \times ٢^{٠,٢ن}$

$\frac{٦٠}{١٥} = ٢^{٠,٢ن}$

$٤ = ٢^{٠,٢ن}$

$٤ = ٢^{٠,٢ن}$

$٢^{٢} = ٢^{٠,٢ن}$

$ن = ١٠$

س٧:

$٢^{س} + ٢^{ص} = ٦$

$٤^{س+١} - ٤^{ص+١} = -٤٨$

$٤^{س} \times ٤ - ٤^{ص+١} \times ٤ = -٤٨$

نفرض أنّ: $ع = ٢^{س}$ ، $ك = ٢^{ص}$

$ع + ك = ٦ \Longleftarrow ك = ٦ - ع$

$٤ع^{٢} - ٤ك^{٢} = -٤٨$

$٤ع^{٢} - ٤(٦ - ع)^{٢} = -٤٨$

$٤ع^{٢} - ٤(٣٦ + ١٢ع + ع^{٢}) = -٤٨$

$-٤٨ع - ١٤٤ = -٤٨ \Longleftarrow ع = ٢ ، ك = ٤$

$س = ١ ، ص = ٢$

س٨: أ) $لو_{ب}أ = لو_{ج}أ \times لو_{ب}ج$ (حيث: $ج > ٠$، $ج \neq ١$)

البرهان: نفرض $س = لو_{ج}أ$، ومنها: $أ = ج^{س}$ .... (١)

نفرض $ص = لو_{ب}ج$، ومنها: $ج = ب^{ص}$ .... (٢)

بتعويض قيمة ج من (٢) في معادلة (١) ينتج: $أ = ب^{س ص}$ ومنها: $لو_{ب}أ = س ص = لو_{ج}أ \times لو_{ب}ج$

ب) $لـو_{ب} ﻡ = \frac{1}{لـو_{ﻡ} ب}$

البرهان: $لـو_{ﻡ} ﻡ = لـو_{ب} ﻡ \times لـو_{ﻡ} ب = 1$ ومنها: $لـو_{ب} ﻡ = \frac{1}{لـو_{ﻡ} ب}$

جـ) $لـو_{ب^2} ﻡ^2 = لـو_{ب} ﻡ$

البرهان:

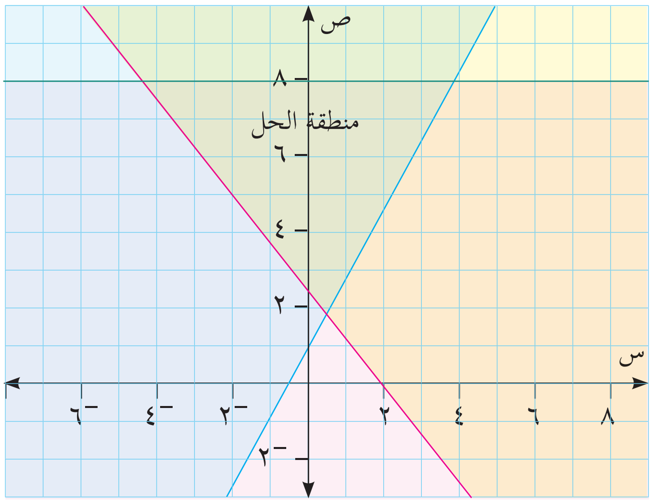
$لـو_{ب^2} ﻡ^2 = لـو_{ب} ﻡ^2 \times لـو_{ب^2} ب = 2 لـو_{ب} ﻡ \times \frac{1}{2} لـو_{ب} ﻡ = لـو_{ب} ﻡ$

تمارين ومسائل: (٣ - ٥)

س١: ٢س + ١ ⩾ ص، ص ⩽ ٨، ٤س + ٣ص ⩾ ٨

س	٠	−٠,٥
ص	١	٠

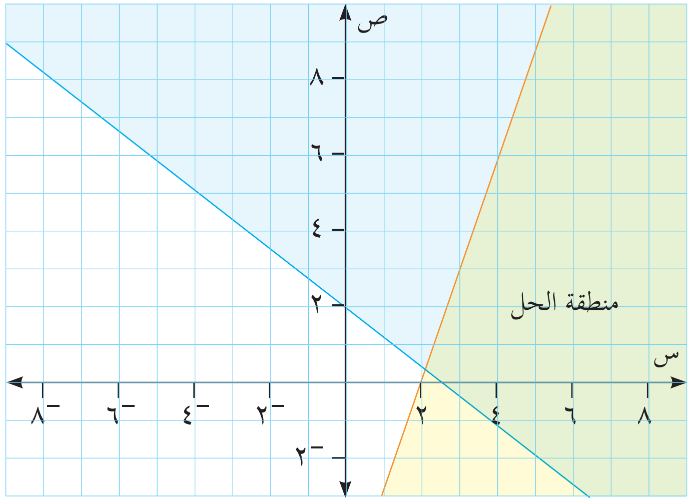
س	٠	٢
ص	٢,٦٦	٠



س٢: ٦س − ٢ص ⩽ ١٢، ٣س + ٤ص > ٨

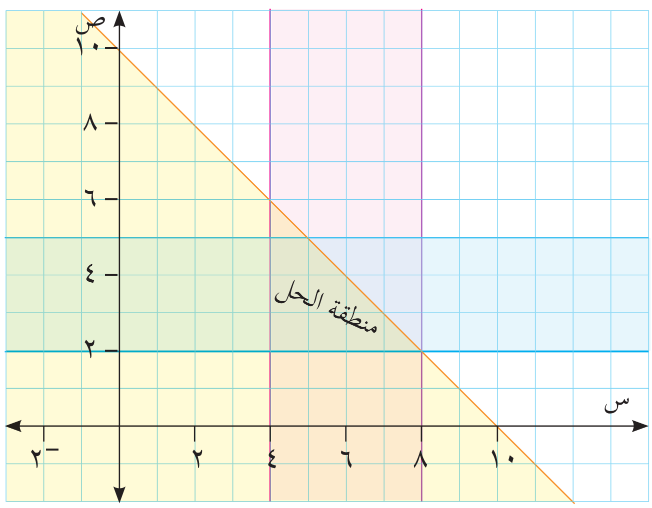
س	٠	٢
ص	−٦	٠

س	٠	٢,٦٦
ص	٢	٠



س٣: ٤ ≤ س ≤ ٨ ، ٢ ≤ ص ≤ ٥ ، س + ص ≤ ١٠

س	٠	١٠
ص	١٠	٠



س٤: معادلة الخط المار بالنقطتين: (٠، ٦)، (٤، ٢)

ص = ٢ س − ٦ / المتباينة ص > ٢ س − ٦

معادلة الخط المار بالنقطتين: (٠، ٤)، (٤، ٢)

ص = $\frac{-١}{٢}$ س + ٤ / المتباينة ص ≤ $\frac{-١}{٢}$ س + ٤

معادلة الخط المار بالنقطتين (٠، -٦)، (-٢، ٥)

ص = $\frac{-١١}{٢}$ س − ٦ / المتباينة ص ≥ $\frac{-١١}{٢}$ س − ٦

تمارين ومسائل: (٣ - ٦)

س١: أ) إما ٦ − ٥س = −٨

١٤ = ٥س

$\frac{١٤}{٥}$ = س

أو ٦ − ٥س = ٨

−٢ = ٥س

$\frac{-٢}{٥}$ = س

ب) ٥ | س + ٢ | − ١١ = ٤   ومنها إما: س+٢= ٣ أو: س+٢=−٣

ومنها: س=١ أو س= −٥

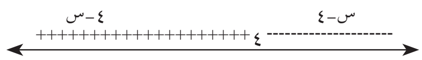
س٢: | ٥أ − ٧ | = ٨

٥أ − ٧ =± ٨

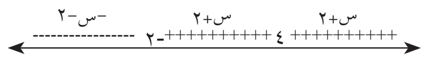
٥أ=٧± ٨

أ = $\frac{-١}{٥}$ ، أ = ٣

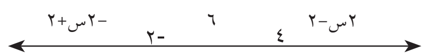
س٣: | ٤ − س |



| س + ٢ |



| ٤ − س |+| س + ٢ |



إما: ٢س−٢=٦ ومنها: ٢س=٨ ومنها: س=٤

أو: ٦=٦

أو: −٢س+٢=٦ ومنها: −٢س=٤ ومنها: س=−٢

إذن: مجموعة الحل [−٢، ٤]

س٤: ٣ | س−٦٠ | = | س − ٨٠|

بعد إعادة التعريف للقيمه المطلقة نلاحظ أنّ:

عندما: س> ٨٠

٣س−١٨٠ = س−٨٠   ومنها: ٢س=١٠٠،   ومنها: س=٥٠ مرفوضة

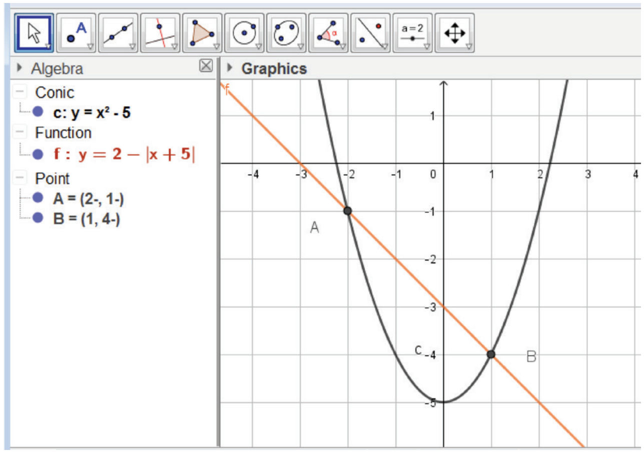
عندما: ٨٠ ⩾ س ⩾ ٦٠

٣س−١٨٠ = −س+٨٠   ومنها: ٤س= ٢٦٠،   ومنها: س =٦٥ مقبولة

عندما: س< ٦٠

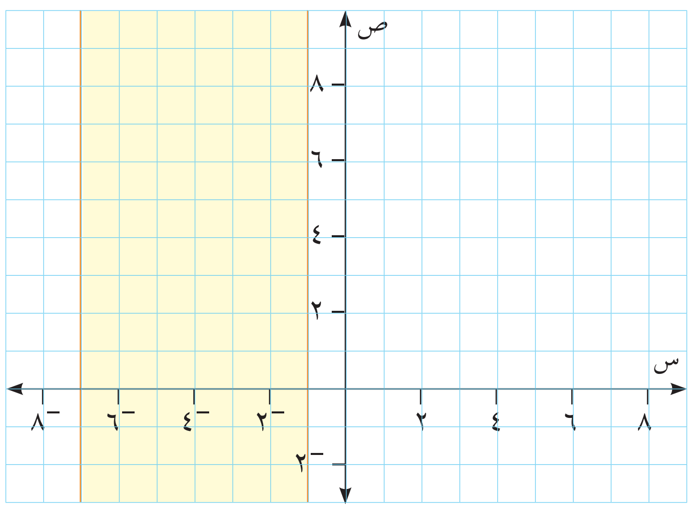
−٣س+١٨٠ = −س+٨٠   ومنها: −٢س= −١٠٠،   ومنها: س=٥٠ مقبولة

س٥: س^٢ – ٥ = ٢ – |س+٥|، ومنها:
٧ – س^٢ = |س+٥| بإعادة التعريف والحل تكون نقاط التقاطع: (١، –٤)، (–٢، –١)

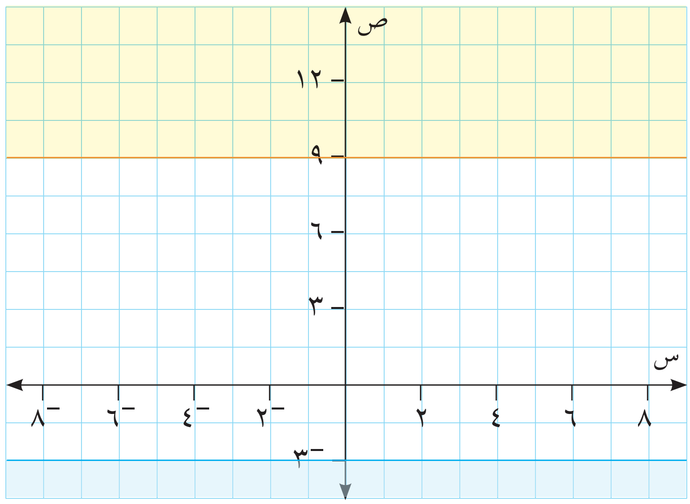


تمارين ومسائل: (٣ - ٧)

س١: |١٢ + ٣س| ⩽ ٩ ⟸ –٩ ⩽ ١٢ + ٣س ⩽ ٩ ⟸ –٢١ ⩽ ٣س ⩽ –٣ ⟸ –٧ ⩽ س ⩽ –١



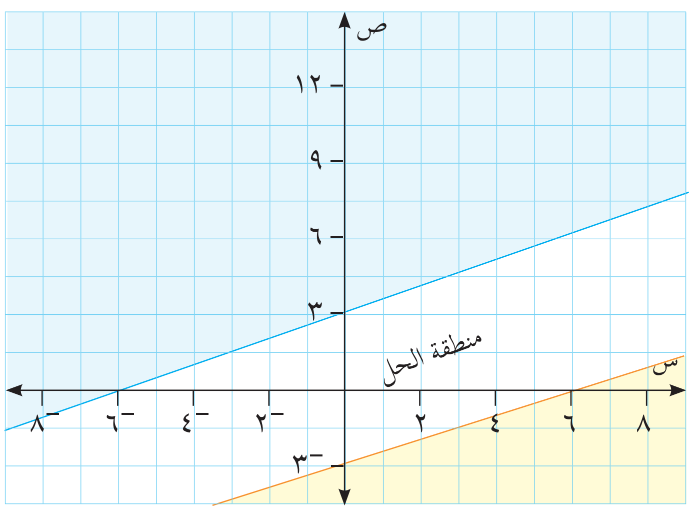
س٢: |٣ – ص| > ٦ ⟸ ٣ – ص > ٦ أو: ٣ – ص < –٦
إما: ص < –٣ او ص > ٩



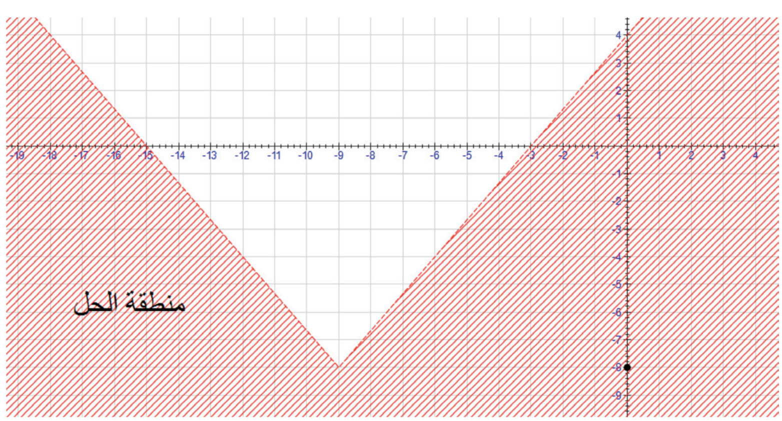
س٣: |س - ٢ص| < ٦

ومنها: -٦ < س - ٢ص

س - ٢ص < ٦



س٤:



س٥: المستقيم الأول يمر بالنقطتين (٤، ٠)، (٠، -٨)

معادلة الأول: ص−٠ = $\frac{-٨}{-٤}$ (س−٤) ⟸ ص − ٢س = −٨

معادلة الثاني: ص−٠ = ٢(س+٤)   ومنها: ص−٢س = ٨

بُعد النقطة عن المستقيم: ٢س−١ص−٨=٠

ف = $\frac{|-٨ + ٠ + -٨|}{\sqrt{٤^٢ + ١^٢}}$ = $\frac{١٦}{\sqrt{٥}}$

تمارين عامة الوحدة الثالثة

س١:

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الجواب	ج	ب	أ	د	ب	أ	ب	ج	أ	د

س٢: ق(س)= أس^٢ +ب س+ج

ق(١)= أ+ب+ج= ١ ....(١)

ق(−١)= أ − ب+ج = −٥ ....(٢)

ق(٢)= ٤أ+٢ب+ج = ١٠ ......(٣)

بطرح المعادلة الثانية من الأولى ينتج: ٢ب = ٦، ومنها: ب = ٣

بجمع المعادلة الأولى مع الثانية ينتج: ٢أ + ٢ج= −٤ ومنها: أ+ج= −٢

وبطرح الأولى من الثالثة ينتج: ٣أ + ب =٩، ومنها: أ=٢

ج=−٢−٢=−٤

ق(س)= ٢س^٢ +٣س−٤

س٣: |٣س| + |س+١| ⩽ ٥

بعد إعادة التعريف ينتج:

−٤س−١   −٢س+١   ٤س+١

−١   ٠

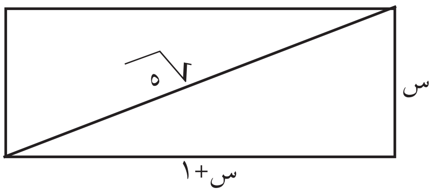
أولاً: س ⩾ ٠ : ٤س+١ ⩽ ٥   ومنها: س ⩽ ١   ومنها: س ∈ [٠، ١]

ثانياً: ٠ ⩾ س ⩾ −١ : −٢س+١ ⩽ ٥   ومنها: س −٢   ومنها: س ∈ [−١، ٠]

ثالثاً: س ⩽ −١ : −٤س − ٥ ⩽ ١   ومنها: س⩾ − ١,٥   ومنها: س ∈ [−١,٥، −١]

إذن: مجموعة الحل هي: س[−١,٥، ١]

س٤: س+١



(س+١)^{٢} + س^{٢} = ٥ ($\sqrt{٥}$)^{٢}

٢س^{٢} + ٢س − ٤ = ٠

س^{٢} + س −٢ = ٠ ومنها: (س+٢)(س−١)=٠ ومنها:

إما: س= −٢ وتهمل أو س= ١

العرض = ١م والطول = ٢م

المساحة = ٢م^{٢} ، ومنها: التكلفة تساوي ٢× ٦٠ = ١٢٠ دينار

س٥: س^{٢} +ص^{٢} =٢٥

٣س^{٢} −٢ص^{٢} = ٣٠

بضرب المعادلة الأولى في ٢ ، وجمعها مع المعادلة الثانية ينتج:

٥س^{٢} = ٨٠ ومنها: س^{٢} = ١٦ ومنها: س= ٤ تهمل السالبة.

بالتعويض في إحدى المعادلتين ينتج: ص= ٣ تهمل السالبة.

س٦: (٢^{س})^{٢} − ٢^{س} × $\frac{١}{٨}$ − ٢^{س} × $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٣٢}$ = ٠

بفرض ص = ٢^{س} تصبح المعادلة:

٣٢ص^{٢}−١٢ص +١ = ٠ ومنها: (٨ص−١) (٤ص−١)=٠

ومنها إمّا: ص= $\frac{١}{٨}$ ، أو: ص= $\frac{١}{٤}$

ومنها: ٢^{س} = ٢$^{-٣}$ أي ان س= −٣ أو: ٢^{س} = ٢$^{-٢}$ أي أنّ: س =−٢

س٧: أ) لـو$_{٣}$(س−٢) (س−٨)=٣ ومنها: (س−٢) (س−٨)= ٢٧

س^{٢}− ١٠س − ١١ = ٠ ومنها: (س−١١) (س+١)= ٠

إما: س= ١١ أو: س= −١ مرفوضة

ب) لـو$_{٢٧}$(س−٢) + لـو$_{٣}$(س−٢) = ٤

$\frac{\text{لـو}_{٣}\text{(س−٢)}}{\text{لـو}_{٣}\,٢٧}$ + لـو$_{٣}$(س−٢) = ٤

$\frac{١}{٣}$ لـو$_{٣}$ (س−٢) + لـو$_{٣}$(س−٢) = ٤

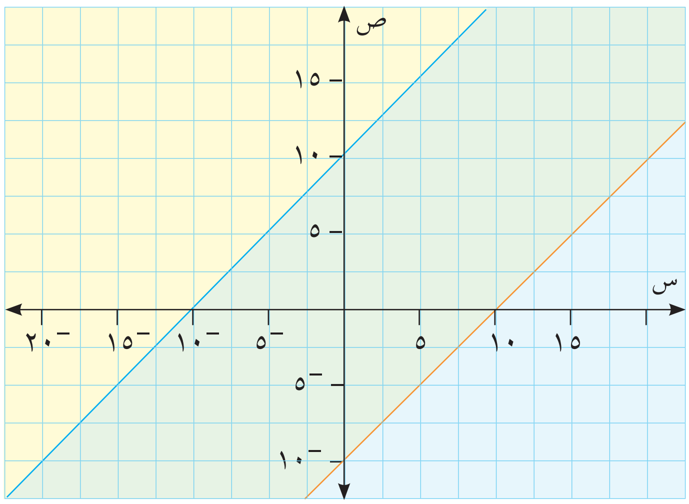
$\frac{٤}{٣}$ لـو$_{٣}$(س−٢) = ٤

س−٢ = ٢٧

س = ٢٩

س٨: |س − ص| ⩽ ١٠، س > ٠، ص > ٠

−١٠ ⩽ س−ص ⩽ ١٠ ومنها −١٠ ⩽ س−ص و س−ص ⩽ ١٠



حلول الوحدة الرابعة: الاحتمالات والإحصاء

تمارين ومسائل: (٤ - ١)

س١:

السؤال	١	٢
رمز الإجابة الصحيحة	جـ	أ

س٢: ١) المدى = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}
٢) المدى = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥}
٣) المدى = {٢، ٣، ٤، ٦، ٨، ٩، ١٢}
٤) المدى = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧ ، ٨، ٩، ١٠}

تمارين ومسائل: (٤ - ٢) التوزيع الاحتمالي

س١:

السؤال	١	٢	٣
رمز الإجابة الصحيحة	أ	د	ب

س٢: أ) قيم المتغير العشوائي **ن** = {٠، ١، ٢، ٣}
ب) جدول التوزيع الاحتمالي:

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{١}{٢٧}$	$\frac{٦}{٢٧}$	$\frac{١٢}{٢٧}$	$\frac{٨}{٢٧}$

س٣: جدول التوزيع الاحتمالي:

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{٥}{٨}$	$\frac{١٥}{٥٦}$	$\frac{٣٠}{٣٣٦}$	$\frac{٦}{٣٣٦}$

تمارين ومسائل: (٤ - ٣) التوقُّع

س١: التوزيع الاحتمالي:

س	٠	١	٢	٣	٤	٥
ل(س)	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{١٠}{٣٦}$	$\frac{٨}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$

ت (ن) = $\frac{٣٥}{١٨}$

س٢: نكتب التوزيع الاحتمالي كالآتي: {(-٢، ﺃ)، (٣، ٠,١)، (٤، ب)} أو جدول

ﺃ + ب = ٠,٩ ، ت(ن) = −٢ﺃ + ٣ × ٠,١ + ٤ب = ١,٥ ، نحل المعادلتين فينتج: ب = ٠,٥

ل (س=٤) = ٠,٥

س٣: قيمة: ﺃ = $\frac{١٢}{٢٥}$

ت(٥٠ ن) = ٥٠ × $\frac{٢٣}{٢٥}$ = ٤٦

توقع مجموع الإجازات خلال ٥٠ يوم عمل = ٤٦ .

تمارين ومسائل: (٤ - ٤) التوزيع ذو الحدين

س١:

السؤال	١	٢	٣
رمز الإجابة الصحيحة	جـ	ب	د

س٢: أ) ل(٠) = $\binom{٦}{٠}\left(\frac{١}{٣}\right)^{٠}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٦} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٦}$

ل(١) = $\binom{٦}{١}\left(\frac{١}{٣}\right)^{١}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٥}$

ل(ر ≥ ١) = ١ − ل(٠) = ١ − $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٦}$

ب) ت (ن) = ٢

س٣: $ن = ٦$ ، $أ = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$ ، $(١ - أ) = \frac{٢}{٣}$

أ) ل (عدد يقبل القسمة على ٣ في ٣ رميات فقط) = $\binom{٦}{٣} \left(\frac{١}{٣}\right)^{٣} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣}$.

ب) ل (عدد يقبل القسمة على ٣ في ٥ رميات على الأقل) = ل($ر \geqslant ٥$) = ل(٥) + ل(٦)

$= \binom{٦}{٥} \left(\frac{١}{٣}\right)^{٥} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{١} + \binom{٦}{٦} \left(\frac{١}{٣}\right)^{٦} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٠}$

س٤: (احتمال اللون الأبيض) ل(ب) = $\frac{٣}{٤}$، (احتمال اللون الأحمر) ل(ع) = $\frac{١}{٤}$

أ) احتمال أن تكون بذرتان فقط ذات لون أبيض: ل(س=٢) = $\binom{٨}{٢} \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٢} \left(\frac{١}{٤}\right)^{٦}$

ب) توقع عدد الكرات الحمراء = $٨ \times \frac{١}{٤} = ٢$

س٥: (معطى ل (ص)= ٢ل(ع) ونعلم أن ل(ص) + ل(ع)= ١) ومنها نستنتج أنّ :

ل (أصفر) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل (أحمر) = $\frac{١}{٣}$

ل($ر \geqslant ١$) = $\frac{٢١١}{٢٤٣}$ $\Leftarrow$ ١ − ل (٠) = $\frac{٢١١}{٢٤٣}$ $\Leftarrow$ ل (٠) = $\binom{ن}{٠} \left(\frac{١}{٣}\right)^{٠} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{ن} = \frac{٢١١}{٢٤٣} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٥}$

$\Leftarrow$ ن = ٥ بذرات

تمارين ومسائل: (٤ - ٥) العلامة المعيارية

س١: $ع = \frac{س - \bar{س}}{\sigma}$ ، $ع_{٥٧} = \frac{٥٧ - ٦٥}{٨} = \frac{-٨}{٨} = -١$ ، $ع_{٩١} = \frac{٩١ - ٦٥}{٨} = \frac{٢٦}{٨} = ٣,٢٥$

س٢: علامة سارة المعيارية في الكيمياء: $ع_{٧٢} = \frac{٧٢ - ٦٠}{٣} = \frac{١٢}{٣} = ٤$

علامة سارة المعيارية في الفيزياء: $ع_{٧٥} = \frac{٧٥ - ٧٠}{٢} = \frac{٥}{٢} = ٢,٥$

علامة سارة المعيارية في الأحياء: $ع_{٦٩} = \frac{٦٩ - ٦٨}{٤} = \frac{١}{٤} = ٠,٢٥$

أداء سارة في الكيمياء أفضل من الفيزياء وأفضل من الأحياء ، وأداء سارة في الفيزياء أفضل من الأحياء.

س٣: مجموع العلامات المعيارية للتوزيع = صفر

$\therefore ٣ + ٢ل + -١ + ل + -٥ = $ صفر $\Longleftarrow$ ل = ١

س٤: أ) $ع_{٧٥} = \frac{٧٥ - ٧٠}{٥} = \frac{٥}{٥} = ١$

ب) الوسط الحسابي بعد التعديل = $-٢(٧٠) + ٣ = -١٣٧$

الانحراف المعياري بعد التعديل = $٢(٥) = ١٠$

العلامة ٧٥ بعد التعديل = $-٢(٧٥) + ٣ = -١٤٧$

إذن: العلامة المعيارية للقيمة ٧٥ بعد هذا التعديل = $ع = \frac{-١٤٧ + ١٣٧}{١٠} = \frac{-١٠}{١٠} = -١$

أو مباشرة العلامة المعيارية لا تتأثر بالجمع، ولكن تتأثر بالضرب في عدد سالب. (تتغير إشارة العلامة المعيارية فقط)

إذن: العلامة المعيارية للقيمة ٧٥ بعد هذا التعديل = -١

تمارين ومسائل: (٤ - ٦) التوزيع الطبيعي (المعتدل)

س١: أ) ل(ع $\leqslant$ ١,٢٥) = ٠,٨٩٤٤

ب) ل(ع > ٢,٤٨) = ١ - ٠,٩٩٣٤ = ٠,٠٠٦٦

ج) ل(ع > -١,٤٦) = ل(ع < ١,٤٦) = ٠,٩٢٧٩

د) ل(-٢,٣٧ $\leqslant$ ع $\leqslant$ ١,٧) = ٠,٩٥٥٤ - ٠,٠٠٨٩ = ٠,٩٤٦٥

س٢: أ) ك تقع في الفترة الموجبة

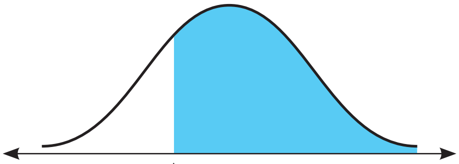
ل(ع $\leqslant$ ك) = ٠,٩٩٠٩ نبحث في الجدول عن المساحة ٠,٩٩٠٩ لنجد: ك = ٢,٣٦

ب) ك تقع في الفترة السالبة، كما هو موضّح في الشكل المقابل.

ل(ع > ك) = ٠,٩٤٩٥ ومنها

ل(ع < ك) = ١ − ٠,٩٤٩٦ = ٠,٠٥٠٥

نبحث في الجدول عن العدد ٠,٠٥٠٥ فنجد ك = −١,٦٤



ج) ك تقع في الفترة السالبة

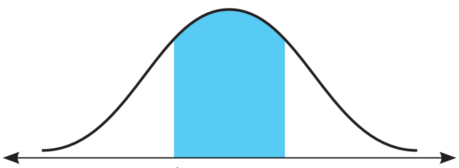
ل(ع ⩽ ك)=٠,١٩٧٧ نبحث في الجدول عن المساحة ٠,١٩٧٧ لنجد ك= −٠,٨٥

د) ل(ك ⩽ ع ⩽ ٢,١) =٠,٢٩٠٦

ل(ع < ٢,١)− ل(ع < ك)=٠,٢٩٠٦

ل(ع < ك) = ٠,٩٨٢١ −٠,٢٩٠٦=٠,٦٩١٥

ومنها: ك = ٠,٥



س٣: ل(ع ⩽ ك) = ٠,١٧٣٦ ومنها: ك = −٠,٩٤

ل(ك ⩽ ع ⩽ ١,٧)=ل(−٠,٩٤ ⩽ ع ⩽ ١,٧)= ل(ع < ١,٧) − ل (ع < −٠,٩٤)

= ٠,٩٥٥٤ −٠,١٧٣٦=٠,٧٨١٨

س٤: أ) ل(س ⩽ ٥٠) = ل(ع ⩽ $\frac{٥٠ - ٦٠}{٥}$)= ل(ع ⩽ −٢) =٠,٠٢٢٨

ب) ل(٥٥ ⩽ س ⩽ ٧٥) = ل(−١ ⩽ ع ⩽ ٣) = ل(ع ⩽ ٣)− ل(ع ⩽ −١)

= ٠,٩٩٨٧−٠,١٥٨٧=٠,٨٤

س٥: ل(س>٧٨) = ٠,٠٢٢٨ ومنها: ل(ع > $\frac{٧٨ - \mu}{٢}$) =٠,٠٢٢٨

ل(ع < $\frac{٧٨ - \mu}{٢}$) = ١ − ٠,٠٢٢٨ = ٠,٩٧٧٢

ومن الجدول نجد: ع = ٢

٢ = $\frac{٧٨ - \mu}{٢}$ ومنها: ٤= ٧٨ − μ ومنها: μ = ٧٤

س٦: أ) ل(ع ≥ ك) = ٠,١٠٥٦ ، ومنها: ل(ع ≤ ك) = ١ − ٠,١٠٥٦ = ٠,٨٩٤٤

ك = ١,٢٥

ب) ل(س ≤ ١٢) = ل(ع ≤ (١٢ − ٨)/٢) = ل(ع ≤ ٢) = ٠,٩٧٧٢

تمارين ومسائل: (٤ - ٧) التطبيقات

س١: (احتمال أن تقل علامات الطلبة المعيارية عن −٢,١٥) = ل(ع < −٢,١٥) = ٠,٠١٥٨

عدد الطلبة الذين تقل علاماتهم المعيارية عن −٢,١٥ = الاحتمال × العدد الكلي

= ٠,٠١٥٨ × ١٠٠٠ = ١٥,٨ = ١٦ طالباً

س٢: أ) ل(س > ٧٥) = ل(ع > (٧٥ − ٦٩)/٤) = ل(ع > ١,٥) = ١ − ل(ع < ١,٥)

= ١ − ٠,٩٣٣٢ = ٠,٠٦٦٨

ب) ل(٦٠ < س < ٧٠) = ل(−٢,٢٥ < ع < ٠,٢٥) = ل(ع < ٠,٢٥) − ل(ع < −٢,٢٥)

= ٠,٥٩٨٧ − ٠,٠١٢٢ = ٠,٥٨٦٥

ج) ل(س < ٦٩) = ل(ع < ٠) = ٠,٥ ،

ومنها: نسبة الطلاب الذين يحصلون على أقل من ٦٩ علامة = الاحتمال × ١٠٠٪ = ٠,٥ × ١٠٠٪ = ٥٠٪

س٣: أ) ل(س > ٢٢٠) = ل(ع > (٢٢٠ − ٢٠٠)/١٠) = ل(ع > ٢) = ١ − ل(ع < ٢)

= ١ − ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

عدد الأسر التي تحصل على دخل شهري أعلى من ٢٢٠ ديناراً = ٢٠٠ × ٠,٠٢٢٨ = ٥ أسر .

ب) ل(س > ك) = ١٠٪ = ٠,١٠٠٠

ل(ع > (ك − ٢٠٠)/١٠) = ٠,١٠٠٠ ، (ك − ٢٠٠)/١٠ = −١,٢٨ ومنها : ك = ١٨٧,٢ ديناراً

س٤: ل(س ⩾ ك) = ٠,٠٥٠٠ ⟸ ل(ع ⩾ $\frac{ك - \mu}{\sigma}$) = ٠,٠٥٠٠

⟸ ١ - ل(ع < $\frac{ك - \mu}{\sigma}$) = ٠,٠٥٠٠ ⟸ ل(ع < $\frac{ك - \mu}{\sigma}$) = ٠,٩٥٠٠

$\frac{\text{ك} - ٧٠}{١٠}$ = ١,٦٥ ⟸ ك = ٨٦,٥

تمارين عامة الوحدة الرابعة

س١:

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥
رمز الإجابة الصحيحة	أ	ب	د	ب	د

س٢: إذا كان جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ن هو:

س	٣	٨	٩	١٢	١٥
ل (س)	ٲ	ب	٠,٣	٣ب	٢ٲ

٣ٲ + ٤ب + ٠,٣ = ١ ⟸ ٣ٲ + ٤ب = ٠,٧٠

ت (ن) = ٣ٲ + ٨ب + ٢,٧ + ٣٦ب + ٣٠ٲ

ت (ن) = ٣٣ٲ + ٤٤ب + ٢,٧

ت (ن) = ١١ × (٣ٲ + ٤ب) + ٢,٧

ت (ن) = ١١ × ٠,٧ + ٢,٧ = ١٠,٤

س٣: ل(ص*) = ٢ل (ك*) ، ل (ص*) + ل (ك*) = ١ ومنها: ل(ص*) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل (ك*) = $\frac{١}{٣}$

ل(٠) = ل (ك*ك) = $\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٦}$

ل(١) = ل (ص* ك) + ل(ك*ص) = $\frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٦}$

ل(٢) = ل (ص* ص) = $\frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٦}$

س	٠	١	٢
ل (س)	$\frac{١}{٦}$	$\frac{٣}{٦}$	$\frac{٢}{٦}$

$\text{ت}(\text{ن}) = ٠ \times \frac{١}{٦} + ١ \times \frac{٣}{٦} + ٢ \times \frac{٣}{٦} = \frac{٧}{٦}$

$\text{ت}(١٠\text{ن}) = ١٠ \times \frac{٧}{٦} = \frac{٧٠}{٦}$

س٤: $\text{ل}(\text{س} \geqslant ١) \geqslant ٠,٧٩ \Longleftarrow ١ - \text{ل}(٠) \geqslant ٠,٧٩ \Longleftarrow ١ - \binom{\text{ن}}{٠}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٠}\left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{ن}} \geqslant ٠,٧٩$

$\left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{ن}} \leqslant ٠,٢١$ ، يتحقق عندما: $\text{ن} \geqslant ٣$.

س٥: $\text{ع} = \frac{١٨٠ - \mu}{٨} = ١,٢٥ \Longleftarrow ١٨٠ - \mu = ١٠ \Longleftarrow \mu = ١٧٠$

س٦: $\text{ل}(٢٠ < \text{س} < ٢٤) = \left(\frac{٢٠ - ١٧,٥}{٣\frac{١}{٣}} < \text{ع} < \frac{٢٤ - ١٧,٥}{٣\frac{١}{٣}}\right)$

$= \text{ل}(٠,٧٥ < \text{س} < ١,٩٥)$

$= \text{ل}(\text{ع} < ١,٩ \times ٥) - \text{ل}(\text{ع} < ٠,٧٥)$

$= ٠,٩٧٤٤ - ٠,٧٧٣٤ = ٠,٢٠١٠$

س٧: $\mu = ٧٦$، $\sigma = ٩$

$\text{ل}(\text{س} < \text{ك}) = ٠,٨٦٤٣$

$\text{ل}\left(\text{ع} < \frac{\text{ك} - ٧٦}{٩}\right) = ٠,٨٦٤٣$

$\frac{\text{ك} - ٧٦}{٩} = ١,١$

$\text{ك} - ٧٦ = ٩,٩$ ومنها $\text{ك} = ٨٥,٩ \Longleftarrow \text{ك} \approx ٨٦$

حلول الوحدة الخامسة: المتتاليات والمتسلسلات

تمارين ومسائل: (٥ - ١)

س١: بوضع ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ينتج أنّ :

أ) $ح_١ = -٤$ ، $ح_٢ = ١١$ ، $ح_٣ = ٣٦$ ، $ح_٤ = ٧١$ ، $ح_٥ = ١١٦$

المتتالية : (-٤ ، ١١ ، ٣٦ ، ٧١ ، ١١٦)

ب) $ح_١ = ٣$ ، $ح_٢ = -١$ ، $ح_٣ = -٣$ ، $ح_٤ = ٣$ ، $ح_٥ = -٩$

المتتالية : (٣ ، -١ ، -٣ ، ٣ ، -٩)

س٢: أ) $ح_ن = \frac{ن + ١}{ن}$ حيث ن ∈ $ص^+$

ب) $ح_ن = ن^٣ + ١$ حيث ن ∈ $ص^+$

ج) $ح_ن = (-٢)^{ن+١}$ حيث ن ∈ {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

س٣: ∵ $(ح_٥)^٢ = (٣ \times ٢^{٥-٥})^٢ = ٩$

$ح_٨ \times ح_٢ = (٣ \times ٢^{٨-٥})(٣ \times ٢^{٢-٥}) = ٢٤ \times \frac{٣}{٨} = ٩$

∴ $(ح_٥)^٢ = ح_٨ \times ح_٢$

س٤: أ) متتالية عدد الشرائح غير المبيعة: ٩٢، ٨٣، ٧٣، ٦٢، ٥٠، ٣٧، ٢٣، ٨.

ب) اليوم الذي لا يحقق هذا النمط هو اليوم التاسع.

س١: أ) $\text{ن} = \infty$، $\text{ح}_{\text{ر}} = \text{ك}^{٣\text{ر}}$ ، ∴ المتسلسلة هي: $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{\infty} \text{ك}^{٣\text{ر}}$

ب) $\text{ن} = ٩٨$، $\text{ح}_{\text{ر}} = \dfrac{\text{ر}+٢}{\text{ر}+٣}$ ، ∴ المتسلسلة هي: $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{٩٨} \dfrac{\text{ر}+٢}{\text{ر}+٣}$

س٢: $$\frac{٢\text{ن}+١}{٣}\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر} = \frac{٢\text{ن}+١}{٣} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٢} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)(٢\text{ن}+١)}{٦} = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}^٢$$

س٣: أ) $$\because \sum_{\text{ر}=١}^{٩٩٩} \left(\text{لو}\,\frac{\text{ر}}{\text{ر}+١}\right) = \sum_{\text{ر}=١}^{٩٩٩} \left(\text{لو}\,\text{ر} - \text{لو}(\text{ر}+١)\right) = (\text{لو}\,١ - \cancel{\text{لو}\,٢}) + (\cancel{\text{لو}\,٢} - \cancel{\text{لو}\,٣}) + \dots$$
$$+ (\cancel{\text{لو}\,٩٨٩} - \cancel{\text{لو}\,٩٩٩}) + (\cancel{\text{لو}\,٩٩٩} - \text{لو}\,١٠٠٠) = \text{لو}\,١ - \text{لو}\,١٠٠٠ = ٠ - ٣ = -٣$$

ب) $$\sum_{\text{ر}=١}^{١٠٠} \left(\frac{١}{\text{ر}} - \frac{١}{\text{ر}+١}\right) = \left(١ - \cancel{\frac{١}{٢}}\right) + \left(\cancel{\frac{١}{٢}} - \cancel{\frac{١}{٣}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{١}{١٠٠}} - \frac{١}{١٠١}\right) = ١ - \frac{١}{١٠١} = \frac{١٠٠}{١٠١}$$

س٤: أ) $$\sum_{\text{ر}=١}^{٣} (\text{ر}^٢ + ٢\text{ر} + ٥) = \frac{٣(٣+١)(٢\times٣+١)}{٦} + ٢ \times \frac{٣\times٤}{٢} + ٣\times٥ = ٤١$$

يمكن التعويض مباشرة

ب) $$\sum_{\text{ر}=١}^{٨٥} (-١)^{\text{ر}} = (\cancel{-١}) + (\cancel{١}) + (\cancel{-١}) + \dots + (-١)^{٨٥} = -١$$

ج) $\dfrac{\sum\limits_{\text{ر}=1}^{40} \text{ر}^2}{\sum\limits_{\text{ر}=1}^{40} 2\text{ر}} = \dfrac{\dfrac{\cancel{\text{ن}(\text{ن}+1)}(2\text{ن}+1)}{\cancel{6}_{3}}}{\dfrac{\cancel{\text{ن}(\text{ن}+1)}}{\cancel{2}_{1}}} = \dfrac{(2\text{ن}+1)}{6} = \dfrac{(2\times 40+1)}{6} = \dfrac{81}{6} = 13{,}5$

د) $\sum\limits_{\text{ر}=1}^{40} \left(\dfrac{\text{ر}}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{40\,(40+1)}{2} = 410$

س٥: أ) المتسلسلة هي: $(1^2+10)+(2^2+10)+(3^2+10)+\dots+(\text{ن}^2+10) = \sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{ر}^2+10)$

ب) ما قطعه في الدقائق الخمس الأولى:

$$\sum_{\text{ر}=1}^{5} (\text{ر}^2+10) = (1^2+10)+(2^2+10)+(3^2+10)+(4^2+10)+(5^2+10) = 11+14+19+26+35 = 105\text{م}$$

ما قطعه في الدقيقة العاشرة $= (10^2+10) = 110$م .

أي أنّ ما قطعه في الدقائق الخمس الأولى $<$ ما قطعه في الدقيقة العاشرة.

تمارين ومسائل: (٥ - ٣) المتتاليات الحسابية (العددية)

س١: أ) $\because$ $\text{ح}_4 = -33 \Longleftarrow \text{أ} + 3\text{د} = -33$ .... (١)

$\because$ $\text{ح}_9 = -13 \Longleftarrow \text{أ} + 8\text{د} = -13$ .... (٢)

من (١)، (٢) بالطرح ينتج أنّ:

$5\text{د} = 20$ ، ومنها: $\text{د} = 4$ بالتعويض في المعادلة (١) ينتج أنّ:

$\text{أ} + 12 = -33 \quad \text{أ} = -45$

المتتالية : −٤٥، −٤١، −٣٧،..................

ب) $ح_ن > ٠ \Leftarrow أ + (ن-١) ء > ٠$

$\Leftarrow -٤٥ + (ن-١) ٤ > ٠ \Leftarrow -٤٥ + ٤ن - ٤ > ٠$

$\Leftarrow ٤ن-٤٩ > ٠ \Leftarrow ٤ن > ٤٩ \Leftarrow ن > ١٢\frac{١}{٤}$ ∴ $ح_{١٣}$ هو أول حد موجب.

س٢: ∵ $ح_٢ + ح_٣ = ١٥٢ \Leftarrow أ + ء + أ + ٢ء = ١٥٢$

$\Leftarrow ٢أ + ٣ء = ١٥٢$ ....(١)

∵ $ح_٦ - ح_٨ = ٨ \Leftarrow أ+٥ء - أ - ٧ء = ٨$

$\Leftarrow -٢ء = ٨$ ∴ $ء = -٤$

بالتعـــــــويض في المعــادلة رقـــم (١) ينتـــج أنّ :

$٢أ - ١٢ = ١٥٢ \Leftarrow ٢أ = ١٥٢ + ١٢ = ١٦٤ \Leftarrow أ = ٨٢$

∴ المتتــــــالية هي: ٨٢ ، ٧٨ ، ٧٤ ، ....

س٣: أ) س - ٧ = ١٢٣ - (١٠س + ٩) ⟸ س - ٧ = ١٢٣ - ١٠س - ٩

⟸ ١١ س = ١٣٠ - ٩ ⟸ ١١س = ١٢١ ⟸ س = ١١

ب) $ح_ن = أ + (ن-١) ء = ١٢٣$

$\Leftarrow ٧ + (ن-١) \times ٤ = ١٢٣ \Leftarrow ٧ + ٤ن - ٤ = ١٢٣$

$\Leftarrow ٤ن = ١٢٠ \Leftarrow ن = ٣٠$

س٤: أ) متتالية كميات في يومياً هي : ٨ ، ٨ ، ٨ ، ٨ ، ٨ ، ٨ ، .....

بفرض أن عدد الأيام الذي يكون فيه ما تبقى من الرمل ١١٢م^٣ هــو (ر) يوماً

∵ ٨ ر = ٢٠٠ - ١١٢ = ٨٨ ⟸ ر = ١١ يوماً

ب) بوضع ٨ ر = ٢٠٠ ⟸ ر = ٢٥ يوماً

س٥: ∵ $\frac{\text{س}_{5}}{\text{س}_{\text{ن}-2}} = \frac{4}{7}$ ، $\frac{1 + 5\text{د}}{1 + (\text{ن}-2)\text{د}} = \frac{4}{7}$ ⟸ ٤ + ٤ن د − ٨د = ٧ + ٣٥د

⟸ ٤ن د − ٤٣ د = ٣ .... (١)

$\text{ع}_{\text{ن}+2}$ = ١ + (ن+١) د = ٣٧

⟸ ن د + د = ٣٦ .... (٢)

بضرب المعادلة رقم (٢) في −٤ وجمــعها مع المعادله (١) ينتج أنّ:

⟸ $\cancel{\text{٤ن د}}$ − ٤٣ د = ٣

−$\cancel{\text{٤ن د}}$ + −٤ د = −١٤٤

−٤٧ د = −١٤١ ⟸ د = ٣

بالتعويض في المعادلة (٢) ينتج أنّ: ٣ن + ٣ = ٣٦ ومنها ٣ن = ٣٣ ن = ١١ . ، د = ٣

للتحقق : ١، ٤، ٧، ١٠، ١٣، ١٦، ١٩، ٢٢، ٢٥، ٢٨، ٣١، ٣٤، ٣٧

تمارين ومسائل: (٥ - ٤) مجموع المتسلسلة الحسابية

س١: ∵ أ = ٣٠ ، د = ٢٧ − ٣٠ = −٣ ، ن = ٢٠

$\text{جـ}_{20} = \frac{\text{ن}}{2}$ [٢أ + (ن−١) د]

= ١٠ × (٦٠ + ١٩ × −٣) = ٣٠ .

س٢: جـ_{10} الأولى = $\frac{10}{2}$ (٢أ + ٩د) = ١٢٠

⟸ ٢أ + ٩ د = ٢٤ .... (١)

جـ_{6} التالية = $\frac{6}{2}$ (٢ع_{11} + ٥ د) = ١٦٨

٣(٢(أ + ١٠ د) + ٥د) = ١٦٨

٦أ + ٧٥ د = ١٦٨ ÷ ٣

⟸ ٢أ + ٢٥د = ٥٦..........(٢)

من (١)، (٢) بالطـــــرح ينتـــــــج أنّ:

١٦د = ٣٢ ⟸ د = ٢ ، نعوض في المعادلة (١) أ = ٣

المتسلسلة هـي : ٣ + ٥ + ٧ + ...

س٣: أ = ٧ ، ل = −١٢ ، $\text{جـ}_{ن}$ = −٥٠

∵ $\text{جـ}_{ن} = \frac{ن}{٢}(\text{أ}+\text{ل}) \Leftarrow \frac{ن}{٢}(٧ - ١٢) = -٥٠$

⟸ −٥ن = −١٠٠ ⟸ ن = ٢٠ عدد حدود المتتالية ٢٠ حداً

$ع_{٢٠}$ = أ + ١٩د = −١٢ ⟸ ٧ + ١٩د = −١٢

١٩د = −١٩ ⟸ د = −١

المتسلسلة هي : ٧ + ٦ + ٥ + ... + −١٢

س٤: ن = ٢٥ ، الحد الأوسط هو: $ع_{١٣}$ = ٣٨ ، $ع_{٢٥} + ع_{٢٤} + ع_{٢٣}$ = ٢١٣

∵ $ع_{١٣}$ = ٣٨ ⟸ أ + ١٢د = ٣٨ .... (١)

$ع_{٢٥} + ع_{٢٤} + ع_{٢٣}$ = أ + ٢٤د + أ + ٢٣د + أ + ٢٢د = ٢١٣

⟸ (٣أ + ٦٩د = ٢١٣)/٣

⟸ أ + ٢٣د = ٧١ .... (٢)

من (٢)، (١) بالطرح ينتــج أنّ:

١١د = ٣٣ ومنها: د = ٣ بالتعويض في المعادلة رقم (١) ينتج أنّ:

أ + ١٢ × ٣ = ٣٨ ⟸ أ = ٣٨ − ٣٦ = ٢

المتسلسلة هي: ٢ + ٥ + ٨ + ... +٧٤

$\text{جـ}_{ن} = \frac{ن}{٢}(\text{أ}+\text{ل}) = \frac{٢٥}{٢}(٢ + ٧٤) = \frac{٢٥}{٢} \times ٧٦ = ٩٥٠$ **أو**

∵ $\text{جـ}_{ن} = \frac{ن}{٢}(٢\text{أ}+(ن-١)\text{د}) = \frac{٢٥}{٢}(٢ \times ٢ + ٢٤ \times ٣) = \frac{٢٥}{٢} \times ٧٦ = ٩٥٠$

س٥:

$$\frac{\sum_{ر=١}^{٢ن}(٦ + ٤ر)}{\sum_{ر=١}^{ن}(١ + ٢ر)} = \frac{(٦ \times ٢ن) + \frac{٤ \times ٢ن(٢ن + ١)}{٢}}{ن + \frac{٢ن(ن + ١)}{٢}}$$

$$= \frac{٨ن^{٢} + ١٦ن}{ن^{٢} + ٢ن} = \frac{٨(ن^{٢} + ٢ن)}{ن^{٢} + ٢ن} = ٨$$

حل آخر:

البسط $= \sum_{ر=١}^{٢ن} (٦ + ٤ر) = ١٠ + ١٤ + ١٨ + \dots + (٦ + ٨ن)$ مجموع متتالية حسابية

فيها: $ا = ١٠$ ، $ء = ٤$ ، عدد حدودها: $٢ن$

$\Leftarrow$ البسط $= \frac{٢ن}{٢}(ا + ل) = \frac{ن\cancel{٢}}{\cancel{٢}}(١٠ + ٦ + ٨ن) = ن(١٦ + ٨ن) = ٨ن(٢ + ن)$ .... (١)

المقام $= \sum_{ر=١}^{ن} (١ + ٢ر) = ٣ + ٥ + ٧ + \dots + (١ + ٢ن) =$

$\frac{ن}{٢}(ا + ل) = \frac{ن}{٢}(٣ + ١ + ٢ن) = \frac{ن}{٢}(٤ + ٢ن) = ن(٢ + ن)$ .... (٢)

من (١)، (٢) ينتج أنّ المقدار: $\dfrac{\sum_{ر=١}^{٢ن}(٦ + ٤ر)}{\sum_{ر=١}^{ن}(١ + ٢ر)} = \dfrac{٨\cancel{ن}\cancel{(٢ + ن)}}{\cancel{ن}\cancel{(٢ + ن)}} = ٨$

تمارين ومسائل: (٥ - ٥) المتتالية الهندسية

س١: $\because ا = ٣$ ، $ر = \frac{-٩}{٣} = -٣$ ، $ح_٧ = ا \times ر^٦ = ٣ \times (-٣)^٦ = ٢١٨٧$

س٢: $\because ح_١ + ح_٢ = ١٢ \Leftarrow ا + ار = ١٢ \Leftarrow ا(١ + ر) = ١٢$ .... (١)

$\because ح_٣ + ح_٤ = ١٠٨ \Leftarrow ار^٢ + ار^٣ = ١٢ \Leftarrow ار^٢(١ + ر) = ١٠٨$ .... (٢)

بقسمة (٢) على (١) ينتج أنّ: $\Leftarrow \dfrac{\cancel{ا}ر^٢\cancel{(١ + ر)}}{\cancel{ا}\cancel{(١ + ر)}} = \dfrac{١٠٨}{١٢} \Leftarrow ر = \pm ٣$

أولاً: عندما: $ر = ٣ \Leftarrow ا + ٣ا = ١٢ \Leftarrow ٤ا = ١٢ \Leftarrow ا = ٣$

المتتالية هي : ٣، ٩، ٢٧، ....

ثانياً: عندما: $ر = -٣ \Leftarrow ا - ٣ا = ١٢ \Leftarrow -٢ا = ١٢ \Leftarrow ا = -٦$

المتتالية هي : -٦، ١٨، -٥٤، ....

س٣: بفرض أنّ هذه الأعداد هي : أ ، أر ، أر^{٢}

∵ $أ + أر + أر^{٢} = ٣٥$

$أ(١ + ر + ر^{٢}) = ٣٥$ ....(١)

∵ أ ، أر+٦ ، أر^{٢} +٧ في توالٍ حسابي.

∵ $أر + ٦ = \frac{أ + أر^{٢} + ٧}{٢} \Leftarrow أ + أر^{٢} + ٧ = ٢أر + ١٢$

$\Leftarrow أر^{٢} - ٢أر + أ = ٥ \Leftarrow أ(ر^{٢} - ٢ر + ١) = ٥$ .... (٢)

من (٢)، (١) بالقسمة ينتج أنّ:

$\frac{\cancel{أ}(ر^{٢} - ٢ر + ١)}{\cancel{أ}(ر^{٢} + ر + ١)} = \frac{\cancel{٥}\ ^{١}}{\cancel{٣٥}\ ^{٧}} \Leftarrow \frac{(ر^{٢} - ٢ر + ١)}{(ر^{٢} + ر + ١)} = \frac{١}{٧} \Leftarrow ٧ \times (ر^{٢} - ٢ر + ١) = ١ \times (ر^{٢} + ر + ١)$

$٧ر^{٢} - ١٤ر + ٧ = ر^{٢} + ر + ١ \Leftarrow ٦ر^{٢} - ١٥ر + ٦ = ٠$

$(٦ر - ٣)(ر - ٢) = ٠ \quad ر = \frac{١}{٢} \ ،\ ر = ٢$

بالتعويض في المعادلة رقم (١) ينتج أنّ:

أولاً: عندما: $ر = \frac{١}{٢}$

$أ(١ + \frac{١}{٢} + (\frac{١}{٢})^{٢}) = ٣٥ \Leftarrow \frac{٧}{٤}أ = ٣٥ \Leftarrow أ = ٢٠$

∴ الأعداد هي: ٢٠ ، ١٠ ، ٥

ثانياً: عندما: ر= ٢ بالتعويض في المعادلة رقم (١) ينتج أنّ :

$أ(١ + ٢ + ٤) = ٣٥ \Leftarrow ٧أ = ٣٥ \Leftarrow أ = ٥$

∴ الأعداد هي: ٥ ، ١٠ ، ٢٠

س٤: العامل الأول

تكون متتالية حسابية فيها: أ =٥٠٠٠ ، د = ٥٠

راتب العامل الأول في السنة الخامسة والعشرين هو:

$ح_{٢٥} = أ + ٢٤د = ٥٠٠٠ + ٢٤ \times ٥٠ = ٦٢٠٠$ دينار .

الموظف الثاني

تكون متتالية هندسية فيها: أ =٥٠٠٠ ، ر= ١,٠٥

راتب العامل الثاني في السنة الخامسة والعشرين هو:

$ح_{٢٥} = أ \times ر^{٢٤} = ٥٠٠٠ \times (١,٠٥)^{٢٤} = ١٦١٢٥,٥$ دينار

ثانياً: بفرض أنّ ($\overline{د}$) هي مقدار العلاوة السنوية التي تجعل راتب العامل الأول = راتب العامل الثاني في السنه الخامسة العشرين.

$\Leftarrow$ أ + ٢٤ $\overline{د}$ = ١٦١٢٦,٥ $\Leftarrow$ ٥٠٠٠ + ٢٤ $\overline{د}$ = ١٦١٢٦,٥

$\Leftarrow$ $\overline{د}$ = ٤٦٣,٦ دينار

تمارين ومسائل: (٥ - ٦) المتتالية الهندسية المنتهية ومجموعها

س١: أ = ١، ل = ٦٤ ، جـ$_ن$ = ٨٥

$\because$ جـ$_ن$ = $\frac{\text{ل ر} - \text{أ}}{\text{ر} - 1}$ $\Leftarrow$ ٨٥ = $\frac{\text{ل ر} - \text{أ}}{\text{ر} - 1}$ $\Leftarrow$ ٨٥ر − ٨٥ = ٦٤ ر − ١ = ٨٥ − ١

$\Leftarrow$ ٢١ر = ٨٤ $\therefore$ ر = ٤

س٢: جـ$_ن$ = ٣٩٠٥ ، ل = ٣١٢٥ ، ر = ٥ ، أ = ؟ ، ن = ؟

١) $\because$ جـ$_ن$ = $\frac{\text{ل ر} - \text{أ}}{\text{ر} - 1}$ $\Leftarrow$ $\frac{3125 \times 5 - \text{أ}}{5 - 1}$ = ٣٩٠٥ $\Leftarrow$ ١٥٦٢٥ − أ = ١٥٦٢٠ $\Leftarrow$ أ = ٥

٢) $\because$ ل = أ ر$^{ن-١}$ $\Leftarrow$ ٣١٢٥ = ٥ × ٥$^{ن-١}$ $\Leftarrow$ ٣١٢٥ = ٥^{ن} $\Leftarrow$ ٥^{٥} = ٥^{ن} $\Leftarrow$ ن = ٥

س٣: $\because$ $\sum_{ر=١}^{١٠}$ ٣$^{ر-٨}$ = ٣$^{-٧}$ + ٣$^{-٦}$ + ٣$^{-٥}$ +....+ ٣^{٢} متسلسلة هندسية فيها:

أ = ٣$^{-٧}$ ، ر = ٣ ، ن = ١٠

$\because$ جـ$_ن$ = $\frac{\text{أ} (\text{ر}^{ن} - 1)}{\text{ر} - 1}$ = $\frac{3^{-7} (3^{10} - 1)}{3 - 1}$ = $\frac{3^{-7} \times 59048}{2}$ ≈ ١٣,٥

س٤: $\because$ $\frac{\text{أ ر} + \text{أ ر}^{2}}{2}$ = ٥ $\Leftarrow$ أر(١ + ر^{٢}) = ١٠ .... (١)

$\because$ $\sqrt{\text{أ ر} \times \text{أ ر}^{3}}$ = ٤ $\Leftarrow$ أر^{٢} = ٤ .... (٢)

من (١)، (٢) بالقسمة ينتج أنّ:

$\frac{\cancel{\text{أر}}(١ + \text{ر}^٢)}{\cancel{\text{أر}^٢}\,\text{ر}} = \frac{\cancel{١٠}^{\,٥}}{\cancel{٤}_{\,٢}} \Leftarrow \frac{(١ + \text{ر}^٢)}{\text{ر}} = \frac{٥}{٢} \Leftarrow ٢\text{ر}^٢ + ٢ = ٥\text{ر}$

$\Leftarrow ٢\text{ر}^٢ - ٥\text{ر} + ٢ = ٠ \Leftarrow (٢\text{ر} - ١)(\text{ر} - ٢) = ٠$ ومنها: $\text{ر} = \frac{١}{٢}$ ، $\text{ر} = ٢$

أولاً: عندما $\text{ر} = \frac{١}{٢}$ بالتعويض في المعادلة رقم (٢) ينتج أنّ: $\text{أ} = ١٦$

المتسلسلة هي: ١٦ + ٨ + ٤ + ...

$\text{جـ}_{١٠} = \frac{\text{أ}\,(\text{ر}^{١٠} - ١)}{\text{ر} - ١} = \frac{١٦((\frac{١}{٢})^{١٠} - ١)}{\frac{١}{٢} - ١} = \frac{١٠٢٣}{٣٢}$

ثانياً: $\text{ر} = ٢$ بالتعويض في المعادلة رقم (٢) ينتج أنّ: $\text{أ} = ١$

المتسلسلة هي : ١ + ٢ + ٤ + ...

$\text{جـ}_{١٠} = \frac{\text{أ}\,(\text{ر}^{١٠} - ١)}{\text{ر} - ١} = \frac{١((٢)^{١٠} - ١)}{٢ - ١} = ١٠٢٣$

س٥: أ) متتالية ارتفاعات الكرة بعد الصدمات ٦، $\frac{٩}{٢}$ ، $\frac{٢٧}{٨}$ ، .... تكون متسلسلة هندسية فيه $\text{أ} = ٦$، $\text{ر} = \frac{٣}{٤}$

ارتفاع الكرة بعد الصدمة السادسة: $\text{ح}_٦ = \text{أر}^٥ = ٦\,(\frac{٣}{٤})^٥ = \frac{٧٢٩}{٥١٢}$.

متتالية الارتفاعات: ٨، ٦، $\frac{٩}{٢}$ ، $\frac{٢٧}{٨}$ ، $\frac{٨١}{٣٢}$

ب) $\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{٨((\frac{٣}{٤})^{\text{ن}} - ١)}{\frac{٣}{٤} - ١} = \frac{٧٨١}{٣٢}$ ومنها : $(\frac{٣}{٤})^{\text{ن}} = (\frac{٣}{٤})^٥ \Leftarrow \text{ن} = ٥$ وهي بعد الصدمة الرابعة.

س٥: متسلسلة التأرجح هي : ٨,١ ، ٢,٧ ، ٠,٩ ، ٠,٣ ، ..... متسلسلة هندسية $\text{أ} = ٨,١$، $\text{ر} = \frac{١}{٣}$

$\text{جـ}_٥ = \frac{٨,١((\frac{١}{٣})^٥ - ١)}{\frac{١}{٣} - ١} = ١٢,١$ سم.

س١:

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الإجابة الصحيحة	ب	ب	ج	أ	ب	أ	د	ب	ج	ج

س٢: $أ = ٣ ،\ ل = ١٥٣٦ ،\ جـ_{ن} = ٣٠٦٩$

$$\because\ جـ_{ن} = \frac{ل ر - أ}{ر - ١} \Longleftarrow ٣٠٦٩ = \frac{١٥٣٦ \times ر - ٣}{ر - ١} \Longleftarrow ٣٠٦٩ ر - ٣٠٦٩ = ١٥٣٦ ر - ٣$$

$$\Longleftarrow ٣٠٦٩ ر - ١٥٣٦ ر = ٣٠٦٩ - ٣ \Longleftarrow ١٥٣٣ ر = ٣٠٦٦ \Longleftarrow \therefore ر = ٢$$

س٣: $أ = ٢ ،\ ر = ٢ ،\ ع_{٥} = ٣٢ ،\ ن = ٨$

$$جـ_{٨} = \frac{ع_{٥}(ر^{٨} - ١)}{ر - ١} = \frac{٣٢(٢^{٨} - ١)}{٢ - ١} = ٨١٦٠$$

س٤: ب وسط حسابي بين أ، جـ $\therefore$ أ، ب، جـ في توالٍ حسابي

$\therefore$ $ب = أ + د ،\ جـ = أ + ٢د$

$$\therefore \text{المقدار: } \frac{ب + ٢أ}{ب - جـ} + \frac{ب + ٢جـ}{ب - أ} = \frac{أ + د + ٢أ}{أ + د - أ - ٢د} + \frac{أ + د + ٢أ + ٤د}{أ + د - أ} = \frac{٣أ + د}{-د} + \frac{٣أ + ٥د}{د} = \frac{٤د}{د} = ٤$$

س٥: الحدود فردية الرتبة (٣، ٧، ١١، ....، ٥١) ١٣ حداً

الحدود زوجية الرتبة (١١، ٢١، ٣١، ....، ١٢١) ١٢ حداً

$جـ_{٢٥}$ = ($جـ_{١٣}$ للحدود الفردية الرتبة) + ($جـ_{١٢}$ للحدود الزوجية الرتبة)

$$= \frac{١٣}{٢}(٣ + ٥١) + \frac{١٢}{٢}(١١ + ١٢١) = ١١٤٣$$

س٦: ∵ $\text{و}_{٤} - \text{و}_{٢} = ٨٤ \Longleftarrow \text{أ ر}^{٤} - \text{أ ر}^{٢} = ٨٤$

$\Longleftarrow \text{أ ر}^{٢}(\text{ر}^{٢} - ١) = ٨٤$ .... (١)

∵ $\text{و}_{٣} \Longleftarrow \text{أ ر}^{٣} = ٥٦$ .... (٢)

بقسمة (١) على (٢) ينتج أنّ: $\dfrac{\cancel{\text{أ}}\,\text{ر}^{٢}(\text{ر}^{٢} - ١)}{\cancel{\text{أ}}\,\text{ر}^{٣}} = \dfrac{\cancel{٨٤}^{\,٣}}{\cancel{٥٦}_{\,٢}} \Longleftarrow \dfrac{(\text{ر}^{٢} - ١)}{\text{ر}} = \dfrac{٣}{٢} \Longleftarrow ٢\text{ر}^{٢} - ٢ = ٣\text{ر}$

$\Longleftarrow ٢\text{ر}^{٢} - ٣\text{ر} - ٢ = ٠ \Longleftarrow (\text{ر} - ٢)(٢\text{ر} + ١) = ٠ \Longleftarrow \text{ر} = ٢ \ ،\ \text{ر} = -\dfrac{١}{٢}$

أولاً: عندما $\text{ر} = ٢$ بالتعويض في المعادلة (١) ينتج أنّ: $٨\text{أ} = ٥٦$

$\text{أ} = ٧$ ∴ الأوساط هي: ١٤، ٢٨، ٥٦، ١١٢

ثانياً: عندما: $\text{ر} = -\dfrac{١}{٢}$ بالتعويض في المعادلة (١) ينتج أنّ:

$\text{أ} \times (-\dfrac{١}{٢})^{٣} = ٥٦ \Longleftarrow \text{أ} = -٨ \times ٥٦ = -٤٤٨$

$\Longleftarrow$ الأوساط هي: ٢٢٤، −١١٢، ٥٦، −٢٨

س٧: ∵ $\text{جـ}_{٦}$ الأولى = ٩ $\text{جـ}_{٣}$ الأولى

$\dfrac{\cancel{\text{أ}} \times (\text{ر}^{٦} - ١)}{\cancel{\text{ر} - ١}} = ٩\,\dfrac{\cancel{\text{أ}} \times (\text{ر}^{٣} - ١)}{\cancel{\text{ر} - ١}} \Longleftarrow (\text{ر}^{٦} - ١) = ٩(\text{ر}^{٣} - ١) \Longleftarrow \cancel{(\text{ر}^{٣} - ١)}(\text{ر}^{٣} + ١) = ٩\,\cancel{(\text{ر}^{٣} - ١)}$

$\Longleftarrow \text{ر}^{٣} = ٨ \Longleftarrow \text{ر} = ٢$

∵ $\text{ع}_{١٠} = \text{أ} \times ٢^{٩} = ٦٤ \Longleftarrow \text{أ} = \dfrac{١}{٨}$

المتتالية هي: $\dfrac{١}{٨}$ ، $\dfrac{١}{٤}$ ، $\dfrac{١}{٢}$ ، ......

س٨: المتبقي: ٥٠ ، ٤٠ ، ٣٢ ، .... متتالية هندسية $\text{أ} = ٥٠$ ، $\text{ر} = \dfrac{٤}{٥}$

∵ $\text{ع}_{٦} = \text{أ} \times \text{ر}^{٥} = ٥٠\,(٠,٨)^{٥} = ١٦,٣٨٤$

حلول الوحدة السادسة: القطوع المخروطية

تمارين ومسائل: (٦ - ١) القطع المكافئ

س١: أ) ص^{٢}= −٤س هذا قطع مكافئ مفتوح لليسار ، فيه: −٤أ = −٤ ، أ = ١، إحداثيات الرأس (٠، ٠)، البؤرة (−١، ٠)، معادلة الدليل س = ١، معادلة محور التماثل ص = ٠ (محور السينات).

ب) س^{٢}= −٨ ص هذا قطع مكافئ مفتوح للأسفل ، فيه: −٤أ = −٨ ، أ = ٢، إحداثيات الرأس (٠، ٠)، البؤرة (٠، −٢)، معادلة الدليل ص = ٢ ، معادلة محور التماثل س = ٠ (محور الصادات).

س٢: القطع يمر بالنقطة (−٣ ، ٦) ومحور تماثله محور السينات ⟵ مفتوح جهة اليسار

معادلته ص^{٢} = −٤أ س ، يمر منحناه بالنقطة (−٣ ، ٦)

إذن: ٣٦ = ١٢أ ، ومنها: أ = ٣ المعادلة ص^{٢} = −١٢س

س٣: معادلة هذا القطع المكافئ هي: ص^{٢} = ٤أ س، إحداثيات البؤرة (أ ، ٠)

ف^{٢} =(س$_{١}$ − أ)^{٢} + (٦ − ٠)^{٢} = ١٠٠ ، إذن: (س$_{١}$ − أ)^{٢}= ٦٤ ،

(س$_{١}$ − أ)= ±٨

س$_{١}$ = أ ±٨

لكن: (٦)^{٢} = ٤ أ س$_{١}$

إما: ٣٦ = ٤أ (أ + ٨) ومنها: أ^{٢}+ ٨أ − ٩ = ٠ ، (أ+٩) (أ−١) = ٠

أ = −٩ (قيمة مرفوضة) ، أ = ١ (مقبولة) ، إذن: ص^{٢} = ٤س

أو: ٣٦ = ٤أ (أ − ٨) ومنها: أ^{٢} − ٨أ −٩ = ٠ ، (أ−٩) (أ+١) =٠

أ = −١ (قيمة مرفوضة) ، أ = ٩ (مقبولة) ، إذن: ص^{٢} = ٣٦س

س٤: منحنى القطع المكافئ يمر بالنقطة (٢، ٨) وهي في الربع الأول وهناك احتمالان:

مفتوح لأعلى ، مفتوح جهة اليمين

<u>أولاً:</u> مفتوح لأعلى

س^{٢}= ٤أ ص ⟵ ٤ = ٣٢أ ⟵ أ = $\frac{١}{٨}$ معادلة القطع المكافئ هي: س^{٢}= $\frac{١}{٢}$ ص

<u>ثانياً:</u> مفتوح جهة اليمين

ص^{٢}= ٤أ س ⟵ ٦٤ = ٨أ ⟵ أ = ٨ معادلة القطع المكافئ هي: ص^{٢}= ٣٢ س

س٥: س = $\frac{٤}{ظا^{٢}(٢هـ) + ١}$ = $\frac{٤}{قا^{٢}(٢هـ)}$ = ٤ جتا^{٢} (٢هـ) .... (١)

ص = ١ − ٢ جا^{٢}هـ = جتا (٢هـ) بالتربيع ⟵ ص^{٢} = جتا^{٢} (٢هـ) .... (٢) من (١) ، (٢) ينتج أن

س = ٤ص^{٢} ⟵ ص^{٢} = $\frac{١}{٤}$ س

تمارين ومسائل: (٦ - ٢) القطع الناقص

س١:

رقم الفقرة	١	٢	٣
رمز الإجابة الصحيحة	جـ	أ	ب

س٢: نكتب القطع على الصورة القياسية: $\frac{س^{٢}}{\frac{١}{٤}}$ + $\frac{ص^{٢}}{\frac{١}{٩}}$ = ١، إذن: هذا قطع ناقص سيني، فيه:

ﻫ = $\frac{١}{٢}$، ب = $\frac{١}{٣}$، جـ = $\frac{\sqrt{٥}}{٦}$

إحداثيات الرأسين (± $\frac{١}{٢}$،٠)، إحداثيات البؤرتين (± $\frac{\sqrt{٥}}{٦}$،٠)

طول المحور الأكبر = ٢ﻫ = ١ ، طول المحور الأصغر = ٢ب = $\frac{٢}{٣}$

معادلة المحور الأكبر (محور السينات) ⟵ ص = صفر

معادلة المحور الأصغر (محور الصادات) ⟵ س = صفر

س٣: البُعد بين الرأس القريب والبؤرة = ﻫ − جـ = ٢

البعد بين الرأس البعيد والبؤرة = ﻫ + جـ = ٨

بحل هذا النظام ينتج أنّ: ﻫ = ٥ ، جـ = ٣ ، ب = ٤

معادلة القطع الناقص الصادي: $\frac{ص^{٢}}{٢٥}$ + $\frac{س^{٢}}{١٦}$ = ١

س٤: المحل الهندسي هو قطع ناقص سيني، في: ٢أ = ١٢ ومنها: أ = ٦، البؤرتان (±٥، ٠) ، ومنها: جـ = ٥، إذن: ب = $\sqrt{١١}$

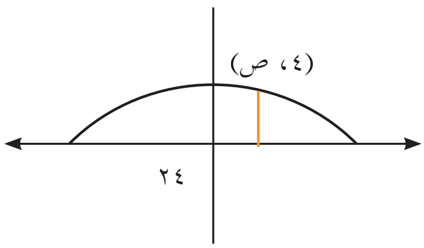
معادلة هذا القطع هي: $\frac{\text{س}^{٢}}{٣٦} + \frac{\text{ص}^{٢}}{١١} = ١$

س٥: المحور الأكبر أفقي ← قطع ناقص سيني

٢أ = ٢٤ ← أ^{٢} = ١٤٤

أعلى نقطة تبعد ٦ م ← ب = ٦ ، ب^{٢} = ٣٦

معادلة القطع الناقص السيني: $\frac{\text{س}^{٢}}{١٤٤} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٣٦} = ١$



عندما: س = ٤ ← $\frac{٤^{٢}}{١٤٤} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٣٦} = ١$ ← ص^{٢} = ٣٢ ← ص = $\sqrt{٣٢}$ = ٤ $\sqrt{٢}$ متر.

تمارين ومسائل: (٦ - ٣) القطع الزائد

س١: أ) ٩س^{٢} – ص^{٢} = ٣٦ ومنها: $\frac{\text{س}^{٢}}{٤} - \frac{\text{ص}^{٢}}{٣٦} = ١$ وهذا قطع زائد سيني فيه:

أ = ٢ ، ب = ٦ ، جـ = $\sqrt{٤٠}$ ، البؤرتان (± $\sqrt{٤٠}$ ، ٠) ،

الرأسان (±٢، ٠) ، طول المحور القاطع = ٢أ = ٤ ، طول المحور المرافق = ٢ب= ١٢

الاختلاف المركزي = هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٢\sqrt{١٠}}{٢} = \sqrt{١٠}$

ب) ٦ص^{٢} –٢س^{٢}= ٣ ومنها: $\frac{\text{ص}^{٢}}{\frac{١}{٢}} - \frac{\text{س}^{٢}}{\frac{٣}{٢}} = ١$ ،وهذا قطع زائد صادي فيه:

أ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ب = $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$ ، جـ^{٢} = $\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢}$ = ٢ ، جـ = $\sqrt{٢}$

الرأسان: (٠، ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$)، البؤرتان: (٠، ± $\sqrt{٢}$) طول المحور القاطع = $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ = $\sqrt{٢}$ وحدة طول ،

طول المحور المرافق = ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$ = $\sqrt{٦}$ وحدة طول، الاختلاف المركزي = هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ = ٢

ج) $٩س^٢ - ١٦ص^٢ = ١$ ومنها: $\frac{س^٢}{\frac{١}{٩}} - \frac{ص^٢}{\frac{١}{١٦}} = ١$ قطع زائد سيني

الرأسان: $(\pm \frac{١}{٣}،٠)$، البؤرتان: $(\pm \frac{٥}{١٢}،٠)$ طول المحور القاطع $= \frac{٢}{٣}$ وحدة طول ،

طول المحور المرافق $= \frac{١}{٢}$ وحدة طول ، الاختلاف المركزي $= هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{٥}{٤}$

س٢: النقطة $(\frac{٣\sqrt{٥}}{٢}،٢)$ تقع على منحنى القطع الزائد، الفرق المطلق بين النقطة والبؤرتين يعني: ٢أ ،

$١٦س^٢ - ٩ص^٢ - ١٤٤ = $ صفر، ومنها: $\frac{س^٢}{٩} - \frac{ص^٢}{١٦} = ١$، أي أنّ: $أ = ٣$

إذن: الفرق المطلق = ٦.

س٣: بؤرة القطع المكافئ $س^٢ = ٢٠ص$، هي $(٠،٥)$ إذن: القطع الزائد صادي فيه ج = ٥

$هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{٥}{٣}$ اذن $\frac{٥}{أ} = \frac{٥}{٣}$، ومنها: $أ = ٣$، $ب = ٤$

معادلة القطع الناقص هي: $\frac{ص^٢}{٩} - \frac{س^٢}{١٦} = ١$

س٤: طول المحور القاطع $= ٢أ = ٨$ ومنها: $أ = ٤$، $هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{٥}{٤} \leftarrow جـ = ٥$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \leftarrow ب^٢ = جـ^٢ - أ^٢ = ٢٥ - ١٦ = ٩$

معادلة القطع الزائد السيني: $\frac{س^٢}{١٦} - \frac{ص^٢}{٩} = ١$

معادلة القطع الزائد الصادي: $\frac{ص^٢}{١٦} - \frac{س^٢}{٩} = ١$

س٥: $\frac{س^٢}{ك} - \frac{ص^٢}{٤-ك} = ١$، حيث إن: $٤ > ك > ٠$ فإن: $٤ - ك > ٠$؛ ولذلك قطع زائد سيني

$أ^٢ = ك$، $ب^٢ = ٤ - ك \leftarrow جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ = ٤$، ومنها: $جـ = ٢$

$هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{٣}{٢} = \frac{٢}{أ}$ ومنها: $أ = \frac{٤}{٣} \leftarrow$ الفرق المطلق $= ٢ \times أ = ٢ \times \frac{٤}{٣} = \frac{٨}{٣}$

س١:

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥
رمز الإجابة الصحيحة	ب	د	أ	أ	د

س٢: $\frac{ص^٢}{٢٥ - ك} - \frac{س^٢}{ك - ١٦} = ١$ قطع زائد صادي

$جـ^٢ = ا^٢ + ب^٢ = ٩$ ومنها $جـ = ٣$ ، البؤرتان هما: $(٠ ، \pm ٣)$

س٣: هذا قطع زائد صادي معادلته: $\frac{ص^٢}{ا^٢} - \frac{س^٢}{ب^٢} = ١$ يمر منحناه بالنقطتين: (٤، ٦)، (١، -٣)

بتعويض النقطة الاولى ينتج: $٣٦ب^٢ - ١٦ا^٢ = ا^٢ب^٢$ .... (١)

بتعويض النقطة الثانية ينتج: $٩ب^٢ - ا^٢ = ا^٢ب^٢$ .... (٢) بطرح ٢ من:

$٢٧ب^٢ - ١٥ا^٢ = ٠$ ، أي أن: $٩ب^٢ - ٥ا^٢ = ٠$ إذن: $٩ب^٢ = ٥ا^٢$

$ب^٢ = \frac{٥}{٩} ا^٢$ نعوض في ٢ ينتج أن : $٥ا^٢ - ا^٢ = ا^٢ \times \frac{٥}{٩} ا^٢$ ومنها: $٣٦ ا^٢ = ٥ا^٤$

$ا^٢ = \frac{٣٦}{٥}$، $ب^٢ = ٤$ ← معادلة القطع الزائد: $\frac{٥ص^٢}{٣٦} - \frac{س^٢}{٤} = ١$

س٤: $س = ٢ن^٢$ ، $ص = ٦ن$ ، ومنها $ص^٢ = ٣٦ن^٢$

$ص^٢ = ٣٦ \times \frac{١}{٢} س$ ← $ص^٢ = ١٨ س$

معادلة القطع المكافئ مفتوح لليمين بؤرته $(\frac{٩}{٢} ، ٠)$

س٥: $س^٢ = -٤ا ص$ من هندسة الشكل (٤ ، -٣) تقع على المنحنى

$١٦ = -٤ا \times -٣$ ومنها: $ا = \frac{٤}{٣}$ ← $س^٢ = -\frac{١٦}{٣}$ ص.

حلول الوحدة السابعة: النهايات والاتصال

تمارين ومسائل: (٧ - ١) نهاية الإقتران عند نقطة

س١: $\underset{\text{س}\leftarrow -١}{\text{نهـا}} (\text{س}^٢ - ٢\text{س}) = ٣$ ، $\underset{\text{س}\leftarrow -١^+}{\text{نهـا}} (\text{س}^٢ - ٢\text{س}) = ٣ \longleftarrow \underset{\text{س}\leftarrow -١}{\text{نهـا}} (\text{س}^٢ - ٢\text{س}) = ٣$

س٢: $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{|\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٢|}{\text{س} - ٣}$ ، غير موجودة (وضح ذلك باستخدام الجدول)

س٣: $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} - \left[\dfrac{\text{س}}{٢}\right] = \text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - ٠ & ، \quad ٠ \leq \text{س} < ٢ \\ \text{س} - ١ & ، \quad ٢ \leq \text{س} < ٤ \end{cases}$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = ٢$ ، $\underset{\text{س}\leftarrow ٢^+}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = ١$ ولذلك $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$ غير موجودة. (وضح بالرسم)

س٤: $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س} - ٢} = ١$ (وضح بالرسم)

س٥: $\underset{\text{س}\leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \text{جا}\,\text{س} = ١$ (وضح بالرسم)

تمارين ومسائل: (٧ - ٢) نظريات النهايات

س١: أ) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} \times \text{ق}(\text{س})}{٢\,\text{هـ}(\text{س})} = \dfrac{\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \text{س} \times \underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})}{٢ \underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \text{هـ}(\text{س})} = \dfrac{١ \times -٢}{٢ \times ١} = -١$

ب) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} (\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س})^٥ = (\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) + \underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} ٢\text{س})^٥ = (-٢ + ٢)^٥ = \text{صفر}$

ج) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \sqrt{٣\,\text{ق}(\text{س}) + ١٠} = \sqrt{٣\,\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}}\,\text{ق}(\text{س}) + \underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}}\,١٠} = \sqrt{٤} = ٢$

س٢: أ) $\underset{\text{س}\leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٢ + \text{س}}{٢\text{س}^٢ + ٣} = \dfrac{٤ + -٢}{٨ + ٣} = \dfrac{٢}{١١}$.

ب) $\underset{\text{ص}\leftarrow -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{ص}^٢ + ٣}}{٢\text{ص}^٢ - ١} = \dfrac{\sqrt{٤}}{٢ - ١} = ٢$

ج) $\underset{\text{ع}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} (\text{ع}\,\text{جتا}\,\pi\text{ع} + \text{جا}٢\pi\text{ع}) = \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} (\text{جتا}\,\pi + \text{جا}٢\pi) = -١$.

د) $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٥| = \begin{cases} \text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٥ & \text{،}\ \text{س} \leq ١ \\ -(\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٥) & \text{،}\ ١ < \text{س} < ٥ \\ \text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٥ & \text{،}\ \text{س} \geq ٥ \end{cases}$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٥^+}{\text{نهـا}}\,\text{ق}(\text{س}) = ٠$ ، $\underset{\text{س}\leftarrow ٥^-}{\text{نهـا}}\,\text{ق}(\text{س}) = ٠ \longleftarrow \underset{\text{س}\leftarrow ٥}{\text{نهـا}}\,\text{ق}(\text{س}) = ٠$ ولذلك $\underset{\text{س}\leftarrow ٥}{\text{نهـا}}\,\text{ق}(\text{س}) = ٠$

س٣: $\text{ق}(\text{س}) = [\tfrac{١}{٣}\text{س} + ١] = \begin{cases} ٠ & \text{،}\ -٣ \leq \text{س} < ٠ \\ ١ & \text{،}\ ٠ \leq \text{س} < ٣ \\ ٢ & \text{،}\ ٣ \leq \text{س} < ٦ \end{cases} =$

أ) $\underset{\text{س}\leftarrow -٢}{\text{نهـا}}\,\text{ق}(\text{س}) = ٠$

ب) $\underset{\text{س}\leftarrow ٣^-}{\text{نهـا}} (\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س}) = \underset{\text{س}\leftarrow ٣^-}{\text{نهـا}} (١ + ٢\text{س}) = ٧$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٣^+}{\text{نهـا}} (\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س}) = \underset{\text{س}\leftarrow ٣^+}{\text{نهـا}} (٢ + ٢\text{س}) = ٨ \longleftarrow \underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}} (\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س})$ غير موجودة.

س٤: $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س}^٢ - \text{س} - ٢| + |\text{س} + ٣|$ نعيد التعريف من خلال مهارة بحث الإشارة للاقتران:

$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ - ٢\text{س} - ٥ & \text{،}\ \text{س} < -٣ \\ \text{س}^٢ + ١ & \text{،}\ -٣ \leq \text{س} \leq -١ \\ -\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٥ & \text{،}\ -١ < \text{س} < ٢ \\ \text{س}^٢ + ١ & \text{،}\ \text{س} \geq ٢ \end{cases}$

أ) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٥$ (لاحظ النهاية اليمنى = النهاية اليسرى عند نقطة التحول س = ٢)

ب) $\underset{\text{س}\leftarrow -٣}{\text{نهـا}}\ (\text{ق(س)} + \text{س}^{٢}) = ١٩$ (لاحظ النهاية اليمنى = النهاية اليسرى عند نقطة التحول س = -٣).

س٥: أ) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ (\text{أ}\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٢\text{أ}) = ١٠$ ومنها: $(٤\text{أ} + ٦ - ٢\text{أ}) = ١٠$ ومنها: $\text{أ} = ٢$

ب) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ (\text{ق(س)} + ٣) = \underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ (٢\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٤ + ٣) = ٤$

س٦: النهاية موجودة عند س ⟵ ٢ ؛ ولذلك: $\underset{\text{س}\leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س}\leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

$٤\text{أ} + ٧ = ٤ + ١٠\text{أ}$ ومنها: $\text{أ} = \frac{١}{٢}$

تمارين ومسائل: (٧ - ٣) النهايات والصور غير المعينة

س١: أ) $\underset{\text{س}\leftarrow -٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٤} = \underset{\text{س}\leftarrow -٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س(س} + ٢)}{(\text{س}+٢)(\text{س}-٢)} = \underset{\text{س}\leftarrow -٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}}{(\text{س}-٢)} = \frac{١}{٢}$

ب) $\underset{\text{س}\leftarrow ٥}{\text{نهـا}}\ \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}-٥)}{(٥ - \text{س})} = -٣$

ج) $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س(س}-٣)(\text{س}-٢)}{(\text{س} - ٣)} = ٣$

د) $\underset{\text{س}\leftarrow \sqrt{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{٨} - ١٦}{\text{س}^{٤} - ٤} = \underset{\text{س}\leftarrow \sqrt{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{\cancel{(\text{س}^{٤} - ٤)}(\text{س}^{٤} + ٤)}{\cancel{(\text{س}^{٤} - ٤)}} = ٤ + ٤ = ٨$

هـ) $\underset{\text{س}\leftarrow ٥}{\text{نهـا}}\ \frac{\sqrt{٢\text{س} + ٦} - ٤}{٢\text{س} - ١٠} \times \frac{\sqrt{٢\text{س} + ٦} + ٤}{\sqrt{٢\text{س} + ٦} + ٤} = \underset{\text{س}\leftarrow ٥}{\text{نهـا}}\ \frac{\cancel{٢\text{س} - ١٠}}{\cancel{٢\text{س} - ١٠}} \times \frac{١}{\sqrt{٢\text{س} + ٦} + ٤} = \frac{١}{٨}$

س٢: $\underset{\text{س}\leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س}\leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$ ؛ لأن النهاية موجودة

$$\underset{س \to ٢^+}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ + ٢س - ٨}{س - ٢} = \underset{س \to ٢^+}{\text{نهـا}} \frac{أس^٢ + س - ٤}{س^٢ + ١}$$ .... ومنها: أ = ٨

س٢: $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{أس^٢ - بس - ٦}{(س - ٢)} = ٥$ أي موجودة وقيمتها معلومة.

عندما: س ← ٢ المقام = صفر؛ ولذلك حتى تكون النهاية موجودة عندما: س ← ٢ فإنّ البسط = صفر .

٤أ − ٢ب − ٦ = ٠ ومنها ٢أ − ب = ٣ .... ومنها ٢أ − ٣ = ب

$$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{أس^٢ - (٢أ - ٣)س - ٦}{(س - ٢)} = ٥$$

$$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(أس + ٣)(س - ٢)}{(س - ٢)} = ٥$$ ومنها: ٢أ + ٣ = ٥ ومنها: أ = ١ ، ب = −١

تمارين ومسائل: (٧ - ٤) نهايات الاقترانات الدائرية

س١: أ) $$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ظا^٢ ٣س}{جا^٢ ٧س} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{ظا^٢ ٣س}{س^٢} \div \frac{جا^٢ ٧س}{س^٢} \right) = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{ظا ٣س}{س} \right)^٢ \div \left(\frac{جا ٧س}{س} \right)^٢ = \frac{٩}{٤٩}$$

ب) $$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{س^٢ ظتا^٢ \pi س} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ظا^٢ \pi س}{س^٢} = \pi^٢$$

ج) $$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ظاس \, جا ٥س}{٣س} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} ظاس \times \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{جا ٥س}{٣س} = ٠ \times \frac{٥}{٣} = ٠$$

د) $$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-٣ جاس}{٥ ظتا ٣س} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-٣ جاس}{٥} \times ظا ٣س = ٠$$

س٢: أ) $$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{جتاس - جتا ٣س}{١ - جتا ٧س} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\left(١ - ٢ جا^٢ \frac{س}{٢}\right) - \left(١ - ٢ جا^٢ \frac{٣س}{٢}\right)}{١ - \left(١ - ٢ جا^٢ \frac{٧س}{٢}\right)} =$$

$$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{- ٢ جا^٢ \frac{س}{٢} + ٢ جا^٢ \frac{٣س}{٢}}{٢ جا^٢ \frac{٧س}{٢}} = \frac{- \frac{١}{٤} + \frac{٩}{٤}}{\frac{٤٩}{٤}} = \frac{٨}{٤٩}$$

ب) $$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - جتا ٥س}{س جا ٥س} \times \frac{١ + جتا ٥س}{١ + جتا ٥س} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - جتا^٢ ٥س}{(س جا ٥س) \times (١ + جتا ٥س)}$$

$$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{جا ٥س}{س} \times \frac{\cancel{جا ٥س}}{\cancel{جا ٥س}} \times \frac{١}{(١ + جتا ٠)} = \frac{٥}{٢}$$

س٣: $ق(س) = \frac{\sqrt{جا^2 س}}{س} = \frac{|جاس|}{س}$

$\underset{س \leftarrow 0^-}{نهـــا} \frac{-جاس}{س} = -1$ ، $\underset{س \leftarrow 0^+}{نهـــا} \frac{جاس}{س} = 1$، $\underset{س \leftarrow 0^-}{نهـــا} ق(س) \neq \underset{س \leftarrow 0^+}{نهـــا} ق(س) \leftarrow \underset{س \leftarrow 0}{نهـــا} ق(س)$ غير موجودة

س٤: $\underset{س \leftarrow 0}{نهـــا} \frac{أ - جتا ب س}{س^2} = \frac{9}{2}$ النهاية موجودة وقيمتها معلومة.

قيمة البسط عندما س ← ٠ يساوي صفراً ، ولكي تكون النهاية موجودة قيمة المقام عندما س ← ٠ تساوي صفراً
أ − جتا ٠ = ٠ أي أ − ١ = ٠ ومنها: أ = ١

$\underset{س \leftarrow 0}{نهـــا} \frac{أ - جتا ب س}{س^2} = \underset{س \leftarrow 0}{نهـــا} \frac{1 - \left(1 - 2جا^2 \frac{ب س}{2}\right)}{س^2} = \frac{9}{2}$ ومنها: $\underset{س \leftarrow 0}{نهـــا} \frac{2جا^2 \frac{ب س}{2}}{س^2} = \frac{9}{2}$

ومنها: $2 \times \frac{ب^2}{4} = \frac{9}{2}$ ومنها: ب = ± ٣

أو: $\underset{س \leftarrow 0}{نهـــا} \frac{1 - جتا ب س}{س^2} \times \frac{1 + جتا ب س}{1 + جتا ب س} = \frac{9}{2}$ ومنها: $\underset{س \leftarrow 0}{نهـــا} \frac{جتا^2 ب س}{س^2} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

ومنها: $\frac{ب^2}{2} = \frac{9}{2}$ ومنها: ب = ± ٣

تمارين ومسائل: (٧ - ٥) نهاية الإقتران عند س ← ±∞

س١: أ) $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـــا} (س^3 - 2س + 5) = \underset{س \leftarrow \infty}{نهـــا} س^3 (1 - \frac{2}{س^2} + \frac{5}{س^3}) = \infty \times 1 = \infty$.

ب) $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـــا} \frac{(س^2+3)(س+5)}{(3س^2+3)^2} = \underset{س \leftarrow \infty}{نهـــا} \frac{س^3 + 5س^2 + 3س + 15}{9س^4 + 18س^2 + 9} = \underset{س \leftarrow \infty}{نهـــا} \frac{س^3 \left(1 + \frac{5}{س} + \frac{3}{س^2} + \frac{15}{س^3}\right)}{س^4 \left(9 + \frac{18}{س^2} + \frac{9}{س^4}\right)}$

$= \underset{س \leftarrow \infty}{نهـــا} \frac{1}{س} \times \frac{1}{9} = 0$

ج) $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـــا} \left(\frac{س^2 - 2}{س - 1} - \frac{س + 2}{س + 1}\right) = \underset{س \leftarrow \infty}{نهـــا} \left(\frac{(س^2 - 2)(س+1) - (س+2)(س-1)}{(س-1)(س+1)}\right) = \underset{س \leftarrow \infty}{نهـــا} \left(\frac{س^3 - 3س}{س^2 - 1}\right)$

$= \underset{س \leftarrow \infty}{نهـــا} \left(\frac{س^3 \left(1 - \frac{3}{س}\right)}{س^2 \left(1 - \frac{2}{س^2}\right)}\right) = \underset{س \leftarrow \infty}{نهـــا} س \times 1 = \infty$

د) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{س}^{٢} - ٢}{٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٥} \right)^{٥} = \left(\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{س}^{٢} - ٢}{٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٥} \right) \right)^{٥} = \ldots\ldots\ldots = \left(\frac{١}{٣} \right)^{٥} = \frac{١}{٢٤٣}$

هـ) $\underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نهـا}} \frac{|٣\text{س}^{٢} - ٥|}{٣\text{س}^{٢} + ٣} = \underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{س}^{٢} - ٥}{٣\text{س}^{٢} + ٣} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = ١$

س٢: $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{(\text{أ} - ٢)\,\text{س}^{٤} + ٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١}{\text{ب س}^{٢} + ٣\text{س} + ٣} = -١$

النهاية موجودة ومعلومة القيمة، ودرجة المقام = ٢ ؛ ولذلك ستكون درجة البسط = ٢

ويتحقق عندما: (أ − ٢) = ٠، ومنها: (أ = ٢)

$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١}{\text{ب س}^{٢} + ٣\text{س} + ٣} = -١ \longleftarrow \frac{٣}{\text{ب}} = -١$ ومنها: ب = −٣

تمارين ومسائل: (٧ - ٦) الاتصال

س١: أ) $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١٨| + ٢\text{س}$ متصل عند س = ٢

لأنّ ما في داخل القيمة المطلقة كثير حدود متصل عند س = ٢، ومجموع اقترانين متصلين.

عند س = ٢ يكون متصلاً عند س = ٢

أو إعادة التعريف للقيمة المطلقة فيكون متصلاً عند س = ٢

ب) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} \times [\text{س} - ٠,٢] \longleftarrow \text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} -٢\text{س}^{٢} &، \quad -١,٨ \leq \text{س} < -٠,٨ \\ -١\text{س}^{٢} &، \quad -٠,٨ \leq \text{س} < ٠,٢ \end{cases}$

$\text{ق}(-٠,٨) = -٠,٦٤$ ، $\underset{\text{س}\to-٠,٨}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$، غير موجودة إذن: ق(س) غير متصل عند س = −٠,٨

ج) $\text{ق}(\text{س}) = \text{ظا}(٢\pi\text{س}) - \text{جتا}(٢\pi\text{س})$ متصل عند س = $\frac{١}{٢}$ لتحقق شروط الاتصال.

$\text{ق}\left(\frac{١}{٢}\right) = \text{ظا}(\pi) - \text{جتا}(\pi) = ١ \longleftarrow \underset{\text{س}\to\frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = -١$ ومنها $\text{ق}\left(\frac{١}{٢}\right) = \underset{\text{س}\to\frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = ١$

س٢: $\underset{\text{س}\to٣}{\text{نهـا}} \frac{(\sqrt{٥\text{س} + ١} - ٤)}{\text{س} - ٣} \times \frac{(\sqrt{٥\text{س} + ١} + ٤)}{((\text{س} - ٣)\sqrt{٥\text{س} + ١} + ٤)} = \underset{\text{س}\to٣}{\text{نهـا}} \frac{٥\text{س} + ١ - ١٦}{((\text{س} - ٣)\sqrt{٥\text{س} + ١} + ٤)}$

$= \underset{\text{س}\to٣}{\text{نهـا}} \frac{٥\cancel{(\text{س} - ٣)}}{(\cancel{(\text{س} - ٣)}\sqrt{٥\text{س} + ١} + ٤)} = \frac{٥}{٨}$

$\text{ق}(٣) = ٢$ ومنها: ق(س) غير متصل عند س = ٣ ؛لأنّ: $\text{ق}(٣) \neq \underset{\text{س}\to٣}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$.

س٣: أ) ق(س) = جا ٢س + |٣س - ٣| متصل ∀ س ∈ ع؛لأنه مجموع اقترانين متصلين على ع.

ق_1(س) = جا ٢س متصل على ع، ق_2(س) = |٣س - ٣| ما في داخل القيمة المطلقة متصل على ع.

ب) ق(س) = [١ - $\frac{\text{س}}{٣}$] ، س ∈ [-٣، ٥]

ق(س) =
- ٢ ، س = -٣
- ١ ، -٣ < س ≤ ٠
- ٠ ، ٠ < س ≤ ٣
- -١ ، ٣ < س ≤ ٥

ق(س) متصل على الفترات]-٣، ٠[،]٠، ٣[،]٣، ٥[كثيرات حدود

من خلال بحث شروط الاتصال ق(س) منفصل عند س = ٠، ٣. يمين س = -٣

ق(س) متصل على]-٣، ٥] - { ٠، ٣}

س٤: ق(س) متصل على مجاله ⟵ ق(س) متصل عند نقاط التحول، وهي: س = ١، س = ٣

ق(١) = $\lim\limits_{\text{س} \to ١^-}$ ق(س) = $\lim\limits_{\text{س} \to ١^+}$ ق(س) ومنها: أ = ٢

ق(٣) = $\lim\limits_{\text{س} \to ٣^-}$ ق(س) = $\lim\limits_{\text{س} \to ٣^+}$ ق(س) ومنها: ب = ١٠

س٥: أ) ق(س) منفصل عند س = - ١، ١.

ب) ق(س) متصل ∀ س ∈ [-٢، -١] من الرسم متصل وكذلك متصل من الجهتين: اليمنى واليسرى.

ج) ق(س) غير متصل على الفترة [-١، ∞[؛ لأنه غير متصل عند س= - ١، ١.

د) ق(س) متصل ∀ س ∈]-∞، -٢]؛ لتحقق شروط الاتصال من الرسم.

هـ) ق(س) غير متصل على مجاله ⟵ ق(س) متصل ∀ س ∈ ع- {-١، ١}

تمارين ومسائل: (٧ - ٧) بلزانو

س١: تتحقق شروط بلزانو على الفترتين، [-٣، -١]، [٤، ٥] يمكن الجزم بوجود صفري اقتران

ولكن ق(٠) = ٠ إذن: يوجد صفر ثالث ⟵ أقل عدد من الأصفار يمكن التحقق من وجودها ٣.

س٢: ق(س) = س^{٣} − ٢س^{٢} + ٢ متصل على الفترة [−٢ ، ٤] ؛ لأنه اقتران كثير حدود.

ق(−٢) < ٠ ، ق(٤) > ٠

ق(−٢) × ق(٤) < ٠

تتحقق شروط بلزانو، يوجد على الأقل جـ ∈]−٢ ، ٤[بحيث: ق(جـ) = ٠

التقريب الأول جـ$_{١}$ = $\frac{-٢ + ٤}{٢}$ = ١ ، ق(١) = ١ > ٠

بالمثل تنطبق بلزانو على الفترة [−٢ ، ١]

يوجد على الأقل جـ ∈]−٢ ، ١[بحيث ق(جـ) = ٠

التقريب الثاني جـ$_{٢}$ = $\frac{-٢ + ١}{٢}$ = $-\frac{١}{٢}$ ، ق($-\frac{١}{٢}$) > ٠

بالمثل تنطبق بلزانو على الفترة: [−٢ ، $-\frac{١}{٢}$]

يوجد على الأقل جـ ∈]−٢ ، $-\frac{١}{٢}$[بحيث ق(جـ) = ٠

التقريب الثاني جـ$_{٢}$ = $\frac{-٢ + -٠,٥}{٢}$ = −١,٢٥

س٣:
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} |\text{س} + ٢| & ، \ ١ \le \text{س} < ٢ \\ ٨ - \text{س}^{٢} & ، \ ٢ \le \text{س} \le ٥ \end{cases} \quad ، \quad \text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} + ٢ & ، \ ١ \le \text{س} < ٢ \\ ٨ - \text{س}^{٢} & ، \ ٢ \le \text{س} \le ٥ \end{cases}$$

ق(س) متصل على [١ ، ٢[، وكذلك على الفترة]٢ ، ٥] كثيرات حدود.

عند س = ٢ تتحقق شروط الاتصال ق(٢) = $\lim_{\text{س} \to ٢^{+}}$ ق(س) = $\lim_{\text{س} \to ٢^{-}}$ ق(س) = ٤ متصل عند س = ٢

ومنها: ق(س) متصل على الفترة [٢ ، ٥]

ق(١) × ق(٥) < ٠ تتحقق شروط نظرية بلزانو

يوجد على الأقل: جـ ∈]١ ، ٥[بحيث ق(جـ) = ٠

$$\text{ق(جـ)} = \begin{cases} \text{جـ} + ٢ & ، \ ١ \le \text{جـ} < ٢ \\ ٨ - \text{جـ}^{٢} & ، \ ٢ \le \text{جـ} \le ٥ \end{cases}$$

جـ = −٢ مرفوض لا ينتمي إلى الفترة]١ ، ٢[

جـ^{٢} = ٨ ومنها: جـ = ٢$\sqrt{٢}$ ∈]٢ ، ٥[، جـ = −٢$\sqrt{٢}$ ∉]٢ ، ٥[.

س٤: نفرض ك(س) = ق(س) − ١٣ = س^{٣} + س^{٢} − ٢س − ٨ ∀ س ∈ [−١ ، ٣]

ك(س) متصل على الفترة [−١ ، ٣] ؛ لأنه اقتران كثير حدود.

ك(−١) × ك(٣) < ٠ تتحقق شروط بلزانو

يوجد على الأقل: جـ $\in$] −١ ، ٣ [بحيث ك(جـ) = ٠ أي ك(جـ) = ق(جـ) − ١٣ = ٠

يوجد على الأقل: جـ $\in$] −١ ، ٣ [بحيث: ق(جـ) = ١٣

س٥: نبحث تحقق الشروط على الاقتران هـ(س) = (س^{٢} − ٥) ق (س)

هـ(س) متصل على الفترة [١، ٧] ؛ لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين على [١، ٧]

هـ(١) = −٤ × ق (١) $<$ ٠ لأن ق (١) موجبة ؛ لأنها تقع في الربع الأول.

هـ(٧) = ٤٤ × ق (٧) $>$ ٠ لأن ق (٧) موجبة ؛ لأنها تقع في الربع الأول.

هـ(١) × هـ(٧) $<$ ٠

تتحقق شروط نظرية بلزانو إذن: يوجد على الأقل جـ $\in$] ١ ، ٧ [بحيث: هـ(جـ) = ٠

التقريب الأول: جـ$_{١}$ = $\frac{١ + ٧}{٢}$ = ٤

هـ(٤) = ١١ × ق (٤) $>$ ٠ تتحقق شروط بلزانو.

التقريب الثاني: جـ$_{٢}$ = $\frac{١ + ٤}{٢}$ = ٢,٥

هـ(٢,٥) $>$ ٠ بالمثل تتحقق بلزانو على الفترة [١ ، ٢,٥]

التقريب الثالث: جـ$_{٣}$ = $\frac{١ + ٢,٥}{٢}$ = ١,٧٥

تمارين عامة الوحدة السابعة

س١:

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣
رمز الإجابة الصحيحة	د	أ	ج	ج	ب	أ	د	أ	ج	ج	ج	ب	ج

س٢: ق (س) متصل على ح $\longleftarrow$ متصل عند س = ٣

ق (٣) = $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ١١

$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}}$ $\frac{س^{٢} - (٣ - ٢ب)س - ٦ب}{س - ٣}$ = ١١

$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}}$ $\frac{(س - ٣)(س + ٢ب)}{س - ٣}$ = ١١

$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}}$ (س + ٢ب) = ١١ ، (٣ + ٢ب) = ١١ ، ب = ٤

س٣: $\lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{(س^{٢}+١)^{٢}}{أس^{٢}(س+١)^{ن}} = -٢$

درجة البسط = ٤

ولذلك لكي تكون النهاية موجودة يجب أن تكون درجة المقام = ٤

ومنها: ن = ٢ ← $\lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{(س^{٢}+١)^{٢}}{أس^{٢}(س+١)^{٢}} = -٢$

$$\lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{س^{٤}+٢س^{٢}+١}{أ\ س^{٤}(س^{٢}+٢س+١)} = -٢$$

$$\dfrac{١}{أ} = -٢ \text{ ، } أ = -\dfrac{١}{٢}$$

س٤: نفرض ك(س) = ق(س) – هـ (س)

ك(١) = ق(١) – هـ (١) > ٠ لأن ق(١) $>$ هـ (١) معطى

ك(٢) = ق(٢) – هـ (٢) < ٠ لأن ق(٢) $<$ هـ (٢) معطى

ك(١) × ك(٢) < ٠

ق(س) ، هـ (س) كثيرا حدود ، إذن: متصلان على الفترة [١ ، ٢]

ك(س) = ق(س) – هـ (س)، لأنه ناتج طرح اقترانين متصلين.

تتحقق شروط نظرية بلزانو ، إذن: يوجد على الأقل جـ ∈] ١ ، ٢ [

بحيث: ك(جـ) = ٠ ومنها ق(جـ) – هـ (جـ) = ٠ ← ق(جـ) = هـ (جـ)

س٥: نفرض: ق(س) = $س^{٣} - ٧$

نختار الفترة [١ ، ٢] لأن $١ < ٧ < ٨$ ← $\sqrt[٣]{١} < \sqrt[٣]{٧} < \sqrt[٣]{٨}$ ← $١ < \sqrt[٣]{٧} < ٢$

ق(س) متصل على الفترة [١ ، ٢]؛ لأنه كثير حدود .

ق(١) = $-٦ < ٠$

ق(٢) = $١ > ٠$

ق(١) × ق(٢) < ٠

تتحقق شروط نظرية بلزانو إذن: يوجد على الأقل جـ ∈] ١ ، ٢ [بحيث: ق(جـ) = ٠

التقريب الأول = $جـ_{١} = \dfrac{١+٢}{٢} = ١,٥$

$ق(١,٥) > ٠$

نطبق بلزانو على الفترة [١,٥ ، ٢] تتحقق الشروط

تتحقق شروط نظرية بلزانو إذن: يوجد على الأقل جـ $\in$] ١,٥ ، ٢ [بحيث: ق(جـ) = ٠

التقريب الثاني = جـ$_{٢}$ = $\frac{١,٥ + ٢}{٢}$ = ١,٧٥

$ق(١,٧٥) > ٠$

نطبق بلزانو على الفترة [١,٧٥ ، ٢] تتحقق الشروط.

تتحقق شروط نظرية بلزانو إذن: يوجد على الأقل جـ $\in$] ١,٧٥ ، ٢ [بحيث: ق(جـ) = ٠

التقريب الثالث = جـ$_{٣}$ = $\frac{١,٧٥ + ٢}{٢}$ = ١,٨٧٥

المراجع:

أولاً المراجع العربية:

أبو عميرة، محبات (٢٠٠٠). **تعليم الرياضيات بين النظرية والتطبيق**، مصر: مكتبة الدار العربية للكتب التربوية، جامعة الشرق الأوسط: الأردن.

أبو غالي، سليم (٢٠١٠). **أثر توظيف استراتيجية (فكّر- زاوج – شارك) على تنمية مهارات التفكير المنطقي في العلوم لدى طلبة الصف الثامن الأساسي**. رسالة ماجستير. الجامعة الإسلامية. فلسطين: غزة.

بل، فريدرك.ه (١٩٨٧). **طرق تدريس الرياضيات**. الجزءالأول. ط٥. ترجمة محمد المفتي وممدوح سليمان. الدار العربية للنشر والتوزيع. القاهرة: مصر.

الحيلة، محمد (١٩٩٩). **التصميم التعليمي نظرية وممارسة**. الطبعة الأولى. دار المسيرة للنشر والتوزيع. عمان.

الحيلة، محمد محمود (٢٠٠٣). **طرائق التدريس واستراتيجياته**، الطبعة الثالثة. دار الكتاب الجامعي.

الحيلة، محمد محمود (٢٠٠٨). **تصميم التعليم نظرية وممارسة**. ط٤. دار المسيرة. عمان.

الخالدي، أحمد (٢٠٠٨). **أهمية اللعب في حياة الأطفال الطبيعيين وذوي الاحتياجات الخاصة**. عمان: المعتز للنشر والتوزيع.

الخفاف، إيمان عباس (٢٠٠٣). **التعلم التعاوني**. ط١. دار المناهج للنشر والتوزيع. عمان.

الخليلي، خليل ومصطفى، شريف وعباس، أحمد (١٩٩٧). **العلوم والصحة وطرائق تدريسها (٢)**. الطبعة الثانية. منشورات جامعة القدس المفتوحة. عمان.

الزيات، فتحي مصطفى (١٩٩٦). **سيكولوجية التعلم**. مصر. دار النشر للجامعات. مجلد١. ط١.

زيتون، حسن حسين (٢٠٠٣). **استراتيجيات التدريس**. الطبعة الأولى. عالم الكتب. القاهرة.

زيتون، حسن، وزيتون، كمال (٢٠٠٣). **التعلم والتدريس من منظور النظرية البنائية**. الطبعة الأولى. عالم الكتب.

زيتون، عايش محمود (٢٠٠٧). **النظرية البنائية واستراتيجيات تدريس العلوم**. ط١. دار الشروق. عمان.

زيتون، كمال (٢٠٠٢). **تدريس العلوم للفهم (رؤية بنائية)**. الطبعة الأولى. عالم الكتب. القاهرة.

الزين، حنان بنت أسعد (٢٠١٥). **أثر استخدام استراتيجية التعلم المقلوب في التحصيل الأكاديمي لطالبات كلية التربية.**

السرّ، خالد، وأحمد، منير، وعبد القادر، خالد (٢٠١٦). **استراتيجيات تعليم وتعلم الرياضيات**. جامعة الأقصى. فلسطين: غزة.

سعادة، جودت أحمد، وآخرون (٢٠٠٨). **التعلم التعاوني نظريات وتطبيقات ودراسات**، دار وائل. عمان.

سعادة، جودت أحمد، ورفاقه (٢٠٠٦). **التعلّم النشط بين النظرية والتطبيق**، الأردن: دار الشروق.

سعادة، جودت أحمد، ورفاقه (٢٠٠٨). **التعلم النشط بين النظرية والتطبيق**. الأردن. دار الشروق.

السعدني، عبد الرحمن والسيد عودة، ثناء (٢٠٠٦). **التربية العملية مداخلها واستراتيجياتها**. الطبعة الأولى، دار الكتاب الحديث. القاهرة.

الشكعة، هناء مصطفى فارس (٢٠١٦). **أثر استراتيجيتَي التعلم المدمج والتعلم المعكوس في تحصيل طلبة الصف السابع في مادة العلوم ومقدار احتفاظهم بالتعلم**. رسالة ماجستير غير منشورة. كلية العلوم التربوية. جامعة الشرق الأوسط. الأردن.

عبيد، وليم (٢٠٠٢). **النموذج المنظومي وعيون العقل**. المؤتمر العربي الثاني حول المدخل المنظومي في التدريس والتعلم. مركز تطوير تدريس العلوم. القاهرة.

عبيد، وليم (٢٠٠٤). **تعليم الرياضيات لجميع الأطفال في ضوء متطلبات المعايير وثقافة التفكير**. ط١. دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة. عمان: الأردن.

عبيد، وليم، والمفتي، محمد، وإليا، سمير (٢٠٠٠). **تربويات الرياضيات**. مكتبة الإنجلو المصرية. القاهرة: مصر.

العتيبي، ناصر بن منيف. (٢٠٠٧). **الأتمتة ودورها في تحسين أداء إدارات الموارد البشرية في الأجهزة الأمنية بمدينة الرياض،** رسالة دكتوراه غير منشورة، جامعة نايف العربية للعلوم الأمنية، كلية لعلوم الإدارية، الرياض.

عدس، عبد الرحمن. (١٩٩٩). **علم النفس التربوي نظرة معاصرة.** دار الفكر للطباعة والنشر. الأردن.

عفانة، عزو وأبو ملوح، محمد. (٢٠٠٦). **أثر استخدام بعض استراتيجيات النظرية البنائية في تنمية التفكير المنظومي في الهندسة لدى طلاب الصف التاسع الأساسي بغزة.** وقائع المؤتمر العلمي الأول لكلية التربية (التجربة الفلسطينية في إعداد المناهج- الوقائع والتطلعات). المجلد الأول.

علي، أشرف راشد (٢٠٠٩). **برنامج تدريب معلمي االمرحلة الثانوية على التعلم النشط.** مصر. وزارة التربية والتعليم. وحدة التخطيط والمتابعة.

علي، اشرف راشد. (٢٠٠٩). **برنامج تدريب معلمي االمرحلة الثانوية على التعلم النشط.** مصر: وزارة التربية والتعليم، وحدة التخطيط والمتابعة.

عودة، أحمد. (٢٠٠٥). **القياس والتقويم في العملية التدريسية.** الأردن. دار الأمل للنشر والتوزيع.

الفريق الوطني للتقويم (٢٠٠٤). **استراتيجيات التقويم وأدواته: الإطار النظري.** إدارة الامتحانات والاختبارات. الأردن. وزارة التربية والتعليم.

قشطة، آية خليل إبراهيم. (٢٠١٦). **أثر توظيف استراتيجية التعلم المنعكس في تنمية المفاهيم ومهارات التفكير التأملي في مبحث العلوم الحياتية لدى طالبات الصف العاشر الأساسي.** رسالة ماجستير غير منشورة. كلية التربية. الجامعة الإسلامية. غزة

كاظم، أمينة محمد. (٢٠٠٤). **التقويم والجودة الشاملة في التعليم.** بتاريخ ٢٠ كانون ثانٍ، ٢٠١٨م.

كوجاك، كوثر. (١٩٩٧). **اتجاهات حديثة في المناهج وطرق التدريس.** عالم الكتب. القاهرة.

كوجك، كوثر. (٢٠٠٨). **تنويع التدريس في الفصل، دليل المعلم لتحسين طرق التعليم والتعلّم في مدارس الوطن العربي،** اليونسكو، بيروت.

اللجنة الوطنية المصغرة للمناهج المطورة. (٢٠١٦). **الإطار العام للمناهج الفلسطينية المطورة.** وزارة التربية والتعليم العالي. فلسطين.

متولي، علاء الدين سعد، سليمان، محمد سعيد (٢٠١٥). **الفصل المقلوب (مفهومه- مميزاته- استراتيجية تنفيذه).** مجلة التعليم الإلكتروني. أُخِذَ من الإنترنت بتاريخ: ٢٥-٠٣-٢٠١٧.

متولي، علاء الدين سعد، سليمان، محمد سعيد. (٢٠١٥). **الفصل المقلوب (مفهومه- مميزاته- استراتيجية تنفيذه).** مجلة التعليم الإلكتروني. أُخِذَ من الإنترنت بتاريخ: ٢٥-٠٣-٢٠١٧.

مداح، سامية (٢٠٠١). **فاعلية استخدام التعلم التعاوني ومعمل الرياضيات في تنمية بعض المفاهيم الرياضية لدى طلبة الصف السادس الابتدائي بالمدارس الحكومية بمدينة مكة.** رسالة دكتوراه غير منشورة. جامعة أم القرى. مكة السعودية: مكة المكرمة.

مرعي، توفيق (١٩٨٣). **الكفايات التعليمية في ضوء النظم.** عمان. دار الفرقان.

مصطفى، عبد السلام. (٢٠٠١). **الاتجاهات الحديثة في تدريس العلوم.** القاهرة. القاهرة: مصر: دار الفكر العربي للنشر والتوزيع.

معهد أبحاث السياسات الاقتصادية الفلسطيني (ماس). (٢٠٠٧). **نحو سياسات لتعزيز الريادة بين الشباب في الضفة الغربية وقطاع غزة.** القدس ورام الله.

ملحم، سامي محمد. (٢٠٠٢). **صعوبات التعلم.** عمان: الأردن. دار المسيرة.

ميلر، سوزان (١٩٧٤). **سيكولوجية اللعب.** ترجمة: عيسى، رمزي. القاهرة. الهيئة المصرية العامة للكتاب.

الهاشمي، عبد الرحمن، وعطية، محسن علي. (٢٠٠٩). **مقارنة المناهج التربوية في الوطن العربي والعالمي.** ط١. العين. دار الكتاب الجامعي.

ثانياً المراجع الأجنبية:

Adedoyin,O., (2010). **An Investigation of the Effect of Teachers Classroom Questions onthe Achievement of Students in Mathematics:Case Study of Botswana Community Junior secondary school**. Educational Foundations.University of Botswana.European Journal of Educational Studies, 2(3), Pp. 313-328.

Association for Supervision and Curriculum Development. (2005). **lexicon of learning**. Retrieved December 20-2017.

Bishop, J.L. (2013). **The Flipped Classroom: A survey of the research**. 120th ASEE Annual Conference & Exposition.

Cambrell, (2012). **Classroom Questioning for Trainee Teachers**. Journal of Educational Research, Vol.75,Pp.144-148.

Campbell, D. (2000). **Authentic assessment and authentic standards [Electronic version]**. Phi Delta Kappan, 81, 405-407.

Canadian Ministry of Education, (2011). **Asking effective questioning in mathematics**, the capacity building series is produced by the literacy and numeracy secretarial to support leadership and instructional effectiveness in Ontario school, (pdf,1.83 MB).

Cook, R . and Weaving. H. (2013). **Key Competence Development in School Education in Europe:KeyCoNet's Review of the Literature: a Summary**. Brussels:European Schoolnet.

Fullan, M.& Langworthy, M. (2014). **A rich seam: How new pedagogies find deep learning**. Leadership and Policy in Schools, vol. 15, no. 2, pp. 231–233, 2016.

Gardner, H. (1983). **Frames of mind: The theory of multiple intelligences**. New York: Basic Books.

Goodwin,B.Miller,K.(2013). **Evidence on flipped classrooms is still comingin educational**. leadership,March 2013,27-80.

Hoenig, Thomas M., (2000).**Entrepreneurship and Growth**. Federal Reserve Bank of Kansas City.

Johnson,L.,Becker,S.A.,Estrada,V.,&Freeman,A.(2014).**NMC Horizon report 2014:Higher education edition**.Austin,Texas:the New Media Consortium.

Manouchehri,A.&Lapp, O.,(2003).**Unveiling Student Understanding: The Role of Questioning in Instruction**. Mathematics Teacher. Early Secondary Mathematics.Vol. 96,No. 8, Pp.562-566.

McGatha,M. &Bay-Williams, J.(2013). **Making shifts toward Proficiency**. Teaching Children Mathematics. Vol.20. No.3, PP 163-170.

Popham, J. (2001). **The Truth about Testing**. Alexandria, VA: ASCD.

Ravitz, J. (2010). **Beyond changing culture in small high schools: Reform models and changing instruction with project-based learning**. Peabody Journal of Education, 85(3), 290-313.

Shen,P., &Yodkhumlue,B., (2012).**A case Study of Teachers Questioning and Students Critical Thinking In College EFL Reading Classroom**. International Journal of English Linguistics,Vol.2, No.1, Pp. 44-53.

Small, M., (2010). **Good Questions, Great Ways to Differentiate Mathematics Instruction**. Teachers College, Columbia University, New York and London.

Stephens, C. & Hyde, R. (2013). **The Role of the Teacher in Group-**

Tanner, D. E. (2001). **Authentic assessment: A solution, or part of the problem**? High School Journal, 85, 24-29. Retrieved May 19, 2004 from EBSCO database.work. Mathematics Teaching. No. 235. PP. 37-39.

ثالثاً المواقع الإلكترونية:

www.askzad.com/Bibliographic?service=5&key=PAPRA_Bibliographic_Content&imageName= BK00014776-001http://www.ascd.org

لجنة المناهج الوزارية:

د. صبري صيدم	أ. ثروت زيد	د. شهناز الفار
د. بصري صالح	أ. عزام أبو بكر	د. سمية النخّالة
م. فواز مجاهد	أ. عبد الحكيم أبو جاموس	م. جهاد دريدي

لجنة وثيقة الرياضيات:

أ. ثروت زيد	د. محمد صالح (منسقاً)	د. سعيد عساف
د. محمد مطر	د. معين جبر	د . علا الخليلي
د. شهناز الفار	د. علي نصار	د. أيمن الأشقر
د. فتحي أبو عودة	د. تحسين المغربي	د. عادل فوارعه
د. علي عبد المحسن	د. عبد الكريم ناجي	د. عطا أبو هاني
د. وجيه ضاهر	أ.ارواح كرم	أ. وهيب جبر
أ.حنان أبو سكران	أ.كوثر عطية	أ. نادية جبر
د. سمية النخالة	أ. أحمد سياعرة	أ. نشأت قاسم
أ. أحلام صلاح	أ. عبد الكريم صالح	أ. نسرين دويكات
أ. قيس شبانة	أ. مبارك مبارك	

المشاركون في ورشات عمل دليل الرياضيات للصف الحادي عشر العلمي:

أ. عبير قنيبي	أ. شيرين الدويك	أ. سناء عصافرة
أ. أحمد ابريوش	أ. أحمد العملة	أ. مصطفى عفانة
أ. ياسين الطردة	أ. جملات عفانة	أ. حنان أمارة

تَمَّ بِحَمْدِ الله