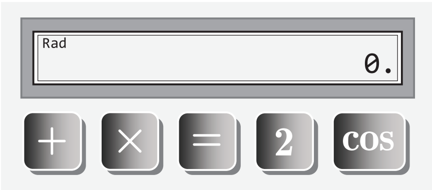
4

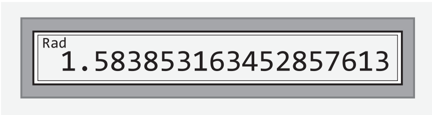
نهاية متتالية

1. نهاية متتالية : تذكرة
2. مبرهنات تخصّ النهايات
3. تقارب المتتاليات المطّردة
4. متتاليات متجاورة

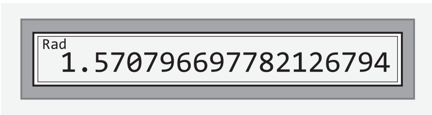
عندما تشرب القهوة وأنت تُجري حساباتك على الآلة الحاسبة، يمكن أن تقع معك أشياء غريبة. عندما انسكب الفنجان على الآلة الحاسبة تعطّلت تماماً باستثناء بعض الأزرار التي بقيت تعمل، وها أنا أضع أمامكم في الشكل المجاور الوظائف المتبقية.



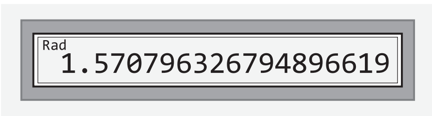
واجهتني المعضلة الآتية، الزر الذي يعطي العدد الشهير π معطّل فما العمل ؟



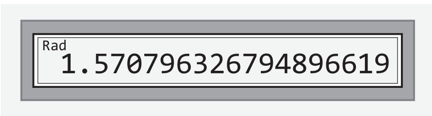
❶ ضغطتُ على 2 ثُمّ + ثُمّ 2 ثُمّ cos وأخيراً = فظهر الجواب المبين جانباً.



❷ ظهر عددٌ فيه الكثير من الخانات فاغتنمتُ الفرصة وضغطتُ على + ثُمّ cos ثُمّ = فظهر الجواب المبين جانباً.



❸ ولِمَ لا أكرّر الأمر ذاته مجدداً: + ثُمّ cos ثُمّ =.



❹ هناك خانات لم تعد تتغير وهذا مثير للاهتمام فلِمَ لا أكرّر الأمر ذاته مجدداً: + ثُمّ cos ثُمّ =.

ويا للمفاجأة، لم يعد يتغيّر العدد الظاهر على الشاشة، ولكن أيذكّركم هذا العدد بشيء ؟

لم نستعمل زر الضرب فما رأيكم أن نضرب هذا الناتج الأخير بالعدد إثنان : × ثُمّ 2 ثُمّ = !

وها هو العدد π بثماني عشرة خانة بعد الفاصلة. أليست الرياضيات جميلة؟

ملاحظة : في آلتي الحاسبة، على عطلها، عند الضغط على مفتاح تابع تحسب مباشرة قيمة العدد المعلن على شاشتها.

4

نهاية متتالية

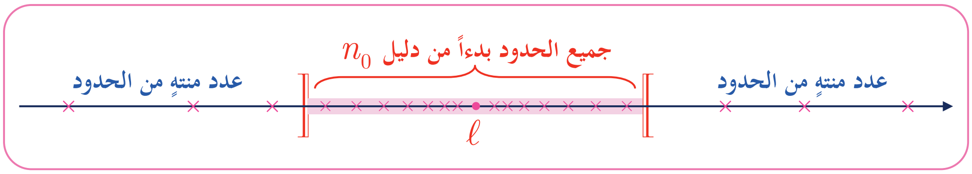
1 نهاية متتالية : تذكرة

1.1. حالة نهاية منتهية (أوحقيقية)

تعريف 1

نقول إنّ عدداً حقيقيّاً ℓ هو نهاية للمتتاليةِ $(u_n)_{n\geq 0}$ إذا ضمَّ كلُّ مجال مفتوح مركزه ℓ جميع حدود المتتالية بدءاً من دليل معيّن (أو باستثناء عدد منته منها).

نكتب في مثل هذه الحالة $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ ، ونقول إنّ المتتالية متقاربة أو إنها تتقارب من ℓ.



تذكّر أنّ المتتاليات $(u_n)_{n\geq 1}$ التي حدها العام u_n معطى بإحدى الصيغ الآتية

$$u_n = \frac{1}{n^3},\quad u_n = \frac{1}{n^2},\quad u_n = \frac{1}{n},\quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

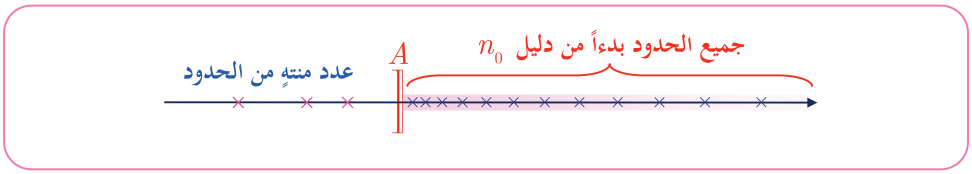
هي جميعها **متتاليات مرجعية**، وتسعى إلى الصفر عندما تسعى n إلى $+\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

2.1. حالة النهاية اللانهائية

تعريف 2

نقول إنّ المتتاليةِ $(u_n)_{n\geq 0}$ تسعى إلى $+\infty$ إذا ضمَّ كلُّ مجال من النمط $]A,+\infty[$ جميع حدود المتتالية بدءاً من دليل معيّن (أو باستثناء عدد منته منها).

نكتب في مثل هذه الحالة $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ ، ونقول إنّ المتتالية تتباعد إلى $+\infty$.



تؤدي المتتاليات $(u_n)_{n\geq1}$ التي حدها العام u_n معطى بإحدى الصيغ الآتية

$$u_n = n^3, \quad u_n = n^2, \quad u_n = n, \quad u_n = \sqrt{n},$$

أيضاً دور **متتاليات مرجعية**، وهي تتباعد إلى $+\infty$ عندما تسعى n إلى $+\infty$: $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

تعريف 3

نقول إنّ المتتاليةِ $(u_n)_{n\geq0}$ تسعى إلى $-\infty$ إذا ضمَّ كلُّ مجال من النمط $]-\infty, A[$ جميع حدود المتتالية بدءاً من دليل معيّن (أو باستثناء عدد منته منها).

نكتب في مثل هذه الحالة $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$، ونقول إنّ المتتالية تتباعد إلى $-\infty$.

3.1. حالة المتتالية الهندسية

مبرهنة 1

ليكن q عدداً حقيقيّاً.

- في حالة $-1 < q < 1$، يكون $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.
- في حالة $1 < q$، يكون $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$.
- في حالة $q \leq -1$ ، ليس للمتتالية نهاية.
- في حالة $q = 1$، تكون المتتالية $(q^n)_{n\geq0}$ ثابتة وجميع حدودها تساوي 1، و $\lim_{n\to\infty} q^n = 1$.

مثال

- المتتالية الهندسية المعرفة وفق $u_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$ متقاربة من الصفر. لأنَّ $-1 < \frac{4}{5} < 1$.
- المتتالية الهندسية المعرفة وفق $u_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$ متباعدة نحو $+\infty$. لأنَّ $\frac{5}{4} > 1$.

مثال بدءاً من دليل ما

تسعى المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة، وفق

$$u_n = \frac{3n-1}{n+1}$$

إلى 3. عيّن عدداً طبيعياً n_0 يحقّق الشرط: إذا كان $n > n_0$، كان $u_n \in]2.99, 3.01[$.

الحل

انتماء u_n إلى المجال $]2.99,3.01[$ يعني أنَّ $-0.01 < u_n - 3 < 0.01$، أو $|u_n - 3| < 0.01$، ولكن $u_n - 3 = \frac{-4}{n+1}$ إذن الشرط المطلوب هو $\frac{1}{100} < \frac{4}{n+1}$ وهذا يكافئ: $400 < n+1$ (علل) أو $n > 399$. ينتج من ذلك أننا يمكن أن نختار $n_0 = 399$، أو أي عدد أكبر من 399. فالمجال $]2.99,3.01[$ يحوي جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بدءاً من الحد ذي الدليل 400.

بوجه عام تنتمي u_n إلى المجال $I_\alpha =]3-\alpha, 3+\alpha[$ حيث $(\alpha > 0)$ إذا تحقق الشرط:

$$\left|\frac{3n-1}{n+1} - 3\right| < \alpha$$

أي $n+1 > \frac{4}{\alpha}$، فإذا كان n_0 أي عدد طبيعي أكبر أو يساوي $\frac{4}{\alpha}$ انتمى u_n إلى I_α أياً كانت $n > n_0$.

مثال إثبات تقارب متتالية

المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \cdots - \frac{1}{2^n}$. أثبت أنَّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة.

واحسب نهايتها.

الحل

لاحظ أنّ

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

إنَّ مضمون القوسين هو مجموع n حدّاً متتالياً لمتتالية هندسية، كلٌّ من حدّها الأول وأساسها يساوي $\frac{1}{2}$.

ومن المعلوم أنَّ هذا المجموع يساوي

$$u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

إذن، $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. وهذه متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ يحقق $|q| < 1$ فهي متقاربة وتسعى إلى الصفر.

فَكِّرْ

في الحقيقة، يمكننا أيضاً أن نلاحظ ما يأتي

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \underbrace{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\cdots-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\cdots-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2}u_n \end{aligned}$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وهي من ثَمّ تسعى إلى الصفر.

تكريساً للفهم

لماذا إذا تقاربت متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ذات حدود موجبة، كانت نهايتها عدداً موجباً؟

(**تذكّر** كلمة **موجبة** تعني أكبر أو تساوي الصفر: فعندما نقول a موجب أو أكبر من الصفر نقصد المتراجحة $a \geq 0$. أما إذا أردنا $a > 0$، فعندها نقول إنّ a موجبٌ تماماً أو أكبر تماماً من الصفر).

لنفكر بأسلوب نقض الفرْض. لنفترض أنَّ $u_n \geq 0$، أياً يكن n، وأنَّ $(u_n)_{n\geq 0}$ تتقارب من عددٍ سالبٍ تماماً ℓ. نختار عندئذ مجالاً مفتوحاً مركزه ℓ لا ينتمي إليه الصفر. إنَّ هذا المجال لن يحوي أيَّ حدٍّ من حدود المتتالية، وهذا غير ممكن لأنّ ذلك يناقض تعريف نهاية متتالية. فلا يمكن إذن أن تكون نهاية $(u_n)_{n\geq 0}$ عدداً سالباً تماماً.

يمكن لمتتالية جميع حدودها **موجبة تماماً** أن تساوي **نهايتها الصفر**. على سبيل المثال، المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق $u_n = \frac{1}{n}$.

كيف يجري الربط بين نهاية متتالية ونهاية تابع عند $+\infty$؟

التماثل بين التعريفين واضح، لأن المتتاليات حالات خاصة من التوابع. فمثلاً $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ تعني أنّه أياً كان العدد الحقيقي المعطى M تحققت المتراجحة $f(x) > M$ بدءاً من قيمة A للمتحوّل x (أي عندما $x > A$). وكذلك الأمر $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ تعني أنّه أياً كان العدد الحقيقي المعطى M تحققت المتراجحة $u_n > M$ بدءاً من قيمة للدليل n_0 (أي عندما $n > n_0$).

تَدرَّبْ

① المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$. نعلم أنَّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق $u_n \in \left]-10^{-3}, 10^{-3}\right[$ عند كل $n > n_0$.

② المتتالية $(u_n)_{n\geq2}$ معرفة وفق $u_n = \dfrac{3n+1}{n-1}$ وتساوي نهايتها 3. جد عدداً طبيعياً n_0 يجعل $u_n \in \left]2.98, 3.02\right[$ عند كل n أكبر تماماً من n_0.

③ المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق $u_n = n\sqrt{n}$. نعلم أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$. جد عدداً طبيعياً n_0 يجعل $u_n > 10^6$ عند كل n أكبر تماماً من n_0.

④ احسب نهاية كل من المتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ حيث $x_n = \dfrac{3^n}{2^n}$ و $y_n = \dfrac{10^n}{(10.1)^n}$.

⑤ ليكن $-1 < q < 1$، ولنعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ بالعلاقة $u_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$. أعطِ صيغة أخرى تفيد في حساب u_n واستنتج قيمة $S = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

⑥ نتأمّل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ المعرفتين وفق:

$$x_0 = 3,\quad x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2 \quad \text{و} \quad y_n = x_n + 3.$$

❶ a. أثبت أنَّ المتتاليةَ $(y_n)_{n\geq0}$ هندسية.

b. احسب y_n ثمَّ x_n بدلالة n.

❷ نضع $S_n = y_0 + \cdots + y_n$ و $S'_n = x_0 + \cdots + x_n$.

a. احسب كلّاً من S_n و S'_n بدلالة n.

b. استنتج نهاية كلٍّ من المتتاليتين $(S_n)_{n\geq0}$ و $(S'_n)_{n\geq0}$.

⑦ نتأمّل متتالية $(u_n)_{n\geq0}$، معرّفة وفق العلاقة التدريجية $u_{n+1} = au_n + b$ و $u_0 = s$.

❶ نفترض أنّ $a = 1$، تيقّن أنّ $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية في هذه الحالة، واحسب u_n بدلالة n و b و s في هذه الحالة.

❷ هنا نفترض أنّ $a \neq 1$. ونضع ℓ الحل الوحيد للمعادلة $x = ax + b$.

a نعرّف $(t_n)_{n\geq0}$ بالعلاقة $t_n = u_n - \ell$. برهن أنّ $(t_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية.

b استنتج صيغة t_n بدلالة n و b و a و s في هذه الحالة.

c برهن أنّه في حالة $-1 < a < 1$ تتقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$، واحسب نهايتها بدلالة b و a.

2 مبرهنات تخص النهايات

1.2. متتاليات من النمط $u_n = f(n)$

مبرهنة 2

ليكن f تابعاً معرّفاً على مجالٍ من النمط $]b,+\infty[$ ولتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتاليةً معرفة بدءاً من دليل معيّن n_0 بالصيغة $u_n = f(n)$. عندئذ إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ، كان أيضاً $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
حيث يدلُّ ℓ على عددٍ حقيقيٍّ، أو على $+\infty$، أو على $-\infty$.

مثال دراسة نهاية متتالية

ادرس نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بالعلاقة $u_n = \dfrac{2n^2+5n+1}{n^2+n}$.

الحل

بالاستفادة من قواعد العمليات على النهايات، لدينا حالة عدم تعيين من الصيغة « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$». ولكن $u_n = f(n)$ حيث

$$f(x) = \frac{2x^2+5x+1}{x^2+x}$$

ولأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ ، استنتجنا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

2.2. متتاليات من النمط $u_n = f(v_n)$

مبرهنة 3

ليكن f تابعاً معرّفاً على مجالٍ I ولتكن $(v_n)_{n\geq0}$ متتاليةً تنتمي جميع حدودها إلى I. إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$ و $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$ ، كان $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = c$. حيث يمثّل كلٌّ من الرمزين b و c عدداً حقيقيّاً، أو $+\infty$، أو $-\infty$.

تماثلُ هذه المبرهنة مثيلتها المتعلقة بمركَّب تابعين، ولهما الإثبات نفسه، فقط هنا، نركِّبُ متتاليةً مع تابع.

مثال

المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة وفق $u_n=\sqrt{\dfrac{3n+2}{n+1}}$ متقاربة وتساوي نهايتها $\sqrt{3}$. لأنّه من الواضح أنّ $u_n=\sqrt{v_n}$ حيث $v_n=\dfrac{3n+2}{n+1}$. ولأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n+2}{n+1}=3$ و $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{x}=\sqrt{3}$، استنتجنا $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{3}$.

3.2. العمليات على النهايات ومبرهنات الإحاطة

تبقى المبرهنات على نهايات التوابع عندما يسعى المتحول إلى $+\infty$ ساريةً في حالة المتتاليات. وخصوصاً نهاية مجموع متتاليتين ونهاية جدائهما ونهاية خارج قسمتهما. وهنا نعيد القارئ إلى ما درسناه في الوحدة الأولى. وفيما يتعلق بالمقارنة، نستعرض المبرهنات الآتية:

مبرهنة 4

لنتأمّل ثلاث متتاليات $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ و $(w_n)_{n\geq1}$. إذا تحقق الشرطان

- $w_n\leq u_n\leq v_n$ عند كل n أكبر من عددٍ n_0.
- يوجد عدد حقيقي ℓ يُحقّق $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\ell$.

استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$.

مبرهنة 5

لنتأمّل متتاليتين $(u_n)_{n\geq1}$ و $(e_n)_{n\geq1}$ وعدداً حقيقياً ℓ. إذا تحقق الشرطان

- $\left|u_n-\ell\right|\leq e_n$ عند كل n أكبر من عددٍ n_0.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}e_n=0$.

كان $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$.

مبرهنة 6

لنتأمّل متتاليتين $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$، ولنفترض أنّ $u_n\leq v_n$ عند كل n أكبر من n_0. عندئذ

- إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$.
- وإذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=-\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

مثال

المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق $u_n = \dfrac{\sin n}{n+1}$ متقاربة ونهايتها تساوي الصفر. في الحقيقة، نعلم أنّ $|\sin n| \leq 1$ أياً يكن n، إذن $|u_n - 0| \leq \dfrac{1}{n+1}$. ولأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ ، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ ، وذلك اعتماداً على المبرهنة 5.

مثال

دراسة حالة عدم تعيين من الصيغة « $+\infty - \infty$ »

ادرس نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالعلاقة $u_n = n - \sqrt{n}$.

الحل

لمّا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ ، وجدنا أنفسنا أمام حالة عدم تعيين من الصيغة « $+\infty - \infty$ ». في مثل هذه الحالة نتذكّر ما كنّا نفعله في حالة التوابع من إخراج الحد المُسيطر خارج قوسين فنكتب $u_n = n\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. ولمّا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ ، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

فكِّر

يمكننا أيضاً أن نلاحظ أنّ $n \geq 2\sqrt{n}$ في حالة $n \geq 4$، إذن $u_n \geq \sqrt{n}$ عندما $n \geq 4$، ولأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ عملاً بالمبرهنة 6.

تكريساً للفهم

تطبيق : حالة المتتاليات $u_{n+1} = f(u_n)$

عندما يكون $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ، ويكون التابع f مستمراً عند ℓ (أي $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$) عندئذ تفيد المبرهنة 3. بتأكيد أنَّ $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$. من جهة أخرى، تتقارب المتتالية $(u_{n+1})_{n\geq 0}$ من ℓ. (إذْ حدودها هي حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ذاتها باستثناء u_0). ولكن مهما كان العدد الطبيعي n فلدينا $u_{n+1} = f(u_n)$، أي المتتاليتان $(f(u_n))_{n\geq 0}$ و $(u_{n+1})_{n\geq 0}$ متساويتان، فتكون نهايتاهما متساويتين أيضاً، أي إنَّ $\ell = f(\ell)$.

وهكذا، إذا كانت للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ نهايةٌ حقيقية ℓ، وإذا كان f مستمراً عند ℓ، كان $\ell = f(\ell)$ مما يعني أيضاً أنَّ ℓ هو حلٌّ للمعادلة $x = f(x)$.

كيف نتصرف عندما نتعرض لحالة من حالات صيغ عدم التعيين ؟

ليس ثمة قواعد عامة. لكننا سنعرض، في الأمثلة والتمرينات، بعضاً من المهارات التي يمكن أن تكون مفيدة عندما يتعذر حساب النهاية مباشرة بالاعتماد على قواعد العمليات على النهايات.

- عندما يكون u_n معرفاً بدلالة n، $u_n = f(n)$، و f تابعٌ مألوف: كثير حدود، كسري،...، يمكن أن **ندرس نهاية f عند $+\infty$**، عندئذ،

$$\text{إذا كان } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \text{ ، كان } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

- يمكن أيضاً في **وضع الحد المسيطر خارج قوسين**.

تَدرَّبْ

① المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n = \dfrac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$. تحقَّق أنَّ $-\dfrac{1}{\sqrt{n}} < u_n < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$، وذلك أياً يكن $n \geq 1$، ثمَّ استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq 1}$.

② المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة بالصيغة $u_n = n + 1 - \cos n$. تحقَّق أنَّ $n \leq u_n \leq n + 2$، وذلك أياً يكن $n \geq 1$، ثمَّ استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq 1}$.

③ فيما يأتي احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ في حال وجودها:

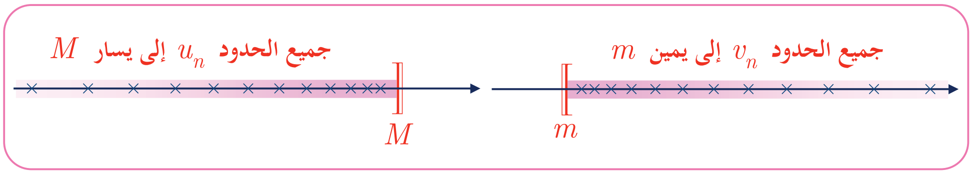
1. $u_n = \dfrac{2n+3}{3n-1}$
2. $u_n = \dfrac{5n-3}{3n-5}$
3. $u_n = n - \dfrac{1}{n+1}$
4. $u_n = \dfrac{5n^2-3n+7}{n^2+n+1}$
5. $u_n = \dfrac{-3n^2+2n+4}{2(n+1)^2}$
6. $u_n = \dfrac{n}{4} + \dfrac{2n}{n^2+1}$
7. $u_n = \dfrac{10n-3}{n^2+1}$
8. $u_n = \dfrac{2n^2-1}{3n+5}$
9. $u_n = \sqrt{\dfrac{4n-3}{n+1}}$
10. $u_n = \sqrt{\dfrac{2n^2-1}{3n+1}}$
11. $u_n = \cos\left(\dfrac{2n\pi}{3n+1}\right)$
12. $u_n = \sin\left(\dfrac{n\pi+1}{2n+1}\right)$
13. $u_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{3n}$
14. $u_n = \sqrt{n^2+n} - n - \dfrac{1}{2}$
15. $u_n = \dfrac{n!-2}{n!}$
16. $u_n = \sqrt{2n^2-5} - n\sqrt{2}$
17. $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{n}{\sqrt{n+2}}$
18. $u_n = \dfrac{n\sqrt{n}+n}{n+2}$
19. $u_n = n^2\left(\sqrt{2+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{2}\right)$
20. $u_n = \dfrac{3n-\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}$
21. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{n+1}$

3 تقارب المتتاليات المطردة

1.3. عموميات

تعريف 4

- نقول إنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ **محدودةٌ من الأعلى**، إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي M يحقّق، عند كل عدد طبيعي n، المتراجحة $u_n \leq M$. يسمى M **عنصراً راجحاً** على $(u_n)_{n\geq 0}$.
- نقول إنَّ متتاليةً $(t_n)_{n\geq 0}$ **محدودةٌ من الأدنى**، إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي m يحقّق، عند كل عدد طبيعي n،المتراجحة $t_n \geq m$. يسمى m **عنصراً قاصراً** عن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$.
- نقول إنَّ متتاليةً $(w_n)_{n\geq 0}$ **محدودةٌ**، إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأدنى في آن معاً.



ملاحظات

- نفي المقولة « $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية محدودة من الأعلى» يعني «مهما كبر العدد الحقيقي A، أمكن إيجاد حدٍّ u_N من المتتالية يحقّق $u_N > A$ »
- إذا كان M عنصراً راجحاً على متتاليةٍ $(u_n)_{n\geq 0}$، كان كل عدد حقيقي أكبر من M عنصراً راجحاً عليها.
- وإذا كان m عنصراً قاصراً عن متتاليةٍ $(t_n)_{n\geq 0}$، كان كل عدد حقيقي أصغر من m عنصراً قاصراً عنها.

مثال

أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ محدودة من الأعلى، ومحدودة من الأدنى.

الحل

لما كان $n+1 > n$ وتابع الجذر التربيعي متزايد استنتجنا أنّ $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ ومن ثَمّ $u_n > 0$ أياً كان العدد n، والعدد $m = 0$ عنصر قاصر عن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$، ومن جهة أخرى، لأنّ $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 1$ استنتجنا بعد الضرب بالمرافق أنّ $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq 1$، والعدد $M = 1$ عنصر راجح على $(u_n)_{n\geq 0}$.

2.3. دراسة المتتاليات المطّردة

مبرهنة 7

❶ كل متتالية **متزايدة وغير محدودة من الأعلى** تنتهي إلى $+\infty$.

❷ كل متتالية **متناقصة وغير محدودة من الأدنى** تنتهي إلى $-\infty$.

الإثبات (يترك إلى قراءة ثانية)

❶ لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى. ولنتأمّل عدداً حقيقياً كيفياً A.

- لمّا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ غير محدودة من الأعلى، أمكننا إيجاد حدٍّ u_N من المتتالية يكون أكبر تماماً من A : $u_N > A$.
- ولمّا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة، فإذا كان $n > N$ كان $u_n \geq u_N$، ومن ثَمّ $u_n > A$. يعني هذا أنّ u_n ينتمي إلى $]A,+\infty[$ أياً كانت $n > N$.

هذا صحيح أياً يكن A، مما يثبت أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

❶ يبرهن الجزء الثاني من المبرهنة بأسلوب مماثل لما سبق.

مبرهنة 8

❶ كل متتالية **متزايدة ومحدودة من الأعلى متقاربة.**

❷ كل متتالية **متناقصة ومحدودة من الأدنى متقاربة.**

الإثبات

هذه خاصّة مهمّة من خواص مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، سنقبلها دون إثبات.

ملاحظات

- لا تعطي هذه المبرهنة نهاية المتتالية، إنها تثبتُ فقط وجود نهاية حقيقيّة لها.
- في حالة متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى تكون نهايتها ℓ أصغر العناصر الراجحة عليها، أي هي أصغر الأعداد M التي تحقّق المتراجحة $u_n \leq M$ مهما كانت قيمة n. نسمي هذه النهاية **الحد الأعلى للمتتالية.**
- في حالة متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى تكون نهايتها ℓ أكبر العناصر القاصرة عنها، أي هي أكبر الأعداد m التي تحقّق المتراجحة $u_n \geq m$ مهما كانت قيمة n. نسمي هذه النهاية **الحد الأدنى للمتتالية.**

تكريساً للفهم

إذا كانت متتاليةٌ غير محدودة من الأعلى، فهي لا تنتهي بالضرورة إلى $+\infty$

هذا صحيح، إذْ من السهل بناء متتالية غير محدودة من الأعلى ولا تنتهي إلى $+\infty$.

مثال

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام $u_n = n + (-1)^n n$، أو

$u_{2n} = 4n$ و $u_{2n+1} = 0$

هي غير محدودة من الأعلى، ومع ذلك لا تسعى إلى $+\infty$.

لماذا إذا انتهت متتالية إلى $+\infty$، فهي ليست بالضرورة متزايدة؟

لأنَّه من السهل بناء متتالية نهايتها $+\infty$ لكنها ليست متزايدة، يكفي أن نجعل قيم u_n في تزايد ولكن دون ترتيب.

مثال

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام $u_n = 2n + (-1)^n n$، أو

$u_{2n} = 6n$ و $u_{2n+1} = 2n+1$

هي غير متزايدة، ومع ذلك $u_n \geq n$ إذن $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

كيف نستفيد من المبرهنة 8 في دراسة متتالية من النمط $u_{n+1} = f(u_n)$؟

وجدنا في المبرهنة 8 أنّه عندما تكون $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى، أو تكون متناقصة ومحدودة من الأدنى، تكون متقاربة نحو عدد حقيقي.

لنفترض إذن أنَّ $(u_n)_{n\geq 0}$ تحقق شروط المبرهنة 8 ولنرمز إلى نهايتها بالرمز ℓ. إذا أثبتت الدراسة أنَّ العدد الحقيقي ℓ، غير المعلوم، ينتمي إلى مجالٍ I، وكان التابع $f : x \mapsto f(x)$ مستمراً عليه، (إذن مستمراً عند ℓ). أمكننا عندئذ البحث عن العدد ℓ **بصفته حلاً للمعادلة** $f(x) = x$.

مثال

لنتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بشرط البدء $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ في حالة $n \geq 0$.

يمكن إثبات أنَّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة وأنها محدودة من الأعلى بالعدد 2 بأن نبرهن بالتدريج الخاصتين الآتيتين:

$$Q(n) : «u_n < 2» \text{ و } P(n) : «u_{n+1} > u_n»$$

وهذه مهمة نتركها تمريناً.

نستنتج إذن أنّ للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ نهاية حقيقية نرمز إليها بالرمز ℓ. العدد ℓ موجبٌ بطبيعة الحال، فالتابع f المعرف وفق $f(x)=\sqrt{1+x}$ مستمر عند ℓ، و ℓ هو حلٌّ موجب للمعادلة $f(x)=x$ أو $x=\sqrt{1+x}$.

إنّ حلول هذه المعادلة هي تلك الحلول الموجبة للمعادلة $x^2-x-1=0$. نجد بسهولة أنّ للمعادلة الأخيرة جذرين هما $x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ و $x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. وإذ $x_1<0$ و $x_2>0$، استنتجنا أنّ $\ell=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

كيف نحصر متتالية من الأعلى أو من الأدنى؟

ليست هناك طرائق عامة ولكن هناك بعض القواعد التي يمكن أن نستفيد منها:

❶ مجموع أعداد حقيقية موجبة أكبر من أيٍّ منها.

مثال المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_n=3n^2+n+1$. هنا $3n^2$ و n و 1 أعداد موجبة، إذن $u_n\geq 3n^2$ أياً يكن $n\geq 0$.

❷ إذا كان S مجموع k عدداً حقيقياً، وكان m أصغر هذه الأعداد و M أكبرها، كان:

$$km\leq S\leq kM$$

مثال إذا كان $u_n=n^3+n^2+n$، كان $3n\leq u_n\leq 3n^3$.

❸ إذا كان $ab>0$ كانت القضيتان «$a\leq b$» و «$\dfrac{1}{a}\geq\dfrac{1}{b}$» متكافئتين.

مثال ليكن $u_n=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{1+n}+\dfrac{1}{2+n}$ في حالة $n\geq 1$.

واضحٌ أنّ $2+n>1+n>n>0$، نستنتج أنّ $\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{1+n}<\dfrac{1}{2+n}$. ثمَّ نستنتج، بحسب الخاصة ❷. أنّ $\dfrac{3}{n}\leq u_n\leq\dfrac{3}{n+2}$.

❹ إذا كان a و b عددين موجبين، كانت القضيتان «$a\leq b$» و «$\sqrt{a}\leq\sqrt{b}$» متكافئتين.

مثال ليكن $u_n=\sqrt{1+n^2}$. لمّا كان $n^2\leq 1+n^2\leq(1+n)^2$، كان $n\leq u_n\leq 1+n$.

❺ a و b و c و d أعدادٌ موجبة تماماً. إذا كان $a\leq c$ و $b\geq d$، كان $\dfrac{a}{b}\leq\dfrac{c}{d}$.

مثال المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n=\dfrac{3n^2+2n+1}{3n+2}$. هنا لدينا $1\leq n^2$ و $2n\leq 2n^2$، إذن $3n^2+2n+1\leq 6n^2$ و $3n+2>3n$. نستنتج أنّ $u_n\leq\dfrac{6n^2}{3n}$، أي $u_n\leq 2n$.

(يمكن أن نستنتج أيضاً أنّ $u_n\geq\dfrac{3n}{5}$).

تَدرَّبْ

① في كلٍّ من الحالات الآتية، مثِّلْ هندسياً الحدود الأولى من المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$، ثمَّ خمِّنْ جهة اطرادها إذا كانت مطّردة ونهايتها المحتملة.

❶ $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$.

❷ $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n$.

❸ $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = u_n + 2$.

② تأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة وفق $u_n = 5 - \frac{10}{n^2}$. بيّن أيُّ الأعداد الآتية راجحٌ عليها: 0، 6، 4.99999، 5 ؟

③ تأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق $u_n = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$. أثبت أنَّ $1 \leq u_n \leq 3$، أياً يكن العدد الطبيعي n.

④ فيما يأتي أعطِ متتاليتين $(t_n)_{n\geq 2}$ و $(s_n)_{n\geq 2}$، تختلفان عن $(u_n)_{n\geq 2}$ وتحقّقان $t_n \leq u_n \leq s_n$ أياً يكن $n \geq 2$.

❶ $u_n = \frac{n+2}{n+1}$ ❷ $u_n = \frac{5n+1}{n+1}$

❸ $u_n = \frac{2n-3}{(n-1)(n+2)}$ ❹ $u_n = \frac{n^2-4n+7}{n-1}$

❺ $u_n = \sqrt{2+n}$ ❻ $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$

⑤ فيما يأتي، بيّن إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ محدودة، أو محدودة من الأعلى، أو من الأدنى.

1. $u_n = \sin n$ 2. $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ 3. $u_n = \frac{1}{n+2}$

4. $u_n = \frac{1}{1+n^2}$ 5. $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ 6. $u_n = \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2+1}}$

7. $u_n = \frac{-2}{\sqrt{2n+3}}$ 8. $u_n = n\sqrt{3} - 2$ 9. $u_n = n^2 + n - 1$

10. $u_n = \frac{1}{n+1} + n^2$ 11. $u_n = n + \cos n$ 12. $u_n = (-1)^n \times n^2$

⑥ لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة بالصيغة :

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^n}$$

❶ أثبت بالتدريج على العدد n، أنّ $n \leq 2^n$ مهما كان العدد الطبيعي n.

❷ استنتج مما سبق عنصراً راجحاً على المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

4 متتاليات متجاورة

إحدى الطرائق المهمّة لتحديد مقدار مجهول L (يدلُّ على طول أو مساحة أو حجم أو عدد)، تقوم على محاولة إحاطة L بأعداد معلومة يقترب بعضها من بعض شيئاً فشيئاً.

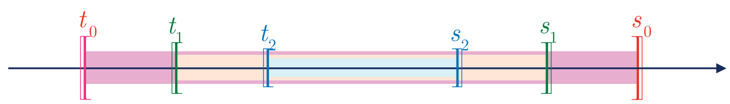
ننطلق بداية من $t_0 < L < s_0$، ثُمَّ، في مرحلة أولى، نحصر L كما يأتي

$$t_0 < t_1 < L < s_1 < s_0$$

وهكذا...، فنصل في مرحلةٍ n إلى الوضع الآتي

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_n < L < s_n < \ldots < s_1 < s_0$$

ويمكن أن نستمر هكذا عدداً غير منته من المرات. المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ متزايدة، والمتتالية $(s_n)_{n\geq 0}$ متناقصة، والمتتالية $(s_n - t_n)_{n\geq 0}$ تتقارب من الصفر.



المجالات $[t_0, s_0]$، $[t_1, s_1]$، $[t_2, s_2]$،...، $[t_n, s_n]$، ... متداخلة وتسعى أطوالها إلى الصفر.

تعريف 5

نقول إنَّ المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ **متجاورتان**، إذا وفقط إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة، وتقاربت المتتالية $(s_n - t_n)_{n\geq 0}$ من الصفر.

مثال

المتتاليتان $(t_n)_{n\geq 1}$ و $(s_n)_{n\geq 1}$ المعرفتان وفق $t_n = \dfrac{n}{n+1}$ و $s_n = \dfrac{n+1}{n}$ متجاورتان.

مبرهنة 9

نتأمّل متتاليتين متجاورتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$، عندئذ

❶ تكون المتتاليتان $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ متقاربتين.

❷ يكون للمتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ النهاية نفسها.

الإثبات

لنفترض أنَّ المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ متزايدة والمتتالية $(s_n)_{n\geq 0}$ متناقصة. عندئذ تكون المتتاليتان $(-t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ متناقصتين فمجموعهما $(s_n - t_n)_{n\geq 0}$ متتالية متناقصة أيضاً، ولأنّ هذه الأخيرة تسعى إلى الصفر وجب أن تكون جميع حدودها موجبة. وعليه $s_n \geq t_n$ أياً كانت n.

نستنتج من ذلك أنّه مهما يكن n يكن

$$t_0 \leq t_n \leq s_n \leq s_0$$

إذن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى (بالعدد s_0) فهي متقاربة. نرمز إلى نهايتها بالرمز ℓ. وكذلك المتتالية $(s_n)_{n\geq 0}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى (بالعدد t_0) فهي أيضاً متقاربة. لنرمز إلى نهايتها بالرمز ℓ'. يبقى إثبات أنَّ $\ell = \ell'$. في الحقيقة لدينا

$$\lim_{x\to+\infty}\left(s_n - t_n\right) = \lim_{x\to+\infty} s_n - \lim_{x\to+\infty} t_n = \ell' - \ell$$

ولما كانت $(s_n - t_n)_{n\geq 0}$ متقاربة من الصفر استنتجنا أنَّ $\ell = \ell'$.

مثال دراسة متتاليتين متجاورتين

نتأمّل المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$، المعرّفتين تدريجياً وفق:

- $t_0 = 1$ و $s_0 = 12$.
- $t_{n+1} = \dfrac{t_n + 2s_n}{3}$ و $s_{n+1} = \dfrac{t_n + 3s_n}{4}$.

❶ أثبت أنَّ المتتالية $(s_n - t_n)_{n\geq 0}$ هندسية. واحسب نهايتها.

❷ أثبت أنَّ المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان.

❸ أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_n = 3t_n + 8s_n$ ثابتة.

❹ ماذا تستنتج فيما يتعلق بالمتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$؟

الحل

❶ لنضع $h_n = s_n - t_n$ عندئذ

$$h_{n+1} = s_{n+1} - t_{n+1} = \frac{3t_n + 9s_n}{12} - \frac{4t_n + 8s_n}{12}$$
$$= \frac{1}{12}\left(s_n - t_n\right) = \frac{1}{12}h_n$$

إذن المتتالية $(h_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية، أساسها $q = \dfrac{1}{12}$. ولمّا كان $-1 < \dfrac{1}{12} < 1$، استنتجنا أنّها متقاربة وأنّ نهايتها تساوي الصفر.

وإذا أخذنا في الحسبان أنَّ $h_0 = s_0 - t_0 = 11$، استنتجنا أنَّ $s_n - t_n > 0$، أياً يكن n.

❷ المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً لأنّ

$$t_{n+1} - t_n = \frac{t_n + 2s_n}{3} - \frac{3t_n}{3} = \frac{2}{3}\left(s_n - t_n\right) > 0$$

وبالمثل، المتتالية $(s_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً لأنّ

$$s_{n+1} - s_n = \frac{t_n + 3s_n}{4} - \frac{4s_n}{4} = -\frac{1}{4}\left(s_n - t_n\right) < 0$$

ولمّا كنّا قد أثبتنا في السؤال الأول أنّ $\lim_{n\to+\infty}(s_n - t_n) = 0$ ، استنتجنا أنَّ المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان وهما متقاربتان من النهاية ℓ ذاتها.

❸ عند كل n،

$$u_{n+1} - u_n = 3t_{n+1} + 8s_{n+1} - (3t_n + 8s_n) = 0$$

إذن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ثابتة. ولإيجاد قيمتها الثابتة، نضع

$$u_n = u_0 = 3t_0 + 8s_0 = 3(1) + 8(12) = 99$$

❹ وإذ المتتاليات الثلاث $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ و $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة، فإنَّ قواعد العمليات على النهايات تقود إلى:

$$99 = \lim_{n\to+\infty} u_n = 3 \lim_{n\to+\infty} t_n + 8 \lim_{n\to+\infty} s_n = 3\ell + 8\ell$$

ومنه $\ell = 9$، فالمتتاليتان $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ متقاربتان من العدد 9.

تكريساً للفهم

كيف نحصر $\sqrt{2}$ باستعمال متتاليتين متجاورتين؟

بالاستفادة من خاصّة التزايد التام للتابع $x \mapsto x^2$ على المجال $[0,+\infty[$، يمكن الحصول، بسهولة، على إحاطات متتابعة للعدد $\sqrt{2}$ كما يأتي :

- البداية : لمّا كان $1 < 2 < 4$ استنتجنا أنّ $1 < \sqrt{2} < 2$ وهذا ما يتيح لنا أن نعرّف $x_0 = 1$ و $y_0 = 2$.
- الخطوة الأولى: نأخذ m منتصف المجال $[x_0, y_0]$ ونبحث إلى أي المجالين $[x_0, m]$ أو $[m, y_0]$ ينتمي العدد $\sqrt{2}$ وذلك عن طريق مقارنة m^2 بالعدد 2. هنا $m = 1.5$ و $m^2 = 2.25 > 2$ إذن $\sqrt{2} \in [x_0, m]$، نعرّف إذن $x_1 = x_0 = 1$ و $y_1 = m = 1.5$. فنكون قد حصرنا $\sqrt{2}$ في المجال $[x_1, y_1]$ الذي طوله يساوي 0.5.
- الخطوة n: لنفترض أننا حصرنا $\sqrt{2}$ في المجال $[x_{n-1}, y_{n-1}]$. نأخذ مجدداً m منتصف المجال $[x_{n-1}, y_{n-1}]$ ونبحث إلى أي المجالين $[x_{n-1}, m]$ أو $[m, y_{n-1}]$ ينتمي العدد $\sqrt{2}$ وذلك عن طريق مقارنة m^2 بالعدد 2. فإذا كان $m^2 \geq 2$ عرّفنا $[x_n, y_n] = [x_{n-1}, m]$، وإذا كان $m^2 < 2$ عرّفنا $[x_n, y_n] = [m, y_{n-1}]$. فنكون قد حصرنا $\sqrt{2}$ في المجال $[x_n, y_n]$ الذي طوله يساوي نصف طول سابقه $[x_{n-1}, y_{n-1}]$. أي

$$y_n - x_n = \frac{1}{2}(y_{n-1} - x_{n-1}) = \frac{1}{2^2}(y_{n-2} - x_{n-2}) = \cdots = \frac{1}{2^n}(y_0 - x_0) = \frac{1}{2^n}$$

- تبعاً لطريقة إنشائهما، المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان ولهما نهاية مشتركة هي $\sqrt{2}$.

- يبيّن الجدول اللآتي نتيجة تنفيذ هذه الخوارزمية:

n	x_n	y_n	$y_n - x_n$	n	x_n	y_n	$y_n - x_n$
0	1	2	1	6	$\frac{45}{32}$	$\frac{91}{64}$	$\frac{1}{64}$
1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	7	$\frac{181}{128}$	$\frac{91}{64}$	$\frac{1}{128}$
2	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{181}{128}$	$\frac{363}{256}$	$\frac{1}{256}$
3	$\frac{11}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{8}$	9	$\frac{181}{128}$	$\frac{725}{512}$	$\frac{1}{512}$
4	$\frac{11}{8}$	$\frac{23}{16}$	$\frac{1}{16}$	10	$\frac{181}{128}$	$\frac{1449}{1024}$	$\frac{1}{1024}$
5	$\frac{45}{32}$	$\frac{23}{16}$	$\frac{1}{32}$	11	$\frac{181}{128}$	$\frac{2897}{2048}$	$\frac{1}{2048}$

التي ينتج منها أنّ $x_{11} \approx 1.4140625$ و $y_{11} \approx 1.4145508$ وأخيراً أنّ

$$1.4140625 < \sqrt{2} < 1.4145508$$

تَدرَّبْ

① لتكن $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ المتتاليتان المعرفتان وفق $t_n = -\dfrac{1}{2n+4}$ و $s_n = \dfrac{1}{n+1}$. أثبت أنهما متجاورتان ثمَّ عيّن نهايتهما المشتركة.

② لتكن $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ المتتاليتان المعرفتان وفق $t_n = \dfrac{n-1}{n}$ و $s_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$. أثبت أنّهما متجاورتان ثمَّ عيّن نهايتهما المشتركة.

③ في كلٍّ من الحالات الآتية، تبيَّنْ إن كانت المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ متجاورتين أم لا.

❶ $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$ ، $y_n = x_n + \dfrac{1}{4n}$,

❷ $x_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1}$ ، $y_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$,

❸ $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$ ، $y_n = x_n + \dfrac{1}{n}$,

❹ $x_n = 2 - \dfrac{1}{n}$ ، $y_n = 2 + \dfrac{1}{n^2}$,

أفكار يجب تَمثُّلها

- عندما تكون متتاليةٌ $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربةً نحو عددٍ حقيقي ℓ، يحوي أيُّ مجالٍ مركزه ℓ، مهما صغر هذا المجال، جميعَ حدود المتتالية (ما عدا عدداً منتهياً منها).
- عندما تكون متتاليةٌ $(u_n)_{n\geq0}$ متباعدةً نحو $+\infty$، يحوي أيُّ مجالٍ من النمط $]M,+\infty[$، مهما كبر العدد الحقيقي M، جميعَ حدود المتتالية (ما عدا عدداً منتهياً منها).
- المتتالية الهندسية $(q^n)_{n\geq0}$ التي أساسها $q \neq 0$ هي متتالية مرجعية:
  - متباعدة نحو $+\infty$ عندما $q > 1$.
  - متقاربة من الصفر عندما $-1 < q < 1$.
- إنَّ متتاليةً متزايدة :
  - تنتهي إلى عدد حقيقي ℓ عندما تكون محدودة.
  - تنتهي إلى $+\infty$ عندما تكون غير محدودة.
- كل متتالية متقاربة وحدودها موجبة، نهايتها عددٌ حقيقي موجب (أو معدوم).

منعكسات يجب امتلاكُها.

- فكِّرْ في أنَّ حساب بعض الحدود الأولى من متتالية، قد يفيد في تعرف حالة المتتالية بصورة أفضل.
- بحثاً عن نهاية متتالية، فكِّرْ في استعمال المتتاليات المرجعية:

$$n, n^2, n^3, \ldots, \sqrt{n} \quad \text{و} \quad \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

- فكِّرْ في إمكانية الاعتماد على تابعٍ مألوف f، يحقّق $u_n = f(n)$. عندئذ، المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ والتابع f لهما النهاية ذاتها عند $+\infty$ أو عند $-\infty$.
- في حالة $y_n = f(x_n)$، حيث f تابعٌ مألوف: إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$ و $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$، كان $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = c$.
- في حالة متتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرّفة تدريجياً وفق $u_{n+1} = f(u_n)$، وإذا توفرت بعض الشروط، وكانت $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة، كانت نهايتها حلاًّ للمعادلة $f(x) = x$.
- لإثبات أنَّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$
  - استعمل المبرهنة 4. بإحاطة $(u_n)_{n\geq0}$ بمتتاليتين لهما النهاية نفسها ℓ.
  - أثبت أنَّ $|u_n - \ell| \leq t_n$ مع $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$. (المبرهنة 5).

- لإثبات أنَّ متتاليةً $(u_n)_{n\geq 0}$ تنتهي إلى $+\infty$، فكِّرْ في استعمال متتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ تساوي نهايتها $+\infty$ وتحقق، بدءاً من دليل ما، $t_n \leq u_n$.

أخطاء يجب تجنّبها.

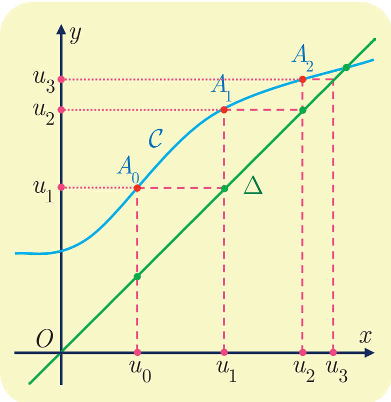
- لا يمكن إيجاد نهاية متتالية باستخدام مبرهنة النهايات في حالات صيغ عدم تعيين، وهي أربع: « $+\infty - \infty$ » و « $0 \times \infty$ » و « $\dfrac{0}{0}$ » و « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».
- في حالة متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة تدريجياً وفق $u_{n+1} = f(u_n)$، تزايد (أو تناقص) f لا يقتضي بالضرورة تزايد (أو تناقص) $(u_n)_{n\geq 0}$. (خلافاً لحالة $u_n = f(n)$).
- إنَّ متتاليةً متقاربة ليست بالضرورة مطَّردة.
- إنَّ متتاليةً متباعدة إلى $+\infty$ ليست بالضرورة متزايدة.
- عندما تكون متتاليةٌ متزايدةٌ محدودةً من الأعلى بعددٍ M، تكون متقاربة. ولكن نهايتها ℓ ليست بالضرورة مساويةً للعدد M، بل $\ell \leq M$.

4

أنشطة

نشاط 1 تمثيلٌ هندسي لمتتالية من النمط $u_{n+1} = f(u_n)$

❶ المبدأ



في الشكل المجاور، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني لتابعٍ f في معلمٍ متجانس. نوضِّع العدد الحقيقي u_0 على محور الفواصل، ثمَّ النقطة A_0 ذات الفاصلة u_0على الخط البياني $\mathcal{C}$، نرمز إلى ترتيب A_0 بالرمز u_1 فيكون $u_1 = f(u_0)$.

نوضِّع u_1 على محور الفواصل بالاستفادة من المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$، u_1 هي فاصلة نقطة تقاطع Δ والمستقيم الذي معادلته $y = u_1$.

نرمز إلى ترتيب النقطة A_1 من الخط C، التي فاصلتها u_1، بالرمز u_2 فيكون $u_2 = f(u_1)$. نوضِّع u_2 على محور الفواصل بالاستفادة من المستقيم Δ كما في السابق. ونتابع بهذا لتعيين القيم المتوالية للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة التدريجية $u_{n+1} = f(u_n)$.

❷ تمرين

في كلٍّ من الحالات الآتية، مثِّلْ الحدود الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المشار إليها، ثمَّ خمِّنْ جهة تغيرها ونهايتها المحتملة.

① $u_0 = 1$، $u_{n+1} = 2u_n - 1$

② $u_0 = 1$، $u_{n+1} = u_n^2 - 1$

③ $u_0 = 0$، $u_{n+1} = u_n^2 - 1$

④ $u_0 = 1$، $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 2}$

⑤ $u_0 = 1$، $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} + u_n$

⑥ $u_0 = 1$، $u_{n+1} = u_n^2$

❸ تطبيق

نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة تدريجياً بالشرطين $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$. استعمل الطريقة السابقة لتجيب عن الأسئلة الأتية :

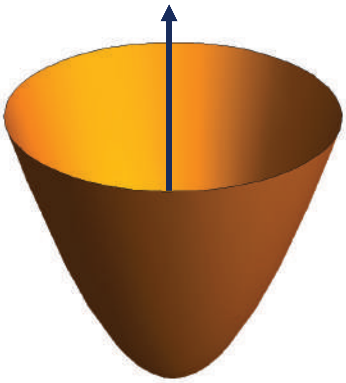
① أتكون المتتالية مطّردة ؟ أتكون محدودة من الأدنى ؟ أتكون متقاربة ؟

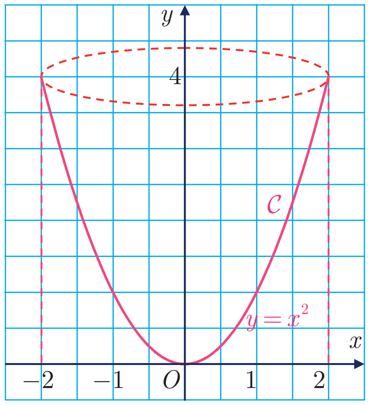
② برهن صحة النتائج التي توصلتَ إليها إن أمكن.

نشاط 2 حجم مجسم قطع مكافئ دوراني

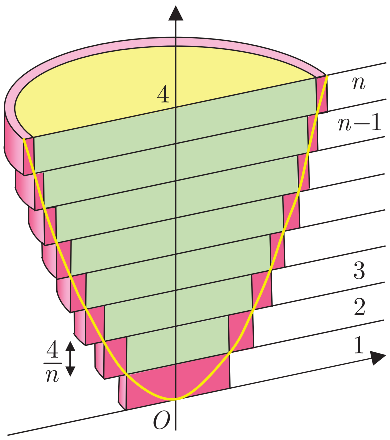
في الشكل نجد الخط البياني للتابع $f : x \mapsto x^2$، الذي يسمى قطعاً مكافئاً معادلته $y = x^2$، وهو متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب كما تعلم. نهتم بالجزء $\mathcal{C}$ الموافق لقيم x من المجال $[-2,2]$.

عندما يدور $\mathcal{C}$ في الفراغ دورةً كاملة حول محور التراتيب، نحصل على مجسَّم نسميه **مجسم القطع المكافئ الدوراني**.





نهدف إلى حساب $\mathcal{V}$ حجم هذا المجسّم، في مثل هذه الحالات وفي غياب أية طرائق أخرى نسعى إلى حصر المقدار المجهول، وهو هنا $\mathcal{V}$ بمقادير معلومة ويمكننا حسابها، وفي الوقت نفسه تحصر المقدار المجهول بالدقة التي نريد. لنوضّح المقصود: نحن نعرف كيف نحسب حجم أسطوانة، لنرجع الأمر إلى حساب مجموع حجوم أسطوانات.



ليكن n عدداً طبيعياً أكبر تماماً من 2. ولنفترض أننا حاولنا ملء المجسّم بـ $n-1$ أسطوانة ارتفاع كلّ منها $\frac{4}{n}$، (بالطبع ستبقى بعض الفراغات)، وأننا استطعنا وضع المجسّم داخل n أسطوانة ارتفاع كل منها $\frac{4}{n}$ أيضاً، كما في الشكل المجاور.

لنرمز بالرمز V_n إلى مجموع حجوم الأسطوانات الخارجية، وبالرمز v_n إلى مجموع حجوم الأسطوانات الداخلية.

① برهن أنّ

$$v_n = \frac{16\pi}{n^2}\big(1 + 2 + \cdots + (n-1)\big) \quad \text{و} \quad V_n = \frac{16\pi}{n^2}\big(1 + 2 + \cdots + (n-1) + n\big)$$

② برهن أنّ المتتاليتين $(V_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متقاربتان، واستنتج قيمة $\mathcal{V}$ أي حجم المجسم المطلوب.

تمرينات ومسائل

1 المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرّفة وفق $u_n = \dfrac{1}{n!}$. ($n! = n(n-1)\times\cdots\times 2\times 1$ عندما $n \geq 1$).

① احسب الحدود الستة الأولى منها.

② تيقّن أنَّ $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n}$ ثمَّ استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq 1}$.

2 المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n = \left(\dfrac{n}{10} - 1\right)^n$.

① أعطِ قيماً تقريبية لحدودها الأولى من u_1 حتى u_{11}.

② أثبت أنَّ جميع حدودها، بدءاً من الحد u_{31}، تحقق $u_n \geq 2^n$. استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq 1}$.

3 المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n = \dfrac{n^3}{n!}$.

① احسب حدودها الستة الأولى.

② *a*. أثبت أنَّ $n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3)$، أياً يكن $n \geq 4$.

b. استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq 1}$.

4 أوجد نهاية كلٍّ من المتتاليات $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ و $(w_n)_{n\geq 1}$ و $(t_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة وفق:

$$x_n = \frac{n^2+1}{n+1},\quad y_n = \frac{x_n}{n},\quad w_n = x_n - n,\quad t_n = \frac{y_n - 1}{w_n - 1}$$

5 أوجد نهاية كلٍّ من المتتاليات $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ و $(w_n)_{n\geq 1}$ و $(t_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة وفق:

$$x_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1},\quad y_n = x_n\sqrt{n},\quad w_n = x_n - \frac{1}{\sqrt{n}},\quad t_n = \frac{y_n}{w_n}$$

6 أوجد نهاية كلٍّ من المتتاليات $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ و $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة وفق:

$$x_n = \frac{3n^2-4}{n+1},\quad y_n = \frac{x_n}{n},\quad u_n = x_n - 3n$$

7 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة بالصيغة $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

① أثبت أنَّ $0 < u_n \leq 1$، أياً يكن n.

② *a*. أثبت أنه إذا كان $n > 10^4$، كان $0 < u_n < 10^{-2}$.

b. أثبت أنه إذا كان $n > 10^8$، كان $0 < u_n < 10^{-4}$.

c. كيف نختار n كي نحصل على $u_n < 10^{-8}$؟

③ ما نهاية $(u_n)_{n\geq 0}$؟

8 المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ معرفتان وفق: $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و $y_n = \dfrac{1}{n}$.

① أثبت أنَّ العدد 1 راجحٌ على $(x_n)_{n\geq 1}$.

② أثبت أنَّ $x_n \leq y_n$، أياً يكن $n \geq 1$.

③ أيُّ النتيجتين السابقتين أكثر إثارة للاهتمام؟

9 المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ معرفتان وفق: $x_n = \dfrac{2n^2+5n+3}{2n+1}$ و $y_n = 5n$.

① أثبت أنَّ $x_n \leq y_n$، أياً يكن $n \geq 1$.

② أثبت أنَّ $x_n \geq \dfrac{1}{5}y_n$، أياً يكن $n \geq 1$.

10 المتتالية $(u_n)_{n\geq 4}$ معرفة وفق $u_n = \dfrac{1}{n^2-5n+6}$. أثبت أنَّها محدودة من الأعلى بالعدد $\dfrac{1}{2}$.

لنتعلّم البحث معاً

11 عندما تفرض المناقشة نفسها

ليكن a و b عددين يحققان $a > b > 0$ ولتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$.

ادرس تقارب هذه المتتالية.

نحو الحلّ

☝ في عبارة u_n، نجدُ فقط حدوداً من النمط q^n، وإذ لدينا معرفة بنهاية المتتالية $(q^n)_{n\geq 0}$، نفكر بالاستفادة من مبرهنات العمليات على النهايات. ولكنَّ a و b غير معروفين، فعلينا أن نتوقع التعرض لصيغة عدم تعيين.

1. تحقق من التعرض لصيغة عدم تعيين في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

❶ $a > 1$ و $b > 1$ ❷ $a > 1$ و $b < 1$.

2. في حالة $a = 1$ و $b < 1$، لماذا تفيد مبرهنات النهايات في تعيين نهاية $(u_n)_{n\geq 0}$ ؟

✌ قد تفيد دراسة حالة خاصة في تعرف الحالة العامة. لنختر، مثلاً، في حالة $a = 3$ و $b = 2$، لدينا $u_n = \dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$. وعندما تكون قيم n كبيرة، تكون قيم 3^n و 2^n غاية في الكبر. لمقارنة مرتبتي كبرهما عندما تسعى n إلى $+\infty$. ندرس نهاية المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = \dfrac{2^n}{3^n}$.

1. لماذا لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ ؟

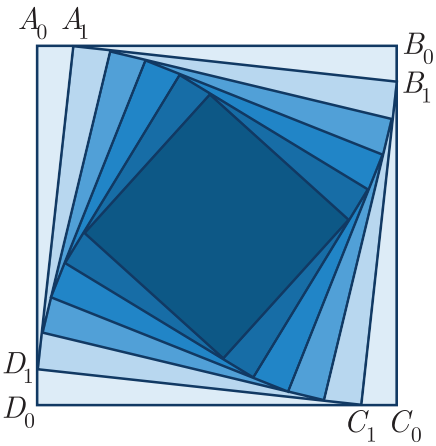
2. تحقق أنَّ $u_n = \dfrac{1-v_n}{1+v_n}$. إذن ما نهاية $(u_n)_{n\geq 0}$؟

نستشف من المثال السابق أهمية المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $v_n = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ ودورها في الوصول إلى النتيجة المرجوة.

1. أوجد نهاية $(v_n)_{n\geq 0}$ تبعاً لقيم a و b.
2. تحقق أنَّ $u_n = \frac{1-v_n}{1+v_n}$ واستفد من حصيلة الأسئلة السابقة للوصول إلى الهدف المنشود.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

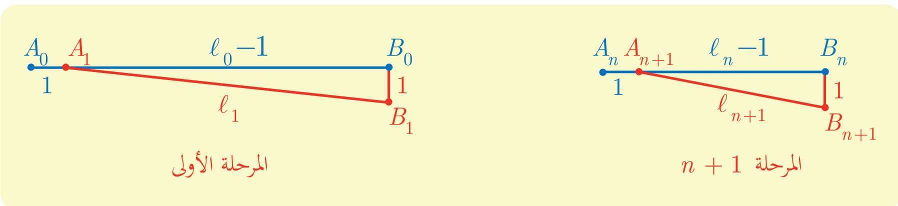
12 دراسة متتالية من النمط $u_{n+1} = f(u_n)$



نرمز إلى المربع $A_0B_0C_0D_0$ الذي طول ضلعه 10 بالرمز S_0، وإلى المربع $A_1B_1C_1D_1$ الذي تقع رؤوسه على أضلاع S_0 (كما يشير الشكل المرافق) بالرمز S_1 حيث $A_0A_1 = 1$. بالطريقة التي رسمنا فيها S_1 انطلاقاً من S_0، نرسم S_2 انطلاقاً من S_1 ونقبل إمكانية الاستمرار بهذا الرسم عدداً غير منتهٍ من المرات. نرمز إلى طول ضلع المربع S_n بالرمز ℓ_n.
نهدف إلى دراسة المتتالية $(\ell_n)_{n\geq 0}$ وتعيين نهايتها.

نحو الحلّ

لنتفحّص كيف يجري الإنشاء: يُرسم كلُّ مربع انطلاقاً من سابقه. فالمتتالية $(\ell_n)_{n\geq 0}$ هي إذن متتالية تدريجية.



1. علّل صحة المتراجحة $1 < \ell_{n+1} < \ell_n$ أياً كان العدد الطبيعي n؟
2. لماذا يمكن استنتاج أنَّ المتتالية $(\ell_n)_{n\geq 0}$ متقاربة؟
3. أثبت أنَّ $\ell_{n+1} = \sqrt{1+(\ell_n - 1)^2}$.

يبقى تحديد العدد ℓ، نهاية المتتالية $(\ell_n)_{n\geq 0}$. إحدى الطرق العامة لذلك هي الاستعانة بالتابع f المعرف بالعلاقة $\ell_{n+1} = f(\ell_n)$.

1. عيِّنْ التابع f المستعان به.
2. أثبت أنَّ ℓ حلٌّ للمعادلة $x = \sqrt{1+(x-1)^2}$.
3. استنتج من ذلك قيمة النهاية ℓ.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

13 مجموع عدد غير منته من الحدود

ليكن $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ في حالة عدد طبيعي غير معدوم n. وليكن

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

ادرس المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$.

نحو الحلّ

يبدو من غير الممكن الاستفادة من تطبيقات مباشرة لمبرهنات مألوفة. ولكن معرفة قيم بضعة حدود أولى من متتالية قد تتيح تصورَ خواصٍ لها من قبيل: جهة الاطراد، العناصر الراجحة عليها أو القاصرة عنها، أو إيجاد علاقة بين حدها ذي الدليل n والدليل ذاته n، أو بين هذا الحد والحد الذي يليه. احسب S_1 و S_2 و S_3 و S_4 بصيغة كسور مختزلة.

تُظهر النتائج أنَّ دليل S_n، أي n، يظهر في عبارة S_n. وتحديداً يبدو أنَّ $S_n = \dfrac{n}{n+1}$.

1. تحقّق أنّك ستحصل على النتيجة ذاتها عند $n=5$ وعند $n=6$.
2. أثبت صحة $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ بالبرهان بالتدريج.

ثمة حلٌّ آخر، يتمثل في تعيين عددين a و b يحقّقان $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$. جد هذين العددين ثُمّ استنتج عبارة S_n.

ملاحظة: عند دراسة متتاليةٍ $(u_n)_{n\geq 0}$، من المهم، في أكثر الحالات، تعرُّف الحدود الأولى منها، ومعرفة ما إن كانت هذه الحدود تتيح رؤية علاقةٍ بين u_n و n.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

14 دراسة متتاليتين في آن معاً

ليكن a و b عددين يُحقّقان $0 < a < b$. ولنتأمّل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق $x_0 = a$ و $y_0 = b$ وعند كل عدد طبيعي n:

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \quad \text{و} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

نهدف إلى دراسة المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ في آن معاً.

نحو الحلّ

☝ لنتفحص الفرْضَ كي نرى إنْ كانت ثمة نتائج مباشرة تفيد في الحل. يمكن ملاحظة أنَّ مقام x_{n+1} يساوي بسط y_{n+1}، فنستنتج أنَّ:

$$x_{n+1} \times y_{n+1} = x_n \times y_n = ab \qquad (*)$$

ونلاحظ أيضاً أنَّ x_n و y_n موجبان.

1. تحقق من المساواة $(*)$.
2. أثبت، بالتدريج، صحة الخاصة «$x_n > 0$ و $y_n > 0$» : $E(n)$ ، أيّاً يكن العدد الطبيعي n.

✌ لتحقيق فهم أفضل، قد يكون مفيداً تعرُّف بضعَ حدود أولى من المتتالية. ولمّا كان a و b غير معلومين، نتأمّل مثلاً الحالة الخاصة $a = 1$ و $b = 3$.

1. احسب حدوداً أولى من كلٍّ من $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$.
2. وضّعْ هذه الحدود على محور الأعداد الحقيقية، ماذا تلاحظ ؟

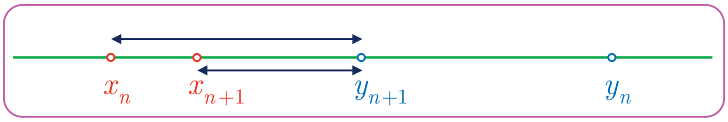
👌 ربما علينا إذن إثبات أنَّ المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان. ولتحقيق ذلك علينا بداية دراسة اطّراد هاتين المتتاليتين. علينا إذن دراسة إشارة كلٍّ من $x_{n+1} - x_n$ و $y_{n+1} - y_n$.

1. أثبت أنَّ:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n(y_n - x_n)}{x_n + y_n} \quad \text{و} \quad y_{n+1} - y_n = \frac{x_n - y_n}{2}.$$

2. لاحظ أنّ إشارتي x_n و $x_n + y_n$ معلومتان، فإشارتا $x_{n+1} - x_n$ و $y_{n+1} - y_n$ تتعلقان بإشارة $y_n - x_n$. يُتوقع استناداً إلى ✌ أنْ يكون $y_n - x_n$ موجباً. احسب $y_{n+1} - x_{n+1}$ واستنتج أنَّ $y_{n+1} - x_{n+1}$ موجب.
3. استنتج اطّراد كلٍّ من المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$.

يبقى علينا إثبات أنَّ $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n - x_n) = 0$. ولذلك سنسعى إلى تعريف متتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ تحقق عند كل عدد طبيعي n المتراجحة $0 < y_n - x_n < t_n$، وبحيث يكون $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$. يبدو إنجاز ذلك صعباً انطلاقاً من العبارة $y_{n+1} - x_{n+1}$ التي أثبتناها سابقاً فلنرسم مخططاً يساعدنا:



1. أثبت إذنْ أنَّ $y_{n+1} - x_{n+1} \leq y_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{2}(y_n - x_n)$.
2. أثبت، مستخدماً البرهان بالتدريج ، أنَّ $y_n - x_n \leq \dfrac{1}{2^n}(y_0 - x_0)$.
3. أثبت أنَّ المتتاليتين تتقاربان إلى النهاية ℓ ذاتها.
4. استفدْ من العلاقة $(*)$ لإثبات أنَّ $\ell^2 = ab$ ثمَّ $\ell = \sqrt{ab}$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

ملاحظة: إذا حققت ثلاثة أعداد x و α و β العلاقة $\dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$ قلنا إنَّ x هو **المتوسط التوافقي** للعددين α و β، و إذا حقّقتْ العلاقة $x = \sqrt{\alpha\beta}$ قلنا إنَّ x هو **المتوسط الهندسي** للعددين α و β. بهذا يكون x_{n+1} المتوسط التوافقي للعددين x_n و y_n لأنَّ $\dfrac{2}{x_{n+1}} = \dfrac{1}{x_n} + \dfrac{1}{y_n}$ ويكون ℓ المتوسط الهندسي للعددين a و b لأنَّ $\ell = \sqrt{ab}$.

قُدُماً إلى الأمام

15 ادرس تقارب كلٍّ من المتتاليتين:

① $x_n = \dfrac{3^n - 2^n}{3^n - 1}$ ② $y_n = \dfrac{10^n - 1}{10^n + 1}$.

16 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق: $u_0 = \dfrac{3}{2}$ وعند كل $n \in \mathbb{N}$، $u_{n+1} = {u_n}^2 - 2u_n + 2$.

① أثبت، مستعملاً البرهان بالتدريج، أنَّ $1 \leq u_n \leq 2$ أيّاً يكن $n \in \mathbb{N}$.

② a. أثبت أنَّ $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$ أيّاً يكن $n \in \mathbb{N}$.

b. استنتج أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

③ أهي متقاربة؟

17 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

① أثبت، مستعملاً البرهان بالتدريج، أنَّ $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

② استنتج أنَّ العدد 3 راجحٌ على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

③ أثبت أنَّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة.

18 نتأمّل متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تحقّق الشرط التي: يوجد عدد حقيقي $\ell > 0$ يحقق عند كل n العلاقة

$$0 \leq u_{n+1} - \ell \leq \frac{2}{3}\left(u_n - \ell\right).$$

أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة إلى ℓ. بافتراض أنّ $u_0 = 1$ عيّن عدداً طبيعيّاً N يحقق

$$u_n \in \left]\ell - 10^{-3}, \ell + 10^{-3}\right[\text{ عند كل } n \geq N.$$

19 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

① أثبت أنَّ $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ ثمّ استنتج أنَّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو الصفر.

② المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق:

$$v_n = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

.a استفدْ من عبارة u_n بصيغتيها الواردتين لاستنتاج عبارة بسيطة للحد v_n بدلالة n.

.b استنتج نهاية المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$.

20 ما العبارات الصحيحة وما العبارات غير الصحيحة فيما يأتي؟ تحقّق من إجابتك في كل حالة.

① إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متقاربة من عدد حقيقي ℓ وكانت $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية ليس لها نهاية حقيقية، عندئذ ليس للمتتالية $(u_n + v_n)_{n\geq 0}$ نهاية حقيقية.

② إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متقاربة من عدد حقيقي ℓ وكانت $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية ليس لها نهاية حقيقية، عندئذ ليس للمتتالية $(u_n v_n)_{n\geq 0}$ نهاية حقيقية.

③ إذا كان $\lim_{n\to+\infty} u_n \cdot v_n = \ell$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$، كان $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

④ إذا كان لمتتالية عنصرٌ قاصر عنها، كان لها عنصرٌ راجح عليها.

21 المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

① أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة.

② a. أثبت، مستعملاً البرهان بالتدريج، أنَّ $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ أيّاً يكن $n \geq 1$.

b. ماذا يمكنك أنْ تستنتج بالنسبة إلى المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$.

22 ليكن عند كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

① أوجد عددين حقيقيَّين a و b يحققان عند كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$.

② ليكن، في حالة عدد طبيعي n، $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. عبِّرْ عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$.

23 لنضع في حالة عدد طبيعي موجب تماماً n، $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

① أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة.

② اكتب $u_{2n} - u_n$ واستنتج أنَّ $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.

③ أثبت، مستعملاً البرهان بالتدريج، أنَّ $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$، أيّاً يكن العدد الطبيعي n غير المعدوم.

④ هل للمتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ نهاية حقيقية؟

24 المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n \geq 1$ وفق:

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

① أثبت أنَّ $\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$، أيّاً يكن $n \geq 1$.

② استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$. ما نهايتها؟

25 المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n \geq 1$ وفق:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

① أثبت أنَّ $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$، أيّاً يكن $n \geq 1$.

② استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$. ما نهايتها؟

26 بيّن أنّ المتتاليتين $(x_n)_{n\geq1}$ و $(y_n)_{n\geq1}$ الآتيتين متجاورتان

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1} \quad \text{و} \quad y_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

27 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 3$ وعند كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{2}{u_n + 1}$.

① أثبت أنَّ $u_n > 0$، أياً يكن n.

② المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ معرفة عند كل عدد طبيعي n وفق $t_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$. أثبت أنَّ المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واحسب نهايتها.

③ استنتج أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

28 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 2$ وعند كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$.

① أثبت أنَّ $u_n > 0$، أياً يكن n.

② المتتالية معرّفة بصيغة من النمط $u_{n+1} = f(u_n)$، عيّن التابع f المعرّف على $]0,+\infty[$.

a. ادرس تغيرات التابع f وارسم خطه البياني $\mathcal{C}_f$ ومقارباته، وارسم على الشكل نفسه المستقيم d الذي معادلته $y = x$، بعد أن تحسب إحداثيتا نقطة تقاطع d مع $\mathcal{C}_f$.

b. بيّن أنّ ما سبق يفيد في إثبات أنّ f متزايد على المجال $[\sqrt{2},+\infty[$ وأنّ $f(x) \leq x$ على هذا المجال.

③ استفد من الرسم لتُنشئ الحدود الأولى من المتتالية المدروسة. أتجدها مطّردة؟ ما جهة اطرادها؟ أهي محدودة ؟ ثم برهن صحة توقعاتك عن طريق الاستفادة من ② *b.* لتبرهن بالتدريج أنّ : $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$ مهما كان العدد n.

④ استنتج أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

29 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = \frac{1}{2}$ وعند كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n^2 + 2u_n$.

① احسب u_1 و u_2 و u_3 و u_4 و u_5.

② نرمز بالرمز f إلى التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$.

a. ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

b. أثبت أنَّه إذا انتمى x إلى المجال $[0,3]$، انتمى $f(x)$ إلى المجال $[0,3]$.

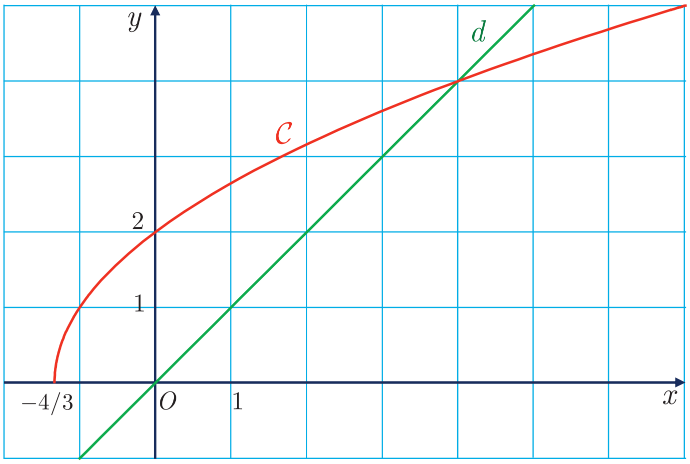
③ استنتج من السؤال السابق أنَّ:

a. العدد 3 عنصرٌ راجحٌ على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

b. المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

④ استنتج أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها مع ملاحظة أنَّ $u_{n+1} = f(u_n)$.

30 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 > -\frac{4}{3}$ و $u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n}$ عند كل عدد طبيعي n. نجد في الشكل أدناه، الخط البياني C للتابع f المعرف على المجال $\left]-\frac{4}{3},+\infty\right[$ وفق $f(x) = \sqrt{4+3x}$. والمستقيم d الذي المعادلة $y = x$.



① ما إحداثيتا نقطة تقاطع الخط C والمستقيم d؟

② نفترض في هذا السؤال أنَّ $u_0 = 6$.

a. أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة من الأدنى.

b. ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

c. استنتج أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة وأوجد نهايتها.

③ *a*. أثبت أنَّ هذه النتيجة صحيحة أياً يكن $u_0 > 4$.

b. هل هذه النتيجة صحيحة أيضاً عندما $-\frac{4}{3} < u_0 < 4$؟