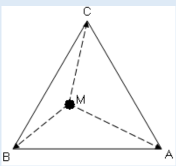
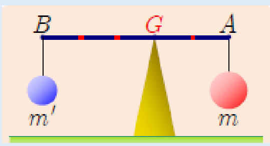
مركز الأبعاد المتناسبة في المستوي

الهدف العام: توظيف أداة رياضياتية لإنشاء مركز أبعاد متناسبة لنقطتين أو أكثر، حساب إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة، استعمال مركز الإبعاد لإثبات أن مجموعة من النقاط تقع على استقامة واحدة تلاقي المستقيمات أو توازي مستقيمين

المقدمة	الهدف	مقاربة مفهوم مركز الأبعاد المتناسبة الألوان الأساسية هي الأزرق والأحمر والأصفر وللحصول على الألوان المشتقة منها بتثقيلها بنسب معينة مختلفة من هذه الألوان
	دور المدرس ودور الطالب	طرح مجموعة أسئلة ما هي الألوان الأساسية وماهي الألوان المشتقة تأمل الشكل المرسوم في المقدمة والألوان الواقعة على نفس الاستقامة والألوان الواقعة داخل المثلث ماذا تلاحظ ؟
	آلية التنفيذ ١٥د	بعد قراءة المقدمة، يعرض المدرس رسومات المقدمة ويسأل: ١. إذا اعتبرنا كل لون هو نقطة رمزها M ما هي نسب تشكيل اللون البني؟ ٢. اكتب المساواة الشعاعية التي تعبر عن اللون البني. ٣. إذا كان: $\left(A,\frac{1}{2}\right),\left(B,\frac{1}{4}\right),\left(C,\frac{1}{4}\right)$ ما اللون الذي تمثله النقطة M؟ ٤.اختر لوناً ثم مثله بكتابة ثنائيات الألوان الأساسية. يمكن استعمال الرسم المجاور لتوضيح المساواة الشعاعية:  $r\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+y\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

<table>
<tr>
<td rowspan="3">انطلاقة نشطة</td>
<td>الهدف</td>
<td>مقاربة مفهوم مركز الأبعاد المتناسبة اعتماداً على أمثلة فيزيائية. والتذكير بقانون ارخميدس،و علاقة شال</td>
</tr>
<tr>
<td>دور المدرس
ودور الطالب</td>
<td>طرح الأسئلة المخصصة في الانطلاقة النشطة وتوجيه الطلاب في الإجابة عنها للوصول إلى الهدف</td>
</tr>
<tr>
<td>آلية التنفيذ
٢٥د</td>
<td>* بعد قراءة مقدمة الانطلاقة النشطة يسأل المدرس الأسئلة التالية لمقاربة مركز الأبعاد المتناسبة على قوانين فيزيائية:
ما هو قانون أرخميدس؟ .ما هي علاقة شال؟
ما هو مركز ثقل مثلث؟ .ما هي علاقة توازن ميزان؟
* يثبت المدرس القوانين السابقة على السبورة.و يرسم المدرس الشكل:


* يطرح الأسئلة التالية: طبق قانون أرخميدس على الشكل.
– حول العلاقة $m'GB = m\,GA$ إلى علاقة شعاعيه.
– ماذا تستنتج؟
* يحل الطلاب الأسئلة ①، ② ، ③ في الكتاب
* يحاور المدرس الاستنتاجات وصولاً إلى التسمية الرياضية لمركز التوازن وهي مركز الأبعاد المتناسبة.</td>
</tr>
<tr>
<td>الأشعة- تذكرة وتتمات
من الصف العاشر
نظيم شعاع
الارتباط الخطي لشعاعين</td>
<td>الهدف</td>
<td>تذكير الطالب بما تعلمه في الصف الأول الثانوي ومتابعة بحث الأشعة وتوظيفها في حل المسائل وفي مواقف حياتية
قياس قدرة الطالب على توظيف الأشعة والنظيم</td>
</tr>
</table>

	دور المدرس ودور الطالب	* يذكر المدرس الطلاب بمفهوم نظيم شعاع (طويلة شعاع). * يطرح المدرس الأسئلة: ١. إذا كان $\lVert\overrightarrow{AB}\rVert=0$ ماذا تستنتج؟ ٢- مناقشة المساواة $\vec{v}=k\vec{u}$ حسب إشارة k ٣..ناقش ناتج $\lVert k\vec{u}\rVert$ حسب إشارة k. * في مستو مزود بمعلم متجانس كيف نحسب نظيم $\vec{u}(x,y)$ ؟
	آلية التنفيذ **٢٠د**	يطلب المدرس حساب نظيم شعاع علمت مركباته في نهاية الحصة يطلب المدرس من الطلاب حل تمارين تدرب
مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين	**الهدف**	تعريف وتحديد وإنشاء مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين. توظيف مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين
	دور المدرس ودور الطالب	شرح ومناقشة المبرهنات مع الإثبات. طرح الأسئلة. توجيه الطلاب ومساعدتهم للوصول للإجابة الصحيحة.
	آلية التنفيذ ٢٥ دقيقة	يعرض المدرس مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين وفق ما يلي: * إثبات وجود ووحدانية مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين مثقلتين. * صياغة تعريف مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين مثقلتين. * مناقشة إثبات مبرهنة (التجانس) واستخلاص النتيجة. * استنتاج منتصف قطعة مستقيمة. * توظيف مركز الأبعاد المتجانسة في اختزال العبارة $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$

تكريساً للفهم	الهدف	تبدأ هذه الفقرة بسؤال يوضح مدى فائدة مركز الأبعاد المتاسبة والوصول إلى تعريف آخر للمستقيم
	دور المدرس ودور الطالب	طرح أسئلة تغذية راجعة.
	آلية التنفيذ	* يسأل المدرس أسئلة تكريساً للفهم ١. كيف نميز نقاط مستقيم بالاستفادة من مركز الأبعاد المتناسبة؟ ٢. كيف نعبر عن مساواة شعاعيه بالاستفادة من مركز الأبعاد المتناسبة؟ ويناقش الطلاب للوصول للإجابات ٣. ما السبب الذي يجعل الشرط $\alpha+\beta\neq 0$ شرطاً ضرورياً؟ * يناقش المدرس مثال صفحة ١٩. الخلاصة: هي إعطاء تعريف جديد للمستقيم بالاستفادة من مركز الأبعاد المتناسبة. *يطلب المدرس من الطلاب حل تمارين تدرب تدرب **ص ٢٠** تُعطى كواجب منزلي يتم مناقشة حلولها في الحصة التالية. * يمكن اختيار من التمرين ① الطلبين ❷ و ❹ * نحل كامل التمرينين رقم ② ورقم ③.
مركز الأبعاد	الهدف	دراسة مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط
	دور المدرس ودور الطالب	شرح ومناقشة المبرهنات مع الإثبات. طرح الأسئلة. توجيه الطلاب

	آلية التنفيذ	يعرض المدرس مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط وفق ما يلي: * إثبات وجود ووحدانية مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط مثقلة. * استخلاص نتيجة تجانس مركز الأبعاد المتناسبة. * إثبات مبرهنة الخاصة التجميعية. * مناقشة حل مثال صفحة ٢٢. * تعميم دراسة مركز الأبعاد لتتضمن n نقطة في المستوي.
تكريساً للفهم	**الهدف**	**الوظيفة** تدرب صفحة ٢٤.
	دور المدرس ودور الطالب	طرح أسئلة تغذية راجعة
	آلية التنفيذ	* يعرض المدرس **نتيجة مفيدة للمبرهنة٦** حيث يوضح إذا كانت G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ –إذا كان $\beta+\gamma\neq 0$: عندئذٍ المستقيمان $(AG),(BC)$ متقاطعان في النقطة A' مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(C,\gamma),(B,\beta)$. –إذا كان $\beta+\gamma=0$: عندئذٍ المستقيمان $(BC),(AG)$ متوازيين. * يسأل المدرس أسئلة تكريساً للفهم ويجيب الطالب بناءً على ما تم اكتسابه: **١. ما فائدة المبرهنة ٦؟** ويعرض مثال: كيف نثبت تلاقي مستقيمات؟ ومثال: كيف نثبت وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة؟ يطلب المدرس من الطلاب حل تمارين تدرب تُعطى كواجب منزلي يتم مناقشة الحلول في الحصة التالية

<table dir="rtl">
<tr><td rowspan="3">إحداثيتا مركز الأبعاد المتناسبة في المستوي</td><td>الهدف</td><td>تحديد مركز الأبعاد المتناسبة تحليلياً.</td></tr>
<tr><td>دور المدرس
ودور الطالب</td><td>تغذية راجعة. حل الأمثلة.
الإجابة عن الأسئلة
توجيه الطلاب</td></tr>
<tr><td>آلية التنفيذ</td><td>يعرض المدرس نص المبرهنة٧ ويسأل:
١- اكتب العلاقة الشعاعية لمركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط مثقلة حسب المبرهنة ٥.
٢-إذا عوضنا O = M ماذا نستنتج؟
٣- استنتج إحداثيتا النقطة G؟
* يحل الطلاب مثال صفحة ٢٦ ويستنتجوا إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة.
* يحل الطلاب أمثلة صفحة ٢٧ بالاستفادة من المبرهنة7.
* يطلب المدرس من الطلاب حل تمارين تدرب تُعطى كواجب منزلي ويتم مناقشة الحلول في الحصة التالية.
تدرب صفحة ٢٨ وظيفة</td></tr>
<tr><td>الأنشطة</td><td>الهدف</td><td><u>نشاط١</u>
١الاستفادة من الخاصة الشعاعية المميزة لنقطة تلاقي الارتفاعات.
٢.تحديد مستقيم أولر.
٣.إثبات أن نظائر نقطة تلاقي الارتفاعات بالنسبة إلى منتصفات أضلاع مثلث تقع على دائرة واحدة.</td></tr>
</table>

		٤. إثبات أن نظائر نقطة تلاقي الارتفاعات بالنسبة إلى منتصفات أضلاع مثلث تقع على دائرة واحدة. <u>نشاط٢</u> إنشاء مركز الأبعاد المتناسبة لأربع نقاط.
	دور المدرس ودور الطالب	ميسر وموجه. تغذية راجعة حل الأنشطة تغذية راجعة حل التمرينات والمسائل
	آلية التنفيذ	يعرض المدرس نشاط١ ويطلب من الطلاب حله ثم يناقش الطلاب بالحل. يعرض المدرس نشاط٢ويطلب من الطلاب حلها ثم يناقش الحل معهم.
تمرينات ومسائل	**الهدف**	تقويمي لقياس مدى قدرة الطالب على توظيف مركز الأبعاد في اثبات التوازي ، وقوع نقاط على استقامة واحدة ، إيجاد المحل الهندسي لمجموعة نقاط
	دور المدرس ودور الطالب	ميسر وموجه تغذية راجعة
	آلية التنفيذ	يطلب المدرس من الطلاب حل تمرينات ومسائل في الحصة وما يتبقى تُعطى كواجب منزلي. بحيث تتضمن مسائل تشمل أهدافاً مختلفة وتغطي جميع الأهداف المذكورة
لنتعلم البحث معاً	**الهدف**	تزويد الطالب بمنهجية التفكير الاستقصائي
	دور المدرس ودور الطالب	حل مسائل وتمارين قدماً إلى الأمام.

	آلية التنفيذ	يعرض المدرس مسائل لنتعلم البحث معاً ويناقشهم في الحل ويطلب من الطلاب حلها وفق الآلية المعروضة في الكتاب، ثم صياغة الحل وكتابته بلغة سليمة.
قدماً إلى الأمام	**الهدف**	تعزيز مهارات حل المسائل والتفكير الناقد.
قدماً إلى الأمام	**دور المدرس ودور الطالب**	حل المشكلات
قدماً إلى الأمام	**آلية التنفيذ** **٣٥د**	يطلب المدرس من الطلاب حل تمارين ومسائل قدماً إلى الأمام يمكن اختيار من مسائل قدماً إلى الأمام 14 ، 16 ، 20 ، 21.

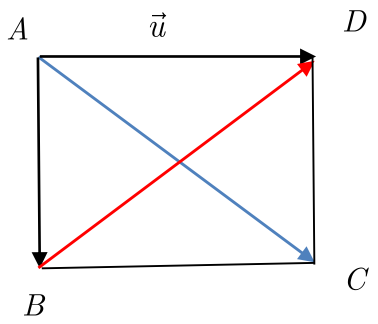
الوحدة الأولى مركز الأبعاد المتناسبة

تدرّب ١٦

① ليكن $ABCD$ مستطيلاً فيه $AB = 4\,\text{cm}$ و $AD = 3\,\text{cm}$. نعرّف $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. مثّل الشعاعين $\vec{u} + \vec{v}$ و $\vec{u} - \vec{v}$، ثُمّ احسب $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ و $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

الحل

لماكان $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ و $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{DB}$ كان



$\vec{v}$

وهما قطرا مستطيل

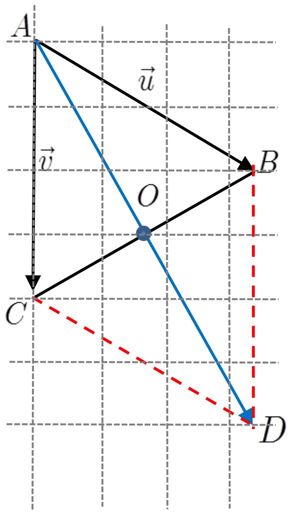
$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

② ليكن ABC مثلّثاً متساوي الأضلاع طول ضلعه $4\,\text{cm}$. نعرّف $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

١. توثّق أنّ $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{CB}$، واستنتج قيمة $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

٢. عيّن النقطة D التي تحقّق $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$. ما نوع الرباعي $ABDC$؟ استنتج قيمة $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

الحل



١.

$$\begin{aligned}\vec{u} - \vec{v} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\\ &= \overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\| = \left\|\overrightarrow{CB}\right\| = 4$$

٢. نرسم متوازي الأضلاع $ABCD$ فيكون

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ بما أن $AB = AC$ فالرباعي $ABCD$ معين

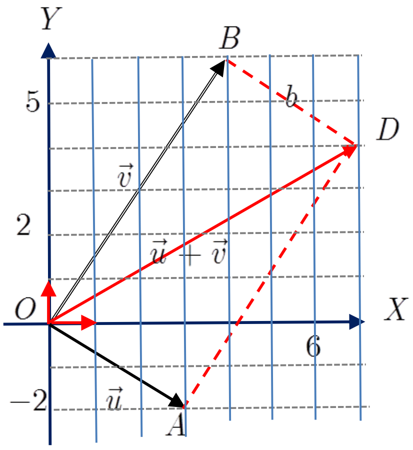
$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \left\|\overrightarrow{AD}\right\| = 2.\left\|\overrightarrow{AO}\right\| = 2 \times 4.\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

③ في مستوٍ مزوّد بمَعْلَم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، نتأمّل الشعاعين $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ و $\vec{v} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$.

١. أثبت أنّ $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

٢. نتأمّل الشعاعين $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. ما هي طبيعة المثلّث OAB ؟

الحل



١.

$$\vec{u}+\vec{v} = (4+3)\vec{i} + (6-2)\vec{j} = 7\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (7)^2 + (4)^2 = 49 + 16 = 65$$

$$\|\vec{u}\|^2 = (4)^2 + (6)^2 = 16 + 36 = 52$$

$$\|\vec{v}\|^2 = (3)^2 + (-2)^2 = 9 + 4 = 13$$

$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = 52 + 13 = 65$$

إذن $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

٢. من العلاقة الأخيرة نستنتج أنّ OBD قائم في B أي $\overrightarrow{BD}$ عمودي على $\overrightarrow{OB}$ أي $\overrightarrow{OA}$ عمودي على $\overrightarrow{OB}$، فالمثلث OAB قائم في O

تدرّبْ ص ٣٠

① نعطي النقطتين A و B، ونعرّف G بالشرط المبيَّن أدناه. عيّن عددين α و β كي تكون النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) و (B,β). وذلك في الحالات الآتية.

❶ $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{GB}$.

❸ $2\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

❷ $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

❹ إذا كانت النقطة G نظيرة B بالنسبة إلى A.

الحل

❶ $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{GB}$

بما أن $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ فإن $-\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ أي $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

ومنه $\alpha = 1, \beta = 1$

❷ $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

أو $2\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ $-1 \cdot \overrightarrow{GA} + \vec{0} = \vec{0}$ ومنه $\alpha = -1, \beta = 0$

❸ $2\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ باستخدام علاقة شا ل $2\overrightarrow{GB} - 3(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) = \vec{0}$ بالجمع نجد

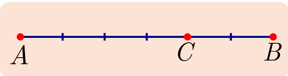
$3\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

ومنه $\alpha = 3, \beta = -1$

❹ G نظيرة B بالنسبة لـ A ومنه:

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$-2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

ومنه $\alpha = -2, \beta = 1$



② النقاط A و B و C مبيّنة في الشكل المجاور. عيّن في كلٍّ من الحالات الآتية عددين α و β يحقّقان الشرط المعطى.

❶ A هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (B,α) و (C,β).

❷ B هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (C,β).

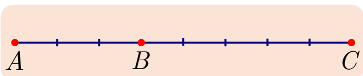
❸ C هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (B,β).

الحل

❶ لنبحث عن عددين (α,β) بحيث $\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

من الرسم نجد $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB}$ وباستخدام علاقة شال $\overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$ أي $3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ومنه $\alpha = -2, \beta = 3$

باقي التمارين بطريقة مماثلة.



③ النقاط A و B و C مبيّنة في الشكل المجاور. عيّن في كلٍّ من الحالات الآتية عددين α و β يحقّقان الشرط المعطى.

❶ A هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (B,α) و (C,β).

❷ B هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (C,β).

❸ C هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (B,β).

الحل

❶ لنبحث عن عددين (α,β) بحيث $\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

من الرسم نجد $3\overrightarrow{BC}+5\overrightarrow{BA}=\vec{0}$ باستخدام علاقة شال $3(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})+5\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

وبالإصلاح نجد $3\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{BA}=\vec{0}$ أي $-8\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ **ومنه**

$\alpha=-8, \beta=3$

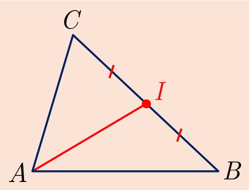
وباقي التمارين بطريقة مماثلة.

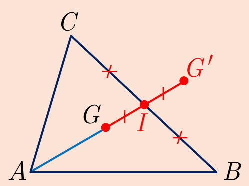
تدريب ص٢٥

① ABC مثلّث فيه I منتصف $[BC]$.

❶ أثبت أنّ $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

❷ أتكون A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(I,-2)$؟





الحل

❶ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB})+(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC})$

ولما كان $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ كان $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$

أي $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

❷ بما أن C و I و B على استقامة واحدة فأي مركز أبعاد متناسبة لهذه النقاط يجب أن يقع على نفس الاستقامة وبما أن A لا تنتمي إلى المستقيم BC. فإن A مستحيل أن تكون مركز أبعاد متناسبة للنقاط المذكورة .

وبكلام أخر

بما أن $-2+1+1=0$ بالتالي لا يوجد مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(I,-2)$

② النقطة G مركز ثقل ABC. و G' نظيرة G بالنسبة إلى I منتصف $[BC]$.

❶ أثبت أنّ G هي منتصف $[AG']$.

❷ أثبت أنّ G' هي مركز أبعاد متناسبة للنقاط A و B و C بعد إسناد ثوابت يطلب تعيينها إلى هذه النقاط.

الحل

❶ نعلم أن $\overrightarrow{GG'}=2\overrightarrow{GI}=2.\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}\right)=-\overrightarrow{GA}$ ومنه G هي منتصف $[AG']$

❷ نبحث عن ثلاثة أعداد α,β,γ بحيث $\alpha\overrightarrow{G'A}+\beta\overrightarrow{G'B}+\gamma\overrightarrow{G'C}=\vec{0}$

لدينا $*$ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ، ولكن $\overrightarrow{GA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{G'A},\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{CG'},\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{BG'}$ ،

نعوّض في $*$ فنجد $\frac{1}{2}\overrightarrow{G'A}-\overrightarrow{G'C}-\overrightarrow{G'B}=\vec{0}$ ، ومنه G' هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $\left(A,\frac{1}{2}\right),(B,-1),(C,-1)$

③ ليكن المثلّث ABC . ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,1)$ و $(B,4)$ و $(C,-3)$.

❶ أنشئ النقطة H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(B,4)$ و $(C,-3)$.

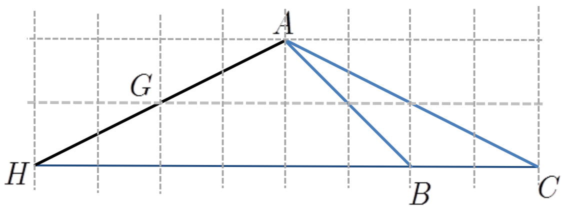
❷ استنتج أنّ G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,1)$ و $(H,1)$. ثُمّ أنشئ النقطة G .

الحل

❶ $-3\overrightarrow{HC}+4\overrightarrow{HB}=\vec{0}$ ومنه $\overrightarrow{HC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{HB}$

$-3\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MH}$ وبافتراض أن $M=B$ فإن $-3\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}$

❷ بما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,1)$ و $(B,4)$ و $(C,-3)$ فإن G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,1)$ و $(H,4-3)$ أو $(A,1)$ و $(H,1)$. ومنه G منتصف AH .



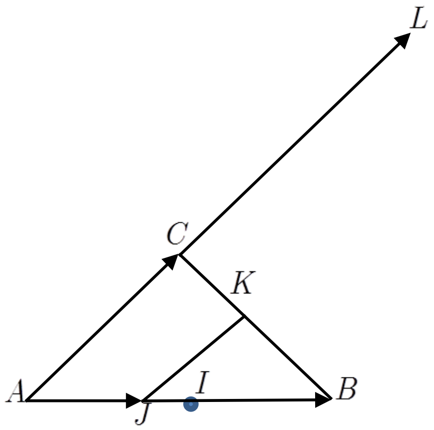
تدرّب ص٢٨

① نتأمّل مثلّثاً ABC ، والنقاط I و J و L المعرّفة كما يأتي I منتصف الضلع $[AB]$ و $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AL}=3\overrightarrow{AC}$. المستقيم المار بالنقطة J موازياً (AC) يقطع المستقيم (BC) في K . نتأمّل المَعلَم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

١. احسب إحداثيّات النقاط I و K و L .

٢. أثبت أنّ النقاط I و K و L تقع على استقامة واحدة.

الحل



١. $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ إذن $I\left(\frac{1}{2},0\right)$ ، $\overrightarrow{AL}=3\overrightarrow{AC}$ إذن $L(0,3)$

من تشابه المثلثين BAC,BJK : $\frac{JK}{AC}=\frac{JB}{AB}=\frac{3}{5}$

إذن $\overrightarrow{JK}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{JK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ ومنه $K\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$

٢. $\overrightarrow{IK}=\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right)$ ومنه $\overrightarrow{IK}\left(-\frac{1}{10},\frac{3}{5}\right)$ و $\overrightarrow{IL}\left(-\frac{1}{2},3\right)$

$$xy'-x'y=-\frac{1}{10}(3)-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{-3}{10}+\frac{3}{10}=0$$

إذن $\overrightarrow{IK},\overrightarrow{IL}$ مرتبطان خطياً والنقاط L,K,I على استقامة واحدة .

② $ABCD$ مربّع طول ضلعه $5\,\text{cm}$ نهدف في هذا التمرين إلى إنشاء G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و $(D,4)$.

١. أنشئ النقطة I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,1)$ و $(D,4)$.

٢. أنشئ النقطة J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(B,2)$ و $(C,3)$.

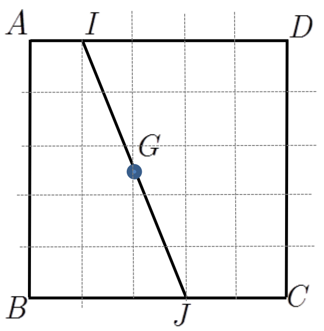
٣. أثبت أنّ G هو منتصف القطعة المستقيمة $[IJ]$ وأنشئه.

الحل

١. $4\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IA}=\vec{0}$ ومنه $4\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ أي $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{DA}$

أو $4\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA}=5\overrightarrow{MI}$ ، نطبقها على D فنجد $\overrightarrow{DA}=5\overrightarrow{DI}$

وبالتالي $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{DA}$



يمكن الحل مباشرة بتطبيق الدستور

$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ * بالتعويض نجد

$\overrightarrow{DI}=\frac{1}{4+1}\overrightarrow{DA}$ ومنه $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{DA}$

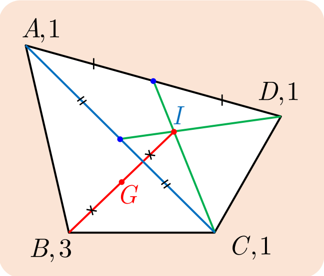
٢. $\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{2+3}\overrightarrow{CB}$ ومنه $\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CB}$

٣. G مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(C,3),(B,2),(A,1)$ وَ $(D,4)$ فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(I,5),(J,5)$

$5\overrightarrow{GI}+5\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$ إذن $\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{GJ}$ أي أن G منتصف $[IJ]$.

③ يُبيّن الشكل المجاور إنشاءً للنقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,3)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$. علّل صحّة هذا الإنشاء.

الحل



بفرض I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$ فيكون I مركز ثقل المثلث ADC.

بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(I,3),(B,3)$ ، فيكون G منتصف $[IB]$ ، إذن G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(A,1)$ و $(B,3)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$.

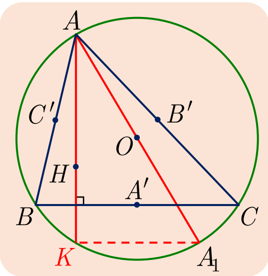
أنشطة

نشاط 1 الاثبات بالاستفادة من الأشعّة. مستقيم أولر *Euler*

نتأمّل في هذا النشاط مثلّثاً ABC فيه O مركز الدائرة $\mathcal{C}$ المارّة برؤوسه، و G مركز ثقله، و A' و B' و C' هي على التوالي منتصفات الأضلاع $[BC]$ و $[CA]$ و $[AB]$. يتضمّن هذا النشاط أربعة أجزاء.

❶ الخاصّة الشعاعيّة المميّزة لنقطة تلاقي الارتفاعات

لنرمز بالرمز H إلى النقطة المعرّفة بالعلاقة (1) الآتية $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. الهدف من هذا الجزء هو إثبات أنّ النقطة H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلّث ABC.



① أثبت انطلاقاً من (1) أنّ $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OA'}$.

② أثبت أنّ (AH) عمودي على (BC).

③ أثبت أنّ (BH) عمودي على (AC). واستنتج المطلوب.

الحل

❶ ① $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\cdot\overrightarrow{OA'}$

② $\overrightarrow{AH}=2.\overrightarrow{OA'}$ ، فالشعاعان $\overrightarrow{AH},\overrightarrow{OA'}$ مرتبطان خطياً وبالتالي $(AH)//(OA')$، وبما أن (OA') عمودي على (BC) فإن (AH) عمودي على (BC).

③ بنفس الطريقة نثبت أن $\overrightarrow{BH}=2.\overrightarrow{OB'}$ ، أي $(BH)//(OB')$، وبما أن (OB') عمودي على (AC) فإن (BH) عمودي على (AC). إذن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC

❷ مستقيم أولر

① أثبت صحة العلاقة (2) الآتية: $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

② a. أثبت أنّه إذا انطبقت نقطتان من بين النقاط O و G و H انطبقت الثالثة عليهما. واستنتج أنّه في هذه الحالة يكون المثلّث ABC متساوي الأضلاع.

b. وبالعكس، نفترض أنّ ABC متساوي الأضلاع. أثبت أنّ O و G و H منطبقة.

c. ماذا يمكننا القول عن النقاط O و G و H إذا لم يكن المثلّث متساوي الأضلاع.

إذا لم يكن المثلّث متساوي الأضلاع. أسمينا المستقيم المار بالنقاط O و G و H **مستقيم أولر**.

الحل

① ❷ من خواص G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الثلاث وبما أن $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ نجد $\overrightarrow{OH}=3.\overrightarrow{OG}.......\ 2$.

② a. إذا انطبقت H و G نعوض في 2 نجد $\overrightarrow{OH}=3.\overrightarrow{OH}$ ومنه $\overrightarrow{OH}=\vec{0}$ ، أي H و O منطبقتان . بالمثل نثبت أنه إذا انطبقت H و O انطبقت G عليهما . وإذا انطبقت G و O انطبقت H عليهما ، وبالتالي ارتفاعات المثلث هي ذاتها محاور أضلاعه وذاتها متوسطاته فهو مثلث متساوي الأضلاع.

b. إذا كان ABC مثلث متساوي الأضلاع فإن كل من المتوسطات ومحاور الأضلاع والارتفاعات تلتقي في نقطة واحدة أي H,G,O منطبقة

c. وجدنا أن $\overrightarrow{OH}=3.\overrightarrow{OG}$، فإذا لم يكن المثلث متساوي الأضلاع فالنقاط O,H,G على استقامة واحدة (مستقيم أويلر)

❸ النظائر بالنسبة إلى منتصفات الأضلاع

الهدف من هذا الجزء أن نثبت أنّ نظائر النقطة H بالنسبة إلى منتصفات أضلاع المثلّث ABC تقع على الدائرة $\mathcal{C}$.

① لتكن A_1 النقطة المُقابلة قطرياً للنقطة A على الدائرة $\mathcal{C}$. ولنعرّف I منتصف القطعة المستقيمة $[HA_1]$.

a. علّل صحّة المساواتين $2\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OA'}$.

b. استنتج أنّ $I=A'$ وأنّ A_1 هي نظيرة النقطة H بالنسبة إلى A'.

② عيّن مُبَرّراً، نظيرَتيْ H بالنسبة إلى كلٍّ من B' و C'، وأنجز البرهان.

الحل

① ❸ a. بما أن O منتصف $[AA_1]$ و I منتصف $[HA_1]$، فإن $2.\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{AH}$ (حسب خاصة القطعة المحدودة بمنتصفي ضلعين في المثلث) . وجدنا سابقاً أن $\overrightarrow{AH}=2.\overrightarrow{OA'}$ لذلك نستنتج أن

$2.\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{AH}=2.\overrightarrow{OA'}$

b. من العلاقة $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OA'}$ نستنتج أن A' منطبقة على I،إذاً A_1 نظيرة H بالنسبة للنقطة A' تقع على الدائرة C

② بنفس الطريقة نجد أن نظيرة H بالنسبة للنقطة B' هي B_1 نقطة تقاطع (HB') مع الدائرة C وَ نظيرة H بالنسبة للنقطة C' هي C_1 نقطة تقاطع (HC') مع الدائرة C

❹ النظائر بالنسبة إلى الأضلاع

الهدف من هذا الجزء أن نثبت أنّ نظائر H بالنسبة إلى أضلاع المثلّث ABC تقع على الدائرة C.

① لهذا، نرمز بالرمز K إلى النقطة الثانية التي يتقاطع فيها المستقيم (AH) مع الدائرة C. أثبت أنّ K هي نظيرة H بالنسبة إلى المستقيم (BC).

② عيّن بأسلوب مماثل، نظيرَيْ H بالنسبة إلى كلٍّ من (AC) و (AB)، وأنجز البرهان.

الحل

① ❹ الزاوية AKA_1 محيطية تقابل قوس نصف الدائرة فهي زاوية قائمة ، فالمستقيمان $(BC),(KA_1)$ متوازيان (لأنهما عمودان على (AK))

في المثلث HA_1K ، بما أن $(A'B)$ يوازي (KA_1) ويمر من منتصف $[HA_1]$ فهو يمر أيضاً من منتصف $[HK]$ ،إذاً K نظيرة H بالنسبة لـ (BC)

②بالمثل نجد أن نظيرة H بالنسبة إلى (AB) هي نقطة تقاطع الارتفاع (CH) مع الدائرة C وَ نظيرة H بالنسبة إلى (AC) هي نقطة تقاطع الارتفاع (BH) مع الدائرة C ،إذاً نظائر H بالنسبة لأضلاع المثلث تقع على الدائرة .

نشاط 2 إنشاء مركز الأبعاد المتناسبة لأربع نقاط

الهدف من هذا النشاط هو إنشاء مركز الأبعاد المتناسبة لأربع نقاط مثقّلة بطرائق مختلفة، وذلك بدراسة المثال الآتي. نتأمّل مضلّعاً رباعياً $ABCD$، ونرغب بإنشاء النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,-3)$ و $(D,1)$ والمعرّف بالعلاقة

$$2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$$

❶ الطريقة الأولى

① عبّر، في حالة نقطة M من المستوي، عن المقدار $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$.

② استنتج عبارة $\overrightarrow{GB}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$.

③ أنشئ إذن النقطة G.

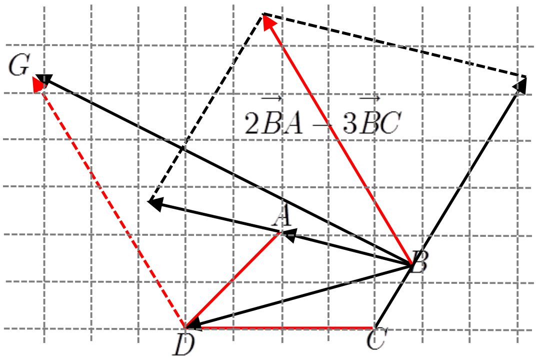
الحل

① $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=(2+1-3+1)\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MG}$

②نعوض B في مكان M في العلاقة السابقة فنجد:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BG}&=2\overrightarrow{BA}+\vec{O}-3\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BA}-3\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\\&=2\overrightarrow{BA}-3\,\overrightarrow{BA}-3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=0\overrightarrow{BA}-3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

③



❷ الطريقة الثانية

ليكن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(B,1)$، وليكن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,-3)$ و $(D,1)$. عيّن النقطتين I و J، واستنتج أنّ $3\overrightarrow{GI}-2\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$. ثُمّ أنشئ النقطة G.

الحل

I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1),(A,2)$ و J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,1),(C,-3)$ فيكون باستخدام القاعدة (G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,\alpha),(B,\beta)$ فهي تحقق $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}.\overrightarrow{AB}$)

نجد أن $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ وأن $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{-2}\overrightarrow{CD}$

إذن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقط الأربع هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,3),(J,-2)$ فهي تحقق $3\overrightarrow{GI} - 2\overrightarrow{GJ} = \vec{0}$ أي $\overrightarrow{IG} = \frac{-2}{1}\overrightarrow{IJ}$ ومنه $\overrightarrow{IG} = -2\overrightarrow{IJ}$.

❸ الطريقة الثالثة

ليكن K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(D,1)$ ، وليكن L مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$ و $(D,1)$.

① علّل لماذا تكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(L,2)$.

② أثبت أنّ G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(K,4)$ و $(C,-3)$. ثُمّ أنشئ G.

الحل

①مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1),(D,1)$ هو L أي L منتصف $[DB]$ فيكون مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(B,1),(D,1),(A,2)$ هو K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(L,1+1),(A,2)$ أي $(L,2),(A,2)$ فيكون K منتصف $[AL]$

② بالتالي G مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(D,1),(C,-3),(B,1),(A,2)$ هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,-3),(K,2+2)$ أي $(C,-3),(K,4)$

$\overrightarrow{CG} = \frac{4}{4-3}\overrightarrow{CK}$ أي $\overrightarrow{CG} = 4\overrightarrow{CK}$.

تمرينات ومسائل ص ٣٣

١ نتأمّل في مستوٍ مزوّد بمَعْلَم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ النقاط A و B و C المعيّنة بالعلاقات

$$\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OB} = (-2-\sqrt{3})\vec{i} + (2\sqrt{3}-1)\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OC} = (-2+\sqrt{3})\vec{i} - (2\sqrt{3}+1)\vec{j}$$

① احسب نظيم كلٍّ من الأشعّة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$.

② استنتج طبيعة المثلّث ABC.

الحل

① من المعطيات نجد أن $C(-2+\sqrt{3},-2\sqrt{3}-1), B(-2-\sqrt{3},2\sqrt{3}-1), A(4,2)$

فيكون:

$$\overrightarrow{AB} = (-2-\sqrt{3}-4)\vec{i} + (2\sqrt{3}-1-2)\vec{j} = (-6-\sqrt{3})\vec{i} + (2\sqrt{3}-3)\vec{j}$$
$$\overrightarrow{AC} = (-2+\sqrt{3}-4)\vec{i} + (-2\sqrt{3}-1-2)\vec{j} = (-6+\sqrt{3})\vec{i} + (-2\sqrt{3}-3)\vec{j}$$
$$\overrightarrow{BC} = (-2+\sqrt{3}+2+\sqrt{3})\vec{i} + (-2\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}+1)\vec{j} = 2\sqrt{3}\vec{i} + (-4\sqrt{3})\vec{j}$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-6-\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3}-3)^2} = \sqrt{36+12\sqrt{3}+3+12-12\sqrt{3}+9} = \sqrt{60}$$
$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-6+\sqrt{3})^2 + (-2\sqrt{3}-3)^2} = \sqrt{36-12\sqrt{3}+3+12+12\sqrt{3}+9} = \sqrt{60}$$
$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{12+48} = \sqrt{60}$$

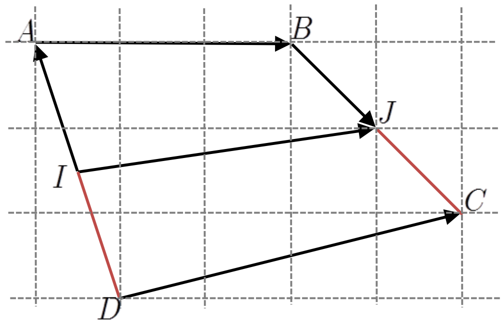
② المثلث ABC متساوي الأضلاع.

٢ A و B و C و D أربع نقاط في المستوي، I منتصف $[AD]$ و J منتصف $[BC]$.

① أثبت أنّ $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$.

② عبّر عن $\overrightarrow{IJ}$ بطريقة أخرى واستنتج أنّ $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

الحل



① $(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{IJ}$

إذاً $\quad 1 \quad \overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}$

② أيضاً نجد أن $\quad 2 \quad \overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CJ}$

بالجمع نجد

$$\overrightarrow{IJ}=(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CJ})$$
$$=\quad \vec{0} \quad+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\quad \vec{0}$$
$$2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$$

٣ $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O. I منتصف $[AB]$ و J نقطة تُحقّق $\overrightarrow{DJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

① علّل صحة المساواة $\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

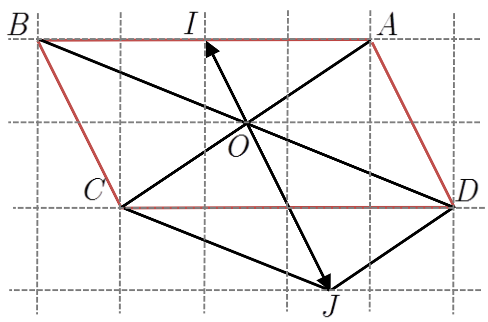
② أثبت أنّ $\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BC}$.

③ أثبت أنّ النقاط O و I و J تقع على استقامة واحدة.

الحل

① في المثلث ABC بما أن Oمنتصف $[AC]$، I منتصف $[AB]$ فإن $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$، أي

$$\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$



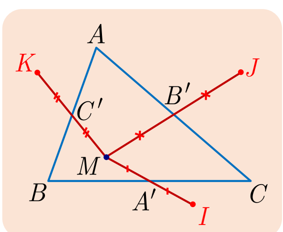
② $\overrightarrow{DJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$ ، فالرباعي $DJCO$متوازي أضلاع فيكون $\quad \overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{CJ}$ و

$$\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BC}$$

③ $\begin{cases}\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{BC}\end{cases}$ إذن $\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OJ}$ فالشعاعان

$\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$مرتبطان خطياً، والنقاط J,O,I على استقامة واحدة.

٤ نتأمّل مثلّثاً ABC. النقاط A' و B' و C' هي منتصفات الأضلاع $[BC]$ و $[CA]$ و $[AB]$ بالترتيب. لتكن M نقطة ما، ولنعرّف I و J و K نظائر النقطة M بالنسبة إلى النقاط A' و B' و C'.



① أثبت أنّ $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AJ}$ و $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CI}$.

② أثبت أنّ المستقيمات (AI) و (BJ) و (CK) تتلاقى في نقطة واحدة، وعيّن موضع نقطة التلاقي هذه.

الحل

① كل من الرباعيات $MBKA, CMAJ, BMCI$ متوازي أضلاع لتناصف قطريه

في متوازي الأضلاع $AKBM$ يكون $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{MB}$

في متوازي الأضلاع $BMCI$ يكون $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{MB}$ ومنه $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CI}$

في متوازي الأضلاع $CMAJ$ يكون $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{MC}$

في متوازي الأضلاع $BMCI$ يكون $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{MC}$ ومنه $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AJ}$

② بما أن $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CI}$ فالرباعي $AKIC$ متوازي أضلاع ، و بما أن $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AJ}$ فالرباعي $AJIB$ متوازي أضلاع ، لكن متوازيي الأضلاع $AKIC$ و $AJIB$ يشتركان بالقطر $[AI]$ وبما أن قطري كل منهما متناصفان فإن منتصف $[AI]$ هو نقطة تقاطع الأقطار الثلاث $[CK],[BJ],[AI]$.

٥ ليكن المثلّث ABC. وليكن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,2)$ و $(B,1)$، وليكن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(B,1)$ و $(C,-2)$، وليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,-2)$.

① أثبت وقوع النقاط A و J و G على استقامة واحدة، وكذلك الأمر بالنسبة إلى النقاط C و I و G.

② استنتج أنّ G هي نقطة تقاطع مستقيمين يُطلب تعيينهما. وأنشئ النقطة G.

③ أثبت توازي المستقيمين (BG) و (AC).

الحل

① بما أن J مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين $(B,1)$ و $(C,-2)$، فإن Gمركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,-2)$ هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(J,-1),(A,1)$، فهو يقع على المستقيم AJ، أي النقاط A و J و G على استقامة واحدة، بما أن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(B,1),(A,2)$ إذن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(C,-2),(I,3)$ فالنقاط G,I,C على استقامة واحدة

② G نقطة تقاطع المستقيمين AJ, CI

③ طريقة ١: بما أن $\alpha + \gamma = 2 + (-2) = 0$ فإن (CA) يوازي (BG).

طريقة ٢: G مركز أبعاد للنقطتين المثقلتين $(J,-1),(A,2)$

$$2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GJ} = 0$$
$$\overrightarrow{GJ} = 2\overrightarrow{GA}$$

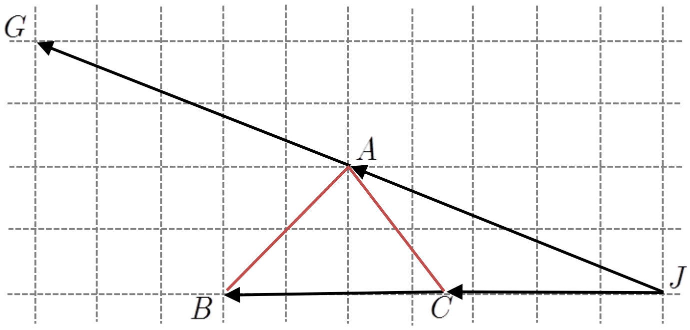
ومنه نجد أن A منتصف $[JG]$ 1

J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(C,-2),(B,1)$

$$\overrightarrow{JB} - 2\overrightarrow{JC} = 0$$

$\overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{JC}$ ومنه نجد أن C منتصف $[JB]$ 2

من 1 و 2 نجد انه في المثلث JGB يكون (CA) يوازي (BG).



٦ ليكن ABC مثلّثاً مركز ثقله G. نهدف في هذا التمرين إلى تعيين المجموعة Δ مجموعة النقاط M في المستوي التي يكون عندها الشعاعان $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطّياً.

① أثبت أنّ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

② أثبت أنّ قولنا « M تنتمي إلى Δ» يُكافئ قولنا «الشعاعان $\overrightarrow{MG}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيّاً».

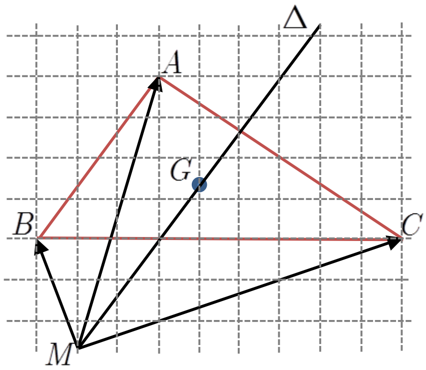
③ استنتج المجموعة Δ وأنشئها.

الحل

① إن G مركز الأبعاد إلى $(A,1),(B,1),(C,1)$، لتكن M نقطة من المستوي فيكون
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}=\vec{u}$ ،

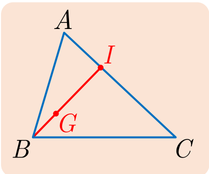
② $\vec{u}$مرتبط خطياً مع $\overrightarrow{MG}$ وحتى يكون مرتبط خطياً مع $\overrightarrow{AB}$ يجب أن يكون $\overrightarrow{AB}$ مرتبط خطياً مع $\overrightarrow{MG}$.

③ أي أن Δ هو المستقيم المار من Gموازياً $[AB]$.



٧ ليكن المثلّث ABC . نعرّف النقطتين I و G بالعلاقتين:

$$\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BI} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$



① أثبت أنّ I هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(C,1)$ ، واختزل المجموع $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}$.

② أثبت $2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GI}=\vec{0}$.

③ احسب المقدار $2\overrightarrow{GA}+6\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}$ واستنتج أنّ G هو مركز أبعاد متناسبة للنقاط A و B و C بعد أن نسند إليها ثوابت يُطلب تعيينها.

الحل

① بما أن $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ فإن $\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{AI}$ فيكون:

$2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{AI}=2(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AI})=\vec{0}$ ، إذن Iمركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,2),(C,1)$

$$2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=2(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA})+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}=3\overrightarrow{GI}+\vec{0}=3\overrightarrow{GI}$$

$$2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GI}\ldots\ldots(*)$$

② بما أن $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$ فإن $\overrightarrow{GI}=2\overrightarrow{BG}$ فيكون:

$$2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GI}=2\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{BG}=2(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BG})=\vec{0}$$

③ حسب * نعوض $2\overrightarrow{GA}+6\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GI}+6\overrightarrow{GB}=6\overrightarrow{BG}+6\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

أي أن G مركز الأبعاد إلى $(A,2),(B,6),(C,1)$.

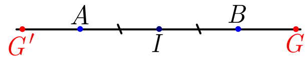
لنتعلّم البحث معاً

٨ علاقات شعاعيّة، ومركز الأبعاد المتناسبة

لتكن القطعة المستقيمة $[AB]$. وليكن I منتصف $[AB]$. نتأمّل G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (B,β)، ونتأمّل G' نظيرة G بالنسبة إلى I.

جد ثابتين α' و β' يجعلان G' مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين (A,α') و (B,β').

الحل



بما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(A,\alpha),(B,\beta)$ ، فإن $\alpha.\overrightarrow{GA}+\beta.\overrightarrow{GB}=\vec{0}......\quad *$

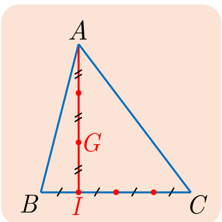
حسب خواص التناظر بالنسبة للنقطة I يكون $[AG'],[BG]$ متناظران فهما طبوقان، إذن :

$\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{G'A}$ و $[BG'],[AG]$ متناظران فهما طبوقان ومنه $\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{G'B}$

نعوض في العلاقة $*$ فنجد $-\alpha.\overrightarrow{G'B}-\beta\cdot\overrightarrow{G'A}=\vec{0}$ و $-\beta\cdot\overrightarrow{G'A}-\alpha.\overrightarrow{G'B}=\vec{0}$

إذن G' مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(A,-\beta),(B,-\alpha)$

٩ الثوابت التي يجب إسنادها إلى ثلاث نقاط كي تكون نقطة معطاة مركز الأبعاد المتناسبة لهذه النقاط المثقّلة.



تأمّل الشكل المجاور ثُمّ جد الأعداد α و β و γ والتي تجعل G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة (A,α) و (B,β) و (C,γ).

الحل

من الشكل نجد أن $3\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IC}$ تكافئ $3\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ ، بالتالي I مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(\mathrm{C},1),(\mathrm{B},3)$.

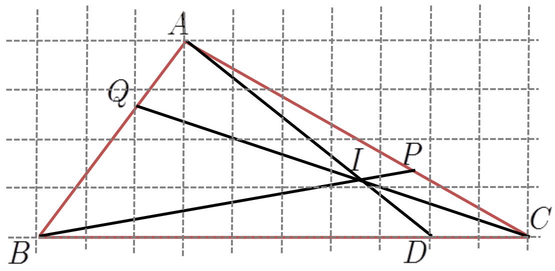
من الشكل نجد $2\overrightarrow{GI}=-\overrightarrow{GA}$ تكافئ $2\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GA}=\vec{0}$ أي $4\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GA}=\vec{0}$ ، بالتالي Gمركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(A,2),(I,4)$ ، وبالتالي Gمركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(A,2),(B,3),(C,1)$ ، أي $\alpha=2,\beta=3,\gamma=1$.

١٠ تحديد موضع نقطة

ABC مثلّث. النقطتان P و Q معيّنتان بالعلاقتين $\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CP}$ و $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AQ}$. والمستقيمان (BP) و CQ يتقاطعان في I. عيّن موضع R نقطة تقاطع (AI) و (BC) باستعمال مركز الأبعاد المتناسبة.

الحل

بما أن $\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CP}$ فإن $2\overrightarrow{PC} = -\overrightarrow{PA}$ ، ومنه $2\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} = \vec{0} ...... 1$ ، إذن Pمركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(A,1),(C,2)$



بما أن $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AQ}$ فإن $2\overrightarrow{QA} = -\overrightarrow{QB}$،

ومنه $2\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} = \vec{0} ...... 2$، إذن Q مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(B,1),(A,2)$

بفرض I مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(A,\alpha),(\text{B},\beta),(C,\gamma)$

نضرب 2 بالعدد $\beta \neq 0$ فنجد $(2\beta)\overrightarrow{QA} + \beta\overrightarrow{QB} = \vec{0}$ ، إذن Q مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,\alpha),(\text{B},\beta)$ على أن يكون $\alpha = 2\beta$

نضرب 1 بالعدد $\alpha \neq 0$ فنجد $(2\alpha)\overrightarrow{PC} + \alpha\overrightarrow{PA} = \vec{0}$، إذن P مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,\alpha),(C,\gamma)$ وذلك بوضع $\gamma = 2\alpha$.

من أجل $\beta = 1$ نعوض فنجد $\alpha = 2$ و $\gamma = 4$

نجد أن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(\text{C},4),(\text{B},1),(A,2)$ فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,2),(R,5)$ ، حيث R مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(\text{C},4),(\text{B},1)$ ، فهي تحقق

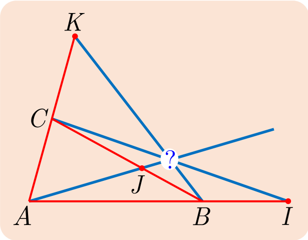
$$4\overrightarrow{RC} + \overrightarrow{RB} = \vec{0}$$

طريقة (1) $\overrightarrow{RC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BR}$

بجمع $\overrightarrow{BR}$ للطرفين $\overrightarrow{BR}+\overrightarrow{RC} = \frac{5}{4}\overrightarrow{BR}$ تكافئ $\overrightarrow{BC} = \frac{5}{4}\overrightarrow{BR}$ تكافئ $\overrightarrow{BR} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$

طريقة (2)

$$4(\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{RB} = \vec{0}$$
$$4\overrightarrow{RB} + 4\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{RB} = \vec{0}$$
$$5\overrightarrow{RB} + 4\overrightarrow{BC} = \vec{0}$$
$$5\overrightarrow{BR} = 4\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{BR} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$$



ABC مثلّث. النقاط I و J و K معيّنة بالعلاقات $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{AC}$.

أثبت تلاقي المستقيمات (AJ) و (BK) و (CI) في نقطة واحدة، باستعمال مركز الأبعاد المتناسبة.

الحل

- بما أن $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ فإن $3\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IA}$ ، ومنه $-\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ ، إذن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(A,-1),(B,3)$
- بما أن $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$ تكافئ $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{5}(\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{JC})$ تكافئ $3\overrightarrow{BJ}=2\overrightarrow{JC}$ ، $2\overrightarrow{JC}+3\overrightarrow{JB}=\vec{0}$ ، إذن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(C,2),(B,3)$
- بما أن $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CK}$ فإن $2\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{KA}$ أي $-\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ ، ومنه K مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(C,2),(A,-1)$.

بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(A,-1),(B,3),(C,2)$ ، فيكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(I,2),(C,2)$ فهي تقع على المستقيم (IC)

و G أيضاً مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(B,3),(K,1)$ فهي تقع على المستقيم (KB).

و G أيضاً مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(A,-1),(J,5)$ فهي تقع على المستقيم (AJ).

إذن G هي نقطة تلاقي المستقيمات (IC) و (KB) و (AJ) .

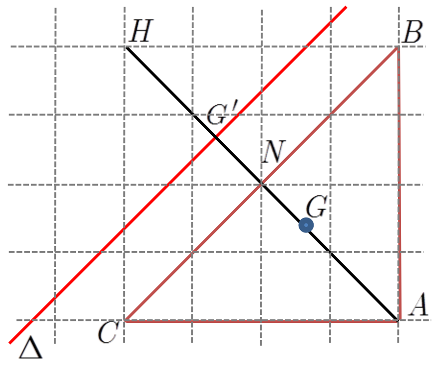
١٢ البحث عن مجموعة نقاط

ABC مثلّث متساوي الساقين وقائم في A. جد Δ مجموعةَ النقاط M في المستوي التي تحقّق العلاقة (1) الآتية $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=3\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$

الحل

بفرض G مركز ثقل المثلث ABC فإن $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

بفرض H مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(A,1),(B,-1),(C,-1)$ ، فإن:



$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MH}$$

حيث: $M\in\Delta$

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$$
$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=3\left\|-\overrightarrow{MH}\right\|$$
$$3\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MH}\right\|$$
$$\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{MH}\right\|$$

إذن M تقع على Δ محور $[HG]$.

١٣ نقاط على استقامة واحدة

ABC مثلّث. ليكن O منتصف الضلع $[BC]$، وليكن J منتصف الضلع $[AC]$، ولتكن I النقطة المعيّنة بالعلاقة $3\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}$، وأخيراً لتكن K النقطة المعيّنة بالعلاقة $3\overrightarrow{KI}=-2\overrightarrow{KJ}$.

أثبت وقوع A و O و K على استقامة واحدة باستعمال مركز الأبعاد المتناسبة.

الحل

أولاً ١. بما أنَّ $3\overrightarrow{KI}=-2\overrightarrow{KJ}$ فإنَّ $3\overrightarrow{KI}+2\overrightarrow{KJ}=\vec{0}$ ، إذن K مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(J,2),(\mathrm{I},3)$

٢. بما أن $3\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}$ فإن $2\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$ أي $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ ، إذن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(A,2),(B,1)$.

٣. J منتصف $[AC]$، إذن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1),(C,1)$.

ثانياً : ١. لإيجاد مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(A,1),(\mathrm{B},1),(C,1),(A,2)$ ، نستخدم الخاصية التجميعية فنوجد مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,2),(\mathrm{B},1)$ وهو I كما وجدنا سابقاً ، و نوجد مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1),(C,1)$ وهو J ، فيكون مركز الأبعاد المتناسبة للنقط الأربعة هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(J,2),(\mathrm{I},3)$ وهو K كما وجدنا سابقاً .

٢. بطريقة أخرى K هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(A,1),(A,2),(C,1),(\mathrm{B},1)$ ، نحصل عليه بإيجاد مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1),(A,2)$ وهو A (لأنه لو فرضنا هذا المركز P فإن : $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PA}=\vec{0}$ أي $3\overrightarrow{PA}=\vec{0}$ أي $\overrightarrow{PA}=\vec{0}$ أي P منطبقة على A) ، وبإيجاد مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(C,1),(\mathrm{B},1)$ وهو O فيكون K مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(O,2),(A,3)$، إذن النقط O,A,K على استقامة واحدة .

قُدُماً إلى الأمام

١٤ ليكن المثلّث ABC، وليكن I منتصف $[AC]$، و J نظيرة B بالنسبة إلى C وأخيراً K النقطة المعرّفة بالعلاقة $\overrightarrow{AK} = \alpha\overrightarrow{AB}$. نهدف في هذا التمرين إلى تعيين قيمة α علماً أنّ النقاط I و J و K تقع على استقامة واحدة.

طريقة أولى : بالحساب الشعاعي

① اكتب $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

② استنتج قيمة α .

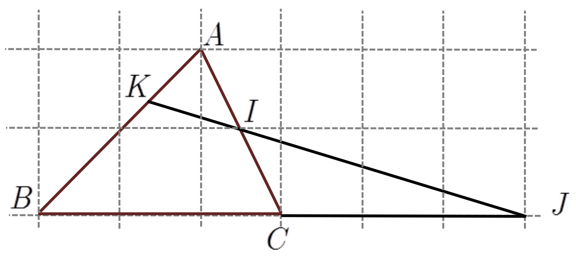
طريقة ثانية : باستعمال مَعْلَم، نختار المَعْلَم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

① احسب إحداثيات النقاط I و J و K في المَعْلَم السابق.

② استعمل شرط الارتباط الخطّي لشعاعين لتحسب قيمة α .

الحل

طريقة أولى:



$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CJ}$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$
$$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \alpha\overrightarrow{AB}$$

النقط K,J,I على استقامة واحدة ، إذن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(K,\gamma),(J,\beta)$ ، وباختيار $\beta = 1$ نجد

$$\beta\overrightarrow{IJ} + \gamma\overrightarrow{IK} = \vec{0}$$
$$\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\gamma\overrightarrow{AC} + \gamma\alpha.\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$
$$\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\gamma\right)\overrightarrow{AC} + (-1+\gamma\alpha)\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

ومنه $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\gamma = 0$ ومنه $\gamma = 3$ ، نعوض في $-1+\gamma\alpha = 0$ فنجد $-1+3\alpha = 0$ ومنه $\alpha = \frac{1}{3}$

طريقة ثانية:

أي $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ أي $I\left(0,\frac{1}{2}\right)$، وَ $\overrightarrow{AK}=\alpha\overrightarrow{AB}$ أي $K\ \ \alpha,0$ ، $B\ \ 1,0$ ، $C\ \ 0,1$ بفرض $J\ \ x,y$ ،

C منتصف $[BJ]$ فيكون $0=\frac{1+x}{2}$ ومنه $x=-1$ وَ $1=\frac{y+0}{2}$ ومنه : $y=2$ ، وبالتالي

$J\ \ -1,2$، $\overrightarrow{IJ}\left(-1-0,2-\frac{1}{2}\right)$ ومنه $\overrightarrow{IJ}\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ وَ $\overrightarrow{IK}\left(\alpha-0,0-\frac{1}{2}\right)$ ومنه $\overrightarrow{IK}\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}$ مرتبطان خطياً ، إذن $-1\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)\alpha=0$ ومنه $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\alpha=0$ ومنه $\alpha=\frac{1}{3}$

١٥ ليكن المثلّث ABC .

① نعرّف النقطة M بالعلاقة $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

❶ أثبت أنّ M تنتمي إلى المستقيم (BC).

❷ استنتج وجود عددين β و γ، يطلب تعيينهما، يجعلان M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,β) و (C,γ).

② نعرّف النقطة N بالعلاقة $\overrightarrow{BN}=-\frac{5}{4}\overrightarrow{BC}$. عيّن الأعداد β و γ التي تجعل النقطة N مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,β) و (C,γ) وتحقّق $\beta+\gamma=1$.

الحل

① ❶ في المعلم $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ نجد أن $B(1,0),C(0,1),M\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

$\overrightarrow{MB}\left(-1-\frac{1}{3},0-\frac{2}{3}\right)$ ومنه $\overrightarrow{MB}\left(\frac{2}{3},\frac{-2}{3}\right)$ وَ $\overrightarrow{MC}\left(0-\frac{1}{3},1-\frac{2}{3}\right)$ ومنه $\overrightarrow{MC}\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ وواضح

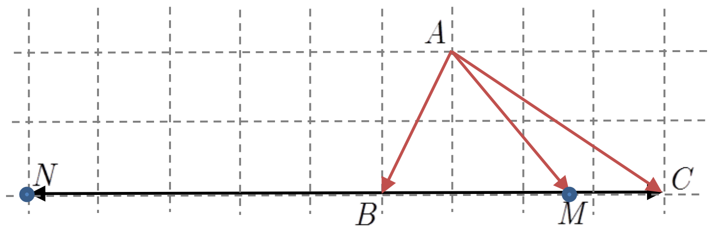
أن $\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MC}$ فالشعاعان $\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}$ مرتبطان خطياً، والنقاط C,B,M على استقامة واحدة .

❷ وبالتالي M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,\beta),(B,\alpha)$ وبما أن $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ فإن M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,2),(B,1)$.

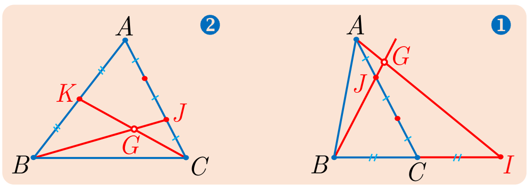
② $\overrightarrow{BN}=-\frac{5}{4}\overrightarrow{BC}$ أي $\overrightarrow{BN}=-\frac{5}{4}(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NC})$ أي $-\frac{9}{4}\overrightarrow{BN}-\frac{5}{4}\overrightarrow{NC}=\vec{0}$ أي

$\frac{9}{4}\overrightarrow{NB}-\frac{5}{4}\overrightarrow{NC}=\vec{0}$، N مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,\delta),(B,\beta)$ حيث $\delta=\frac{-5}{4},\beta=\frac{9}{4}$

وَ $\gamma+\beta=\frac{-5}{4}+\frac{9}{4}=1$



١٦ تأمل الشكلين المجاورين، وعيّن –في حالة كلٍّ منهما– ثلاثة أعداد α و β و γ تجعل النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة (A,α) و (B,β) و (C,γ).



الحل

الشكل ❶: من الرسم نجد أن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1),(C,-2)$ وَ J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(\mathrm{C},1),(\mathrm{A},2)$ ، بالتالي J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(\mathrm{C},K),(\mathrm{A},2\mathrm{K})$،

نضع $K=-1$ نجد $(\mathrm{C},-2),(\mathrm{A},-4)$

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,-4),(I,-1)$، لكن أيضاً G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1),(J,-6)$، أي أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(\mathrm{C},-2),(B,1),(A,-4)$

الشكل ❷: K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1),(A,1)$ وَ J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(\mathrm{C},2),(A,1)$

إذن أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(\mathrm{C},2),(B,1),(A,1)$

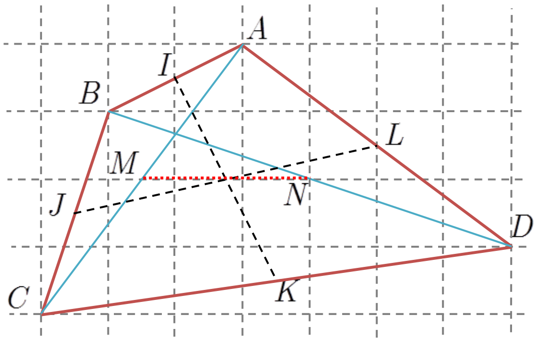
١٧ نتأمّل الرباعي $ABCD$ والنقاط I و J و K و L و M و N منتصفات القطع المستقيمة $[AB]$ و $[BC]$ و $[CD]$ و $[DA]$ و $[AC]$ و $[BD]$ بالترتيب. نهدف في هذا التمرين إلى إثبات أنّ للقطع المستقيمة $[IK]$ و $[JL]$ و $[MN]$ المنتصف نفسه.

① لتكن النقطة O منتصف $[IK]$. أثبت أنّ O هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط A و B و C و D وقد أسندنا إليها الثابت 1 نفسه.

② أثبت أنّ O هي منتصف $[JL]$ ومنتصف $[MN]$ أيضاً.

الحل

① لتعيين مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(A,1),(\mathrm{B},1),(C,1),(D,1)$ ، نستخدم الخاصية التجميعية فنوجد مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1),(\mathrm{B},1)$ وهو I منتصف $[AB]$ ، و نوجد مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(\mathrm{D},1),(C,1)$ وهو K منتصف $[DC]$ ، ثم نعيّن مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(K,2),(I,2)$ وهو منتصف $[IK]$ أي هو النقطة O.



② باستخدام الخاصية التجميعية بطريقة مختلفة نجد أن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1),(\mathrm{C},1)$ وَ L مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(\mathrm{D},1),(A,1)$ ، فيكون مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(L,2),(J,2)$ وهو منتصف $[JL]$ هو ذاته النقطة O مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(A,1),(\mathrm{B},1),(C,1),(D,1)$.

بطريقة ثالثة: نجد ان M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(\mathrm{A},1),(\mathrm{C},1)$ وَ N مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(\mathrm{D},1),(\mathrm{B},1)$ ، فيكون مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(\mathrm{M},2),(\mathrm{N},2)$ وهو منتصف $[MN]$ هو ذاته النقطة O أيضاً. نستنتج أن $[IK]$،$[JL]$ ، $[MN]$ لها المنتصف نفسه

ملاحظة: يمكن إثبات هذه النتيجة بإثبات أن $IJKL,IMKN$ متوازيا أضلاع، وبما أنهما مشتركان بالقطر $[IK]$ فأقطارهما لها المنتصف نفسه .

١٨ نتأمّل مثلّثين ABC و $A'B'C'$. ليكن G مركز ثقل ABC و G' مركز ثقل $A'B'C'$.

① أثبت أنّ $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$.

② استنتج شرطاً لازماً وكافياً كي يكون للمثلّثين مركز الثقل نفسه.

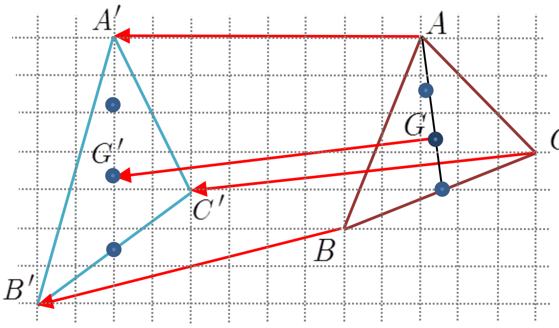
③ **تطبيق** : ليكن المثلّث ABC و k عدد حقيقي لا يساوي 0. ولتكن A' و B' و C' النقاط المعرّفة بالعلاقات $\overrightarrow{BA'}=k\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CB'}=k\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{AC'}=k\overrightarrow{AB}$.

❶ أثبت أنّ للمثلّثين ABC و $A'B'C'$ مركز الثقل نفسه.

❷ ارسم الشكل الموافق في حالة $k=\dfrac{1}{2}$.

الحل

①



$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'}$$
$$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'}$$
$$\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C'}$$

بالجمع نجد:

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+3\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}$$
$$=\vec{0}+3\overrightarrow{GG'}+\vec{0}=3\overrightarrow{GG'}$$

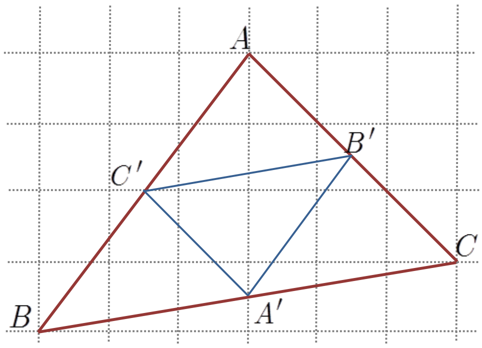
② للمثلثين مركز الثقل نفسه إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$ أي $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$

③ ❶

$$\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CB'}+\overrightarrow{BA'}=K\overrightarrow{AB}+K\overrightarrow{CA}+K\overrightarrow{BC}=K(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC})=K(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA})=\vec{0}$$

أي للمثلثين مركز الثقل نفسه.

❷



١٩ نتأمّل مثلّثاً ABC والنقطتين M و N المعرّفتين بالعلاقتين $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{BC}$ حيث k عددٌ حقيقي مختلف عن 0 و 1. ليكن I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[BC]$ و G منتصف $[MN]$. نهدف إلى إثبات وقوع النقاط G و I و J على استقامة واحدة.

① اكتب النقطة M مركز أبعاد متناسبة للنقطتين A و B.

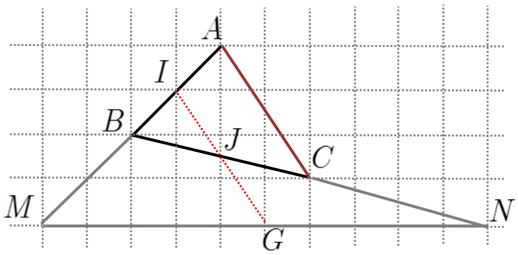
② اكتب النقطة N مركز أبعاد متناسبة للنقطتين A و C.

③ أثبت أنّ G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(A,1-k)$ و (B,k) و $(B,1-k)$ و (C,k).

④ استنتج أنّ G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I,1-k)$ و (J,k). واستنتج المطلوب.

الحل

①



$$\overrightarrow{AM} = K\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AM} = K(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})$$
$$(K-1)\overrightarrow{AM} + K\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$
$$(1-K)\overrightarrow{MA} + K.\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(B,K),(A,1-\mathrm{K})$

② لدينا $\overrightarrow{BN} = K\overrightarrow{BC}$ أي $\overrightarrow{BN} = K(\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NC})$ ومنه $(K-1)\overrightarrow{BN} + K\overrightarrow{NC} = \vec{0}$ إذن $(1-K)\overrightarrow{NB} + K.\overrightarrow{NC} = \vec{0}$ وبالتالي N مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,K),(B,1-\mathrm{K})$

③ إذن مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(M,1-K+K),(\mathrm{N},1-K+K)$ أي $(M,1),(\mathrm{N},1)$ هو G منتصف $[MN]$

④ باستخدام الخاصية التجميعية بطريقة ثانية للنقط $(\mathrm{C},K),(\mathrm{B},1-\mathrm{K}),(B,K),(A,1-\mathrm{K})$ ونأخذ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(\mathrm{B},1-\mathrm{K}),(A,1-\mathrm{K})$ وهو I منتصف $[AB]$ ، و نأخذ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(\mathrm{C},K),(B,K)$ وهو J منتصف $[BC]$ ، فيكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(J,2K),(I,2-2K)$ فهو أيضاً مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(J,K),(I,1-K)$ ، بالتالي النقط G,J,I على استقامة واحدة .

٢٠ ليكن ABC مثلّثاً متساوي الساقين وقائماً في A ، فيه $AB = 4\,\mathrm{cm}$. نهدف في هذا التمرين إلى تعيين $\mathcal{C}$ مجموعة النقاط M في المستوي التي تحقّق $\|-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 4$

① استفد من النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,1)$ و $(C,2)$ لتختزل المجموع $-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$.

② أثبت أنّ « M تنتمي إلى $\mathcal{C}$» يُكافئ «$MG = 2$»، ثمّ استنتج طبيعة المجموعة $\mathcal{C}$.

③ أنشئ النقطة G ثمّ المجموعة $\mathcal{C}$.

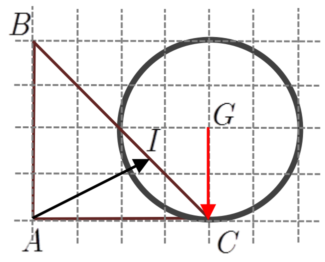
الحل

① بما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,1)$ و $(C,2)$ فإن

$$-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MG}$$

② M تنتمي للدائرة $\mathcal{C}$ يعني $2\|\overrightarrow{MG}\| = 4$ أي $\|\overrightarrow{MG}\| = 2$ أي $MG = 2$ ، إذن C دائرة مركزها G ونصف قطرها 2.

③ لتعيين G نوجد I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(\mathrm{B},1),(C,2)$ ، $\overrightarrow{CI}=\dfrac{1}{1+2}\overrightarrow{CB}$ أي



$\overrightarrow{CI}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ ، ثم نوجد مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(I,3),(A,-1)$ فيكون هو G أي $\overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{3-1}\overrightarrow{AI}$ أي

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AI}$.

ويمكن الأنشاء بملاحظة أن $-\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ومنه

$2\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{BA}$.

٢١ ليكن ABC مثلّثاً قائم الزاوية في A . ليكن I منتصف $[BC]$، ولتكن $\mathcal{C}$ الدائرة التي مركزها A وتمر بالنقطة I . وأخيراً لتكن G النقطة من $\mathcal{C}$ التي تقابل I قطريّاً.

① أثبت أنّ G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,4)$ و $(B,-1)$ و $(C,-1)$.

② عيّن عددين حقيقيين β و γ يجعلان النقطة A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(G,2)$ و (B,β) و (C,γ).

③ عيّن مجموعة نقاط المستوي M التي تحقق $\left\|2\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$.

الحل

① GI متوسط في المثلث GBC

$$4\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=4\overrightarrow{GA}-\quad\overrightarrow{GB}+GC\quad=4\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GI}=4\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{GI}\right)-2\overrightarrow{GI}=2\overrightarrow{GI}-2\overrightarrow{GI}=\vec{0}$$

إذن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(A,4),(\mathrm{B},-1),(C,-1)$.

② بفرض مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(\mathrm{B},\beta),(C,\alpha)$ هو N فيكون N يقع على المستقيم (BC) ، بالتالي A مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(G,2),(\mathrm{B},\beta),(C,\alpha)$ هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(G,2),(\mathrm{N},\alpha+\beta)$ أي مركز الأبعاد المتناسبة للنقط N,G,A على استقامة واحدة، إذن G نقطة تقاطع (GA) مع (CB) فهي I، وبالتالي I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(\mathrm{B},\beta),(C,\alpha)$. مع $\alpha=\beta$ يكون A مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(G,2),(I,2\alpha)$، وبما أن A منتصف GI فإن $2\alpha=2$ أي $\alpha=1$ إذن $\alpha=\beta=1$

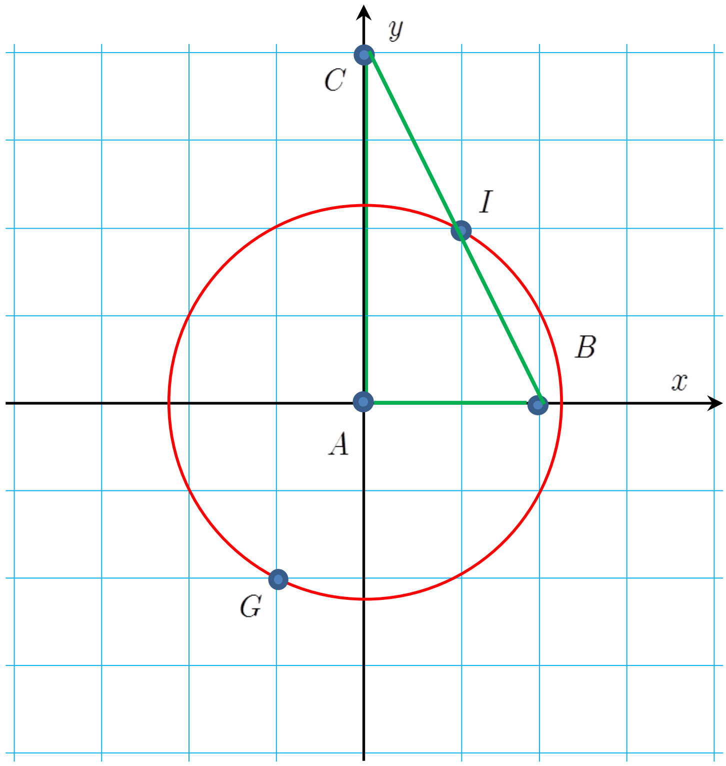
③ بما أن A مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(G,2),(\mathrm{B},1),(C,1)$ فإن :

$2\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MA}$ إذن M تحقق $\left\|2\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$ فإن :

$4\left\|\overrightarrow{MA}\right\|=2\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$

$AI = \frac{1}{2}BC = MA$ ، إذن مجموعة النقط M تمثل الدائرة C ذاتها.

~~



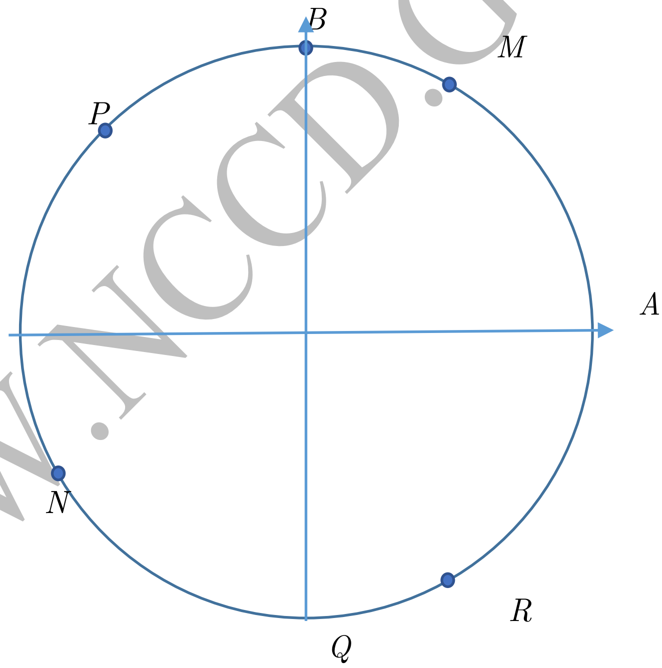
تَدرَّبْ ص٤٩

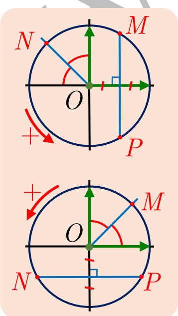
نتأمّل في المستوي معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j})$ ولنفترض أنّ $(\vec{i},\vec{j}) = +\frac{\pi}{2}$. لتكن $\mathcal{C}$ الدائرة المثلّثيّة التي مركزها O، ولتكن A و B النقطتان المعرّفتان بالعلاقتين $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ و $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$. تتعيّن نقطة M من $\mathcal{C}$ بقياسٍ للزاوية $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$.

① عيّن على $\mathcal{C}$ النقاط M و N و P و Q و R المعيّنة بالزوايا $\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{11\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{2}$ و $\frac{17\pi}{3}$ بالترتيب.

الحل

تعيين النقطة M المعينة بالزاوية $\frac{-5\pi}{6}$ والنقطة R المعينة بالزاوية $\frac{17\pi}{3}$ مع ملاحظة أن: $\frac{17\pi}{3} = 6\pi - \frac{\pi}{3}$





② استفد من معلومات الشكل المجاور لتعطي قياسات من المجال $[0,2\pi]$ تعيّن النقاط M و N و P.

الحل

تتعيّن النقطة M بالزاوية $\frac{\pi}{3}$، تتعيّن النقطة P بالزاوية $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ ، تتعيّن النقطة N بالزاوية $\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$

③ استفد من معلومات الشكل المجاور لتعطي قياسات من المجال $[-\pi,\pi]$ تعيّن النقاط M و N و P.

الحل

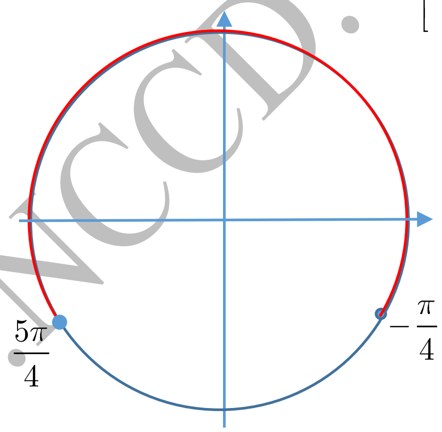
تتعيّن النقطة M بالزاوية $\frac{\pi}{4}$، تتعيّن النقطة N بالزاوية $\frac{-5\pi}{6} = -\pi + \frac{\pi}{6}$ ، تتعيّن النقطة P بالزاوية $-\frac{\pi}{6}$

④ ارسم الدائرة المثلّثيّة C ولوّن عليها القوس الذي تقطعه النقطة M عندما يتحول x، قياسُ الزاوية $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$، في كلٍّ من المجالات الآتية:

❶ $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ ❷ $\left[\frac{4\pi}{3},\frac{13\pi}{6}\right]$ ❸ $\left[-\frac{7\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

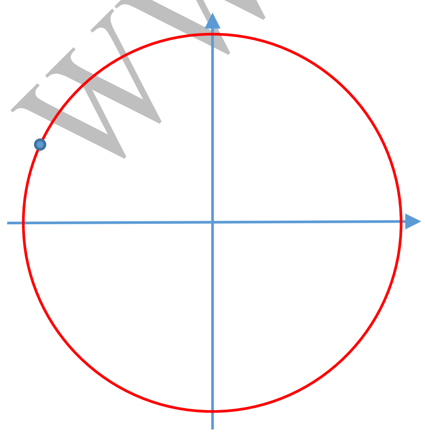
الحل

❶ في حالة المجال $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$



❸ في حالة المجال $\left[-\frac{7\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

القوس هنا يشمل كامل الدائرة



⑤ عيّن، في كلٍّ من الحالات الآتية، القياس الأساسي للزاوية الموجهّة α:

❶ $\alpha = \frac{7\pi}{2}$ ❷ $\alpha = -\frac{4\pi}{3}$ ❸ $\alpha = \frac{35\pi}{6}$

❹ $\alpha = -\frac{21\pi}{4}$ ❺ $\alpha = -\frac{202\pi}{3}$ ❻ $\alpha = -18$

الحل

❶ $\alpha = \frac{7\pi}{2}$ بفرض أن θ هو القياس الأساسي لهذه الزاوية فيكون: $\theta = \frac{7\pi}{2} + 2\pi k$ وبالتالي: $-\pi < \frac{7\pi}{2} + 2\pi k \leq \pi$ وبعد الإصلاح نجد $\frac{-9\pi}{4} < \pi k \leq \frac{-5\pi}{4}$ أي $\frac{-9}{4} < k \leq \frac{-5}{4}$ أو $-2.25 < k \leq -1.25$ إذاً $k = -2$ ومنه: $\theta = \frac{7\pi}{2} - 4\pi = -\frac{\pi}{2}$

❹ $\alpha = \frac{21\pi}{4}$ بفرض أن θ هو القياس الأساسي لهذه الزاوية فيكون : $\alpha = -\frac{21\pi}{4} + 2\pi k$ ومنه :

$-\pi < -\frac{21\pi}{4} + 2\pi k \leq \pi$ وبعد الإصلاح نجد $\frac{15}{8} < k \leq \frac{17}{8}$ أي $2.125 < k \leq 3.125$

ومنه: $k = 3$ وبالتالي: $\theta = -\frac{21\pi}{4} + 6\pi = \frac{3\pi}{4}$.

تَدرَّبْ ص ٥٣

① أنشئ خطّاً مضلّعيّاً منكسراً $ABCDE$ مُحقّقاً الشروط الآتية: $AB = 4$ و $BC = 3$ و $CD = 2$ و $DE = 2$ (بالسنتيمترات)، بالإضافة إلى الشروط الآتية:

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{5\pi}{6} \text{ و } (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = -\frac{\pi}{2} \text{ و } (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}) = \frac{\pi}{3}$$

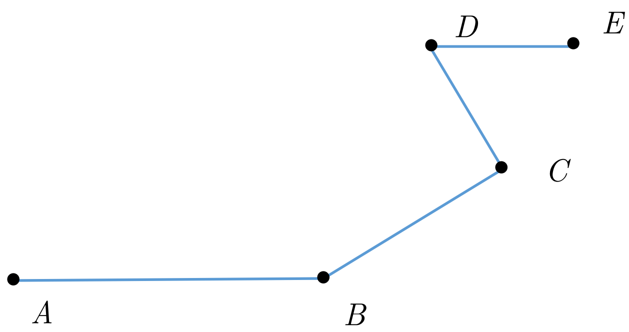
❶ علّل صحّة المساواة

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE})$$

❷ استنتج قياساً للزاوية $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE})$.

❸ علّل ارتباط الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DE}$ خطّياً، واستنتج عدداً k يُحقّق $\overrightarrow{DE} = k\overrightarrow{AB}$.

الحل



❶ لدينا $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}$

وذلك باستخدام علاقة شال مرتين

❷ لدينا $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC} = \frac{\pi}{6}$ و $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD} = \frac{\pi}{2}$ و $\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE} = -\frac{2\pi}{3}$.

وبالتالي فإن: $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi + 3\pi - 4\pi}{6} = 0$

❸ بما أن: $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE} = 0$ فإن: $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}$ مرتبطان خطياً ، ونلاحظ أن لهما نفس الجهة ،

ولدينا : $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2\left|\overrightarrow{DE}\right|$ ، إذاً : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DE}$، أي: $k = 2$

② نعطي نقطتين مختلفتين A و B في مستوٍ موجّه، عيّن النقطة C التي تحقِّق الشرطين المبيَّنيْن أدناه، واحسب القياس الأساسي للزاوية الموجّهة $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$ في الحالتين الآتيتين :

❶ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$ و $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{6}$

❷ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3}$ و $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}$.

الحل

❶

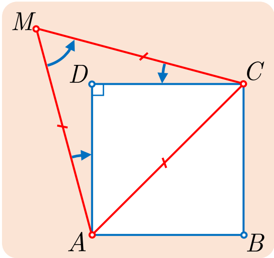
$$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$$
$$= -(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) + \pi = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{12}$$

❷

$$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$$
$$= -(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) + \pi = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{11\pi}{6}$$

وهكذا نجد أن زاوية التعيين الأساسي للزاوية $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$ هي $\frac{-\pi}{6}$

③ في الشكل المجاور، $ABCD$ مربّعٌ و MAC مثلّثٌ متساوي الأضلاع.



❶ أعطِ قياساً لكل من الزوايا الموجهة $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC})$ و $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AM})$ و $(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CD})$ و $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})$.

❷ ما مجموع هذه القياسات؟

الحل

❶ لدينا مثلّث متساوي أضلاع فإنّ قياس كل زاوية من زواياه $\frac{\pi}{3}$ ومربّع قياس كل زاوية من زواياه $\frac{\pi}{4}$

ومن خلال هذه المَعرفة نحسب قياسات الزوايا المطلوبة مع مراعاة الاتّجاه

$\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC} = +\frac{\pi}{3}$ و $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AM} = \frac{\pi}{12}$ و $\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CD} = \frac{\pi}{12}$ و $\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA} = -\frac{\pi}{2}$.

❷ من والواضح أن مجموع هذه القياسات هو 0

④ $ABCD$ متوازي أضلاع فيه $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \alpha$.

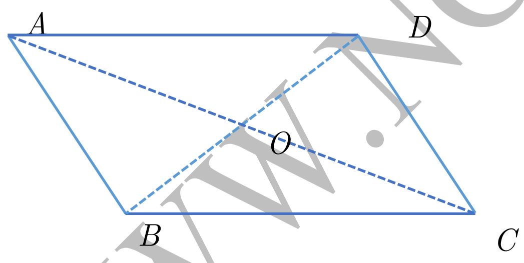
❶ احسب بدلالة α الزوايا الموجهة $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$ و $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB})$ و $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})$.

❷ ليكن O مركز متوازي الأضلاع، استنتج النتائج السابقة بالاستفادة من التناظر المركزي الذي مركزه O. (لاحظ أنّ التناظر S_O هو أيضاً الدوران $\mathcal{R}_{O,\pi}$).

الحل

❶ $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA} = \pi - \alpha$ و $\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB} = \alpha$ و $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC} = \pi - \alpha$.

❷

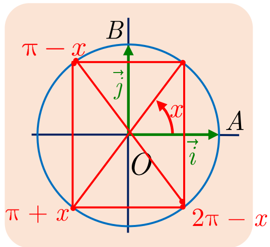


تَدرَّبْ ص ٥٧

ليكن $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ مَعْلَماً متجانساً مباشراً، ولتكن $\mathcal{C}$ الدائرة المثلّثيّة التي مركزها O في هذا المَعْلَم، نتأمّل نقطة M من $\mathcal{C}$ ونضع $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = x$.

① عيّن على $\mathcal{C}$ النقاط الموافقة للقياسات $\pi - x$ و $\pi + x$ و $2\pi - x$، ثُمّ اختزل الصيغة:
$f(x) = \cos x + \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \cos(2\pi - x)$.

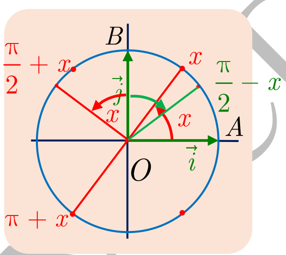
الحل



$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x + \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \cos(2\pi - x) \\ &= cosx - cosx - cosx + cosx = 0 \end{aligned}$$

② عيّن على $\mathcal{C}$ النقاط الموافقة للقياسات $\frac{\pi}{2} + x$ و $\pi + x$ و $\frac{\pi}{2} - x$، ثُمّ اختزل الصيغة:
$g(x) = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

الحل



$$\begin{aligned} g(x) &= \sin x + \sin(\tfrac{\pi}{2} + x) + \sin(\pi + x) + \sin(\tfrac{\pi}{2} - x) \\ &= sinx + cosx - sinx + cosx = 2cosx \end{aligned}$$

③ عيّن على الدائرة $\mathcal{C}$ النقاط الموافقة للقياسات $\frac{5\pi}{2} - x$ و $3\pi + x$ و $5\pi - x$ و $x - \frac{\pi}{2}$، ثمّ اختزل الصيغة: $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \sin(3\pi + x) + \cos(5\pi - x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

الحل

$$\begin{aligned} &\sin\left(\tfrac{5\pi}{2} - x\right) + \sin(3\pi + x) + \cos(5\pi - x) + \cos\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right) \\ &= cosx - sinx - cosx + sinx = 0 \end{aligned}$$

④ عيّن على $\mathcal{C}$ النقطة M إذا علمت أنّ $\cos x = \frac{3}{5}$ و $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. ثُمّ احسب النسب المثلّثيّة الآتية: $\sin x$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ و $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ و $\cos(\pi - x)$ و $\sin(\pi - x)$.

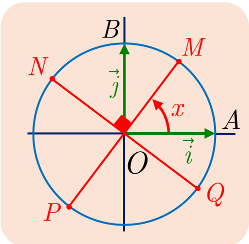
الحل

من العلاقة: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ نجد أن $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ وبالتالي

$\sin^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$ وبما أنَّ $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ فإنَّ $sinx = -\frac{4}{5}$ ، وهكذا

نستنتج: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos = \frac{3}{5}$ و $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sinx = -\frac{4}{5}$ و

$\cos\ \pi - x\ = -cosx = -\frac{3}{5}$ و $\sin\ \pi - x\ = sinx = -\frac{4}{5}$.



⑤ النقاط M و N و P و Q معيّنة على الدائرة المثلّثيّة كما في الشكل المجاور.

ما القياسات التي تعيّن هذه النقاط ؟ تذكّر أنّ x تساوي $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$، ثُمّ اختزل الصيغتين :

$$f(x) = \cos x + \cos\ x + \tfrac{\pi}{2}\ + \cos(x+\pi) + \cos\ x + \tfrac{3\pi}{2}$$
$$g(x) = \sin x + \sin\ x + \tfrac{\pi}{2}\ + \sin(x+\pi) + \sin\ x + \tfrac{3\pi}{2}$$

الحل

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\ = x$ و $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}\ = x + \frac{\pi}{2}$ و $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}\ = x + \pi$ و $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OQ}\ = x + \frac{3\pi}{2}$

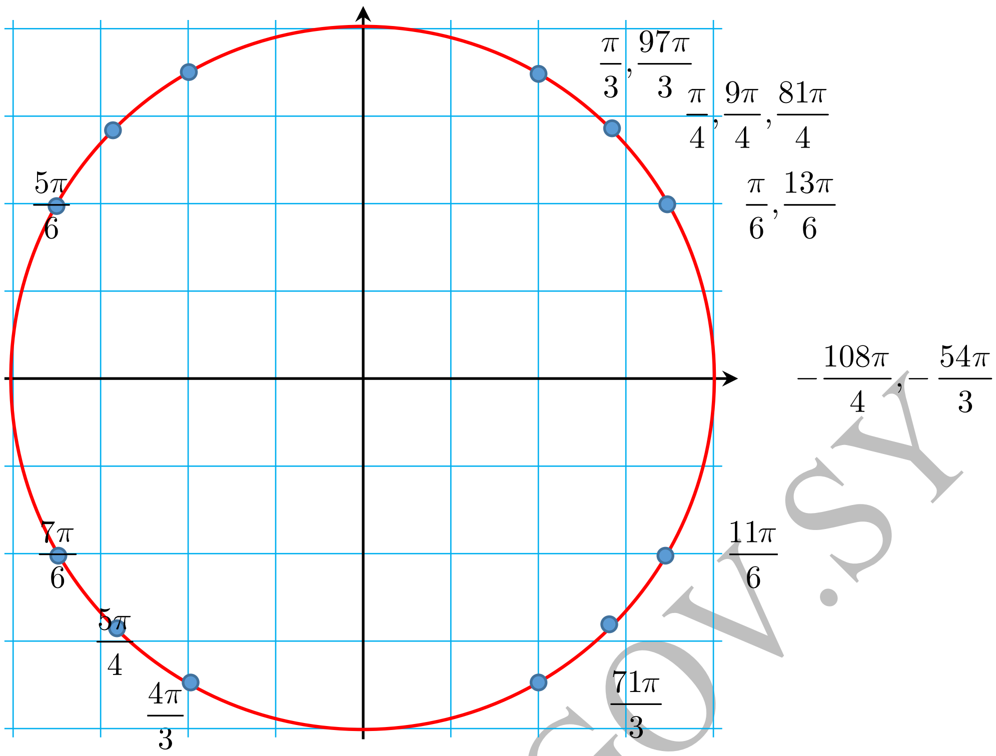
$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x + \cos\ x + \tfrac{\pi}{2}\ + \cos(x+\pi) + \cos\ x + \tfrac{3\pi}{2} \\ &= cosx - sinx - cosx + sinx = 0 \\ g(x) &= \sin x + \sin\ x + \tfrac{\pi}{2}\ + \sin(x+\pi) + \sin\ x + \tfrac{3\pi}{2} \\ &= sinx + cosx - sinx - cosx = 0 \end{aligned}$$

⑥ عيّن قيمة جيب وجيب تمام الأعداد الحقيقيّة الآتية. يمكنك البدء بتعيين النقاط الموافقة على دائرة مثلّثيّة.

$\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{7\pi}{6}$ و $\frac{11\pi}{6}$ و $\frac{13\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{9\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$

و $\frac{81\pi}{4}$ و $-\frac{108\pi}{4}$ و $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{71\pi}{3}$ و $\frac{97\pi}{3}$ و $-\frac{54\pi}{3}$

الحل



$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

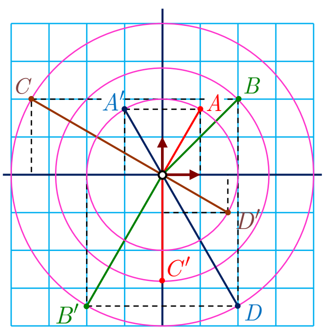
$$\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \qquad \cos\frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{11\pi}{6} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \qquad \cos\frac{11\pi}{6} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{13\pi}{6} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{13\pi}{6} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{97\pi}{3} = \sin\left(32\pi + \frac{\pi}{3}\right) = sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{97\pi}{3} = \cos\left(32\pi + \frac{\pi}{3}\right) = sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

تَدرَّبْ ص٦٠



① عيّن الإحداثيّات القطبيّة $(r;\theta)$ التي تحقق الشرط $\theta \in [0,2\pi[$ ، لكلٍّ من النقاط A و A' و B و B' و C و C' و D و D' المبيّنة في الشكل المجاور.

الحل

من الشكل نجد أنَّ:

A تقع على الدائرة التي نصف قطرها $r = 2$ وأنَّ $\frac{\pi}{3} = \vec{i},\overrightarrow{OA} = \theta$وبالتالي $A\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$.

A' تقع على الدائرة التي نصف قطرها $r = 2$ وأنَّ $\frac{2\pi}{3} = \vec{i},\overrightarrow{OA'} = \theta$ وبالتالي $A'\left(2;\frac{2\pi}{3}\right)$.

B تقع على الدائرة التي نصف قطرها $r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ وأنَّ $\frac{\pi}{4} = \vec{i},\overrightarrow{OB} = \theta$

وبالتالي $B\left(2\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right)$.

B' تقع على الدائرة التي نصف قطرها $r = 4$ وأنَّ $\frac{4\pi}{3} = \vec{i},\overrightarrow{OB'} = \theta$ وبالتالي $B'\left(4;\frac{4\pi}{3}\right)$.

C تقع على الدائرة التي نصف قطرها $r = 4$ وأنَّ $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} = \vec{i},\overrightarrow{OC} = \theta$ وبالتالي $C\left(4;\frac{5\pi}{6}\right)$.

C' تقع على الدائرة التي نصف قطرها $r = 2\sqrt{2}$ وأنَّ $\frac{3\pi}{2} = \vec{i},\overrightarrow{OC'} = \theta$ وبالتالي $C'\left(2\sqrt{2};\frac{3\pi}{2}\right)$.

D تقع على الدائرة التي نصف قطرها $r = 4$ وأنَّ $\frac{5\pi}{3} = \vec{i},\overrightarrow{OD} = \theta$ وبالتالي $D\left(4;\frac{5\pi}{3}\right)$.

② كلٌّ واحدٍ من النقاط الآتية معرفة بإحداثيّتيها الديكارتيتين (x,y). احسب إحداثيّاتها القطبيّة $(r;\theta)$ التي تحقق الشرط $\theta \in]-\pi,\pi]$.

$$A(-1,1),\quad B(\sqrt{3},1),\quad C(-1,\sqrt{3}),\quad D(0,4),$$
$$E(3,0),\quad F(-2,2),\quad G\ \frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\ ,\quad H\ -\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$
$$I\ \sqrt{2},\sqrt{6}\ ,\quad J\ \frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4}\ ,\quad K(-3,0),\quad L(-2\sqrt{3},2),$$

الحل

$A(-1,1)$ لدينا $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ ومن المعادلتين $\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ نجد أن $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ وبالتالي $A\left(\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right)$.

$B\ \sqrt{3},1$ لدينا $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3+1} = 2$ ومن المعادلتين $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$ نجد أن $\theta = \frac{\pi}{6}$ وبالتالي $B\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$.

لدينا $C \quad -1,\sqrt{3}$ $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+3}=2$ ومن المعادلتين $cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{2}$ و $sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ نجد أن $\theta=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$ وبالتالي $C\left(2;\frac{2\pi}{3}\right)$.

لدينا $D \quad 0,4$ $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{0+16}=4$ ومن المعادلتين $cos\theta=\frac{x}{r}=0$ و $sin\theta=\frac{y}{r}=1$ نجد أن $\theta=\frac{\pi}{2}$ وبالتالي $D\left(4;\frac{\pi}{2}\right)$.

لدينا $E \quad 3,0$ $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{9+0}=3$ ومن المعادلتين $cos\theta=\frac{x}{r}=1$ و $sin\theta=\frac{y}{r}=0$ نجد أن $\theta=0$ وبالتالي $D \quad 3;0$.

لدينا $F \quad -2,2$ $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$ ومن المعادلتين $cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ نجد أن $\theta=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$ وبالتالي $F\left(2\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right)$.

لدينا $G\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)$ $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{9}=3$ ومن المعادلتين $cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{2}$ نجد أن $\theta=-\frac{\pi}{6}$ وبالتالي $G\left(3;-\frac{\pi}{6}\right)$.

لدينا $H\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$ ومن المعادلتين $cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{1}{2}$ و $sin\theta=\frac{y}{r}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ نجد أن $\theta=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$ وبالتالي $H\left(1;\frac{2\pi}{3}\right)$.

لدينا $I \quad \sqrt{2},\sqrt{6}$ $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2+6}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ومن المعادلتين $cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$ و $sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ نجد أن $\theta=\frac{\pi}{3}$ وبالتالي $I\left(2\sqrt{2};\frac{\pi}{3}\right)$.

③ كلُّ واحدة من النقاط الآتية معرفة بإحداثيّاتها القطبيّة $(r;\theta)$. أوجد إحداثيّتيها الديكارتيّتين (x,y).

$$A(1;0),\quad B\ 2;\tfrac{\pi}{2},\quad C(3;\pi),\quad D\ 4;\tfrac{3\pi}{2},$$
$$E\ 2\sqrt{2};-\tfrac{\pi}{4},\quad F\ 2;\tfrac{\pi}{6},\quad G\ \tfrac{1}{2};\tfrac{5\pi}{6},\quad H\ 3;\tfrac{\pi}{4},$$
$$I\ \sqrt{2};-\tfrac{3\pi}{4},\quad J\ \tfrac{3}{4};20\pi,\quad K\ 2;\tfrac{\pi}{3},\quad L\ 2;\tfrac{2\pi}{3},$$

الحل

لدينا $A(1;0)$ $x=1.cos0=1$ و $y=1.sin0=0$ ومنه $A(0,1)$

لدينا $B\left(2;\frac{\pi}{2}\right)$ $x=2.cos\frac{\pi}{2}=0$ و $y=2.sin\frac{\pi}{2}=2$ ومنه $B(0,2)$

لدينا $C(3;\pi)$ $x=3.cos\pi=-3$ و $y=3.sin\pi=0$ ومنه $C(-3,0)$

لدينا $D\left(4;\frac{3\pi}{2}\right)$ $x=4.cos\frac{3\pi}{2}=0$ و $y=4.sin\frac{3\pi}{2}=-4$ ومنه $D(0,-4)$

$E\left(2\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right)$ لدينا $x=2\sqrt{2}.\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ و $y=2\sqrt{2}.\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$ ومنه $E\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$

$F\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$ لدينا $x=2.\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$ و $y=2.\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$ ومنه $F\left(\sqrt{3},1\right)$

$G\left(\frac{1}{2};\frac{5\pi}{6}\right)$ لدينا $x=\frac{1}{2}.\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$ و $y=\frac{1}{2}.\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$ ومنه $G\left(-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4}\right)$

$H\left(3,\frac{\pi}{4}\right)$ لدينا $x=3.\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ و $y=3.\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ومنه $H\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

$I\left(\sqrt{2};-\frac{3\pi}{4}\right)$ لدينا $x=\sqrt{2}.\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-1$ و $y=\sqrt{2}.\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-1$ ومنه $I\left(-1,-1\right)$

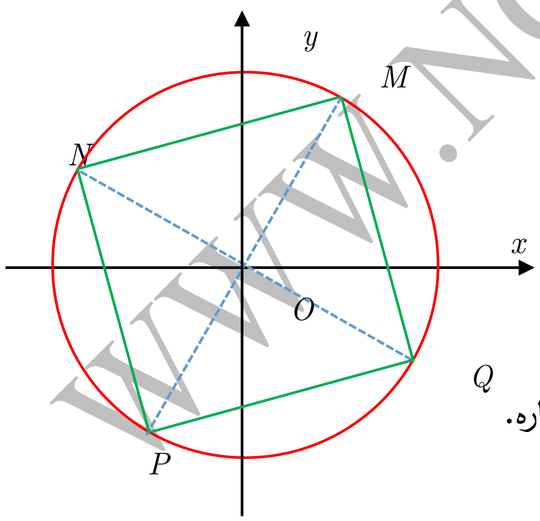
$J\left(\frac{3}{4};20\pi\right)$ لدينا $x=\frac{3}{4}.\cos(20\pi)=\frac{3}{4}$ و $y=\frac{3}{4}.\sin(20\pi)=0$ ومنه $J\left(\frac{3}{4},0\right)$

$K\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$ لدينا $x=2.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$ و $y=2.\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ ومنه $K\left(1,\sqrt{3}\right)$

$L\left(2;\frac{2\pi}{3}\right)$ لدينا $x=2.\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-1$ و $y=2.\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ ومنه $L\left(-1,\sqrt{3}\right)$

④ لتكن M نقطة إحداثيّاتها القطبيّة $(r;\theta)$. الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ينقل M إلى N وينقل N إلى P وأخيراً ينقل P إلى Q. احسب الإحداثيّات القطبيّة للنقطة N، واستنتج بأسلوب مماثل الإحداثيّات القطبيّة للنقطتين P و Q. ما نوع الرباعي $MNPQ$؟

الحل



لتكن إحداثيّات N هي $(r';\theta')$ يكون: $r=r'$ و $\theta'=\theta+\frac{\pi}{2}$

وبالتالي الإحداثيّات القطبيّة للنقطة N هي $\left(r,\theta+\frac{\pi}{2}\right)$

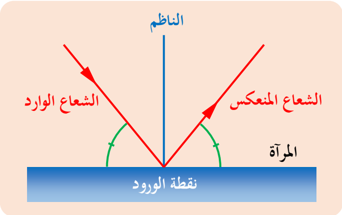
والاحداثيّات القطبيّة للنقطة P هي $\left(r,\theta+\pi\right)$

والاحداثيّات القطبيّة للنقطة Q هي $\left(r,\theta-\frac{\pi}{2}\right)$

ويكون الرباعي $MNPQ$ مربّع ولتناصف وتساوي وتعامد أقطاره.

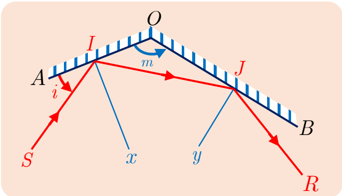
أنشطة

نشاط 1 الضوء الهندسي والزوايا الموجّهة



لنذكّر بقانون انعكاس الضوء المعروف في الفيزياء. ينعكس شعاعٌ ضوئي واردٌ على سطح مرآة مستوية مُناظراً للشعاع الوارد بالنسبة إلى الناظم على سطح المرآة عند نقطة الورود.

نهدف في الدراسة اللاحقة إلى تعيين الزاوية الموجّهة بين الشعاع الوارد والشعاع المنعكس عن مرآة غير مستوية مكوّنة من سطحين مستويين عاكسين.



يوضّح الشكل المجاور الظاهرة. نفترض أنّ تمثيل الظاهرة يجري في مستوٍ موجّه. المرآة ممثّلة بالشكل AOB، وقياس الزاوية بين السطحين هو $m = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. أمّا قياس زاوية الورود فهو $i = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IS})$.

① بالاستفادة من التناظر القائم بالنسبة إلى (Ix) أثبت أنّ $(\overrightarrow{IS}, \overrightarrow{IJ}) = \pi - 2i$.

② بالاستفادة من التناظر القائم بالنسبة إلى (Jy) أثبت أنّ $(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JR}) = \pi - 2(\overrightarrow{JO}, \overrightarrow{JI})$.

③ بكتابة $(\overrightarrow{JO}, \overrightarrow{JI}) = (\overrightarrow{JO}, \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{JI})$، بيّن أنّ $(\overrightarrow{JO}, \overrightarrow{JI}) = \pi - m - i$.

④ استنتج مما سبق قياساً للزاوية $(\overrightarrow{SI}, \overrightarrow{JR})$. أيتعلّق هذا القياس بزاوية الورود i.

☜ نسمّي الزاوية $(\overrightarrow{SI}, \overrightarrow{JR})$ زاوية الانحراف.

⑤ a. نفترض أنّ وجهَي المرآة متعامدان. ما قيمة زاوية الانحراف في هذه الحالة ؟

b. حدِّد في هذه الحالة وضع الأشعّة الواردة والمنعكسة، ومثّل ذلك بالرسم.

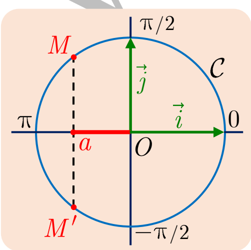
⑥ نفترض أنّ $m = \frac{3\pi}{4}$. ما وضع الأشعّة الواردة والمنعكسة في هذه الحالة ؟ مثِّل هذه الحالة بالرسم.

نشاط ٢ المعادلات المثلّثيّة

❶ **المعادلة $\cos x = a$، حيث a عددٌ حقيقي مُعطى.**

① أثبت أن لا حلَّ للمعادلة $\cos x = a$ في حالة $|a| > 1$.

الحل



② نفترض أنّ $-1 \le a \le 1$.

▫ عيّن على الشكل النقطة $P(a,0)$، والنقطتين M و M' من الدائرة المثلّثيّة C اللتين فاصلتاهما a. (يمكن أن تنطبق النقطتان M و M'). M هي النقطة التي تقبل قياساً θ للزاوية $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ محصوراً بين 0 و π.

▫ أثبت أنّ $(\vec{i},\overrightarrow{OM'}) = -\theta$.

▫ أثبت حلول المعادلة $\cos x = a$ هي $x = \theta + 2k\pi$ أو $x = -\theta + 2k'\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ و $k' \in \mathbb{Z}$.

الحل

③ حلَّ كلاً من المعادلات الآتية :

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos x = \frac{1}{2}$ و $2\cos x + \sqrt{3} = 0$ و $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos 4x = \frac{1}{2}$.

الحل

• المعادلة $2\cos x + \sqrt{3} = 0$ تكافئ $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتكافئ $\cos x = \cos\frac{5\pi}{6}$ ولها مجموعتان من الحلول : $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ وَ $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ مع $k \in \mathbb{Z}$

• المعادلة $\cos 4x = \frac{1}{2}$ تكافئ $\cos 4x = \cos\frac{\pi}{3}$ ولها مجموعتان من الحلول ، الأولى: $4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ومنه: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\pi k$ ، والثانية $4x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ومنه: $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\pi k$ مع $k \in \mathbb{Z}$

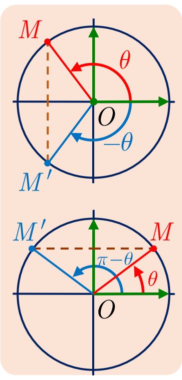
❷ المعادلة $\sin x = b$، حيث b عددٌ حقيقي مُعطى.

① باتّباع أسلوب مماثل للحالة السابقة، أثبت أن ليس لهذه المعادلة حلول في حالة $1 < |b|$. وأنّه في الحالة المعاكسة، تتكوَّن مجموعة الحلول من الأعداد $x = \theta + 2k\pi$ أو $x = \pi - \theta + 2k'\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و $k' \in \mathbb{Z}$، والعدد θ هو عددٌ محصور بين $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ ويُحقّق $\sin\theta = b$.

الحل

② حلّ كلاً من المعادلات الآتية:

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin x = \frac{1}{2}$ و $2\sin x + \sqrt{2} = 0$ و $\sin 3x = \frac{1}{2}$ و $\sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



الخلاصة: يمكن تلخيص نتائج الدراسة السابقة كما يأتي :

▪ في $\mathbb{R}$، تُكافئ المعادلةُ $\cos x = \cos\theta$ ما يأتي :
$x = \theta + 2k\pi$ أو $x = -\theta + 2k'\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و $k' \in \mathbb{Z}$.

▪ في $\mathbb{R}$، تُكافئ المعادلةُ $\sin x = \sin\theta$ ما يأتي:

$x = \theta + 2k\pi$ أو $x = \pi - \theta + 2k'\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و $k' \in \mathbb{Z}$.

الحل

❸ أعدادٌ حقيقيّة لها الجيب نفسه، أو جيب التمام نفسه.

① بالاستفادة من الدائرة المثلّثيّة أثبت تكافؤ الخاصّتين الآتيتين :

» للعددين الحقيقيين x و y جيب التمام نفسه : $\cos x = \cos y$ «

» $x = y + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$، أو $x = -y + 2k'\pi$ مع $k' \in \mathbb{Z}$ «

② أثبت كذلك تكافؤ الخاصّتين الآتيتين:

» للعددين الحقيقيين x و y الجيب نفسه : $\sin x = \sin y$ «

» $x = y + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$، أو $x = \pi - y + 2k'\pi$ مع $k' \in \mathbb{Z}$ «

③ **تطبيق**: حلَّ كلاً من المعادلتين $\sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ و $\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

الحل

المعادلة : $\sin 2x = \sin(\mathrm{x} + \frac{\pi}{4})$ تقبل مجموعتين من الحلول

الأولى : توافق $2x = x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ومنه: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

الثانية : توافق $2x = \pi - x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ومنه : $3x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi$ ومنه : $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

❹ معادلات من الصيغة $\sin(v(x)) = \cos(u(x))$.

بوجه عام، لحل معادلة من الصيغة $\cos u = \sin v$، نُرجع هذه المعادلة إلى معادلة من الصيغة $\cos u = \cos V$ بأن نكتب $\sin v = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$، أو نُرجعها إلى معادلة من الصيغة $\sin U = \sin v$ بكتابة $\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$.

حلَّ كلاً من المعادلتين الآتيتين $\sin 3x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$، و $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

الحل

- المعادلة : $\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = \cos(\mathrm{x} + \frac{\pi}{3})$ تكافئ : $\cos(\frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{x} - \frac{\pi}{6}) = \cos(\mathrm{x} + \frac{\pi}{3})$

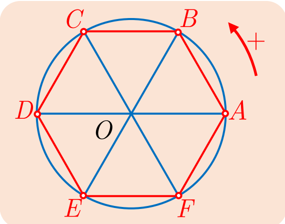
وتكافئ $\cos(\frac{\pi}{3} - 2x) = \cos(x + \frac{\pi}{3})$ ولهذه المعادلة مجموعتان من الحلول:

الأولى: $\frac{\pi}{3}-2x=x+\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ومنه : $-3x=2k\pi$ أي $x=-\frac{2k\pi}{3}$ أو $x=\frac{2}{3}k_1\pi$ حيث $k_1=-k\in\mathbb{Z}$.

الثانية توافق: $\frac{\pi}{3}-2x=-x-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ومنه $-x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ أي $x=\frac{2\pi}{3}-2k\pi$ أو $x=\frac{2\pi}{3}+2k_1\pi$ حيث $k_1=-k\in\mathbb{Z}$.

تمرينات ومسائل

١ $ABCDEF$ مسدّس منتظم مرسوم في مستوٍ موجّه. عيِّن القياس الأساسي للزوايا الموجّهة الآتية:



① $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF})$ ② $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})$ ③ $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$

④ $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE})$ ⑤ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE})$ ⑥ $(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF})$

⑦ $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF})$ ⑧ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})$ ⑨ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC})$

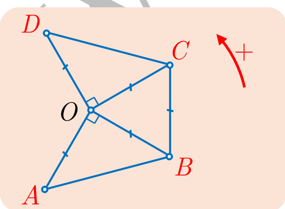
الحل

① $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF})=\frac{2\pi}{3}$ ② $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})=\frac{\pi}{3}$ ③ $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{3}$

④ $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE})=-\frac{2\pi}{3}$ ⑤ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE})=\pi$ ⑥ $(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF})=\frac{\pi}{6}$

⑦ $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF})=\frac{\pi}{2}$ ⑧ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=\frac{2\pi}{3}$ ⑨ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC})=-\frac{\pi}{3}$

٢ تأمّل الشكل المجاور المرسوم في مستوٍ موجّه، والمعطيات المبيّنة عليه، ثُمّ عيِّن القياس الأساسي للزوايا الموجّهة الآتية



① $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{OC})$ ② $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})$ ③ $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$

④ $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BC})$ ⑤ $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{DB})$ ⑥ $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{DO})$

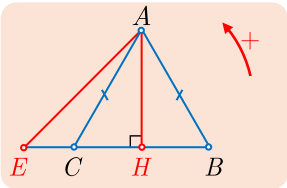
الحل

① $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{OC})=\dfrac{2\pi}{3}$ ② $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})=-\dfrac{2\pi}{3}$

③ $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})=\dfrac{5\pi}{6}$ ④ $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BC})=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7\pi}{12}$

⑤ $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{DB})=\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{5\pi}{12}$ ⑥ $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{DO})=-\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$

٣ في الشكل المجاور المرسوم في مستوٍ موجّه، ABC مثلّث متساوي الأضلاع، و EHA مثلّث متساوي الساقين وقائم الزاوية في H. عيّن القياس الأساسي للزوايا الآتية :



① $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ ② $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB})$ ③ $(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{EB})$

④ $(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC})$ ⑤ $(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{CH})$ ⑥ $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})$

الحل

① $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})-\dfrac{\pi}{3}$ ② $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB})=\dfrac{2\pi}{3}$ ③ $(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{EB})=-\dfrac{\pi}{2}$

④ $(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC})=-\dfrac{\pi}{4}$ ⑤ $(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{CH})-\dfrac{\pi}{4}$ ⑥ $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})-\dfrac{\pi}{12}$

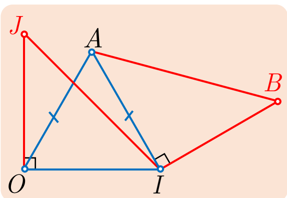
٤ نعطي α قياس الزاوية الموجّهة $(\vec{u},\vec{v})$. أوجد قياساً للزوايا الآتية : $(3\vec{u},-2\vec{v})$ و $(-2\vec{v},\vec{u})$ و $(5\vec{v},4\vec{u})$ و $(-5\vec{u},-6\vec{v})$.

الحل

ومنه: $\alpha = \vec{u},\vec{v}$

$3\vec{u},-2\vec{v} = \alpha-\pi$, $-2\vec{v},\vec{u} = \pi-\alpha$, $5\vec{v},4\vec{u} = -\alpha$, $-5\vec{u},-6\vec{v} = \alpha$

٥ نتأمّل مثلثاً AOI متساوي الأضلاع فيه $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AI})=\dfrac{\pi}{3}$. وكذلك نتأمّل المثلّثين OIJ و IBA ونفترض أنّهما متساويا الساقين وقائمان، وفيهما $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})=(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IA})=\dfrac{\pi}{2}$.



① علّل صحّة المساواة $(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AO})+(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AI})+(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB})$.

② احسب قياس كلٍّ من الزوايا الهندسيّة JAO و OAI و IAB.

③ استنتج قياساً لكلٍّ من $(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AO})$ و $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AI})$ و $(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB})$.

④ استنتج قياساً للزاوية $(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AB})$. ماذا تقول بشأن النقاط A و B و J؟

الحل

① $\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AO},\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}$

حسب علاقة شال $= \overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}$

وحسب شال من جديد $= \overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AB}$

② لدينا $\triangle AOJ$ مثلث متساوي الساقين رأسه O وبما أن : $JOA = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

فإن $JAO = OAJ = \frac{\pi - \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\frac{5\pi}{6}}{2} = \frac{5\pi}{12}$

وبما أن IAO مثلث متساوي الأضلاع فإن : $OAI = \frac{\pi}{3}$

بما أن المثلث AIB قائم في I ومتساوي الساقين فإن : $IAB = \frac{\pi}{4}$

③ $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB} = \frac{\pi}{4}$, $\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AI} = \frac{\pi}{3}$, $\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AO} = \frac{5\pi}{12}$

④ $\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AO},\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}$

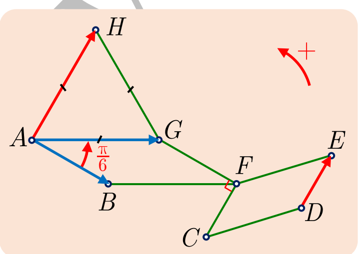
$$= \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi + 4\pi + 3\pi}{12} = \pi$$

إذاً : النقط A, B, J على استقامة واحدة .

لنتعلّم البحث معاً

٦ الزوايا الموجّهة والتوازي

نتأمّل في المستوي الموجّه، الشكلَ المجاور، الذي فيه $ABFG$ متوازي أضلاع، و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}) = \frac{\pi}{6}$، والمثلّث AGH متساوي الأضلاع، ويُحقّق $(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AH}) = \frac{\pi}{3}$، وأخيراً $CDEF$ متوازي أضلاع ويُحقّق $(\overrightarrow{FG},\overrightarrow{FC}) = \frac{\pi}{2}$. أثبت توازي المستقيمين (AH) و (DE).



الحل

بما أن AHG مثلث متساوي الأضلاع فإن: $HAG = AHG = HGA = \frac{\pi}{3}$

ومن متوازي الأضلاع $ABFG$ نجد أن: $BAG = BFG = \frac{\pi}{6}$ ، كما أن : $ABF = AGF = \frac{5\pi}{6}$

لدينا حسب علاقة شال: $\overrightarrow{AH},\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AH},\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AG},\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}$

ولكن: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GF}$ وَ $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF}$ وبالتالي فإن:

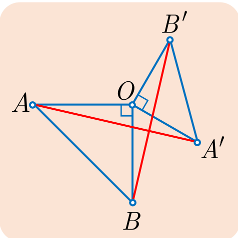
$$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{GF},\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{GF},-\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{FG},\overrightarrow{FC} = \frac{\pi}{2}$$

وبالتالي فإن: $\overrightarrow{AH},\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AH},\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AG},\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GF},\overrightarrow{FC}$

$$= -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = 0$$

وبالتالي : $\overrightarrow{DE},\overrightarrow{AH}$ مرتبطان خطياً وبالتالي $AH \ // \ DE$

٧ قطع مستقيمة متساوية الطول ومتعامدة

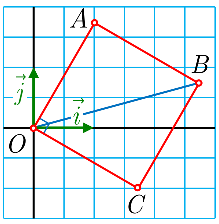


نتأمّل في المستوي الموجّه، مثلثين متساويي الساقين وقائمين OAB و $OA'B'$ فيهما $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}) = \frac{\pi}{2}$. أثبت من جهة أولى أنّ $AA' = BB'$ ، وأثبت من جهة ثانية تعامد المستقيمين (BB') و (AA').

الحل

نلاحظ من الشكل أنّ $\mathcal{R}_{(O,\frac{\pi}{2})}\ A = B$ كذلك $\mathcal{R}_{(O,\frac{\pi}{2})}\ A' = B'$ إذاً صورة القطعة المستقيمة $[AA']$ وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ هي القطعة المستقيمة $[BB']$ وبما أنّ زاوية الدوران قائمة فإنّ $AA' = BB'$ ، و المستقيمين BB' و AA' متعامدين.

٨ حساب الإحداثيات



$(O;\vec{i},\vec{j})$ مَعْلَم متجانس مباشر. و A نقطة إحداثياتها القطبيّة $2;\frac{\pi}{3}$.
و $OABC$ مربّع فيه $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{2}$. يُطلب حساب القيم الدقيقة (دون

تقريب) لكلٍّ من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$. لتحقيق ذلك احسب الإحداثيات الديكارتية للنقطة C، واستفد من المساواة $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ لحساب الإحداثيات الديكارتية ثُمَّ القطبية للنقطة B.

الحل

$A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$، $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{2}$ لنوجد أولاً الإحداثيات القطبية للنقطة C، حيث لدينا: $r = OC$ وبما أن: $OABC$ مربع فإن: $OC = OA = 2$ ومنه: $r = OC = 2$ وحسب علاقة شال نجد أن:

$(\vec{i}, \overrightarrow{OC}) = (\vec{i}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6}$، إذاً: $C\left(2, -\frac{\pi}{6}\right)$

أصبح بمقدورنا الآن حساب الإحداثيات الديكارتية للنقطة C :

$$x_C = r\cos\theta = 2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$
$$y_C = r\sin\theta = 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\frac{\pi}{6} = -2.\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

وبالتالي فإن: $C(\sqrt{3}, -1)$

ولنوجد الآن الإحداثيات الديكارتية للنقطة A :

$$x_A = r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2.\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$
$$y_A = r\sin\theta = 2\sin\frac{\pi}{3} = 2.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

وبالتالي: $A(1, \sqrt{3})$

أصبح بإمكاننا الآن حساب الإحداثيات الديكارتية للنقطة B وذلك بالاستفادة من العلاقة الشعاعية:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$$
$$(x_B, y_B) = (1, \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1)$$
$$(x_B, y_B) = (1 + \sqrt{3}, \sqrt{3} - 1)$$

وبالتالي: $x_B = \sqrt{3} + 1, y_B = \sqrt{3} - 1$ أو: $B(\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} - 1)$

لنوجد الآن الإحداثيات القطبية للنقطة B فنجد:

$$r = \sqrt{{x_B}^2 + {y_B}^2} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3 + 2\sqrt{3} + 1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = (\vec{i}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$$

وبما أن $OABC$ مربع و $[OB]$ قطر فيه، فإن: $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4}$

وبالتالي فإن: $\theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ إذاً: $B\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{12}\right)$

ونحن نعلم أن: $\cos\theta = \frac{x_B}{r}$ ومنه: $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

كما نعلم أن: $\sin\theta = \frac{y_B}{r}$ ومنه: $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

٩ الإحداثيات القطبيّة والمثلّثات

$(O;\vec{i},\vec{j})$ مَعْلَم متجانس مباشر. الدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ ينقل النقطة A التي إحداثياتها القطبيّة $(1;\alpha)$ إلى B، وينقل النقطة B إلى C.

① أثبت أنّ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

② استنتج أنّ

$$\cos\alpha + \cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right) = 0$$
$$\sin\alpha + \sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

الحل

① $A(1,\alpha)$ R دوران مركزه (O) وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

لدينا: $\frac{2\pi}{3} = \overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}$ ، $\frac{2\pi}{3} = \overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ ، $\frac{2\pi}{3} = \overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$

وبالتالي وبما أن المثلثات: $\triangle AOB$ ، $\triangle BOC$ ، $\triangle COA$ متساوي الساقين راسها O فإن :

$$BAO = ABO = OBC = OCB = OAC = OCA = \frac{\pi}{6}$$

وبالتالي فإنَّ: $BAC = ACB = ABC = \frac{\pi}{3}$

فالمثلث $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع وبما أن (O) هي مركز الدائرة المارة برؤوسه فهي مركز ثقله أيضاً

و بالتالي : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ (حيث O هي مركز الأبعاد للنقط المثقلة $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$)

$$\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} = r\cos\alpha\,\vec{i} + r\sin\alpha\,\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} = r\cos(\alpha+\frac{2\pi}{3})\vec{i} + r\sin(\alpha+\frac{2\pi}{3})\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OC} = x_c\vec{i} + y_c\vec{j} = r\cos(\alpha+\frac{4\pi}{3})\vec{i} + r\sin(\alpha+\frac{4\pi}{3})\vec{j}$$

ولكن: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

ومنه:
$$\text{r}\cos\alpha\,\vec{i} + r\sin\alpha\,\vec{j} + r\cos(\alpha+\frac{2\pi}{3})\vec{i} + r\sin(\alpha+\frac{2\pi}{3})\vec{j}$$
$$+ r\cos(\alpha+\frac{4\pi}{3})\vec{i} + r\sin(\alpha+\frac{4\pi}{3})\vec{j} = \vec{0}$$

وبالتقسيم على $r \neq 0$ نجد:

$$\left[\cos\alpha + \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \cos(\alpha + \frac{4\pi}{3})\right]\vec{i} + \left[\sin\alpha + \sin\frac{\alpha\pi}{3} + \sin(\alpha + \frac{4\pi}{3})\right]\vec{j} = \vec{0}$$

ومنه:

$$\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

$$\sin\alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

١٠ حساب مجاميع

لنتأمّل المجموعين الآتيين

$$U = \cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{5\pi}{8} + \cos\frac{7\pi}{8}$$

$$V = \sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} - \sin\frac{7\pi}{8}$$

احسب القيم الدقيقة للعددين U و V.

الحل

$$\begin{aligned} \mathrm{U} &= \cos\frac{\pi}{8} + \cos\left(\frac{4\pi}{8} - \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{8} - \frac{\pi}{8}\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{8} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{8} = 0 \end{aligned}$$

ويحسب V بأسلوب مشابه.

١١ تعيين النقاط على الدائرة.

$(O;\vec{i},\vec{j})$ مَعْلَم متجانس مباشر. $\mathcal{C}$ الدائرة المثلّثيّة التي مركزها O، و M و N نقاط من $\mathcal{C}$ إحداثياتها القطبيّة من الشكل $(1;x)$.

① عيّن النقاط M التي تُحقّق $4x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$، والنقاط N التي تُحقّق $4x = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi$.

② استنتج الحلول المنتمية إلى المجال $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ للمعادلة $\cos(4x) = -\frac{1}{2}$.

الحل

① نبحث عن نقطة $M(1;x)$ من الدائرة المثلثية X تحقق : $4x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ ، وبالتالي

$4x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ ، وبالتالي نلاحظ مايلي:

من أجل $k=0$ نحصل على $x=\frac{\pi}{6}$ والنقطة الموافقة هي $M_0(1,\frac{\pi}{6})$

من أجل $k=1$ نحصل على $x=\frac{2\pi}{3}$ والنقطة الموافقة هي $M_1(1,\frac{2\pi}{3})$

من أجل $k=2$ نحصل على $x=\frac{7\pi}{6}$ والنقطة الموافقة هي $M_2(1,\frac{7\pi}{6})$

من أجل $k=3$ نحصل على $x=\frac{5\pi}{3}$ والنقطة الموافقة هي $M_3(1,\frac{5\pi}{3})$

من أجل $k=4$ نحصل على $x=\frac{\pi}{6}+2\pi$ والنقطة الموافقة هي $M_4(1,\frac{\pi}{6}+2\pi)$ تنطبق على M_0

وبما أن الفرق بين $x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{k}{4}.2\pi$ وَ $x_2=\frac{\pi}{6}+\frac{k+4}{4}.2\pi$ هو 2π فإن:

النقاط M_0 و M_4 و M_8 و ... و M_{4n} منطبقة على بعضها

و النقاط M_1 و M_5 و M_9 و ... و M_{4n+1} منطبقة على بعضها

و النقاط M_2 و M_6 و M_{10} و ... و M_{4n+2} منطبقة على بعضها

و النقاط M_3 و M_7 و M_{11} و ... و M_{4n+3} منطبقة على بعضها

وبالتالي فإنه يوجد فقط أربع نقاط من تكون إحداثياتها القطبية $(1;x)$ تحقق العلاقة : $4x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

وبشكل مماثل نجد أنه توجد أربع نقاط N_0 و N_1 و N_2 و N_3 من X تكون إحداثياتها القطبية $(1;x)$

تحقق العلاقة : $4x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$، وهي:

$N_0\left(1,-\frac{\pi}{6}\right)$ و $N_1\left(1,\frac{\pi}{3}\right)$ و $N_2\left(1,\frac{5\pi}{6}\right)$ و $N_3\left(1,\frac{4\pi}{3}\right)$

② $\cos 4x=-\frac{1}{2}$ تُكافئ $\cos X=-\frac{1}{2}$ حيث $X=4x$ فهي تكافئ $\cos X=\cos\frac{2\pi}{3}$ وبالتالي فهي

تكافئ $X=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

أو: $X=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$، حيث $k\in\mathbb{Z}$ وبالتالي فهي تكافئ $4x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

أو $4x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

إذن الأعداد x المطلوبة هي الأعداد x التي تعيّن على الدائرة X النقاط الثمان السابقة . وعلينا تحديد x

التي تنتمي إلى $I=\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$ والنقاط التي تنتمي إلى القوس الموافق للمجال $I=\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$ هي:

M_0 و M_1 و M_8 و N_0 و N_1 و N_3 فقط. وبالتالي فإن حلول المعادلة $\cos 4x = -\frac{1}{2}$ في المجال I هي: $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

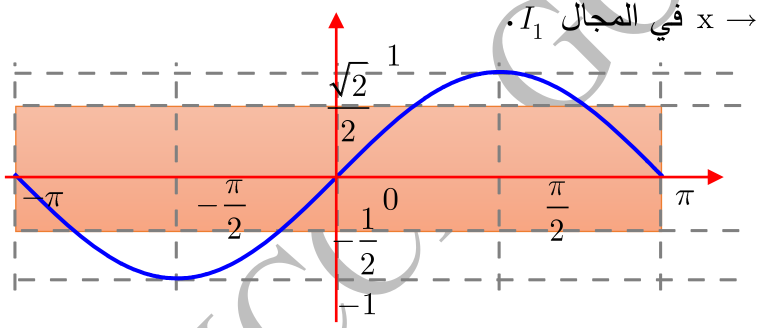
١٢ متراجحات مثلّثيّة.

نتأمّل ثلاثة مجالات $I_1 = [-\pi, \pi]$ و $I_2 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ و $I_3 = [0, 2\pi]$. جِدْ، في كلِّ واحدٍ من هذه المجالات، الأعداد الحقيقيّة x التي تحقِّق المتراجحة

$$-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

الحل

لحل المتراجحة $-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ في المجال $I_1 = [-\pi, \pi]$، فإننا نستفيد من التمثيل البياني للتابع $x \rightarrow \sin x$ في المجال I_1.



$$x \in \left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$$

وبقية المجالات بطريقة مماثلة.

قُدُماً إلى الأمام

إن حلول المتراجحة $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ في المجال I_1 هي فواصل نقاط المنحني البياني للتابع sin والتي تراتيبها تقع على أو تحت المستقيم d' الذي معادلته $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

أما حلول المتراجحة $\sin x \geq -\frac{1}{2}$ في المجال I_1 هي فواصل نقاط المنحني البياني للتابع sin والتي تراتيبها تقع على أو فوق المستقيم d الذي معادلته $y = -\frac{1}{2}$.

وبالتالي فإن أما حلول المتراجحة المطلوبة في المجال I_1 هي فواصل نقاط المنحني البياني للتابع $\sin$ والواقعة على d أو d' أو محصورة بينهما، نلاحظ أن لدينا نقطتان من منحني التابع $\sin$ تقعان على المستقيم d وهما : $A\left(-\frac{5\pi}{6},-\frac{1}{2}\right)$ و $B\left(-\frac{\pi}{6},-\frac{1}{2}\right)$ ، و لدينا نقطتان من منحني التابع $\sin$ تقعان على المستقيم d' وهما : $C\left(\frac{\pi}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و $D\left(\frac{3\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

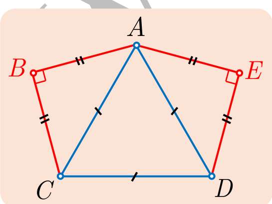
وبالتالي فإن مجموعة حلول المتراجحة في المجال I_1 هي : $S=\left[-\pi,-\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$

طريقة ثانية:

لحل المتراجحة $-\frac{1}{2}\leq \sin x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ في المجال $I_1=\left[-\pi,\pi\right]$، فإننا نستفيد من الدائرة المثلثية المنسوبة لمعلم متجانس ، نحدد على الدائرة المثلثية النقاط التي ترتيب كل منها $-\frac{1}{2}$ أو $\frac{\sqrt{2}}{2}$ فنجد النقاط: $A\left(-\frac{5\pi}{6},-\frac{1}{2}\right)$ و $B\left(-\frac{\pi}{6},-\frac{1}{2}\right)$ و $C\left(\frac{\pi}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و $D\left(\frac{3\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ننطلق من النقطة $(-\pi,0)$ على الدائرة المثلثية ونتحرّك بالاتجاه المباشر إلى النقطة $(\pi,0)$ ونحدّد النقاط من الدائرة C التي تراتيبها تقع في المجال $\left[-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ فنحصل على مجموعة حلول المتراجحة وهي: $S=\left[-\pi,-\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$

وبشكل مماثل نحلّ المتراجحة في كلّ من المجالين الباقيين.



١٣ في مستوٍ موجّه، ACD مثلّث متساوي الأضلاع فيه $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ يساوي $\frac{\pi}{3}$، و ABC و DEA مثلّثان قائمان ومتساويا الساقين يقعان خارج ACD.

① احسب قياس كلٍّ من الزوايا الهندسيّة BAE و BCD.

② استنتج قياس الزاويتين $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD})$ و $(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BA})$.

③ تحقّق أنّ : $(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD})$.

④ استنتج توازي المستقيمين (BE) و (CD).

الحل

① $$BAE = BAC + CAD + DAE = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6}$$

$$BCD = BCA + ACD = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$$

② إن $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CD})$

حيث N نقطة من نصف المستقيم $[BC)$ تحقق: $BC = CN$ ولدينا

: $NCD = \pi - BCD = \pi - \frac{-7\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$ وبالتالي فإن : $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}) = +\frac{5\pi}{12}$

ومن جهة ثانية فإن المثلث ΔBAE متساوي الساقين ورأسه A وفيه $BAE = \frac{5\pi}{12}$ وبالتالي:

$ABE = AEB = \dfrac{\pi - \frac{5\pi}{6}}{2} = \dfrac{\frac{\pi}{6}}{2} = \dfrac{\pi}{12}$ ، وبالتالي فإن : $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BA}) = +\frac{\pi}{12}$

③ حسب شال فإن: $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD})$

$$= (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD})$$

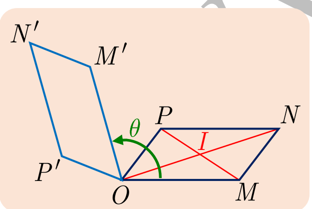
$$= (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC})$$

④ وبالتالي فإن : $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD})$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

نستنتج أن المتجهان $\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطان خطياً ومنه : $(CD)//(BE)$

١٤ في مستوٍ موجّه، $OMNP$ متوازي أضلاع مركزه I، و $\mathcal{R}$ دوران مركزه O وزاويته θ. M' و N' و P' هي، بالترتيب، صور النقاط M و N و P وفق الدوران $\mathcal{R}$.



① لماذا تكون I'، صورةُ I وفق $\mathcal{R}$، منتصفَ $[ON']$ ومنتصفَ $[M'P']$؟

② أثبت أنّ $OM'N'P'$ متوازي أضلاع.

③ أثبت أنّ : $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP'})$.

④ استنتج قياساً للزاوية $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'})$.

الحل

① بما أن الدوران يحافظ على المسافات وعلى الوقوع على استقامة واحدة وعلى منتصف قطعة مستقيمة، فإنه إذا كانت I منتصف القطعة $[AB]$ وكانت $[A'B']$ هي صورة $[AB]$ وفق دوران R وكانت I' هي صورة I وفق الدوران R فإن I' هي منتصف $[A'B']$، وعليه وبما أن I مركز متوازي الأضلاع $OMNP$ ، فإن I منتصف كلاً من قطريه $[PM],[ON]$ وبما أن O مركز الدوران R هي صورة نفسها و M',N',P' هي صور M,N,P بالترتيب وفق الدوران R،فإن $[P'M'],[ON']$ هي صور $[PM],[ON]$ بالترتيب وفق الدوران R، وبالتالي فإن I' هي منتصف كلاً من $[PM],[ON]$

② بما أن I' هي منتصف كلاً من $[PM],[ON]$، فإن الرباعي $OM'N'P'$ متوازي أضلاع لأن قطراه متناصفان.

③ بما أن $OMNP$ متوازي أضلاع فإن : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OP}$

بما أن $OM'N'P'$ متوازي أضلاع فإن : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{OP'}$

وبالتالي فإن $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OP'})$

④ لدينا $(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OP'}) = \theta$ وبالتالي : $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'}) = \theta$

١٥ أثبت صحّة ما يأتي:

① في حالة $x \mapsto f(x) = 2(\sin x)^2 - 3\sin x$ لدينا $f(\pi - x) = f(x)$.

② في حالة $x \mapsto f(x) = (\sin x)^3 + (\cos x)^3$ يكون $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f(x)$.

الحل

① $f(x) = 2(\sin x)^2 - 3\sin x$

التابع f معرف على $\mathbb{R}$ وإذا كان $x \in \mathbb{R}$ فإن $\pi - x \in \mathbb{R}$ ولدينا:

$\sin(\pi - x) = \sin x$:

$$f(\pi - x) = 2(\sin(\pi - x))^2 - 3\sin(\pi - x)$$
$$= 2(\sin x)^2 - 3\sin x = f(x)$$

② $f(x) = (\sin x)^3 + (\cos x)^3$

التابع f معرف على $\mathbb{R}$ وإذا كان $x \in \mathbb{R}$ فإن $\frac{\pi}{2} - x \in \mathbb{R}$ ولدينا:

$$f(\frac{\pi}{2} - x) = (\sin(\frac{\pi}{2} - x))^3 + (\cos(\frac{\pi}{2} - x))^3$$
$$= (\cos x)^3 + (\sin x)^3 = (\sin x)^3 + (\cos x)^3 = f(x)$$

١٦ في كلٍّ من الحالات الآتية احسب $\sin x$ أو $\cos x$، ثّم احسب $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

① $\sin x = -\frac{1}{4}$ ، و $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.

② $\cos x = \frac{3}{5}$ ، و $x \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$.

③ $\cos x = -\frac{1}{3}$ ، و $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

④ $\sin x = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ، و $x \in \left]2\pi, \frac{5\pi}{2}\right[$.

الحل

④ $\sin x = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ، و $x \in \left]2\pi, \frac{5\pi}{2}\right[$.

عندما $x \in \left]2\pi, \frac{5\pi}{2}\right[$ فإن x في الربع الأول وبالتالي $\sin x > 0$ وَ $\cos x > 0$ ولدينا:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$

عندئذٍ يكون لدينا حلان أولهما: $\cos x = \frac{3}{4}$ وهو مقبول

وثانيهما: $\cos x = -\frac{3}{4}$ وهومرفوض

١٧ في كلٍّ من الحالات الآتية نُعطي مجالاً I ومعادلة (1) ومتراجحة (2). حلَّ في I المعادلة (1) والمتراجحة (2).

① $I = [0, 2\pi]$ ، (1) : $2\sin x + 1 = 0,$ (2) : $2\sin x + 1 < 0,$

② $I = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ، (1) : $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0,$ (2) : $\sqrt{2}\cos x - 1 > 0,$

③ $I = [-\pi, \pi]$ ، (1) : $2\sin x - \sqrt{3} = 0,$ (2) : $2\sin x - \sqrt{3} \le 0,$

الحل

① $I = [0, 2\pi]$

المعادلة $2\sin x + 1 = 0$ تكافئ: $\sin x = -\frac{1}{2}$ وتكافئ: $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ ولهذه المعادلة مجموعتان من الحلول:

المجموعة الأولى: $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ وعناصر هذه المجموعة الواقعة في المجال I هي: $x = \frac{11\pi}{6}$ فقط

المجموعة الثانية: $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k'\pi$ وتكافئ: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k'\pi$، وعناصر هذه المجموعة الواقعة في المجال I هي: $x = \frac{7\pi}{6}$ فقط

إذاً للمعادلة السابقة حلان في I هما: $x = \frac{7\pi}{6}$ وَ $x = \frac{11\pi}{6}$ ، والمتراجحة $2\sin x + 1 < 0$ تكافئ: $\sin x < -\frac{1}{2}$

لدينا نقطتان من الدائرة المثلثية ترتيب كل منهما $\left(-\frac{1}{2}\right)$، الأولى A تقع في الربع الثالث وتقابل العدد $x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ من المجال $[0,2\pi]$ والثانية B تقع في الربع الرابع وتقابل العدد $x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ من المجال $[0,2\pi]$. وبالتالي حلول المتراجحة $\sin x < -\frac{1}{2}$ في المجال $[0,2\pi]$ هي الأعداد المقابلة لنقاط الدائرة المثلثية التي تراتيبها أصغر تماماً من $-\frac{1}{2}$، (أي الأعداد المقابلة لنقاط الدائرة المثلثية الواقعة تحت المستقيم $y = -\frac{1}{2}$) فهذه الحلول هي : $S = \left]\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right[$

١٨ في كلٍّ من الحالات الآتية نُعطي مجالاً I ومعادلة (1) ومتراجحة (2). حلّ في I المعادلة (1) والمتراجحة (2).

① $I = [0,2\pi]$ ، (1) : $2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$، (2) : $2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 1$

② $I = [-\pi,\pi]$ ، (1) : $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$، (2) : $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) > 1$

الحل

① $I = [0,2\pi]$

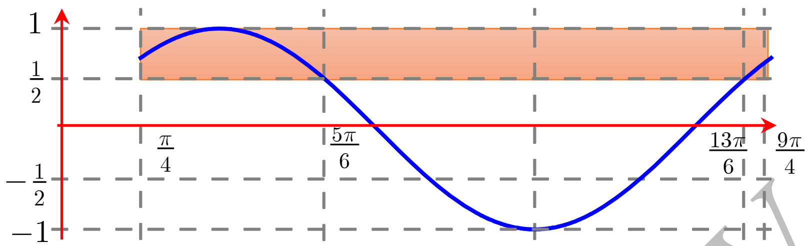
المعادلة $2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 1$ تكافئ: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ وتكافئ: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$ ولهذه المعادلة مجموعتان من الحلول:

المجموعة الأولى توافق $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ومنه $x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$

المجموعة الثانية توافق $x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ومنه $x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$

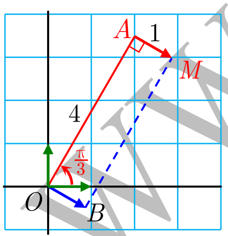
وبالتالي فإن مجموعة حلول هذه المعادلة في المجال I هي: $\left\{\frac{23\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right\}$

أما بالنسبة للمتراجحة $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>1$ فهي تكافئ $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>\frac{1}{2}$، ولحلّها سنفترض $X=x+\frac{\pi}{4}$ فتؤول المتراجحة إلى $\sin X>\frac{1}{2}$، وعندما $x\in[0,2\pi]$ فإن $X=x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{9\pi}{4}\right]$ وبالتالي فإننا نبحث عن حلول المتراجحة $\sin X>\frac{1}{2}$ في المجال $J=\left[\frac{\pi}{4},\frac{9\pi}{4}\right]$، لذلك سنستفيد من رسم خط الدالة sin في المجال J.



إن حلول المتراجحة $\sin X>\frac{1}{2}$ في المجال J هي فواصل الخط السابق والتي تراتيبها تقع فوق المستقيم $y=\frac{1}{2}$ الموازي للمحور XX'. ونلاحظ أن لدينا نقطتان من هذا الخط تقعان على المستقيم هما $A\left(\frac{5\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$ وَ $B\left(\frac{13\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$، وبالتالي فإن هذه المتراجحة توافق $X\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{13\pi}{6},\frac{9\pi}{4}\right]$ ومنه $x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{13\pi}{6},\frac{9\pi}{4}\right]$ أي أن $x\in\left[0,\frac{7\pi}{12}\right[\cup\left]\frac{23\pi}{12},2\pi\right]$ وهي مجموعة حلول المتراجحة .

١٩ نعطي النقطتين A و M المعيَّنتين كما يبيّن الشكل المجاور:



① احسب إحداثيتي النقطة A الديكارتيتين.

② نعيّن النقطة B بالعلاقة $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OB}$، احسب $(\vec{i},\overrightarrow{OB})$.

③ احسب الإحداثيّات القطبيّة للنقطة B .

④ استنتج الإحداثيّات الديكارتيّة للنقطة M .

الحل

① لدينا $OA=4$ وبالتالي فإن: $\sqrt{{x_A}^2+{y_A}^2}=4$ ومنه: ${x_A}^2+{y_A}^2=16$ ، ولكن: $x_A=2$ ومنه: $4+{y_A}^2=16$ ومنه: ${y_A}^2=12$، ولهذه المعادلة حلان : $y_A=-2\sqrt{3},y_A=2\sqrt{3}$ ، وبما أن A في الربع الأول فإن $y_A>0$ ومنه نقبل فقط الحل $y_A=2\sqrt{3}$ ، وبالتالي $A(2,2\sqrt{3})$

② قياس الزاوية الهندسية بين الشعاعين $\vec{i},\overrightarrow{OB}$ هي: $\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\theta$ وبالتالي فإن:

$$(\vec{i},\overrightarrow{OB})=-\frac{\pi}{6}$$

③ لدينا : $OB=1$ وَ $(\vec{i},\overrightarrow{OB})=-\frac{\pi}{6}$ وبالتالي فإن: $B\left(1,-\frac{\pi}{6}\right)$

④ لدينا:
$$x_B=r\cos\theta=1.\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y_B=r\sin\theta=1.\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

وبالتالي: $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$

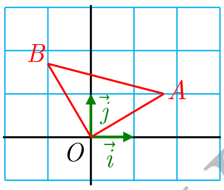
ومن العلاقة : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OB}$ ، نجد أن: $(x_M-2,y_M-2\sqrt{3})=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$

ومنه: $x_M-2=\frac{\sqrt{3}}{2}$، وبالتالي: $x_M=\frac{4+\sqrt{3}}{2}$

وأيضاً: $y_M-2\sqrt{3}=-\frac{1}{2}$، وبالتالي: $y_M=\frac{4\sqrt{3}-1}{2}$

إذاً: $\mathrm{M}\left(\frac{4+\sqrt{3}}{2},\frac{4\sqrt{3}-1}{2}\right)$

٢٠ نعطي النقطتين $A(\sqrt{3},1)$ و $B(-1,\sqrt{3})$.



① احسب الإحداثيات القطبيّة للنقطتين A و B.

② احسب قياساً للزاوية $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

③ استنتج طبيعة المثلّث AOB.

الحل

① $A(2;\frac{\pi}{6})$ و $B(2;\frac{2\pi}{3})$.

② $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OA},\vec{i})+(\vec{i},\overrightarrow{OB})=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$.

③ المثلث AOB قائم ومتساوي الساقين.

٢١ في كلٍّ من الحالات الآتية نُعطي مجالاً I ومعادلة (1) ومتراجحة (2). حلَّ في I المعادلة (1) والمتراجحة (2).

① $I=[0,\pi]$, $(1):\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$, $(2):\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)\le\dfrac{1}{2}$,

② $I=[0,2\pi]$, $(1):\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{5}\right)=\dfrac{1}{2}$, $(2):\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{5}\right)\ge\dfrac{1}{2}$,

③ $I=[-\pi,\pi]$, $(1):\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin 3x$,

الحل

② $I=[0,2\pi]$

(1) المعادلة $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{5}\right)=\dfrac{1}{2}$ تكافئ: $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{5}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}$ ولها مجموعتان من الحلول:

المجموعة الأولى توافق $2x-\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ومنه $x=\dfrac{4\pi}{15}+k\pi$

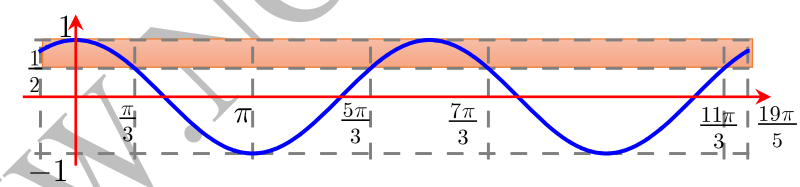
المجموعة الثانية توافق $2x-\dfrac{\pi}{5}=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ومنه $x=-\dfrac{\pi}{15}+k\pi$

و مجموعة حلول هذه المعادلة في المجال I هي: $\left\{\dfrac{4\pi}{15},\dfrac{19\pi}{15},\dfrac{14\pi}{15}\right\}$

(2) أما المتراجحة $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{5}\right)\ge\dfrac{1}{2}$ فهي تكافئ $\cos X\ge\dfrac{1}{2}$، مع $X=2x-\dfrac{\pi}{5}$ ،

وعندما $x\in[0,2\pi]$ فإن $X\in\left[-\dfrac{\pi}{5},\dfrac{19\pi}{5}\right]$ وبالتالي علينا إيجاد حلول المتراجحة $\cos X\ge\dfrac{1}{2}$ في

المجال $X\in\left[-\dfrac{\pi}{5},\dfrac{19\pi}{5}\right]$، ومن أجل ذلك نستفيد من التمثيل البياني للدالة $\cos$ في المجال $\left[-\dfrac{\pi}{5},\dfrac{19\pi}{5}\right]$.



مجموعة حلول المتراجحة هي فواصل النقاط من هذا الخط البياني والتي تقع على أو فوق المستقيم $y=\dfrac{1}{2}$ الموازي للمحور XX'.

وبالتالي فإن المتراجحة توافق $X\in\left[-\dfrac{\pi}{5},\dfrac{\pi}{3}\right]$ والموافقة لقيم $x\in\left[0,\dfrac{4\pi}{15}\right]$

و $X\in\left[\dfrac{5\pi}{3},\dfrac{7\pi}{3}\right]$ والموافقة لقيم $x\in\left[\dfrac{14\pi}{15},\dfrac{19\pi}{15}\right]$

و $X\in\left[\dfrac{11\pi}{3},\dfrac{19\pi}{5}\right]$ والموافقة لقيم $x\in\left[\dfrac{29\pi}{15},2\pi\right]$

وهكذا نجد أن مجموعة حلول المتراجحة هي $\left[0,\dfrac{4\pi}{15}\right]\cup\left[\dfrac{14\pi}{15},\dfrac{19\pi}{15}\right]\cup\left[\dfrac{29\pi}{15},2\pi\right]$

٢٢ في كلٍّ من الحالات الآتية نُعطي مجالاً I ومعادلة (1). حلَّ في I المعادلة (1).

① $(1):\ \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\quad I=[-\pi,\pi]$

② $(1):\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x,\quad I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

③ $(1):\ \sin 3x=\cos 2x,\quad I=[-\pi,\pi]$

الحل

① $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ ، $I=[-\pi,\pi]$

المعادلة $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ تكافئ: $\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ ولها مجموعتان من الحلول:

المجموعة الأولى توافق $\frac{2\pi}{3}-2x=x+\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ومنه $x=\frac{5\pi}{36}-\frac{2}{3}k\pi$ أو $x=\frac{5\pi}{36}+\frac{2}{3}k_1\pi$

حيث $k_1=-k\in\mathbb{Z}$

المجموعة الثانية توافق $\frac{2\pi}{3}-2x=-x+\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ومنه $x=\frac{11\pi}{12}-2k\pi$ أو $x=\frac{11\pi}{12}+2k_1\pi$

حيث $k_1=-k\in\mathbb{Z}$

و مجموعة حلول هذه المعادلة في المجال $[-\pi,\pi]$ هي: $\left\{\frac{5\pi}{36},\frac{29\pi}{36},-\frac{19\pi}{36},\frac{11\pi}{12}\right\}$

٢٣ حلَّ في $\mathbb{R}$ المعادلات الآتية.

① $\cos 2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ ② $\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

③ $\sin 2x=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ ④ $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$

⑤ $\sin 2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ ⑥ $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{3}\right)=\sin x$

الحل

⑤ $\sin 2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

المعادلة $\sin 2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ تكافئ: $\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ ولهذه المعادلة عدد لا نهائي من الحلول حيث أنه لدينا مجموعتان من الحلول:

المجموعة الأولى توافق $\frac{\pi}{2}-2x=x+\frac{\pi}{3}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ومنه $x=\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}k_1\pi$ حيث $k_1=-k\in\mathbb{Z}$

المجموعة الثانية توافق $\frac{\pi}{2}-2x=-x-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ومنه $x=\frac{5\pi}{6}+2k_1\pi$ حيث $k_1=-k\in\mathbb{Z}$

٢٥ حلَّ في $[0,2\pi[$ المتراجحات الآتية.

① $\cos\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)\geq-\frac{1}{2}$ ② $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}$

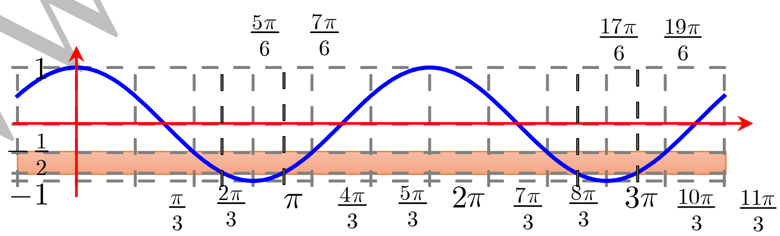
③ $\frac{1}{2}\leq\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$

⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leq-\frac{1}{2}$ ⑥ $\sin 3x\leq\frac{1}{2}$

الحل

⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leq-\frac{1}{2}$

لنضع $X=2x-\frac{\pi}{3}$ فنجد أنه عندما $x\in[0,2\pi[$ فإن $X\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{11\pi}{3}\right[$ وتؤول المتراجحة إلى الشكل $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq\cos X\leq-\frac{1}{2}$ مع $X\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{11\pi}{3}\right[$ ، ولحلها نستفيد من الخط البياني للدالة $\cos$ في المجال $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{11\pi}{3}\right[$



المعادلة $\cos X=-\frac{1}{2}$ تكافئ: $\cos X=\cos\frac{2\pi}{3}$ ولها مجموعتان من الحلول في $\mathbb{R}$ هي $X=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ و $X=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ وبالتالي فإن حلولها في المجال $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{11\pi}{3}\right[$ هي:

$\left\{\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{8\pi}{3},\frac{10\pi}{3}\right\}$ ، وبالتالي توجد أربع نقاط من الخط البياني السابق يكون ترتيب كل منها $\left(-\frac{1}{2}\right)$ وهي $A\left(\frac{2\pi}{3},-\frac{1}{2}\right)$ وَ $B\left(\frac{4\pi}{3},-\frac{1}{2}\right)$ وَ $C\left(\frac{8\pi}{3},-\frac{1}{2}\right)$ وَ $D\left(\frac{10\pi}{3},-\frac{1}{2}\right)$

و المعادلة $\cos X=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ تكافئ: $\cos X=\cos\frac{5\pi}{6}$ ولها مجموعتان من الحلول هي

$X=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ و $X=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ وبالتالي فإن مجموعة حلولها في المجال $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{11\pi}{3}\right[$ هي: $\left\{\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{17\pi}{6},\frac{19\pi}{6}\right\}$، وبالتالي توجد أربع نقاط من الخط البياني السابق يكون ترتيب كل منها $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ وهي $A_1\left(\frac{5\pi}{6},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ وَ $B_1\left(\frac{7\pi}{6},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ وَ $C_1\left(\frac{17\pi}{6},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ وَ $D_1\left(\frac{19\pi}{6},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

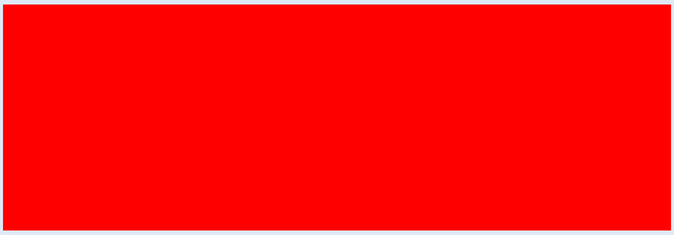
وحلول المتراجحة $-\frac{\sqrt{3}}{2}\le\cos X\le-\frac{1}{2}$ هي فواصل نقاط الخط البياني السابق والتي ترتيبها في المجال $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right]$ أي أنها فواصل نقاط الخط البياني السابق والواقعة بين المستقيمين الأفقيين $y=-\frac{1}{2}$ وَ $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو تقع على إحداهما .فحلولها هي:

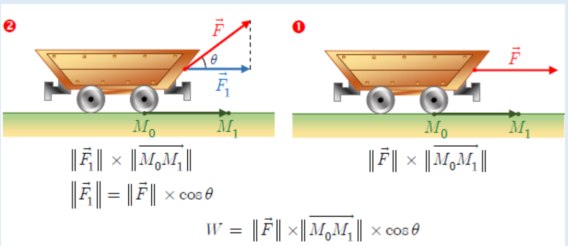
$$X\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{8\pi}{3},\frac{17\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{19\pi}{6},\frac{10\pi}{3}\right]$$

ومنه $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{8\pi}{3},\frac{17\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{19\pi}{6},\frac{10\pi}{3}\right]$

وبالتالي $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{12}\right]\cup\left[\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},\frac{19\pi}{12}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4},\frac{11\pi}{6}\right]$ وهي مجموعة حلول المتراجحة .

الهدف العام: توظيف الجداء السلمي في أثبات التعامد وحساب الأطوال وتعيين المحلات الهندسية

المقدمة	**الهدف**	التنويه إلى مفهوم جديد هو الجداء السلمي لإثبات علاقات رياضية وتعميمها.
	دور المدرس ودور الطالب	وضع الطالب أمام مشكلة وهي عدم القدرة على برهان العلاقة في حالة متوازي الأضلاع حسب فيثاغورث * قراءة المقدمة والإجابة عن الأسئلة.
	آلية التنفيذ 7 د	* يقرأ الطالب المقدمة. * يرسم المدرس الشكلين:  * يطرح المدرس أسئلة. – أثبت صحة العلاقة (مجموع مربعي القطرين يساوي مجموع مربعات الأضلاع الأربعة). في المستطيل. – يبرهن الطالب حسب فيثاغورث. – هل يمكن تطبيق فيثاغورث في حالة متوازي الأضلاع. * تواجه الطالب مشكلة عند متوازي الأضلاع. ينوه المدرس إلى وجود مفهوم جديد هو الجداء السلمي يساعد في إثبات صحة العلاقة والعلاقات المشابهة لها.

انطلاقة نشطة	**الهدف**	* تحديد أنّ الجداء السلمي هي عملية تطبق على الأشعة. * مقاربة مفهوم الجداء السلمي بمفهوم فيزيائي (العمل).
	دور المدرس ودور الطالب	استثمار قانون العمل لتقريب مفهوم الجداء السلمي كعملية تطبق على الأشعة. الإجابة عن الأسئلة.
	آلية التنفيذ ٨د	* يضع المدرس العلاقة المعبرة عن قانون العمل ويطلب من الطلبة تطبيق قانون العمل بالحالتين.  ملاحظة: مناقشة تطبيق قانون العمل في حالتين
تعريف وعبارات الجداء السلمي	**الهدف**	تعرّف الجداء السلمي.
	دور المدرس ودور الطالب	موجه وميسّر إثبات صحة العبارات الأخرى للجداء السلمي
	آلية التنفيذ ١٥د	* يشرح المدرس تعريف الجداء السلمي كما ورد في الكتاب. * يبرهن الطلبة العبارات الأخرى للجداء السلمي بالاعتماد على التعريف الأول وبتوجيه من المدرس. ملاحظة: العبارة $\Vert\vec{u}\Vert^2 = x^2 + y^2$ صحيحة فقط في معلم متجانس
تكريساً للفهم	**الهدف**	تقويمي لقياس مدى قدرة الطالب على توظيف عبارات الجداء السلمي في حل المشكلات.
	دور المدرس ودور الطالب	توجيه الطلبة إلى استعمال العبارة الملاءمة الإجابة عن الأسئلة.

	آلية التنفيذ ١٥ د	* يسأل المدرس: ١. لماذا توجد تعاريف عدة للجداء السلمي؟ * يناقش المدرس مثال صفحة ٧٨.
تدرب صفحة ٧٩	الهدف	تقويمي لقياس قدرة الطالب على توظيف في حل المشكلات.
	دور المدرس ودور الطالب	تغذية راجعة حل تمارين تدرب
	آلية التنفيذ حصة	يطلب المدرس من الطلاب حل تمارين تدرب كواجب منزلي ويناقش الحلول في الحصة التالية. * في السؤال ① يمكن اختيار الأرقام الفردية أو الزوجية. * تمارين ② و ③ و ④ تحل بالكامل.
② الإسقاط القائم وقواعد الحساب	الهدف	تمكين الطالب من تبسيط العبارات الشعاعية (اختزال العبارات الشعاعية)
	دور المدرس ودور الطالب	موجه و ميسر لعملية إثبات المبرهنات إثبات المبرهنات
	آلية التنفيذ ٢٠د	* في المبرهنة③: يسأل المدرس: ماذا يعني الإسقاط القائم؟ ويوجه الطلبة إلى تحليل النص وإثبات المبرهنة. * يثبت الطلبة المبرهنة ④ بتوجيه من المدرس. * يناقش المدرس النتائج ومثال صفحة ٨١.
تكريساً للفهم	الهدف	تقويمي لقياس مدى قدرة الطالب على معرفة فوائد الإسقاط القائم وقواعد الحساب.
	دور المدرس ودور الطالب	طرح أسئلة ،تغذية راجعة، الإجابة عن أسئلة المدرس.

	آلية التنفيذ ١٠د	* يسأل المدرس أسئلة تكريساً للفهم ويجيب الطالب بناءً على ما تم اكتسابه: **١. لماذا نستعمل المساواة** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$ ؟ – يوضح المدرس الإجابة. – يناقش المدرس مثال صفحة ٨١. **٢. ما الفائدة من هذه القواعد للحساب؟** – يوضح المدرس فوائد قواعد الحساب. – يناقش مثال صفحة ٨٢.
تدرب ص ٨٢	**الهدف**	تقويمي لقياس قدرة الطالب على توظيف الإسقاط القائم وقواعد الحساب في حل المشكلات.
	دور المدرس **ودور الطالب**	تغذية راجعة حل تمارين تدرب
	آلية التنفيذ ٥د	يطلب المدرس من الطلاب حل تمارين تدرب ① و ② وما تبقى من التمارين تعطى كواجب منزلي ويناقش الحلول في الحصة التالية.
تطبيقات ③	**الهدف**	دراسة بعض تطبيقات الجداء السلمي.
	دور المدرس **ودور الطالب**	طرح الأسئلة، توجيه الطلاب إلى استنتاج النتائج وإثبات المبرهنة ، تغذية راجعة. الإجابة عن الأسئلة، استنتاج النتائج، إثبات المبرهنة.

<table dir="rtl">
<tr><td></td><td>آلية التنفيذ
٤٥د</td><td>* يسأل المدرس:
– هل يمكن تطبيق المتطابقات التربيعية على الأشعة؟
* يوجه المدرس الطلبة إلى استنتاج عبارات جداءات سلمية ملفتة بالاعتماد على أن مربع شعاع يساوي مربع النظيم وقواعد حساب الجداء السلمي.
* يسأل المدرس: كيف نستفيد من الجداءات السلمية الملفتة؟
ويناقش متطابقة متوازي الأضلاع في تكريساً للفهم صفحة ٨٤ ويوضح أنها هذه العلاقة هي العلاقة التي عرضت في المقدمة.
* يعرض المدرس تعريف ٢ .
* يناقش المدرس المبرهنة ٥ والنتيجة.
* يسأل المدرس: كيف نستفيد من الجداء السلمي لإثبات تعامد؟
ويناقش مثال تكريساً للفهم صفحة ٨٥.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">تدرب صفحة ٨٦</td><td>الهدف</td><td>تقويمي لقياس قدرة الطالب على توظيف دراسة تطبيقات الجداء السلمي في حل المشكلات.</td></tr>
<tr><td>دور المدرس
ودور الطالب</td><td>تغذية راجعة
حل تمارين تدرب</td></tr>
<tr><td>آلية التنفيذ
حصة</td><td>يطلب المدرس من الطلاب حل تمارين تدرب ضمن الحصة الدرسية وما تبقى من التمارين تُعطى كواجب منزلي يتم مناقشة حلولها في الحصة التالية.</td></tr>
<tr><td>الأنشطة</td><td>الهدف</td><td><u>نشاط١ :</u> قياس مدى قدرة الطالب على توظيف الجداء السلمي في حساب قياسات الزوايا.</td></tr>
</table>

		نشاط 2: قياس مدى قدرة الطالب على استخدام الجداء السلمي لقياس المسافات واستنتاج علاقات خاصة بالمثلث القائم. **نشاط 3:** قياس مدى قدرة الطالب على توظيف الجداء السلمي في إيجاد المحلات الهندسية. **نشاط 4:** قياس مدى قدرة الطالب على توظيف الجداء السلمي في إيجاد المحل الهندسي وربطها بمفهوم التابع.
	دور المدرس ودور الطالب	ميسر وموجه، تغذية راجعة ،حل الأنشطة
	آلية التنفيذ ثلاث حصص	يناقش المدرس كل نشاط ويطلب من الطلبة حله، ويناقشهم بالحل.
تمرينات ومسائل	**الهدف**	تقويمي لقياس مدى قدرة الطالب على توظيف الجداء السلمي في حل المشكلات.
	دور المدرس ودور الطالب	تغذية راجعة حل التمرينات والمسائل.
	آلية التنفيذ	يطلب المدرس من الطلاب حل تمرينات ومسائل. ثلاث حصص مع لنتعلم البحث معاً
لنتعلم البحث معاً	**الهدف**	تزويد الطالب بمنهجية التفكير الاستقصائي
	دور المدرس ودور الطالب	ميسر وموجه، تغذية راجعة ،حل المشكلات
	آلية التنفيذ	* يعرض المدرس مسائل لنتعلم البحث معاً * يناقش المدرس والطلبة الحل وفق الآلية المعروضة في الكتاب.

		* صوغ الحل وكتابته بلغة سليمة.
قدماً إلى الأمام	**الهدف**	تعزيز مهارات حل المسائل والتفكير الناقد
	دور المدرس **ودور الطالب**	تغذية راجعة حل مسائل وتمارين قدماً إلى الأمام.
	آلية التنفيذ ثلاث حصص	يطلب المدرس من الطلاب حل تمارين ومسائل قدماً إلى الأمام

جدول تصنيف المسائل حسب الهدف								
الهدف	رقم المسألة							
حساب الجداء السلمي – تطبيق مباشر	رقم المسألة	١	٢	٣	٦			
	الصفحة	٩٢	٩٢	٩٢	٩٢			
توظيف قواعد الحساب الشعاعي في حساب الجداء السلمي	رقم المسألة	٢	٣	٤	١٠	١١		
	الصفحة	٩٢	٩٢	٩٢	٩٣	٩٣		
إيجاد نظيم شعاع معطى و توظيفه	رقم المسألة	١٣	١٤	٢٣	٢٤			
	الصفحة	٩٤	٩٥	٩٨	٩٩			
إيجاد المحل الهندسي تحليلياً	رقم المسألة	١٥	٢٨	٣١				
	الصفحة	٩٦	٩٩	١٠١				
اثبات ثلاث نقط على استقامة واحدة	رقم المسألة	٢٩	٣٠					
	الصفحة	١٠	١٠					
إيجاد مجموعة النقاط باستخدام الجداء السلمي	رقم المسألة	١٠	٢٧	٢٨	٣٤	٣٥	٣٦	٣٧
	الصفحة	٩٣	٩٩	٩٩	١٠٢	١٠	١٠٢	١٠٢
اثبات تعامد مستقيمين	رقم المسألة	١٣	٢٣	٢٤				
	الصفحة	٩٤	٩٨	٩٩				
قوة نقطة	رقم المسألة	١٧						
	الصفحة	٩٧						
علاقة أولر وتوظيفها	رقم المسألة	١٤						
	الصفحة	٩٥						

تَدرّبْ ص ٧٩:

إحداثيات الأشعة والنقاط في هذا التدرب هي في معلمٍ متجانسٍ $(O;\vec{i},\vec{j})$.

① احسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ في كلٍّ من الحالات الآتية:

❶ $\|\vec{u}\|=1,\|\vec{v}\|=4,(\vec{u},\vec{v})=0$ ❷ $\|\vec{u}\|=2,\|\vec{v}\|=3,(\vec{u},\vec{v})=\pi$

❸ $\|\vec{u}\|=4,\|\vec{v}\|=5,\ \vec{u},\vec{v}\ =\dfrac{2\pi}{3}$ ❹ $\|\vec{u}\|=21,\|\vec{v}\|=7,\ \vec{u},\vec{v}\ =\dfrac{3\pi}{2}$

❺ $\vec{u}(2,3),\vec{v}(1,-1)$ ❻ $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j},\vec{v}=-\vec{i}+2\vec{j}$

❼ $\|\vec{u}\|=2,\|\vec{v}\|=3,\|\vec{u}+\vec{v}\|=3$ ❽ $\|\vec{u}\|=3,\|\vec{v}\|=4,\|\vec{u}+\vec{v}\|=5$

الحل

❶ $\vec{u}.\vec{v}=1\times 4=4$

❷ $\vec{u}.\vec{v}=2\times 3\times(-1)=-6$

❸ $\vec{u}.\vec{v}=4\times 5\times\cos\dfrac{2\pi}{3}=20\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-10$

❹ $\vec{u}.\vec{v}=21\times 7\times\cos\dfrac{3\pi}{2}=147\times(0)=0$

❺ $\vec{u}.\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2=(2)(3)+(3)(-1)=3$

❻ $\vec{u}.\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2=(2)(-1)+(-3)(2)=-2-6=-8$

❼ $\vec{u}.\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)=\dfrac{1}{2}(9-4-9)=-2$

❽ $\vec{u}.\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)=\dfrac{1}{2}(25-9-16)=0$

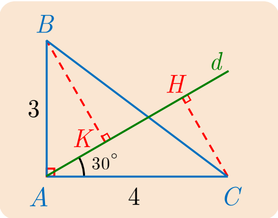
② وحدة قياس الأطوال في الأشكال الآتية ① $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان نظيماهما بالترتيب 4 و 6 وجداؤهما السلمي يساوي 8. احسب كلاً من المقادير

$$A=\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v}),\quad B=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}),\quad C=2\vec{u}\cdot(-4\vec{v}),$$
$$D=(\vec{u}+\vec{v})^2,\quad E=(2\vec{u}-3\vec{v})\cdot(3\vec{u}-2\vec{v}),$$

② ليكن الشعاعان $\vec{u}(2,-1)$ و $\vec{v}(3,6)$.

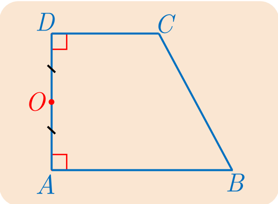
❶ احسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و $\vec{u}^2$ و $(3\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-2\vec{v})$ و $(\vec{u}+\vec{v})^2$ و $(\vec{u}-\vec{v})^2$.

❷ استنتج قيمة كلٍّ من $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ و $\|\vec{u}-\vec{v}\|$.



③ في الشكل المجاور، المثلّث ABC مثلثٌ قائمٌ في A، فيه $AC = 4$، و $AB = 3$ و $CAH = 30°$. النقطتان H و K هما بالترتيب مسقطا C و B على d. احسب الجداءات السلمية الآتية:

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}$ و $\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{HC}$

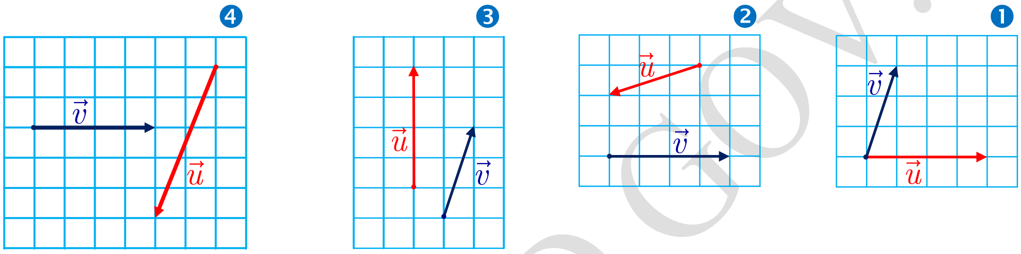


④ $ABCD$ شبه منحرف قائم في A و D، O منتصف $[AD]$. نضع $AB = a$ و $DC = b$ و $AO = c$.

❶ لماذا $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} = ab$ و $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD} = -c^2$؟

❷ اكتب $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ لتستنتج أنَّ

هي a طول ضلع المربّع الصغير، احسب في كل حالة $\vec{u}\cdot\vec{v}$ بدلالة a.



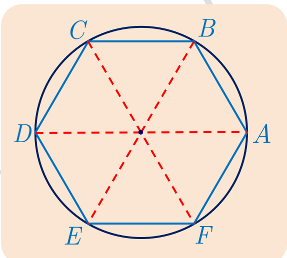
الحل

❶ الشكل الأول: $\vec{u}(4a\ ,\ 0)\ ,\ \vec{v}(a\ ,\ 3a\ )\ ,\ \vec{u}\cdot\vec{v} = a(4a) + (3a)(0) = 4a^2$

❷ الشكل الثاني: $\vec{u}(-3a\ ,\ -a)\ ,\ \vec{v}(4a\ ,\ 0)\ ,\ \vec{u}\cdot\vec{v} = (-3a)(4a) + (-a)(0) = -12a^2$

❸ الشكل الثالث: $\vec{u}(0,\ 4a)\ ,\ \vec{v}(a\ ,\ 3a)\ ,\ \vec{u}.\vec{v} = 0 + (4a)(3a) = 12a^2$

❹ الشكل الرابع: $\vec{u}(-2a\ ,\ -5a)\ ,\ \vec{v}(4a\ ,\ 0)\ ,\ \vec{u}.\vec{v} = (-2a)(4a) + (-5a)(0) = -8a^2$



③ في الشكل المجاور $ABCDEF$ مسدسٌ منتظمٌ مرسومٌ في دائرة مركزها O ونصف قطرها 1. احسب:

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ و$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ و$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CD}$ و$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}$

و $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OE}$ و$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DF}$ و$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{DB}$ و$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{EF}$.

الحل

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = (1)(1)\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad ، \quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = (1)(1)\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CD} = (1)(1)\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \quad ، \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE} = (1)(1)\cos\pi = -1$$

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF} = (1)(1)\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad ، \quad \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DF} = 0 \quad \text{لأنّ} \quad \overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{DF}$$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{DB}=0$ لأن أقطار المعين متعامدة ، $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{EF}=(1)(1)\cos 0=1$

④ لدينا ثلاث نقاط $A(4,1)$ ، $B(0,5)$ ، $C(-2,-1)$.

❶ احسب AB و AC و BC. استنتج طبيعة المثلث ABC.

❷ احسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. استنتج أنّ $\cos BAC=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

الحل

❶

$$AB=\sqrt{(4-0)^2+(1-5)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$
$$AC=\sqrt{(4+2)^2+(1+1)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$
$$BC=\sqrt{(0+2)^2+(5+1)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

فالمثلث ABC متساوي الساقين رأسه C

❷ $\overrightarrow{AC}=(-6\,,-2)$, $\overrightarrow{AB}=(-4\,,4)$ ومنه $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=24-8=16$

$$\cos(BAC)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}=\frac{16}{(4\sqrt{2})(2\sqrt{10})}=\frac{2}{\sqrt{20}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

تدرَّبْ ص ٨٢ :

① $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان نظيماهما بالترتيب 4 و 6 وجداؤهما السلمي يساوي 8. احسب كلاً من المقادير

$A=\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$، $B=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$، $C=2\vec{u}\cdot(-4\vec{v})$،

$D=(\vec{u}+\vec{v})^2$، $E=(2\vec{u}-3\vec{v})\cdot(3\vec{u}-2\vec{v})$

الحل

$$A=\vec{u}(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}.\vec{u}+\vec{u}.\vec{v}=16+8=24$$
$$B=(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2=\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2=16-36=-20$$
$$C=2\vec{u}\cdot(-4\vec{v})=-8\,\vec{u}.\vec{v}=-64$$
$$D=(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\,\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2+2\,\vec{u}.\vec{v}=16+36+2(8)=68$$
$$E=(2\vec{u}-3\vec{v})(3\vec{u}-2\vec{v})=6\vec{u}^2-4\vec{u}.\vec{v}-9\vec{u}.\vec{v}+6\vec{v}^2$$
$$=6\vec{u}^2-13\vec{u}.\vec{v}+6\vec{v}^2=96-104+216=208$$

② ليكن الشعاعان $\vec{u}(2,-1)$ و $\vec{v}(3,6)$.

❶ احسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و $\vec{u}^2$ و $(3\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-2\vec{v})$ و $(\vec{u}+\vec{v})^2$ و $(\vec{u}-\vec{v})^2$.

❷ استنتج قيمة كلٍّ من $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|$ و $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|$.

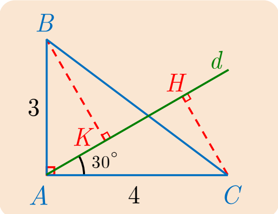
الحل

❶ $\vec{u}(2,-1)\ ,\ \vec{v}(3,6)$

$$\vec{u}.\vec{v} = 6-6=0$$
$$\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{v} = 4+1=5$$
$$(3\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-2\vec{v}) = 3\vec{u}^2 - 6\vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{v} - 2\vec{v}^2$$
$$= 3(5) - 0 - 2(9+36) = 15-90 = -75$$

❷ $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = 5+0+45 = 50$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = 50 \Rightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\| = 5\sqrt{2}$$
$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = 5-0+45 = 50$$
$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})^2 = 50 \Rightarrow \|\vec{u}-\vec{v}\| = 5\sqrt{2}$$



③ في الشكل المجاور، المثلّث ABC مثلثٌ قائمٌ في A، فيه $AC = 4$، و $AB = 3$ و $CAH = 30^\circ$. النقطتان H و K هما بالترتيب مسقطا C و B على d. احسب الجداءات السلمية الآتية:

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}$ و $\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{HC}$

الحل

طريقة ١ : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\|\cdot\|\overrightarrow{BC}\|\cdot\cos B = (3)(5)\left(\frac{3}{5}\right)$

طريقة ٢: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\|\cdot\|\overrightarrow{BA}\| = (3)(3) = 9$

لأن المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{BC}$ على حامل $\overrightarrow{BA}$ هو $\overrightarrow{BA}$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AK} = \|\overrightarrow{AH}\|\cdot\|\overrightarrow{AK}\| \\ \|\overrightarrow{AH}\| = 4\cos(30^\circ) = 2\sqrt{3}\ ,\ \|\overrightarrow{AK}\| = 3\sin(30^\circ) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

ومنه: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = 3\sqrt{3}$

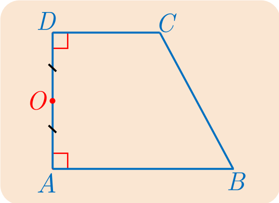
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AK} = \|\overrightarrow{AH}\|\cdot\|\overrightarrow{AK}\| = 3\sqrt{3}$$

طريقة ١ : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH} = \|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{CH}\|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CH}) = (3)(2)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3}$

طريقة ٢ : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH}) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = 0 + 3\sqrt{3}$

$$\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{HC} = -\|\overrightarrow{KB}\|\cdot\|\overrightarrow{HC}\| = -(3)(2)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3\sqrt{3}$$

④ $ABCD$ شبه منحرف قائم في A و D، O منتصف $[AD]$. نضع $AB=a$ و $DC=b$ و $AO=c$.



❶ لماذا $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=ab$ و $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=-c^2$؟

❷ اكتب $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ لتستنتج أنَّ $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=ab-c^2$

الحل

❶ AB يوازي DC والشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ بالجهة نفسها فيكون:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{DC}\right\|=a\cdot b$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=-\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{OD}\right\|=-c^2$$

❷ $$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$$
$$=-c^2+0+0+ab=ab-c^2$$

تدرّب ص ٨٦

① نتأمّل في معلمٍ متجانس النقاط $A(0,1)$ و $B(5,4)$ و $M(m,0)$. و m عددٌ حقيقي. احسب $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ بدلالة m. ثُمّ استنتج قيم m ليكون المثلث AMB قائم الزاوية في M.

الحل

$$\overrightarrow{MA}=(-m\,,1)\quad,\quad\overrightarrow{MB}=(5-m\,,4)$$
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-m(5-m)+(1)(4)=m^2-5m+4$$

حتى يكون المثلث MAB قائم في M يجب أن يتحقق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ مع $\overrightarrow{MA}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{MB}\neq\vec{0}$

ونلاحظ أن $\overrightarrow{MA}\neq\vec{0}$ محقق وضوحا أيا كانت $m\in\mathbb{R}$، وأن $\overrightarrow{MB}\neq\vec{0}$ محقق وضوحا أيا كانت $m\in\mathbb{R}$.

إذن: $m^2-5m+4=0$ ومنه $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ وبالتالي $m=1$ أو $m=4$

② نتأمّل في معلمٍ متجانس النقاط $A(2,2)$ و $B(-3,-3)$ و $C(2,-3)$. H هي المسقط القائم للنقطة B على محور الفواصل، و K هي المسقط القائم للنقطة A على محور التراتيب. أثبت أنَّ المستقيمين (OC) و (HK) متعامدان.

الحل

$H(-3\,,0\,)\ ,\ K(0,2)$

$\overrightarrow{OC} = (2\,,-3)\ \ ,\ \overrightarrow{HK} = (3\,,2)$ وبالتالي: $OC \perp HK$ وهو المطلوب .

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{HK} = 6-6 = 0$

③ $ABCD$ متوازيُ أضلاعٍ فيه $AB = 4$ و $AD = 2$ و $BAD = 60°$.

1. أثبت أنَّ $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2 = 28$ و $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})^2 = 12$.

2. استنتج الطولين AC و BD .

الحل

1. $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2 = 16+2(4)(2)\left(\frac{1}{2}\right)+4 = 28$

$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})^2 = \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2 = 16-2(4)(2)\left(\frac{1}{2}\right)+4 = 12$

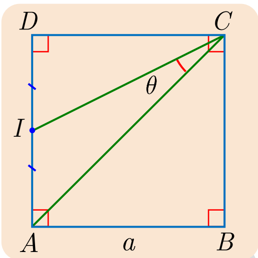
2. $\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$ ومنه $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right\| = \sqrt{28}$

$\overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$ ومنه $\left\|\overrightarrow{DB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right\| = \sqrt{12}$

أنشطة

نشاط 1 حساب المسافات والزوايا

❶ زاوية صامدة في المربع.



$ABCD$ مربعٌ طولُ ضلعه a، النقطة I هي منتصف القطعة $[DA]$. نهدف إلى إثبات أنَّ الزاوية $\theta = ACI$ هي ذاتها في جميع المربعات، هذا يعني أنّ قياسها لا يتعلق بطول ضلع المربع.

لهذا، نحسب أولاً $\cos\theta$ بمساعدة الجداء السلمي.

1. أثبت أنَّ $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CA} = \frac{\sqrt{10}}{2}a^2\times\cos\theta$.

2. أثبت أنَّ $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD})$، ومن ثَمَّ أنّ $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CA} = \frac{3}{2}a^2$.

3. استنتج العدد $\cos\theta$، ثمَّ أوجد قياس θ لأقرب درجة. (يمكن استعمال الآلة الحاسبة).

الحل

1. $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CA} = \sqrt{2}a\cdot\frac{\sqrt{5}a}{2}\cdot\cos\theta = \frac{\sqrt{10}}{2}a^2\cos\theta$

2. $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CI}$ حسب قاعدة متوازي الأضلاع .

$$\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD})$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CA} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD})(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA})\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BA})\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA} + 0 + \|\overrightarrow{CD}\|\cdot\|\overrightarrow{BA}\|)\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{BA}^2 + \|\overrightarrow{CD}\|\cdot\|\overrightarrow{BA}\|) = \frac{1}{2}(a^2 + a^2 + a^2) = \frac{3}{2}a^2\end{aligned}$$

3. من ١ و ٢ نجد : $\frac{3}{2}a^2 = \frac{\sqrt{10}}{2}a^2\cos\theta$ ومنه $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$: $\theta \approx 18,43$

❷ **زاوية مستقيمين**

d و d' مستقيمان في معلمٍ متجانسٍ $(O;\vec{i},\vec{j})$، معادلتاهما بالترتيب $y = x - 1$ و $y = -2x + 3$. و θ هي الزاوية الحادة التي ضلعاها المستقيمان d و d'. أي ما يسمى **زاوية المستقيمين** d و d'.

1. ارسم هذين المستقيمين في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.
2. لماذا يكون الشعاعان $\vec{u}(1,1)$ و $\vec{v}(1,-2)$ شعاعي توجيه d و d' على التوالي؟
3. احسب $\cos(\vec{u},\vec{v})$ واستنتج $\cos\theta$، ثمَّ أعطِ قيمةً تقريبيةً للزاوية θ.

الحل

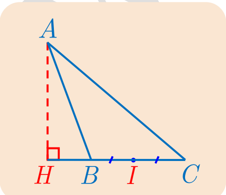
نحن نعلم إذا كانت $y = mx + p$ معادلة للمستقيم d ، كان $\vec{n}(1,m)$ شعاع توجيه للمستقيم d .

ومنه : $\vec{u}(1,1)$ شعاع توجيه لـ d ، $\vec{v}(1,-2)$ شعاع توجيه لـ d' ، إذن :

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \frac{1-2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{10}} \quad \text{ومنه} \quad \theta \approx 107.5$$

نشاط ٢ خاصّة مميّزة للمثلّث القائم

❶ **صيغٌ عدَّة للجداء السلمي نفسه**



ABC مثلثٌ، و H هو المسقط القائم للرأس A على (BC) و I هو منتصف $[BC]$. نريد عرض طرائق مختلفة لحساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

1. استفد من العلاقتين $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$ و $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}$ لإثبات العلاقة ① الآتية:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}^2 + \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}.$$

2. a. أثبت أنَّ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

b. استفد من العلاقة $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ لإثبات العلاقة ② الآتية:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}$$

c. أثبت بالمثل العلاقة ③ الآتية : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CB}$.

3. استفد من العلاقتين $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}$ لإثبات العلاقة ④ الآتية :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AI^2-IB^2 .$$

الحل

1.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB})\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})\\&=\overrightarrow{AH}^2+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}\\&=\overrightarrow{AH}^2+0+0+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{AH}^2+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}\end{aligned}$$

2. a.
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\overrightarrow{BC}$$

b.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{AB}^2+(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB})\cdot\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{AB}^2+0+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{AC}\\&=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{HC}\end{aligned}$$

لأن $\overrightarrow{HC}$ المسقط القائم لـ $\overrightarrow{AC}$ على حامل $\overrightarrow{CB}$ ، ومنه $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CH}$

3.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB})\cdot(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC})\\&=\overrightarrow{AI}^2+\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}\\&=\overrightarrow{AI}^2+\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{AI}^2-\overrightarrow{IB}^2\end{aligned}$$

❷ خاصّة مميّزةٌ للمثلّث القائم

1. القولُ «المثلث ABC قائمٌ في A» يكافئ القولَ «$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$». استنتج من الفقرة ❶ تكافؤ الخواص الآتية :

(â) «المثلث ABC قائمٌ في A»

(ِ) «$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BH}=BA^2$»

(è) «$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CH}=CA^2$»

(î) «$\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=-AH^2$»

وأخيراً أثبت ABC قائمٌ في A إذا وفقط إذا كان «$IA=IB=IC$» إذ I منتصف $[BC]$.

الحل

إن المثلث ABC مثلث قائم في A يكافئ القول $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ واستنتج تكافؤ الخواص التالية :

في حال المثلث ABC مثلث قائم في A فإن :

(ِ) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH}$ ومنه $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}^2$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}^2$

(è) $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CH}$ ومنه $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{CA}^2$

$\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}^2$

(î)

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}&=(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB})(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})\\&=\overrightarrow{AH}^2+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}\\&=\overrightarrow{AH}^2+0+0+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=0\end{aligned}$$

ومنه : $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=-\overrightarrow{AH}^2$

- أثبت ABC قائم في A أذا وفقط إذا $(IA=IB=IC)$ إذ I منتصف $[BC]$

لزوم الشرط :

الفرض : المثلث قائم الزاوية ، و I منتصف $[BC]$ **الطلب** : $(IA=IB=IC)$

الإثبات: نحن نعلم أن $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$ وبالتالي: $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=(2\overrightarrow{AI})^2$ وبالتالي :

$$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AI}^2$$
$$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 0 = 4\overrightarrow{AI}^2 \Rightarrow (CB)^2 = 4(AI)^2$$
$$(CB) = 2(AI) \Rightarrow AI = BI = CI$$

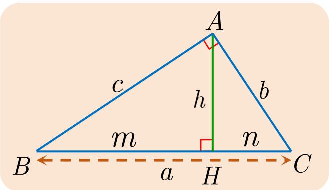
<u>كفاية الشرط:</u>

الفرض: $(IA = IB = IC)$، I منتصف $[BC]$

الطلب: المثلث قائم الزاوية

الإثبات: وجدنا في الفقرة ٢ من النشاط أن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AI^2 - BI^2$ ولكن $AI = IB$ إذن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ فالمثلث ABC قائم في A.

2. **تطبيق** : ABC مثلثٌ قائمٌ في A.



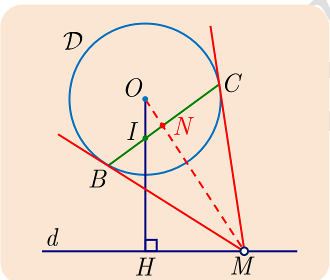
a. بالاستعانة برموز الشكل جانباً، استنتج من الأسئلة السابقة أنَّ :

$$h^2 = mn \text{ و } b^2 = an \text{ و } c^2 = am$$

b. نعطى $n = 3$ و $h = \sqrt{3}$، احسب a و b و c.

الحل

نشاط ٣ المحل الهندسي والجداء السلمي



$\mathcal{D}$ دائرةٌ مركزها O ونصفُ قطرها r، و H نقطةٌ تحققُ $OH = 2r$، و d هو المستقيم المار بالنقطة H عمودياً على (OH). وأخيراً M نقطةٌ متحركة ترسمُ d. نرسمُ من M مماسين للدائرة $\mathcal{D}$ يمسانها في B و C. يقطعُ المستقيمُ (OM) المستقيمَ (BC) في N. نريد إيجاد المحل الهندسي للنقطة N عندما ترسمُ M المستقيم d.

❶ تخمين المحل الهندسي

N هي نقطة تقاطع (BC) و (OM) و I هي نقطة تقاطع (BC) و (OH). لاحظ أنّ الزوايا ONB و ONC و ONI زوايا قائمة لأنَّ (OM) هو محور $[BC]$.

1. أعد الرسم في دفترك واختر عدّة نقاط M_1 و M_2 و … و ما قولك بشأن النقطة I؟

2. بافتراض أنّ I لا تتعلّق بموضع النقطة M. أثبت أنّ النقطة N ترسم الدائرة $\mathcal{D}'$ التي قطرها $[OI]$.

الحل

1. يقوم الطالب في التخمين باشراف المدرس

2.

❷ **التحقّق من صحّة التخمين بالإثبات**

لنبرهن أولاً أنَّ I هي نقطة ثابتة لا تتعلّق بموضع النقطة M على d.

النقطة I هي نقطة من المستقيم الثابت (OH). لإثبات أنها ثابتة على هذا المستقيم، يكفي إثبات أنَّ $\overrightarrow{OI}$ و $\overrightarrow{OH}$ مرتبطان خطياً وباتجاهٍ واحدٍ وأنَّ طول OI ثابت. ولكنّ OH ثابتٌ، علينا إذن الاهتمامُ بالجداء السلمي $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OH}$.

1. أثبت أنَّ :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OI}\\ &= \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}\\ &= \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OC} = OC^2 = r^2\end{aligned}$$

2. استنتج أنَّ:

   a. I هي نقطة ثابتة من القطعة المستقيمة $[OH]$.

   b. I هي داخل الدائرة $\mathcal{D}$.

   c. N هي نقطةٌ من الدائرة $\mathcal{D}'$ التي قطرها $[OI]$.

الحل

1. لنبرهن أولاً أن النقطة I هي نقطة ثابتة لاتتعلق بموضع النقطة M على d

١ . $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OI}$ لأن ($\overrightarrow{OH}$ المسقط القائم لـ $\overrightarrow{OM}$ على $\overrightarrow{OH}$)

$\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ لأن ($\overrightarrow{ON}$ المسقط القائم لـ $\overrightarrow{OI}$ على $\overrightarrow{OM}$)

$\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OC}$ لأن ($\overrightarrow{ON}$ المسقط القائم لـ $\overrightarrow{OC}$ على $\overrightarrow{OM}$)

وبالتالي: $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC}^2 = OC^2 = r^2$ لأن ($\overrightarrow{OC}$ المسقط القائم لـ $\overrightarrow{OM}$ على $\overrightarrow{OC}$

2.

a. لدينا $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OH} = r^2$ ومنه $\left\|\overrightarrow{OI}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{OH}\right\| = r^2$ أو $\left\|\overrightarrow{OI}\right\|\cdot 2r = r^2$ أي $\left\|\overrightarrow{OI}\right\| = \frac{r}{2}$

ومنه I نقطة ثابتة على القطعة المستقيمة $[OH]$

.b بما أن $r < \frac{r}{2} = \left\|\overrightarrow{OI}\right\|$ فالنقطة I تقع داخل الدائرة D .

.c بما أن O نقطة ثابتة، و I نقطة ثابتة، و N نقطة متحركة بحيث يبقى المثلث ONI قائم في N.

فالنقطة N ترسم دائرة D' قطرها OI.

❸ دراسة العكس

تبقى الإجابة عن السؤال الآتي: هل كل نقطة N من D' تقابلها نقطةٌ M من d؟

1. ارسم شكلاً جديداً. وضِّعْ عليه فقط العناصر الثابتة: D', H, I, d, D. لماذا تقع D' داخل D؟

2. لتكن N نقطةً من D' مختلفة عن O، ارسمْ (NI) فيقطع D في B و C، ارسمْ مماسَي D من B و C فيتقاطعان في M. علينا إثبات أنَّ M تقع على d. لتكن K المسقط القائم للنقطة M على (OH). أثبت أنَّ $K = H$.

3. تفحَّص حالة وقوع N على O. استنتج المحل الهندسي للنقطة N.

الحل

1. دراسة العكس: تبقى الإجابة على السؤال التالي:

هل كل نقطة N من D' تقابل نقطة M من d ؟

بعد رسم الشكل من جديد ونضع عليه العناصر الثابتة D' , H , I , d , D

نلاحظ أن D' داخل D لأن الدائرة D' مركزها منتصف OI وقطرها $OI = \frac{r}{2}$

2. لتكن N نقطة من D' مختلفة عن O ولنرسم $[NI]$ فيقطع D في B و C ، ولنرسم المماسين للدائرة D من B و C فيتقاطعان في M ولنثبت أن M تقع على d.

لتكن K المسقط القائم للنقطة M على $[OH]$، وعلينا إثبات أن $H= K$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OK} &= \overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OM}\\
&= \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}\\
&= \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC}^2
\end{aligned}$$

، B و

$$\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OK} = r^2$$

ومنه $\frac{r}{2}\left\|\overrightarrow{OK}\right\| = r^2$ ومنه $\left\|\overrightarrow{OK}\right\| = 2r$ ومنه $H= K$

3. في حالة وقوع N على O يكون BC قطر الدائرة D والمماسان في B و C متوازيان ، ومنه لايوجد مماسان متقاطعان عندئذ المحل الهندسي للنقطة N هي الدائرة D' التي قطرها OI ماعدا النقطة O .

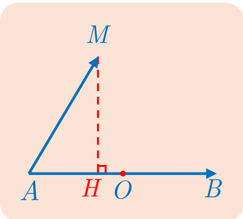
نشاط ٤ مجموعة نقاط والجداء السلمي

نُعطى نقطتين A و B، ولتكن O منتصف القطعة $[AB]$. نضع $AB = 2d$. نقرن بكل نقطةٍ M من المستوي عدداً حقيقيّاً $f(M)$. نكون بذلك قد عرّفنا تابعاً $M \mapsto f(M)$ من المستوي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. ليكن من جهة أخرى عدداً حقيقياً ثابتاً k . نهدف إلى تعيين مجموعة جميع النقاط M التي تحقق $f(M) = k$ في بعض الحالات الخاصّة.

❶ دراسة حالة التابع $f : M \mapsto \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$

لدينا هنا $f(M) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ و C_k هي مجموعة النقاط M التي تحقق $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$.

1. لتكن M من C_k، وليكن H المسقط القائم للنقطة M على المستقيم (AB).



a. تحققْ صحّة المساواة $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = k$.

b. استنتج أنَّ H تنتمي إلى C_k وأنَّ $AH = \dfrac{|k|}{2d}$.

c. بيّنْ، تبعاً لإشارة k، موضع H على المستقيم (AB).

d. استنتج من الأسئلة السابقة أنَّ M نقطةٌ من مستقيمٍ ثابتٍ Δ .

2. في السؤال السابق، أثبتنا أنَّه إذا كانت M نقطةً من C_k، كانت إذن نقطةً من Δ. لإثبات أنَّ $\Delta = C_k$، يجب الإجابة عن السؤال : أكلُّ نقطةٍ من Δ هي نقطةٌ من C_k؟

أثبت أنَّه إذا كانت N على Δ، كانت N من C_k، ثم أنجز إثبات المطلوب.

الحل

1. لتكن $f(M) = k$ حيث M نفطة من المستوي ، K عدد حقيقي عندئذ :

$$f : M \to \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k \ : \ M \in C_k$$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = k$ *a*. لأن $\overrightarrow{AH}$ هو المسقط القائم لـ $\overrightarrow{AM}$ على AB .

b. بما ان $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = k$ اذن $H \in C_k$ وبالتالي :

$\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}\right| = |k|$ ومنه $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AH}\right\| = |k|$

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AH}\right\| = |k|$ ومنه $2d \cdot AH = |k|$ و منه $AH = \dfrac{|k|}{2d}$

c.

- في حالة $k<0$ يكون $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=k$ ومنه المثلث BAM منفرج الزاوية في A ومنه H تقع خارج القطعة المستقيمة $[AB]$ من جهة A .
- في حالة $k>0$ يكون $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=k$ ومنه المثلث BAM حاد الزاوية في A ومنه H تقع داخل القطعة المستقيمة $[AB]$ ، أو خارجها من جهة B .
- في حالة $k=0$ يكون $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ ومنه المثلث BAM قائم الزاوية في A أو $M=A$ فتكون H عندئذ منطبقة على A أي $A=H$.

d. مما سبق نستنتج أن M تقع على مستقيم ثابت هو MH عمودي على AB ويحقق $AH=\dfrac{|k|}{2d}$.

2. لقد أثبتنا أنه إذا كانت M نقطة من C_k، كانت نقطة من Δ، لنثبت أن $C_k=\Delta$:

علينا أن نجيب عن السؤال أ كل نقطة من Δ هي نقطة من C_k ؟

بفرض $M\in\Delta$ أي M تنتمي إلى المستقيم MH، حيث $AH=\dfrac{|k|}{2d}$ وعلينا إثبات $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=k$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=2d\cdot\frac{|k|}{2d}\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH})$$

بما أن الزاوية $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH})$ تساوي صفر أو تساوي π عندئذ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\pm|k|$ ومنه $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=k$ إذن $M\in C_k$ وهو المطلوب إثباته ، إذن $C_k=\Delta$.

❷ دراسة حالة التابع $f: M\mapsto\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$

نبحث عن C_k مجموعة النقاط M التي تحقق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$.

1. أثبت أنَّ تعيين C_k يؤول إلى إيجاد مجموعة النقاط M التي تحقق $MO^2-d^2=k$.

لاحظ أنّ $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}$.

2. عيّن المجموعة C_k . باتّباع أسلوب الفقرة السابقة.

ناقش تبعاً لإشارة $k+d^2$.

3. ارسم C_k في حالةِ $AB=6$ و $k=16$.

الحل

1. نبحث عن C_k مجموعة النقاط M التي تحقق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$ وهذا يكافئ :

$$(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})=k$$

$$\overrightarrow{MO}^2+\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=k$$

$$\overrightarrow{MO}^2+0-d^2=k$$

ومنه $MO^2=d^2+k$

2.

- في حالة $d^2+k>0$ فإن مجموعة النقط M تقع على دائرة مركزها O ونصف قطرها $OM=\sqrt{d^2+k}$.
- في حالة $d^2+k=0$ فإن مجموعة النقط M تمثل مجموعة مكونة من نقطة وحيدة هي O .
- في حالة $d^2+k<0$ فإن مجموعة النقط M تمثل مجموعة خالية .

وبأسلوب مماثل نستطيع أن نبرهن أن كل نقطة من الدائرة هي نقطة من C_k (أي بإثبات إذا كانت M تحقق $MO^2=d^2+k>0$ فإن $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$.

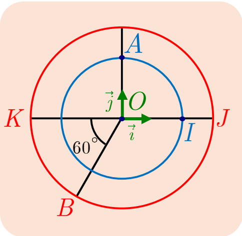
3. في حالة $k=16$, $AB=6$ فإن : $AB=6=2d$ ومنه $d=3$

$MO^2=16+9=25$ ومنه $R=5$

النقطة M ترسم دائرة مركزها O ونصف قطرها $R=5$

تمرينات ومسائل

إحداثيات الأشعة والنقاط في تمارين هذا البحث هي في معلمٍ متجانسٍ $(O;\vec{i},\vec{j})$.



١ في الشكل دائرتان متمركزتان في O، نصفا قطريهما 2 و 3.

1. احسب $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OJ}$ و $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OK}$ و $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$.
2. باستعمال إحداثيات النقاط في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$، احسب $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BA}$.

الحل

$$\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OJ}=\left\|\overrightarrow{OI}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{OJ}\right\|=(2)(3)=6$$

$$\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OK}=-\left\|\overrightarrow{OI}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{OK}\right\|=-(2)(3)=-6$$

$$\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OB}=\left\|\overrightarrow{OI}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{OB}\right\|\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=(2)(3)\left(\frac{-1}{2}\right)=-3$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=\left\|\overrightarrow{OB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=(2)(3)\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=-3\sqrt{3}$$

$$O(0,0)\ ,\ A(0,2)\ ,I(2,0)\ ,\ J(3,0)\ ,\ K(0,-3)\ ,\ B\left(\frac{-3}{2}\ ,\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{OB}=\left(\frac{-3}{2}\ ,\ \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)\ ,\ \overrightarrow{AI}=(2\ ,-2)$$

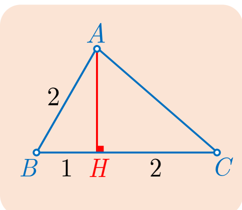
$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AI}=\left(\frac{-3}{2}\right)(2)+\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)(-2)=-3+3\sqrt{3}$$

$\overrightarrow{IA}=(-2\ ,\ 2)\ ,\ \overrightarrow{IJ}(1,0)$ ومنه $\overrightarrow{AI}=(2\ ,-2)$

$$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IJ}=(-2)(1)+(2)(0)=-2$$

$$\overrightarrow{BK}=\left(\frac{3}{2}\ ,-3+3\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\overrightarrow{BA}=\left(\frac{3}{2}\ ,\ 2+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BI}=\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)+\left(-3+3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(2+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=3-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$



٢ باستعمال المعلومات المبينة في الشكل المجاور:

1. احسب $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{BH}$، $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}$، $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{AB}$
$(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})\cdot\overrightarrow{AB}$، $(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB})\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})$
2. أثبت $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3$ و $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BH}=-2$.

الحل

.1

$$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}=\left\|\overrightarrow{BH}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=(1)(3)=3$$

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{BH}=-\left\|\overrightarrow{CH}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BH}\right\|=-(2)(1)=-2$$

$$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=0$$

$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AH}=4+3=7$$

$$(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$=\overrightarrow{AH}^2+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{BH}=3+(2)(1)=5$$

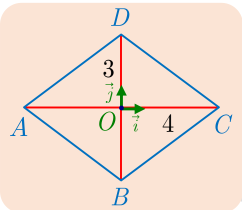
$$(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$=\overrightarrow{AH}^2+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{BH}=3+(2)(1)=5$$

$$(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB})\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})$$
$$=(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})\cdot\overrightarrow{AB}=5$$

.2

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}=\left\|\overrightarrow{BH}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=(1)(3)=3$$
$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{BH}=-2$$

٣ $ABCD$ معينٌ مركزه O. $OA=4$ و $OB=3$.



1. احسب $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$.
2. باستعمال المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$، احسب:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}$.

الحل

.1

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AO}\right\|=(8)(4)=32$$
$$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BO}^2=9$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{DC}\right\|=(5)(5)=25$$

.2

$O(0,0)$, $C(4,0)$, $D(0,3)$, $A(-4,0)$, $B(0,-3)$

$\overrightarrow{AD}=(4,3)$, $\overrightarrow{DC}=(4\,,-3)$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}=16-9=7$

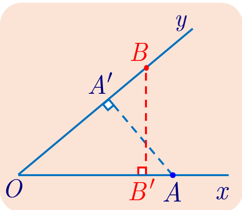
$\overrightarrow{OC}=(4,0)$, $\overrightarrow{BA}=(-4\,,3)$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BA}=-16$

$\overrightarrow{AB}=(4\,,-3)$, $\overrightarrow{AD}=(4,3)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=16-9=7$

٤ في الشكل المجاور، A نقطةٌ من نصف المستقيم $[Ox)$ و A' مسقطها القائم على نصف المستقيم $[Oy)$ كما إنَّ B نقطةٌ من $[Oy)$ و B' مسقطها القائم على $[Ox)$.



1. بيّن أنَّ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.
2. لماذا $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB}$؟

الحل

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ لأن $\overrightarrow{OB'}$ المسقط القائم لـ OB على OA

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB}$ لأن $\overrightarrow{OA'}$ المسقط القائم لـ OA على OB

٥ A و B نقطتان، d هو المستقيم المار بالنقطة B عمودياً على (AB)، و M نقطةٌ ما من d.

1. أثبت أنّ $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2$ بعد استعراض المبرهنة الملائمة لاستعمالها في الإثبات.
2. بالعكس: إذا كانت M نقطةً تحقق $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2$، أثبت أنّ M هي نقطةٌ من d.

الحل

.1

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$ لأن $\overrightarrow{AB}$ المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{AM}$ على AB ومنه

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=AB^2$

.2

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BA} &= (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM})\cdot\overrightarrow{BA}\\ &= \overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA} = BA^2-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= BA^2-BA^2=0\end{aligned}$$

ومنه AM $BA \perp BM$ ومنه $M \in d$

٦ يقطعُ المستقيمُ d الذي معادلته $y=2x+3$ محورَ الفواصل في النقطة A ويقطع محور التراتيب في النقطة B ويقطعُ المستقيم d' الذي معادلته $y=-x+3$ في النقطة C.

1. احسب إحداثيات A و B و C.
2. استنتج قيمة الجداء السلّمي $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

الحل

1. من الأفضل أن تكون معادلة المستقيم d' هي: $d' : y=-x-3$

$$A\left(-\frac{3}{2}\,,0\right),\ B(\,0\,,3)\,,\ C(-2\,,-1)$$

.2

$$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{3}{2}\,,3\right),\ \overrightarrow{AC}=\left(-\frac{1}{2}\,,-1\right)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{-3}{4}-3=-\frac{15}{4}$$

٧ لتكن I نقطةً من القطعة المستقيمة $[AB]$، ولنفترض أنّ $AB=4$ و $AI=3$. وليكن d المستقيمَ العمودي على (AB) في النقطة I. ولتكن C نقطةً تُحقِّق الشرطين $AC=5$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12$.

1. أثبت أنّ C نقطةٌ من المستقيم d.
2. تحقَّق أنَّ النقطةَ C نقطةٌ من الدائرة D التي مركزها A ونصفُ قطرها 5.
3. ما عدد النقاط التي تحقق $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12$ و $AC=5$ ؟ احسب في كل حالة $\cos BAC$.

الحل

.1

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CI} &= \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AI})\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}=-12+12=0\end{aligned}$$

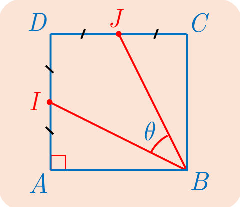
ومنه $AB \perp CA$ إذن $C \in d$

2. بما أن $AC=5$ فإن C تقع على دائرة D مركزها A ونصف قطرها يساوي 5 .

3. نلاحظ أن d يقطع الدائرة C في نقطتين متناظرتين بالنسبة لـ AB ، فعدد النقاط (C) هو نقطتان

في كلا الحالتين يكون $\cos(BAC) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \dfrac{12}{4\times 5} = \dfrac{3}{5}$

٨ $ABCD$ مربعٌ طول ضلعه a، I و J هما بالترتيب منتصفا ضلعيه $[AD]$ و $[DC]$. وليكن θ قياس الزاوية IBJ.



1. تحقَّق أنَّ $BI = BJ = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

2. استنتج أنَّ $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BJ} = \dfrac{5}{4}a^2\cos\theta$.

3. اكتب $\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{BJ}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ ثم استنتج أنَّ $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BJ} = a^2$ واحسب θ لأقرب درجة.

الحل

حسب فيثاغورث في المثلث BJC نجد : $BJ^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4}$ ومنه $BJ = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

وبما أن المثلثين BCJ ، BAI طبوقان فإن $BJ = BI = \dfrac{\sqrt{5}}{2}a$.

$$\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BJ} = \frac{\sqrt{5}}{2}a\times\frac{\sqrt{5}}{2}a\times\cos\theta = \frac{5}{4}a^2\cos\theta$$

$$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

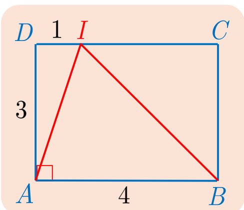
$$\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BJ} = \left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) =$$

$$\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BJ} = 0+\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}-0 = a^2$$

وبالتالي : $\dfrac{5}{4}a^2\cos\theta = a^2$ ومنه $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ فيكون $\theta \approx$

٩ $ABCD$ مستطيلٌ ، I نقطةٌ من $[DC]$ معرفةٌ كما في الشكل.



1. أثبت أنَّ

$$(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC}+DA^2$$

2. استنتج أنَّ $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = 6$ و $\cos AIB = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

الحل

.1 $$(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB}$$
$$= \overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC}+0+0+\overrightarrow{DA}^2 = \overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{DA}^2$$

.2 $$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = (\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CB}) = \;=\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC}+DA^2 = -3+9=6$$
$$\cos\angle AIB = \frac{\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}}{\|\overrightarrow{IA}\|\cdot\|\overrightarrow{IB}\|} = \frac{6}{(\sqrt{10})(3\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

١٠ نتأمّل معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j})$.

.1 احسب $(2\vec{i}-\vec{j})\cdot(\vec{i}+\vec{j})$، $(\vec{i}-\vec{j})\cdot(\vec{i}+2\vec{j})$.

.2 نفترض أنّ $\vec{u}\cdot\vec{i}=3$ و $\vec{u}\cdot\vec{j}=2$ و $\vec{v}\cdot\vec{i}=1$ و $\vec{v}\cdot\vec{j}=5$.

① احسب مركّبات الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

② استنتج قيمة $2\vec{u}\cdot(\vec{u}-3\vec{v})$، $(\vec{u}+\vec{v})^2$ و $(\vec{u}-2\vec{v})^2-(\vec{u}+3\vec{v})^2$.

الحل

$$(2\vec{i}-\vec{j})\cdot(\vec{i}+\vec{j}) = 2\vec{i}^2-\vec{j}^2 = 2i^2-j^2 = 2-1=1$$
$$(\vec{i}-\vec{j})\cdot(\vec{i}+2\vec{j}) = \vec{i}^2-2\vec{j}^2 = i^2-2j^2 = 1-2=-1$$

١. مركبات الشعاعين : $\vec{u}=(3\,,\,2\,),\ \vec{v}=(1\,,\,5\,)$

٢. $$2\vec{u}(\vec{u}-3\vec{v}) = 2\vec{u}^2-6\,\vec{u}\vec{v} = 2(13)-6(13) = -52$$
$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2+2\,\vec{u}\vec{v}+\vec{v}^2 = 13+26+2(13)=65$$
$$(\vec{u}-2\,\vec{v})^2-(\vec{u}+3\vec{v})^2 = -10\vec{u}\vec{v}-5\vec{v}^2 = -10(13)-5(26) = -260$$

١١ احسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ بدلالة m ثمّ عيّن العدد الحقيقي m ليكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين وذلك في كلٍّ من الحالات الآتية :

.1 $\vec{u}(-5,2)$ و $\vec{v}(m,-2)$.

.2 $\vec{u}(m,3-m)$ و $\vec{v}(2,-m)$.

.3 $\vec{u}(m-4,2m+1)$ و $\vec{v}(2m,3-m)$.

الحل

$\vec{u}=(-5\,,2\,),\vec{v}=(m\,,-2)$ ومنه: $\vec{u}\cdot\vec{v}=-5m-4$

ويتعامد الشعاعان إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ ومنه: $m=-\frac{4}{5}$

$\vec{u}=(m\,,3-m),\vec{v}=(2\,,-m)$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=2m-m(3-m)=m^2-m$

ويتعامد الشعاعان إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ ومنه $m(m-1)=0$ ومنه $m=0$ أو $m=1$

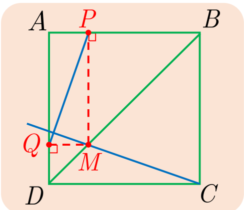
$\vec{u}=(2m\,,3-m),\vec{v}=(m-4\,,2m+1)$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=2m(m-4)+(3-m)(2m+1)=-3m+3$

ويتعامد الشعاعان إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ و منه $-3m+3=0$ و منه $1=m$

لنتعلّم البحث معاً

١٢ إثبات تعامد مستقيمين



$ABCD$ مربّعٌ طول ضلعه a، و M نقطة من $[BD]$ مسقطاها القائمان على المستقيمين (AB) و (AD) هما P و Q على الترتيب.

أثبت تعامد المستقيمين (PQ) و (MC) دون استعمال مَعلم.

نحو الحلّ

- لنستخلص بعض النتائج من الشكل والافتراضات.

1. ما طبيعة كلٍّ من المثلّثين MPB و MQD.
2. علّل صحة ما يأتي $AQ=MP=PB$ و $AP=QM=QD$.

- لإثبات تعامد المستقيمين (CM) و PQ، يمكننا مثلاً إثبات أنّ $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{CM}=0$. ولكن ليس لدينا صيغة تفيد في حساب هذا الجداء السلمي مباشرة. لذلك نفكّر بتحليل كلِّ واحدٍ من هذين الشعاعين، أو أحدهما فقط وذلك سعياً وراء الاستفادة من التعامد المعروف لبعض الأشعّة مثل $\overrightarrow{AQ}$ و $\overrightarrow{CD}$،... ومن المساقط القائمة لبعض الأشعة فمثلاً المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{CM}$ على (DA) هو $\overrightarrow{DQ}$.

1. علّل صحة المساواة $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}$. واستنتج أنّ

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CM}$$

2. أثبت أنّ

❶ $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{DQ}=-AQ\times DQ$

❷ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CM}=-BP\times AP$

3. ماذا تستنتج؟

أنجِزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

الحل

إن المثلثين MPB , MQD متشابهان لأن $\angle P=\angle Q=\frac{\pi}{2}$، $\angle QMD=\angle PBM$ للتعامد.

المثلث MPB القائم في P متساوي الساقين لأن فيه $\theta=\frac{\pi}{4}$ ، ومنه $PB=PM$ و $PM=AQ$ لأن الشكل $QMPA$ مستطيل ، ومنه $AQ=PM=PB$.

وبما أن المثلث MQD متساوي الساقين أيضاً لأن فيه $\angle D=\frac{\pi}{4}$، فنستنتج : $AP=QM=QD$

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CM}=(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP})\cdot\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CM}$$
$$=\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{DQ}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BP}=-AQ\cdot DQ+AP\cdot BP$$
$$=-BP\cdot AP+AP\cdot BP=0$$

١٣ أشعّة تُعامِد شعاعاً مُعطى

نُعطى في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ شعاعاً غير معدوم $\vec{u}(a,b)$. أثبت تكافؤ الخاصّتين الآتيتين:

❶ $\vec{v}$ عمودي على $\vec{u}$

❷ مركّبتا الشعاع $\vec{v}$ هما $(-kb,ka)$ حيث k من $\mathbb{R}$.

تطبيق: جد الأشعّة $\vec{v}$ التي نظيمها يساوي 1 والعموديّة على الشعاع $\vec{u}(2,-3)$.

نحو الحلّ

لإثبات تكافؤ خاصّتين نناقش على مرحلتين:

- نفترض أنّ $\vec{v}$ عمودي على $\vec{u}$ ونبرهن على وجود عدد حقيقي k بحيث تكون مركّبتا الشعاع $\vec{v}$ هما $(-kb,ka)$.
- وبالعكس، إذا كان $\vec{v}(-kb,ka)$، حيث k عدد حقيقي، كان الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين.

1. لنفترض إذن أنّ $\vec{v}(x,y)$ عمودي على $\vec{u}$. أثبت أنّ $ax+by=0$. واستنتج المطلوب مُناقشاً حالة $a=0$ وحالة $a\neq 0$.

2. أثبت الآن أنّ $\vec{v}(-kb,ka)$ عمودي على $\vec{u}$.

التطبيق: استناداً إلى ما سبق. إذا كان $\vec{u}(a,b)$ كان الشعاع $\vec{w}(-b,a)$ عموديّاً على $\vec{u}$ وكان كلُّ شعاع عمودي على $\vec{u}$ من الشكل $\vec{v} = k\vec{w}$. وعلينا هنا إيجاد هذه الأشعّة التي نظيمها يساوي 1.

1. أثبت أنّ $\vec{v} = k\vec{w}$ حيث $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.
2. استنتج أنّ $\|\vec{v}\| = |k| \times \|\vec{w}\|$.
3. احسب $\|\vec{w}\|$ واستنتج قيم k التي تجعل $\|\vec{v}\| = 1$. واستنتج المطلوب.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

الحل

المطلوب برهان صحة التكافؤ : $\vec{v} \perp \vec{u} \Leftrightarrow$ مركبتا الشعاع $\vec{v}$ هما $(-kb , ka)$ حيث : $\vec{u}(a , b)$

<u>لزوم الشرط</u> :بفرض $\vec{v}_1(x,y)$ عمودي على $\vec{u}$ فإن $\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 0$ ومنه $ax + by = 0$

بفرض $a \neq 0$ فإن : $x = -\dfrac{b}{a}y$ ومنه $\vec{v}_1\left(-\dfrac{b}{a}y , y\right)$ ، وبفرض $y = k$ يكون : $\vec{v}_1\left(-\dfrac{b}{a}k , k\right)$

ومنه $\vec{v}(-bk , ak)$ حيث $\vec{v}$ مرتبط خطياً مع $\vec{v}_1$.

بفرض $a = 0$ يكون $b \neq 0$ وبالتالي : $by = 0$ ومنه $y = 0$ ومنه : $\vec{v}_1(x , 0)$.

بفرض $x = k$ يكون : $\vec{v}_1(k,0)$ وبالتالي $\vec{v}(-bk , 0)$.

<u>كفاية الشرط</u> : لدينا $\vec{u}.\vec{v} = -kb \cdot a + ka \cdot b = 0$ ومنه $\vec{u}.\vec{v} = 0$

تطبيق : $\|\vec{v}\| = |k| \cdot \|\vec{w}\|$ حيث $\vec{w}$ $3,2$ ومنه $1 = |k| \cdot \sqrt{13}$ ومنه $|k| = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$ وبالتالي:

x $k = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$ ومنه $\vec{v} = \left(\dfrac{3}{\sqrt{13}} , \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$ و $k = -\dfrac{1}{\sqrt{13}}$ ومنه $\vec{v} = \left(-\dfrac{3}{\sqrt{13}} , -\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$

١٤ علاقة أولر وتطبيق عليها

نُعطى أربع نقاط A و B و C و D. أثبت العلاقة ❶ الآتية

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

واستنتج تلاقي ارتفاعات المثلّث في نقطة واحدة.

نحو الحلّ

اللافت في هذا التمرين هو عدم وجود افتراضات على الإطلاق. لذلك أمامنا أسلوبان :

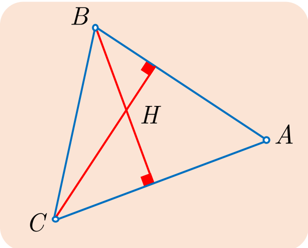
- استعمال معلم متجانس، وهنا يمكن اختيار إحدى النقاط الأربع مبدأ، واختيار إحدى النقاط الثلاث الأخرى على محور التراتيب وذلك تسهيلاً للحساب.

- استعمال علاقات شال بأسلوب مناسب بهدف تحويل الطرف الأيسر والوصول إلى 0.

1. لاحظ أنّ $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}=\vec{0}$ واستنتج أنّ الطرف الأيسر من ❶ يُكتب

$$\vec{AC}\cdot(\vec{DC}-\vec{DB})+\vec{BC}\cdot(\vec{DA}-\vec{DC})$$

2. استنتج المطلوب.



✌ بقي أن نثبت تلاقي ارتفاعات المثلّث في نقطة واحدة. لنتأمّل الشكل المجاور الذي رسمنا فيه المثلّث ABC والارتفاعين النازلين من B و C اللذين يتقاطعان في النقطة H. لإثبات تلاقي الارتفاعات الثلاثة يكفي أن نثبت أنّ المستقيمين (AH) و (BC) متعامدان.

استفد من ❶ لإثبات تعامد المستقيمين (AH) و (BC).

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

الحل

.1

$$\begin{aligned}
&\vec{DC}\cdot\vec{AB}+\vec{DA}\cdot\vec{BC}+\vec{DB}\cdot\vec{CA}\\
&=\vec{AB}\cdot(\vec{DA}+\vec{AC})+\vec{BC}\cdot(\vec{DC}+\vec{CA})+\vec{CA}(\vec{DA}+\vec{AB})\\
&=\vec{AB}\cdot\vec{DA}+(\vec{AB}\cdot\vec{AC})+\vec{BC}\cdot\vec{DC}+\vec{BC}\cdot\vec{CA}+\vec{CA}\cdot\vec{DA}+(\vec{CA}\cdot\vec{AB})\\
&=\vec{DA}(\vec{AB}+\vec{CA})+\vec{BC}(\vec{DC}+\vec{CA})\\
&=\vec{DA}\cdot\vec{CB}+\vec{BC}\cdot\vec{DA}=0
\end{aligned}$$

.2 حسب ❶ وبتعويض $H=D$ يكون :

$$\begin{aligned}
&\vec{HC}\cdot\vec{AB}+\vec{HA}\cdot\vec{BC}+\vec{HB}\cdot\vec{CA}=0\\
&0+\vec{HA}\cdot\vec{BC}+0=0
\end{aligned}$$

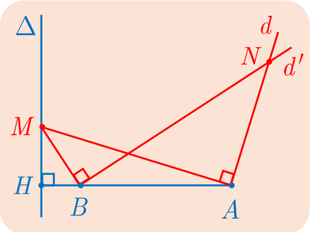
ومنه BC وHA متعامدان وبالتالي نستنتج أن النقطة H هي نقطة تلاقي الارتفاعات .

١٥ إيجاد محل هندسي تحليلياً

نُعطى ثلاث نقاط A و B و H واقعة على استقامة واحدة، نفترض أنّ B تقع بين A و H وأنّ $AB=4$ و $BH=1$. المستقيم Δ هو المستقيم المار بالنقطة H عمودياً على (AB). النقطة M نقطة مختلفة عن H تتحوّل على Δ. عندئذ يتقاطع المستقيم d المار بالنقطة A عمودياً على (AM) مع المستقيم d' المار بالنقطة B عمودياً على (BM) بالنقطة N.

بالاستعانة بمعلم متجانس مناسب عيّن المحل الهندسي للنقطة N عندما تتحوّل M على Δ محذوفاً منه H.

نحو الحلّ



- لننشئ الشكل المناسب ولنضع عليه العناصر الثابتة باللون الأزرق والعناصر المتحوّلة باللون الأحمر.
  1. اختر عدداً من النقاط M وأنشئ بعناية النقاط N الموافقة.
  2. ماذا تقترح بشأن المحلّ الهندسي المطلوب ؟
- نختار معلماً متجانساً مناسباً يكون فيه للمستقيم Δ معادلةً بسيطة. نختار إذن المعلم $(H;\vec{i},\vec{j})$ الذي تكون فيه $(1,0)$ إحداثيّتي النقطة B.
  1. ما هي إحداثيّات النقطتين H و A ؟
  2. وما هي معادلة المستقيم Δ ؟
- لإيجاد مجموعة النقاط N نبحث عن الإحداثيات (x,y) لهذه النقاط بدلالة إحداثيّات M. لمّا كانت M تتحوّل على المستقيم Δ محذوفاً منه H، كانت فاصلة M مساوية 0 وكان ترتيبها أي عدد غير معدوم وليكن m.
  1. بالاستفادة من تعامد $\overrightarrow{BM}$ و $\overrightarrow{BN}$، ومن تعامد $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AN}$ أثبت أنّ $N(x,y)$ تُحقّق المعادلتين : $my = x-1$ و $my = 5x-25$ ؟
  2. استنتج إحداثيّات N، وبيّن أنّ N تنتمي إلى مستقيم ثابت Δ'، أَعطِ معادلته.
  3. إذن المحلّ الهندسي للنقاط N محتوى في المستقيم Δ'، وعلينا أن نتبيّن إذا كانت النقطة N ترسم كامل المستقيم Δ'. استنتج المطلوب بعد ملاحظة أنّه عندما ترسم m كامل المجموعة $\mathbb{R}^*$ يرسم المقدار $\frac{5}{m}$ المجموعة نفسها.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

الحل

لنأخذ المعلم $(\ H\ ,\ i\ ,\ j\ )$ فتكون الإحداثيات :

$$H(0,0)\ ,\ B(1,0)\ ,\ A(5,0)\ ,\ M(0,m)\ ,\ N(x,y)$$

لدينا $\overrightarrow{BN}(x-1,y)$ ، $\overrightarrow{BM}(-1,m)$

وبما أن $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}=0$ نجد : $-x+1+my=0$ ومنه $my=x-1$ ....(١

لدينا $\overrightarrow{AM}(-5,m)$ ، $\overrightarrow{AN}(x-5,y)$

وبما أن $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$ نجد : $-5\ \ x-5\ +my=0$ ومنه $my=5x-25$ ....(٢

بالحل المشترك بين المعادلتين نجد : $5x-25 = x-1$ ومنه $x = 6\ ,\ y = \frac{5}{m}\ :\ m\in \mathbb{R}^*$

إذن $N\left(6, \frac{5}{m}\right) : m \in \mathbb{R}^*$ فالنقطة N تنتمي إلى مستقيم ثابت Δ' معادلته : $x = 6$

وبما أن $y = \frac{5}{m}\ :\ m\in \mathbb{R}^*$ فالنقطة $N\left(6, \frac{5}{m}\right)$ ترسم كامل المستقيم Δ' عدا النقطة $(6\ ,\ 0)$

قُدُماً إلى الأمام

١٦ لتكن H نقطة تلاقي ارتفاعات مثلث ABC.

1. أثبت أنَّ $AB^2 = AH^2 + HB^2 + 2\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HB}$

وأنَّ $AC^2 = AH^2 + HC^2 + 2\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}$

2. استنتج أنَّ $AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2$.

الحل

1. لدينا $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$ ومنه :

$$(\overrightarrow{AB})^2 = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB})^2 = AH^2 + HB^2 + 2\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HB} \quad ①$$

لدينا أيضاً $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}$ ومنه :

$$(\overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC})^2 = AH^2 + HC^2 + 2\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC} \quad ②$$

2. بطرح ② من ① نجد :

$$AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2 + 2\overrightarrow{AH}(\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC})$$

$$AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2 + 2\overrightarrow{AH}(\overrightarrow{CB}) = HB^2 - HC^2 + 0 = HB^2 - HC^2$$

١٧ قوة نقطة بالنسبة إلى دائرة

لتكن $\mathcal{C}$ الدائرةَ التي مركزُها O ونصفُ قطرها R، ولتكن M نقطة لا تقعُ على $\mathcal{C}$. يمرُّ مستقيمان بالنقطة M، يقطع أحدُهما الدائرة $\mathcal{C}$ في A و B، ويقطعها الآخر في C و D. نهدف إلى إثبات أنَّ $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$. لتكن A' النقطة المقابلة قطرياً للنقطة A.

1. ارسم شكلين، تكون M في أحدهما داخل الدائرة $\mathcal{C}$، وخارجها في الآخر.
2. أثبت أنَّ $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}$.
3. أثبت أنَّ $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}=MO^2-R^2$، ثمَّ استنتج أنَّ
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$$

إذن لا يتعلّق الجداء السلمي $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ إلّا ببعد النقطة M عن مركز الدائرة، إذ يساوي MO^2-R^2. يسمّى هذا العدد **قوة النقطة M بالنسبة إلى الدائرة $\mathcal{C}$**. وهو موجبٌ تماماً عندما تقعُ M خارج الدائرة وسالب تماماً عندما تقعُ M داخلها.

الحل

1. الرسم

2. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}$ لأن $\overrightarrow{MB}$ المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{MA'}$ على $\overrightarrow{MB}$.

3.
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'} &= \overrightarrow{MA}\cdot(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA'})\\
&=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA'})\\
&=\overrightarrow{MO}^2+\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA'}\\
&=\overrightarrow{MO}^2+\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OA})+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA'}\\
&=\overrightarrow{MO}^2-\overrightarrow{OA}^2=MO^2-R^2
\end{aligned}$$
لأن $(\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OA'})$

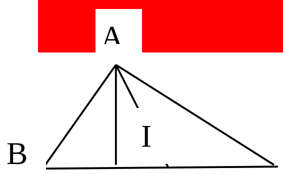
وبنفس الطريقة نستنتج : $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=MO^2-R^2$

ومنه $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$

١٨ ABC مثلثٌ، فيه I منتصف $[BC]$، و H المسقط القائم للنقطة A على $[BC]$.

1. أثبت أنَّ $AC^2 - AB^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}$.
2. استنتج أنَّ $AC^2 - AB^2 = 2\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{BC}$.

الحل



.1

$$(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}^{\,2} - \overrightarrow{AB}^{\,2} = AC^2 - AB^2 \qquad ①$$

أيضاً : ② $\quad (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}$

من ① و ② نجد أن : $AC^2 - AB^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}$

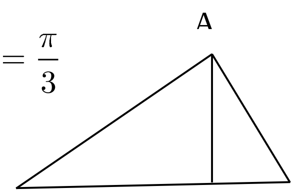
2. وجدنا أن $AC^2 - AB^2 = 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{BC}$ لأن $\overrightarrow{HA}$ هو المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{AI}$ على BC

١٩ ABC مثلثٌ فيه $AB = 5$ ، $AC = 6$ و $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 15$.

1. احسب قياساً للزاوية BAC .
2. احسب $(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2$ واستنتج BC .
3. a. أثبت أنه أيّاً كان الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ، كان $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
   b. استعمل هذه العلاقة لحساب كلٍّ من $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
   c. أعطِ، باستعمال الآلة الحاسبة، قيمةً تقريبية لقياس كلٍّ من الزاويتين ABC و ACB .
4. ليكن H المسقط القائم للنقطة A على المستقيم (BC) .
   a. أثبت أنَّ H هي نقطةٌ من القطعة المستقيمة $[BC]$.
   b. احسب كلاً من AH و مساحة المثلث ABC .

الحل

1. $\cos(\angle BAC) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} = \dfrac{15}{5 \times 6} = \dfrac{1}{2}$ ومنه $\angle BAC = \dfrac{\pi}{3}$



.2 $(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2 = BA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$

$= BA^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$= 25 + 36 - 2(15) = 31$

وبالتالي: $(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{BC})^2$ ومنه $BC=\sqrt{31}$

.3 $a.$ $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})^2 = (\vec{u})^2 + (\vec{v})^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$

$b.$ $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = ?$

$(\overrightarrow{BA})^2 = (\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB})^2 = (CA)^2 + (CB)^2 - 2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

$25 = 36 + 31 - 2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

ومنه $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 21$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = ?$

$(\overrightarrow{CA})^2 = (\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})^2 = (BA)^2 + (BC)^2 - 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

$36 = 25 + 31 - 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

ومنه $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 10$

$c.$ $\cos(\angle ABC) = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BC}\right\|} = \dfrac{10}{5\times\sqrt{31}} = \dfrac{2}{\sqrt{31}}$ ومنه $\angle ABC \approx$

$\cos(\angle ACB) = \dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{CB}\right\|} = \dfrac{21}{6\times\sqrt{31}} = \dfrac{7}{2\sqrt{31}}$ ومنه $\angle ABC \approx$

.4 $a.$ بما أن $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ حادة فإن مسقط A على BC هي نقطة من القطعة $[BC]$

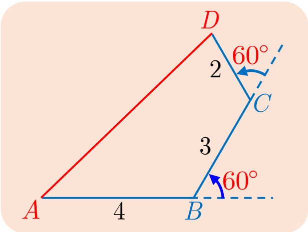
$b.$ $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CB}$ ومنه $21 = \left\|\overrightarrow{CH}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{CB}\right\|$ ومنه $\left\|\overrightarrow{CH}\right\| = \dfrac{21}{\sqrt{31}}$

حسب فيثاغورس في المثلث AHC القائم في H يكون

$$AH^2 = 36 - \left(\frac{21}{\sqrt{31}}\right)^2 = \frac{675}{31}$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2}\cdot CB\cdot AH = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{31}\cdot\frac{675}{\sqrt{31}} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

٢٠ تأمّل الشكل المجاور واحسب المقدار AD بنشر $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})^2$.



الحل

$$
\begin{aligned}
&(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})^2\\
&\quad=(\overrightarrow{AB})^2+(\overrightarrow{BC})^2+(\overrightarrow{CD})^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}\\
&\quad=16+9+4+2(4)(3)\left(\frac{1}{2}\right)+2(4)(2)\left(-\frac{1}{2}\right)+2(3)(2)\left(\frac{1}{2}\right)\\
&\quad=29+12-8+6=39
\end{aligned}
$$

$(\overrightarrow{AD})^2=(AD)^2=39$ ومنه $AD=\sqrt{39}$

٢١ نتأمّل شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$، نظيميهما بالترتيب 2 و 3، ونفترض أنّ جداءهما السلمي يساوي -4.

1. a. احسب $(\vec{u}+\vec{v})^2$ واستنتج $\|\vec{u}+\vec{v}\|$،

b. احسب $\|2\vec{u}-\vec{v}\|$.

2. a. احسب بدلالة العدد x المقدار $(x\vec{u}-\vec{v})^2$.

b. واستنتج قيم x التي تُحقّق $\|x\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{6}$.

الحل

1. a.

$$(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}.\vec{v}=4+9-8=5$$

أي $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=5$ ومنه $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{5}$

b.

$$(2\vec{u}-\vec{v})^2=4\vec{u}^2+\vec{v}^2-4\vec{u}.\vec{v}=4(4)+9-4(-4)=41$$

أي $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=41$ ومنه $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{41}$

2. a. $(x\vec{u}-\vec{v})^2=x^2\vec{u}^2+\vec{v}^2-2x\vec{u}.\vec{v}=4x^2+8x+9>0\ :x\in\mathbb{R}$

b.

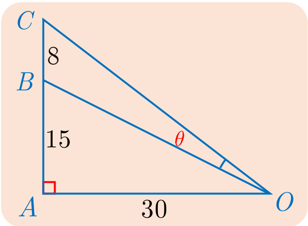
$\|x\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{6}$ ومنه $\|x\vec{u}-\vec{v}\|^2=6$

$4x^2 \; 8x + 9 = 6$ تكافئ $4x^2 + 8x + 3 = 0$ ومنه $\Delta = 64 - 4(4)(3) = 16$

للمعادلة حلان $x = \frac{-8+4}{8} = -\frac{1}{2}$ و $x = \frac{-8-4}{8} = -\frac{3}{2}$.

٢٢ A و B و C ثلاث نقاط على استقامة واحدة، و B تقع بين A و C. أُخذت نقطةٌ O على المستقيم المرسوم من A عمودياً على المستقيم (AB). أثبت أنَّ

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = OA^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$



تطبيق: في الحالة الموافقة للشكل المرسوم جانباً، احسب الزاوية θ.

الحل

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= \overrightarrow{OA}^2 + 0 + 0 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

تطبيق:

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 900 + (15)(8) = 1020$$

$$\left\|\overrightarrow{OB}\right\| = \sqrt{900 + 225} = \sqrt{1125} \quad , \overrightarrow{OC} = \sqrt{900 + 529} = \sqrt{1429}$$

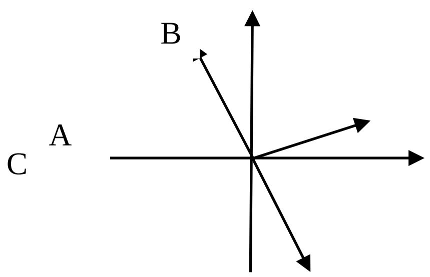
$$COS\,\theta = \frac{1020}{\sqrt{1125} \cdot \sqrt{1429}} = \ldots$$

ومنه $\theta = \ldots.$

٢٣ نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، النقطة $A(3,1)$، والنقطتين B و C اللتين تجعلان كلاً من المثلثين BOA و COA متساوي الساقين وقائم الزاوية في O. نضع $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$.

أثبت أنَّ « إيجاد إحداثيات B و C» يؤول إلى إيجاد الأشعة $\vec{n}$ ذات النظيم $\sqrt{10}$ والعمودية على $\vec{u}$. عيّن هذه الأشعة $\vec{n}$، ثمّ استنتج إحداثيات B و C.

الحل



نبحث عن الأشعة $\vec{n}\ (x,y)$ التي تحقق $\|\vec{n}\| = \sqrt{10}$ أي $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{10}$ وبالتالي :

① $\qquad x^2+y^2 = 10$

وبما أن $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$ فإن : $3x + y = 0$ ومنه ② $\qquad y = -3x$

نعوض ② في ① فنجد : $x^2+9x^2 = 10$ ومنه : $10x^2 = 10$ فيكون : $x = 1\ ,\ x = -1$

عندما: $x = 1$ يكون $y = -3$ وبالتالي النقطة $C(1\ ,-3\ )$

عندما: $x = -1$ يكون $y = 3$ وبالتالي النقطة $B(-1\ ,3\ )$

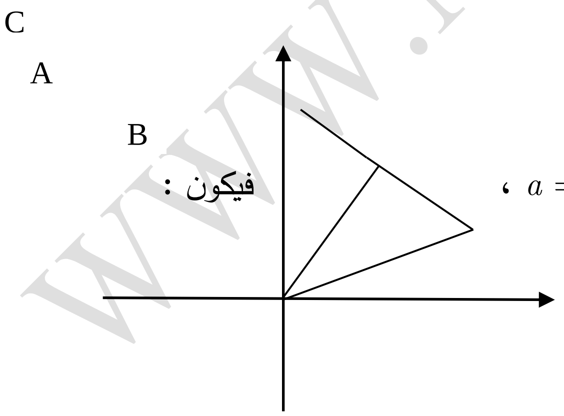
٢٤ نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، النقطة $A(3,4)$. ونتأمّل على المستقيم المرسوم من A عمودياً على (OA)، النقطتين B و C المتناظرتين بالنسبة إلى A واللتين تجعلان المثلث BOC متساوي الأضلاع.

1. a. احسب OA وأثبت أنَّ $AB = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

b. استنتج أنَّ « إيجاد إحداثيات B و C » يؤول إلى إيجاد الأشعة $\vec{n}$ ذات النظيم $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ والعمودية على $\overrightarrow{OA}$.

2. عيّن الأشعة $\vec{n}$، ثُمّ استنتج إحداثيات B و C.

الحل



1. a. $OA = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| = 5$ ، بفرض طول الضلع $a = BC$ ، فيكون :

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a = OA$ وبالتالي : $a = \dfrac{10}{\sqrt{3}}$.

$$AB=\frac{a}{2} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

b. بفرض $B\ \ x,y\ \ :\vec{n}=\overrightarrow{AB} = \ \ x-3,y-4$

$$\|\vec{n}\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

ومنه ① $(x-3)^2+(y-4)^2 = \dfrac{25}{3}$

لكن $\vec{n}.\overrightarrow{OA} = 0$

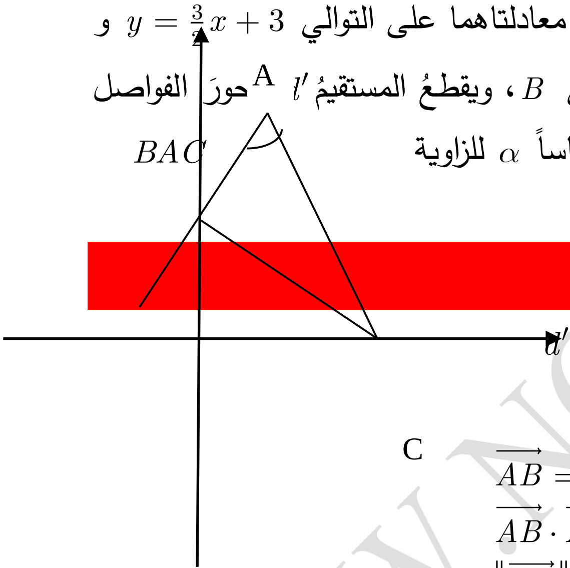
ومنه $3(x-3)+4(y-4)=0$ 	 $(x-3) = -\dfrac{4}{3}(y-4)$ ②

نعوض ② في ①فنجد :

$\dfrac{16}{9}(y-4)^2+(y-4)^2 = \dfrac{25}{3}$ ومنه $\dfrac{25}{9}(y-4)^2 = \dfrac{25}{3}$ أي $(y-4)^2 = 3$ وبالتالي:

$$y-4=\sqrt{3},\ y = 4+\sqrt{3},\ x = 3-\frac{4\sqrt{3}}{3},\ C\left(3-\frac{4\sqrt{3}}{3},\ 4+\sqrt{3}\right)$$

٢٥ نتأمّل في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، مستقيمين d و d' معادلتاهما على التوالي $y=\frac{3}{2}x+3$ و $y=-2x+10$. يقطعُ المستقيمُ d محورَ التراتيب في B، ويقطعُ المستقيمُ l' محورَ الفواصل في C، ويتقاطعُ d و d' في A. ارسمْ شكلاً. وأعطِ قياساً α للزاوية BAC



الحل

لنجد إحداثيات النقطة A بالحل المشترك بين معادلتي d و d'

فنجد $A(\ 2\ ,\ 6\ )$ ولدينا $B(0,3)\ ,\ C(5,0)$ ومنه :

$$\overrightarrow{AB} = (\ -2\ ,\ -3),\ \overrightarrow{AC} = (\ 3\ ,\ -6)$$

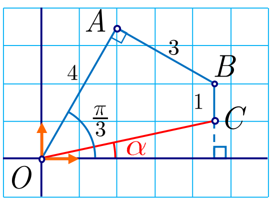
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -6+18 = 12$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\ ,\ \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$COS\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{12}{\sqrt{65}}$$

ومنه $\alpha \approx$

٢٦ في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، النقاط A و B و C متوضّعة وفق ما يبيّنه الشكل المجاور.



1. احسب إحداثيات النقاط A و B و C.
2. استنتج قياساً تقريبيّاً للزاوية α.

الحل

1. لدينا $A(\,2\,,\,2\sqrt{3}\,)$ ، ومن الشكل $OB = 5$ فنجد إحداثيات $B(\sqrt{21}\,,\,2)\,,\,C(\sqrt{21}\,,\,1)$

2. $\overrightarrow{OA}(2\,,\,2\sqrt{3})\,,\,\overrightarrow{OC}(\sqrt{21}\,,\,1)$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = 2\sqrt{21} + 2\sqrt{3}$

$\left\|\overrightarrow{OC}\right\| = \sqrt{22} \quad , \left\|\overrightarrow{OA}\right\| = 4$

ومنه $COS\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) = \dfrac{2\sqrt{21} + 2\sqrt{3}}{4\sqrt{22}} \quad , \dfrac{\pi}{3} - \alpha \approx .....,\ \alpha \approx \dfrac{\pi}{3} - .....$

٢٧ ABC مثلثٌ قائم في A ، H هي المسقط القائم للنقطة A على (BC) و I هي منتصف $[BC]$. J المسقط القائم للنقطة H على (AB)، و K المسقط القائم للنقطة H على (AC).

1. أثبت أنَّ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JK} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{JK} = 2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{JK}$.
2. أثبت أنَّ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}$ ، وأنَّ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$.
3. استنتج مما سبق أنّ المستقيمين (AI) و (JK) متعامدان.

الحل

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JK} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{JK} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\overrightarrow{JK} = 2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{JK}$

2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JA} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}$

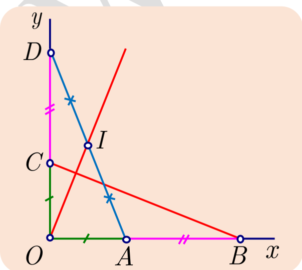
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$

3. $2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{HA}\cdot(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$

ومنه $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{JK} = 0$ أي $AI \perp JK$

٢٨ نتأمّل زاويةً قائمة xOy، وأربع نقاط A و B و C و D كما في الشكل. I هي منتصف القطعة $[AD]$. نريد إثبات أنَّ المستقيمين (BC) و (OI) متعامدان.

أولاً: حلٌّ تحليلي



نختار معلماً متجانساً $(O,\vec{i},\vec{j})$ يكون فيه $A(a,0)$ و $D(0,b)$ حيث $a > 0$ و $b > 0$.

1. ارسم شكلاً ووضّعْ عليه هذا المعلم.
2. احسب بدلالة a و b إحداثيات النقاط B و C و I.
3. استنتج أنَّ المستقيمين (OI) و (BC) متعامدان.

ثانياً: حلٌّ هندسي

1. تحقَّق من أنَّ $2\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}$، واستنتج أنَّ

$$2\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$$

2. أثبت إذنْ أنَّ المستقيمين (OI) و (BC) متعامدان.

الحل

أولاً: حلٌّ تحليلي

2. $A(a,0)\ ,\ B(\ b\ ,\ 0\ )\ ,\ C(\ 0\ ,\ a\ )\ ,\ D(\ 0\ ,\ b\ )\ ,\ I\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2}\right)$

3. $\overrightarrow{BC}(\ -b\ ,\ a\ )\ ,\ \overrightarrow{OI}\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2}\right)$

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OI}=\frac{a}{2}(-b)+\frac{b}{2}(a)=0$$

ومنه $OI\perp CB$

ثانياً: حلٌّ هندسي

1. إن $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OI}$ حسب قاعدة متوازي الأضلاع .

$$2\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{CB}=(\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})\cdot\overrightarrow{CB}=(\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})\cdot(\ \overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB})$$
$$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OB}$$
$$=0+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-OD\cdot CO+0$$

2. ولكن $OA=OC,\ OB=OD$ فينتج : $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{CB}=0$ ومنه $OI\perp CB$

٢٩ .. و .. و c ثلاثةُ أعداد حقيقيّة ليست معدومة و $c\neq b$. في معلمٍ متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، تعطى النقاط $A(0,a)$ و $B(b,0)$ و $C(c,0)$. نرمز إلى نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC بالرمز H، وبالرمز d إلى المستقيم المرسوم من B عمودياً على (BC) وبالرمز d' إلى المستقيم المرسوم من C عمودياً على (BC). نمرِّرُ من O المستقيم العمودي على (AB) فيلتقي d في النقطة P والمستقيم العمودي على (AC) فيلتقي .. في Q.

1. أثبت أنَّ ترتيب H يساوي $-\dfrac{bc}{a}$. **(مساعدة : $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$)**
2. احسب تراتيب النقاط P و Q بدلالة a و b و c.
3. استنتج مما سبق أنَّ النقاط P و Q و H تقع على استقامة واحدة.

الحل

..

$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ حيث $\overrightarrow{BH}(\ x_H-b,y_H)\ ,\ \overrightarrow{AC}(\ c,-a\ )$ ومنه $c(x_H-b)-a(y_H)=0$ أي

$cx_H-cb-ay_H=0$ وبالتالي $x_H=0$: $y_H=-\dfrac{cb}{a}$

.2

لدينا $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ وبما أنَّ $\overrightarrow{OP}(b,y_p)$ و $\overrightarrow{AB}(b,-a)$ نجد $y_P=\dfrac{b^2}{a}$, $b^2-a(y_P)=0$

٣٠ مستقيم أولر في المثلث $Euler$

أولاً: أسئلة تمهيدية. السؤالان الآتيان مستقلّان.

1. A و B و C ثلاثُ نقاطٍ ليست على استقامة واحدة. أثبت أنَّ الشعاع الوحيد $\vec{u}$ الذي يحقِّق $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{u}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ هو الشعاع المعدوم.

2. OBC مثلثٌ متساوي الساقين في O. أثبت أنَّ $(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

ثانياً. ABC مثلثٌ ما، Γ هي الدائرة المارة برؤوسه والتي مركزها O، H هي نقطة تلاقي ارتفاعاته، و G هي مركز ثقله.

1. باستعمال 2. في أولاً، والعلاقة $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}$ أثبت ما يلي :

① إنَّ $(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

② وبالمثل إنَّ $(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

③ باستعمال 1. في أولاً، استنتج أنَّ $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

2. نأخذ في الحسبان أنَّ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

① أثبت أنَّ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$.

② استنتج مما سبق أنَّ O و H و G تقع على استقامة واحدة. («مستقيم أويلر» هو المستقيمُ المارُّ بهذه النقاط).

الحل

أولاً: 1. لدينا $\vec{u}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ بالجمع نجد $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}+\vec{u}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ أي $\vec{u}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=0$ ومنه نجد $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ وبالتالي $\overrightarrow{AC}=0$ وهذا يعني أن النقط $A\,,B\,,C$ تؤول إلى نقطتين ، فهي على استقامة واحدة ، وهذا يخالف الفرض ، إذن $\overrightarrow{AC}\neq 0$ أو $\overrightarrow{AC}\perp\vec{u}$.

لدينا $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$:

عندما $\vec{u}\neq\vec{0}$ فإن $\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}$ ومنه ، فالنقاط $A\,,B\,,C$ تقع على استقامة واحدة ، وهذا يخالف الفرض ، أو $\vec{u}=\vec{0}$ وهي الحالة المقبولة .

2. أثبت أنّ $(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{BC}=0$

بفرض I منتصف $[BC]$ فيكون : $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OI}$ و $OI \perp BC$ لأن ارتفاع نازل من الرأس في مثلث متساوي الساقين وبالتالي : $2\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

ثانياً. 1.

① $(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{BC}$

$$=\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BC}+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{BC}=0+0=0$$

② بإتباع طريقة الطلب السابق نحصل $(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{AB}=0$

③ وجدنا حسب 1. أن :

$$(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{BC}=0\ ,(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

وحسب أولاً يكون $\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$ ومنه $\overrightarrow{HO}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

2. بما أن $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

① حسب المبرهنة الخامسة في مركز الأبعاد المتناسبة نكتب : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$

② بما أن $\begin{cases}\overrightarrow{HO}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\\ 3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\end{cases}$ ومنه $\overrightarrow{HO}=3\overrightarrow{OG}$ فالشعاعان مرتبطان خطياً

فالنقط $O\ ,G\ ,H$ على استقامة واحدة تسمى مستقيم أولر .

٣١ نتأمّل مستقيماً d و نقطةً خارجه O، ولتكن H المسقط القائم للنقطة O على d. نقرن، بكل نقطة متغيرة M من d، نقطةً M' تحقّق الشرطين: O و M و M' على استقامة واحدة و $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=OH^2$.

1. a. تحقَّق أنَّ $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OH}=OH^2$.

b. استنتج أنَّ M' هي المسقط القائم للنقطة H على (OM).

2. نهدف إلى إيجاد المحل الهندسي $\mathcal{L}$ للنقطة M' عندما ترسم M المستقيم d.

a. أثبت أنَّ M' تنتمي إلى دائرة $\mathcal{C}$ يُطلبُ تعرُّفُها. بذا نكون قد أثبتنا أنَّ $\mathcal{L}$ محتوى في $\mathcal{C}$.

b. بالعكس، تبقى الإجابةُ عن السؤال الآتي: أكلُّ نقطةٍ M' من $\mathcal{C}$ هي نقطةٌ من $\mathcal{L}$؟ خذْ نقطةً ما M' من $\mathcal{C}$ تختلف عن O، يقطعُ المستقيمُ (OM') المستقيمَ d في M. أثبت أنَّ $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=OH^2$.

c. استنتج المحل الهندسي $\mathcal{L}$ للنقطة M' عندما ترسم M المستقيم d.

الحل

1. a. $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OH}^2=OH^2$

b. لدينا فرضاً $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OH}$ ومنه $\overrightarrow{OM'}$ مسقط $\overrightarrow{OH}$ على OM أي M' المسقط القائم للنقطة H على OM .

a. 2. بما أن المثلث $HM'O$ قائم في M' فإن M' تنتمي إلى دائرة C قطرها $[OH]$
إذن L المحل الهندسي للنقطة M' محتوى في C.

b. كل نقطة M' من C هي نقطة من $\mathcal{L}$ أي يجب أن تتحقق العلاقة:

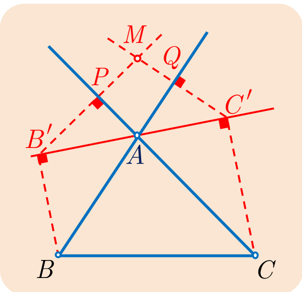
$$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OH}^2=OH^2$$

c. بفرض $M'\in C$ التي مركزها منتصف $[OH]$ وقطرها OH، يقطع المستقيم OM' المستقيم d في M ويكون :

$$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HM})\cdot\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OH}^2+\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OH}^2+0=OH^2$$

ومنه C محتوى في $\mathcal{L}$.
إذن : $C=L$

٣٢ ABC مثلثٌ ما، و Δ مستقيمٌ متحوّل يمر بالنقطة A، ومختلف عن كلٍّ من (AB) و (AC). B' و C' هما المسقطان القائمان للنقطتين B و C على Δ. النقطة P هي المسقط القائم للنقطة B' على (AC)، والنقطة Q هي المسقط القائم للنقطة C' على (AB). أخيراً، يتقاطع المستقيمان $(B'P)$ و $(C'Q)$ في M.



1. ما العناصر الثابتة في الشكل؟ وما العناصر المتحوِّلة؟

a. 2. تحقق أنَّ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'M}=0$، ثمَّ استعمل $\overrightarrow{C'M}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC'}$ لاستنتاج أنَّ:
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC'}$.
أثبت بالمثل أنّ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{AB'}$.

b. استنتج من الأسئلة السابقة أنَّ المستقيمين (AM) و (BC) متعامدان.

3. ما الخط الثابت الذي تتحوّل عليه M عندما يتحوّل Δ .

الحل

1. العناصر الثابتة : A,B,C ، العناصر المتحولة : M,Q,P,B',C' .

a. 2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'M}=0$ لأن $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{C'M}$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{C'M}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}+0=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC'}$$

لنثبت أنّ : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{AB'}$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{B'M}\right)=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB'}+\underbrace{\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{B'M}\right)}_{=0}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{AB'}$$

.b $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM}=0\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AM}=0$

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AM}=0\Rightarrow CB\perp AM$

.3 M تقع على المستقيم الثابت المار من A والعمودي على BC .

٣٣ نتأمّل في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ النقاط $A(3,2)$ و $B(0,6)$ و $M(x,y)$.

.1 احسب، بدلالة x و y، كلاً من $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OM}$.

.2 .a أثبت أنَّ Δ_1، مجموعة النقاط M التي تحقق $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}=18$، هي مستقيمٌ يطلبُ رسمه.

.b أثبت أنَّ Δ_2، مجموعة النقاط M التي تحقق $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OM}=18$، هي مستقيمٌ يطلبُ رسمه.

.3 .a أثبت وجود نقطة وحيدة C تحقق $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=18$ يطلب إيجاد إحداثياتها.

.b أثبت أنَّ المستقيمين (OC) و (AB) متعامدان.

الحل

.1 $A(3,2),B(0,6),M(x,y)$ وبالتالي $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}=18$, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OM}=6y$

.2 .a $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}=3x+2y$ وبالتالي: $\Delta_1:3x+2y=18$

.b $\left(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OM}=6y\ ,\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OM}=18\right)\Rightarrow 6y=18$

$\Delta_1:\ y=3$

.c $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=18$

بفرض $C=M$ وبالتالي C تحقق المعادلتين : $3x+2y=18$ و $y=3$ ومنه نجد

$3x+6=18$ أي $x=4$

.d $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$

$\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{OC}=0$

أي $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ وبالتالي: $AB\perp OC$

٣٤ نتأمّل في معلم متجانسٍ $(O;\vec{i},\vec{j})$، النقاط $A(-3,1)$ و $B(1,5)$ و $M(x,y)$.

1. أثبت أنَّ $MA^2 - MB^2 = 8x + 8y - 16$.
2. ارسم مجموعةَ النقاط M التي تحقق $MA^2 - MB^2 = -8$.

الحل

1. $A(-3,1), B(1,5), M(x,y)$

$$\overrightarrow{MA}(-3-x, 1-y), \overrightarrow{MB}(1-x, 5-y)$$

$$MA^2 - MB^2 = \left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)$$

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = (-2-2x, 6-2y)$$

$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB} = (-4, -4)$$

$$\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right) = -4(-2-2x)+(6-2y)(-4)$$

$$= 8+8x-24+8y = 8x+8y-16$$

$$MA^2 - MB^2 = -8$$

$$8x+8y-16=-8 \Rightarrow 8x+8y-8=0$$

$$x+y-1=0 \Rightarrow y=-x+1$$

٣٥ $ABCD$ مربعٌ طولُ ضلعه يساوي 2 ومركزه O، و I منتصف AB.

1. أثبت أنَّ مجموعة النقاط M التي تحقّق $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 2$ هي المستقيم (OI).
2. a. أثبت أنَّ $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = IM^2 - 1$.

b. استنتج أنَّ مجموعة النقاط M التي تحقِّق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 4$ هي الدائرة التي مركزها I وتمرُّ بالنقطة C.

الحل

1. لدينا $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 2$ ولدينا $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AI}\right\| = 2$ فنجد :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$$

ومنه الشعاع $\overrightarrow{AI}$ المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{AM}$ على AB.

ولكن $AB \perp OI$ إذن M تقع على المستقيم OI.

.2 .a

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$$
$$=\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$$
$$=\overrightarrow{MI}^2+0+0-1=\overrightarrow{MI}^2-1$$

.b $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=4$ ومنه $\overrightarrow{MI}^2-1=4$ أي $\overrightarrow{MI}^2=5$ ومنه $MI=\sqrt{5}$

وبالتالي M تقع على دائرة مركزها I ونصف قطرها $=\sqrt{5}$، وبما أن $IC=\sqrt{5}$ (حسب فيثاغورث) فإن الدائرة تمر من C .

طريقة ثانية: يمكن حل المسألة تحليلياً باختيار معلم متجانس مركزه أحد رؤوس المربع .

٣٦ $ABCD$ مربعٌ طول ضلعه يساوي 2، و I منتصف AB .

.a .1 أثبت أنه أينما كانت النقطة M، كان:

$$MA^2-MB^2=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})=2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$$

.b استنتج أنَّ مجموعة النقاط M التي تحقق $MA^2-MB^2=4$ هي مجموعة النقاط M التي تحقق $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=2$.

.2 أثبت أنَّ مجموعة النقاط M التي تحقّق $MA^2-MB^2=4$ هي المستقيم (BC).

الحل

.a .1

$$MA^2-MB^2=(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})=2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$$

.b بما أن $MA^2-MB^2=4$ ، فيكون $2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=4$ وبالتالي : $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=2$

فيكون مسقط M على AB هي النقطة B ، فيكون المحل الهندسي للنقطة M هو المستقيم BC

طريقة ثانية : يمكن حل المسألة تحليلياً باختيار معلم متجانس مركزه أحد رؤوس المربع .

٣٧ AB قطرٌ في دائرة $\mathcal{C}$ مركزها O. نقرن بكلِّ نقطة M مختلفة من A من النقطة $\mathcal{C}$ النقطة M' من المستقيم (AM) التي تُحقّق $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=AB^2$. ما المحلّ الهندسي $\mathcal{L}$ للنقطة M' عندما تتحوّل M على الدائرة $\mathcal{C}$ محذوفاً منها النقطة A.

الحل

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=AB^2$$

$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})\cdot\overrightarrow{AM'}=AB^2\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM'}+\underbrace{\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AM'}}_{=0}=AB^2$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM'}\ AB^2\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM'}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$$

ومنه $\overrightarrow{AB}$ المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{AM'}$ على AB ومنه M' تقع على المستقيم المار من B والعمودي على AB .

ولآن بقي علينا الإجابة عن السؤال الآتي: هل كل نقطة M' من المستقيم Δ بحيث $M'A$ يقطع الدائرة C في نقطة M تحقق $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=AB^2$ ؟

لدينا $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM'}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2$

ومنه المستقيم المار من B و العمودي على AB كاملاً هو المحل الهندسي للنقطة M' .

٣٨ نتأمّل مثلّثاً ABC ومستقيماً Δ. لتكن A' و B' و C'، بالترتيب، المساقط القائمة للنقاط A و B و C على Δ. النقطة O هي نقطة تقاطع المستقيم المار بالنقطة B' عمودياً على (AC) مع المستقيم المار بالنقطة C' عمودياً على (AB). أثبت أنّ المستقيمين (OA') و (BC) متعامدان.

ليكن $\vec{u}$ شعاع واحدة يوجّه المستقيم Δ. عبّر عن الجداءَيْن السلّميين $\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{AC}$ بدلالة $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

الحل

$$\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{B'A'})\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{B'A'}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{B'A'}\cdot\overrightarrow{A'C'}$$

$$\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{AC}=-\|\overrightarrow{B'A'}\|\cdot\|\overrightarrow{A'C'}\| \qquad ①$$

$$\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{C'A'})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{C'A'}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{C'A'}\cdot\overrightarrow{A'B'}$$

$$\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{AB}=-\|\overrightarrow{C'A'}\|\cdot\|\overrightarrow{A'B'}\| \qquad ②$$

بطرح ② من ① نجد : $\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ ومنه

$$\overrightarrow{OA'}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

وهذا يعني أن : $BC\perp OA'$ وهو المطلوب .

تَدرَّبْ ص١٠٨

① ABC مثلثٌ. احسب، في كلٍّ من الحالات الآتية، أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا الباقية.

❶ $AB = 2+\sqrt{3}$ و $AC = 1$ و $BAC = 60°$.

❷ $ABC = 120°$ و $ACB = 15°$ و $BC = 2$.

❸ $AB = 2\sqrt{3}$ و $BC = \sqrt{6}+\sqrt{2}$ و $CA = \sqrt{6}-\sqrt{2}$.

الحل

❶

$$AB = 2+\sqrt{3} = c$$
$$AC = 1 = b$$
$$B\hat{A}C = 60° = \hat{A}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,CosA$$
$$a^2 = 1 + (2+\sqrt{3})^2 - 2(1)(2+\sqrt{3})\,\frac{1}{2}$$
$$a^2 = 1 + 4 + 4\sqrt{3} + 3 - 2 - \sqrt{3}$$
$$a^2 = 6 + 3\sqrt{3} = 3(2+\sqrt{3})$$
$$a = \sqrt{3}\,\sqrt{2+\sqrt{3}}$$
$$\frac{b}{SinB} = \frac{a}{SinA}$$
$$\frac{1}{SinB} = \frac{a}{SinA}$$
$$\frac{1}{SinB} = \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$SinB = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$
$$\hat{B} \simeq 48°$$
$$\hat{C} \simeq 72°$$

❷

$$BC = 2 = a$$

$$A\hat{C}B = 15^\circ = \hat{C}$$

$$A\hat{B}C = 120^\circ = \hat{B}$$

$$\hat{A} = 180^\circ - (120^\circ + 15^\circ) = 45^\circ$$

$$\frac{a}{SinA} = \frac{b}{SinB} = \frac{c}{SinC}$$

$$\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$b = \sqrt{6}$$

$$\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

$$c = \sqrt{3} - 1$$

❸

$$CA = \sqrt{6} - \sqrt{2} = b$$

$$BC = \sqrt{6} + \sqrt{2} = a$$

$$AB = 2\sqrt{3} = c$$

$$CosC = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2b\,a}$$

$$CosC = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 - 12}{2(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{1}{2}$$

ما يلائم المثلث يكون $C = 60^\circ$

$$\frac{c}{SinC} = \frac{b}{SinB}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{SinB}$$

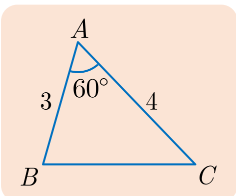
$$SinB = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ومنه ما يلائم المثلث يكون $B = 15^\circ$ أو $B = 165^\circ$ مرفوض لأن $C = 60^\circ$

$$A = 180^\circ - (15^\circ + 60^\circ)$$

$$A = 105^\circ$$

② في حالة الشكل المرسوم جانباً، احسب:



❶ مساحة المثلث ABC.

❷ محيط المثلث ABC.

الحل

❶ $S = \frac{1}{2} AB\, AC\, Sin60°$

$S = \frac{1}{2}(3)(4)\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S = 3\sqrt{3}$

❷ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCosA$

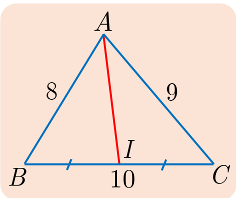
$a^2 = 16 + 9 - 2(3)(4)\frac{1}{2}$

$a^2 = 13$

$a = \sqrt{13}$

محيط المثلث $= 3 + 4 + \sqrt{13} = 7 + \sqrt{13}$

③ في حالة الشكل المرسوم جانباً، احسب:



❶ احسب طول المتوسط AI.

❷ احسب طولي المتوسطين الآخرين.

الحل

❶ $m_a{}^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$

$m_a{}^2 = \frac{81 + 64}{2} - \frac{100}{4} = \frac{95}{2}$

$m_a = \sqrt{\frac{95}{2}}$

❷ بنفس الأسلوب نحسب المتوسطين الآخرين

④ نتأمّل مثلثاً ABC مساحته $5\sqrt{3}$، وفيه $AB = 4$ و $BAC = 60°$. احسب AC، واستنتج أنَّ $BC = \sqrt{21}$.

الحل

$$S = 5\sqrt{3}$$

$$c = 4\ ,\quad \hat{A} = 60^\circ\ ,\ b = ?$$

$$5\sqrt{3} = \frac{1}{2}b(4)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b = 5$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$a^2 = 25 + 16 - 2(5)(4)\frac{1}{2}$$

$$a^2 = 21$$

$$a = \sqrt{21} = BC$$

تَدرَّبْ ص ١١٢

① في كلِّ حالةٍ مما يأتي، ارسم المستقيم d إذا علمتَ أنّه يمرّ بالنقطة A وأنّ $\vec{n}$ شعاعٌ ناظمٌ عليه، ثمَّ أعطِ معادلةً له.

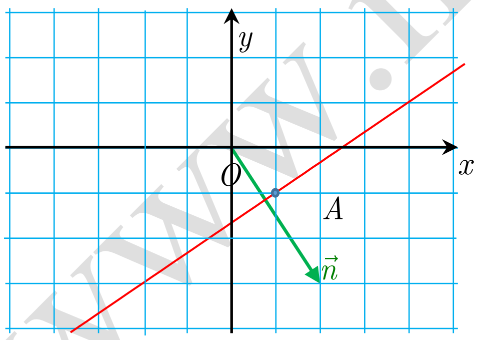
❶ $A(1,-1)$ و $\vec{n}(2,-3)$.

❷ $A(-1,-2)$ و $\vec{n}(0,2)$.

❸ $A(-3,2)$ و $\vec{n}(3,0)$.

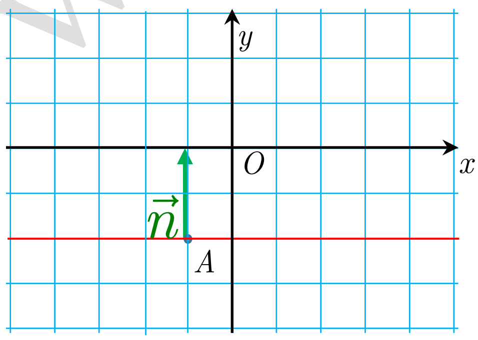
الحل

❶ $A(1,-1)$,$\vec{n}(2,-3)$



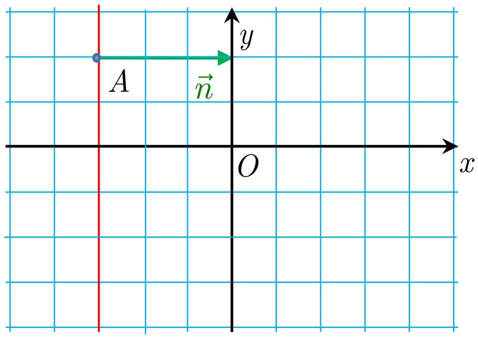
المعادلة من الشكل $2x - 3y + c = 0$ ولما كانت النقطة $A(1,-1) \in d$ فهي تحقق معادلته

$2(1) - 3(-1) + c = 0$ ومنه $c = -5$ فمعادلة المستقيم $d : 2x - 3y - 5 = 0$.



❷ $A(-1,-2)$,$\vec{n}(0,2)$

$$d : y = -2$$



❸ $A(-3,2)$,$\vec{n}(3,0)$

$d : x = -3$

② عيّن شعاعاً ناظماً على المستقيمٌ d الذي معادلته $3x - y + 5 = 0$. ثُمّ اكتب معادلةً للمستقيم Δ المار بالنقطة $A(1,2)$ والعمودي على d.

الحل

$\vec{n}(3,-1)$ شعاع ناظم على المستقيم $\underline{d}$

المستقيم Δ المطلوب كتابة معادلته يقبل المتجه $\vec{n}(3,-1)$ متجه توجيه له فهو مرتبط خطياً مع المتجه $\vec{v}\left(1,\frac{-1}{3}\right)$

والمعادلة من الشكل $\Delta : y = -\frac{1}{3}x + c$ ولما كان المستقيم Δ يمر بالنقطة $A(1\ ,\ 2)$ فهي تحقق معادلته

$2 = -\frac{1}{3}(1) + c$ ومنه $c = \frac{7}{3}$ ومنه $\Delta : y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

③ في كلٍّ من الحالات الآتية، بيّن إذا كان المستقيمان d و d' متعامدين أو غير متعامدين.

❶ $d : x - 2y + 4 = 0$ و $d' : 6x + 3y - 7 = 0$.

❷ $d : y = -2x + 5$ و $d' : x - 2y + 1 = 0$.

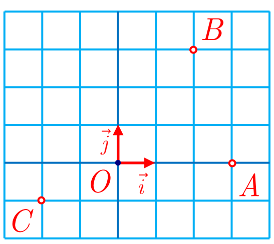
❸ $d : (1+\sqrt{2})x - y + 3 = 0$ و $d' : (\sqrt{2}-1)x + y = 0$.

الحل

سنحل فقط التمرين ❸ شرط تعامد d و d' هو ..

ومنه المستقيمان d و d' متعامدان

④ في حالة الشكل المرسوم جانباً:



❶ اكتب معادلةً للمستقيم Δ المار بالنقطة A موازياً المستقيم (BC).

❷ اكتب معادلةً للمستقيم Δ' المار بالنقطة A عمودياً على المستقيم

$.(BC)$

الحل

❶ $B(2,3)\ ,\ C(-2,-1)$

$\overrightarrow{BC}(-4,-4)$

فالشعاع $\vec{u}(1,1)$ مرتبط خطياً مع الشعاع $\overrightarrow{BC}(-4,-4)$ فمعادلة المستقيم Δ من الشكل

$y = x + p$ ولما كانت النقطة $A(3,0)$ تنتمي إلى المستقيم Δ فهي تحقق معادلته $3 + p = 0$ ومنه

$p = -3$ فمعادلة المستقيم Δ هي $y = x - 3$

❷ $\vec{n} = \overrightarrow{BC}(-4,-4)$

فمعادلة المستقيم Δ' من الشكل $-4x - 4y + c = 0$ ولما كانت النقطة $A(3,0)$ تنتمي إلى المستقيم

Δ' فهي تحقق معادلته $-12 + c = 0$ ومنه $c = 12$ فمعادلة المستقيم Δ' هي $x + y - 3 = 0$

تَدرَّبْ ص ١١٦

① اكتب، في كلٍّ من الحالات الآتية، معادلةً للدائرة $\mathcal{C}$.

❶ مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

❷ مركزها $I(-1,1)$ وتمر بالنقطة $A(3,-2)$.

❸ مركزها $I(2,3)$ وتمسُّ محور التراتيب.

❹ مركزها $I(-3,2)$ وتمسُّ محور الفواصل.

❺ قطرها $[AB]$ مع $A(2,-1)$ و $B(4,9)$.

❻ تمس Ox و Oy ويقع مركزها في الربع الأول.

الحل:

الحل

❶ $O(0,0)\ ,\quad R = \sqrt{2}$

$x^2 + y^2 = 2$

❷ مركزها $I(-1,1)$ وتمر بالنقطة $A(3,-2)$ والمعادلة من الشكل

$(x+1)^2 + (y-1)^2 = R^2$ ولما كانت الدائرة تمر بالنقطة $A(3,-2)$ فهي تحقق معادلتها

$(3+1)^2 + (-2-1)^2 = R^2$ ومنه $R^2 = 25$ فمعادلة الدائرة هي $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 25$

❸ مركزها $I(-3,2)$ وتمس محور الفواصل

$R = |x_0| = 2$ والمعادلة هي $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$

❹ مركزها $I(2,3)$ وتمس محور التراتيب $R = |y_0| = 2$ والمعادلة هي $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$

❺ قطرها $[AB]$ مع $A(2,-1)$ و $B(4,9)$

مركز الدائرة هو منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ وليكن I فيكون $I\left(\frac{4+2}{2},\frac{9-1}{2}\right)$ ومنه $I(3,4)$

$$AB=\sqrt{(4-2)^2+(9+1)^2}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$$

$$R=\frac{AB}{2}=\sqrt{26}$$

ومعادلة الدائرة هي $(x-3)^2+(y-4)^2=26$

❻ تمس Ox و Oy ويقع مركزها في الربع الأول $|x_o|=|y_0|$ $R=$ لما كانت (x_0,y_0) تقع في الربع الأول كان $R=x_o=y_0$ ومعادلة الدائرة هي $(x-R)^2+(y-R)^2=R^2$

② أثبت، في كلِّ حالةٍ، أنَّ مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقّق المعادلة المذكورة هي دائرة، يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

❶ $x^2+y^2-3x+4y+4=0$.

❷ $(x-1)(x-3)+(y-1)(y+2)=0$.

الحل

❶

$$x^2+y^2-3x+4y+4=0$$

$$x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+y^2+4y+4=0$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{9}{4}$$

مركزها $I\left(\frac{3}{2},-2\right)$ ونصف قطرها $R=\frac{3}{2}$

❷

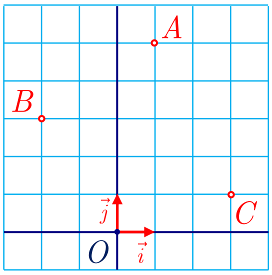
$$(x-1)(x-3)+(y-1)(y+2)=0$$

$$x^2-4x+3+y^2+y-2=0$$

$$\underbrace{x^2-4x+4}-4+\underbrace{y^2+y+\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}=-1$$

$$(x-2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$$

مركزها $I\left(2,-\frac{1}{2}\right)$ ونصف قطرها $R=\frac{\sqrt{13}}{2}$



③ تأمّل الشكل المرسوم جانباً.

❶ اكتب معادلةً لمحور القطعة $[AB]$ وأخرى لمحور القطعة $[BC]$.

❷ استنتج إحداثيتي مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC.

الحل

❶ $A(1,5)$ و $B(-2,3)$

$\overrightarrow{AB}(-3,-2)$ فمعادلة المستقيم d محور القطعة المستقيمة $[AB]$ من الشكل

$d:-3x-2y+c=0$ المستقيم d يمر بمنتصف $[AB]$ وليكن M فتكون إحداثيات النقطة M هي

$M\left(-\frac{1}{2},4\right)$ وهي تحقق معادلة d $\quad -3\left(-\frac{1}{2}\right)-2(4)+c=0$ ومنه $c=\frac{13}{2}$ فمعادلة المستقيم

d محور القطعة المستقيمة $[AB]$ هي $d:-3x-2y+\frac{13}{2}=0$

وبنفس الأسلوب نجد معادلة محور القطعة المستقيمة $[BC]$ فتكون $d':5x-2y+\frac{3}{2}=0$

❷ مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC يكون نقطة تقاطع المستقيمين d و d' بالحل المشترك

وبطرح معادلة d من معادلة d' نجد $x=\frac{5}{8}$ نعوض في إحدى معادلتي d أو d' فيكون $y=\frac{37}{16}$

فمركز الدائرة هو $I\left(\frac{5}{8},\frac{37}{16}\right)$

④ نتأمّل في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ المستقيم d ذا المعادلة $x+y-8=0$، والنقطة $A(3,0)$.

❶ وضِّع النقطة A وارسم المستقيم d في شكلٍ واحد.

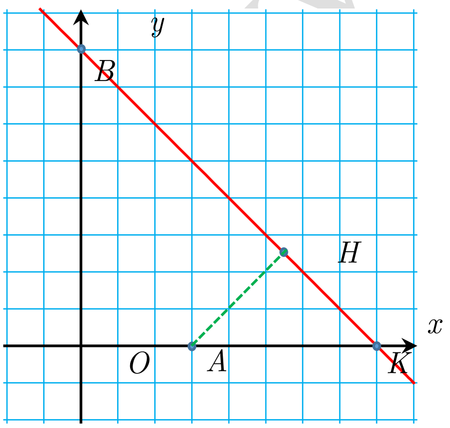
❷ لتكن H المسقط القائم للنقطة A على d و K نقطة تقاطع d ومحور الفواصل.

a. أثبت أنَّ المثلث AHK قائمٌ ومتساوي الساقين واحسب AH.

b. استنتج معادلةً للدائرة C التي مركزها A وتمسُّ المستقيمَ d.

الحل

❶



❷ a. بافتراض B نقطة تقاطع المستقيم d مع محور التراتيب

إنَّ المثلثين BOK و AHK متشابهان لأنَّ فيهما

$\hat{O}=\hat{H}=90^\circ$ و $\hat{K}$ مشتركة

ولما كان المثلث BOK قائم ومتساوي الساقين كان المثلث AHK قائم ومتساوي الساقين ، لحساب AH نضع نسب التشابه

$$\left.\begin{array}{l} AHK \\ BOK \end{array}\right| \frac{AH}{BO} = \frac{AK}{BK}$$

$$\frac{AH}{8} = \frac{5}{8\sqrt{2}}$$

$$AH = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

.b $R = AH = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$

$$(x-3)^2 + y^2 = \frac{25}{2}$$

⑤ لتكن $\mathcal{C}$ دائرةً معادلتها $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$. ولتكن A و B نقطتي تقاطعها مع محور الفواصل، و C و D نقطتي تقاطعها مع محور التراتيب. احسب إحداثيات هذه النقاط الأربع.

الحل

لإيجاد نقط التقاطع مع محور الفواصل نضع $y = 0$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$(x-4)(x+2) = 0$$
$$x = 4 \quad , \quad x = -2$$

ومنه $A(-2,0)$, $B(4,0)$

لإيجاد نقط التقاطع مع محور التراتيب نضع $x = 0$

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$
$$(y-4)(y+2) = 0$$
$$y = 4 \; , \; y = -2$$

ومنه $C(0,-2)$, $D(0,4)$

⑥ المعادلة $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$ معادلةٌ للدائرة $\mathcal{C}$.

❶ أثبت أنَّ $A(2,4)$ نقطةٌ من $\mathcal{C}$.

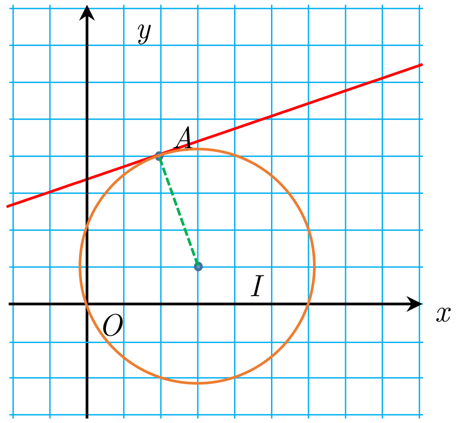
❷ ارسم $\mathcal{C}$ ووضِّع عليها A، ثمَّ أنشئ من A المماس d للدائرة $\mathcal{C}$.

❸ اكتب معادلةً للمماس d.

الحل

❶ نعوض إحداثيات النقطة $A(2,4)$ في معادلة الدائرة $\mathcal{C}$

$(2)^2 + (4)^2 - 6(2) - 2(4) = 20 - 20 = 0$ ومنه $A(2,4) \in \mathcal{C}$



❷

$$\underbrace{x^2-6x+9}-9+\underbrace{y^2-2y+1}-1=0$$

$$(x-3)^2+(y-1)^2=10$$

مركزها $I(3,1)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{10}$

❸ $\overrightarrow{IA}(-1,3)$ هو شعاع ناظم على المماس للدائرة C المرسوم من النقطة $A(2,4)$ فمعادلة المماس من الشكل $-x+3y+c=0$ ولما كانت النقطة $A(2,4)$ تنتمي إلى المماس فهي تحقق معادلته $-2+12+c=0$ ومنه $c=-10$ فمعادلة المماس هي $-x+3y-10=0$

⑦ تأمّل النقطتين $A(2,3)$ و $B(-1,1)$، والمستقيم d ذا المعادلة $y=1$.

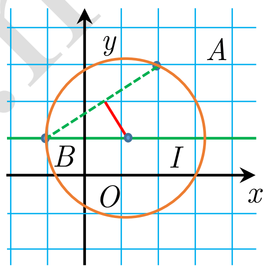
❶ ضَعْ على شكلٍ النقطتين A و B وارسم عليه المستقيم d.

❷ أنشئ الدائرة $\mathcal{C}$ المارّة بالنقطتين A و B، ومركزها I نقطةٌ من المستقيم d.

❸ اكتب معادلةً لمحور القطعة $[AB]$. واستنتج إحداثيتي النقطة I، ثمَّ معادلةً للدائرة $\mathcal{C}$.

الحل

❶



❷ نرسم محور القطعة المستقيمة $[AB]$ فيقطع المستقيم $y=1$ في نقطة I هي مركز الدائرة المطلوبة ونصف قطرها IA

❸ $\overrightarrow{AB}(-3,-2)$ وبافتراض M منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ فتكون إحداثيات النقطة $M\left(\frac{1}{2},2\right)$ ومنه معادلة محور القطعة المستقيمة $[AB]$ من الشكل $-3x-2y+c=0$ ولما كانت النقطة $M\left(\frac{1}{2},2\right)$ تنتمي إلى المحور فهي تحقق معادلته $-3\left(\frac{1}{2}\right)-2(2)+c=0$ ومنه $c=\frac{11}{2}$

فمعادلة المحور هي $-3x-2y+\frac{11}{2}=0$ مركز الدائرة I هو نقطة تقاطع محور القطعة المستقيمة $[AB]$ مع المستقيم $y=1$

بالحل المشترك نجد $-3x-2+\frac{11}{2}=0$ ومنه $x=\frac{7}{6}$ وبالتالي $I\left(\frac{7}{6},1\right)$

$$R=IA=\sqrt{\left(2-\frac{7}{6}\right)^2+(3-1)^2}$$

$$R=\sqrt{\frac{169}{36}}=\frac{13}{6}$$

ومنه معادلة الدائرة هي $\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+(y-1)^2=\frac{169}{36}$

تَدرَّبْ ص ١١٩

① أجب عن الأسئلة الآتية:

❶ تحقّق أنَّ $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}$، ثمَّ احسب $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

❷ تحقّق أنَّ $\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}=\frac{11\pi}{12}$، ثمَّ احسب $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$.

❸ باستعمال $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$، احسب $\cos^2\frac{\pi}{12}$ واستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

الحل

❶ $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}$ ومنه

$$Sin\frac{5\pi}{12}=Sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=Sin\frac{\pi}{6}Cos\frac{\pi}{4}+Cos\frac{\pi}{6}Sin\frac{\pi}{4}$$

$$Sin\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$Cos\frac{5\pi}{12}=Cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=Cos\frac{\pi}{6}Cos\frac{\pi}{4}-Sin\frac{\pi}{6}Sin\frac{\pi}{4}$$

$$Cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

❷ بنفس أسلوب التمرين السابق

❸

$$Cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1+Cos\left(2\frac{\pi}{12}\right)}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$Cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$Cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$Sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)=1-Cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)=1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$Sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$Sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

② احسب $\sin 2x$، في كلٍّ من الحالات الآتية:

❶ $\sin x=\frac{1}{3}$ و $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ ❷ $\sin x=-\frac{3}{5}$ و $x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$.

❸ $\cos x=\frac{4}{5}$ و $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ ❹ $\cos x=-\frac{5}{12}$ و $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

الحل

❶ $Sinx=\frac{1}{3}\quad , x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

$$Cos^2x=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

$$Cosx=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\quad :x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$$

$$Sin2x=2\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{-4\sqrt{2}}{9}$$

③ اختزل كلاً من العبارات الآتية:

❶ $A(x)=\cos(7x)\sin(6x)-\sin(7x)\cos(6x)$.

❷ $B(x)=\cos x\cos(2x)-\sin x\sin(2x)$.

❸ $C(x)=\cos(3x)\sin(2x)+\cos(2x)\sin(3x)$.

الحل

❶
$$A(x)=Sin6x.Cos7x-Cos6x.Sin7x$$
$$=Sin(6x-7x)=Sin(-x)=-Sinx$$

❷ و ❸ بنفس أسلوب التمرين السابق

④ عبّر عن كلٍّ من العبارات الآتية بدلالة $\sin x$ أو $\cos x$.

❶ $2\cos(x-\frac{\pi}{3})$ ❷ $\sqrt{2}\,\mathrm{co}(x+\frac{\pi}{4})$ ❸ $\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$

- إثبات تعامد مستقيمين.
- البحث عن معادلة دائرة.

الحل

❶
$$2Cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2\left(Cosx.Cos\frac{\pi}{3}+Sinx.Sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=2\left(\frac{1}{2}Cosx+\frac{\sqrt{3}}{2}Sinx\right)=Cosx+\sqrt{3}Sinx$$

❷ و ❸ بنفس أسلوب التمرين السابق .

أنشطة

نشاط 1 علاقات خاصة بالمساحات

① علاقة هيرون $Heron$

وجدنا فيما سبق مساحة المثلث بدلالة ضلعين والزاوية المحددة بهما: $S=\frac{1}{2}bc\sin A$. لحساب S بدلالة أطوال الأضلاع a و b و c، علينا حساب $\sin A$ بدلالة a و b و c.

1. استناداً إلى مبرهنة الكاشي لدينا $a^2=b^2+c^2-2ab\cos A$.

a. استنتج منها أنَّ $(4b^2c^2)\sin^2 A=4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$.

b. نرمز إلى محيط المثلث ABC بالرمز $2p$، إذن $2p=a+b+c$. أثبت أنَّ:

$$b^2c^2\sin^2 A=4p(p-a)(p-b)(p-c)$$

2. استنتج مما سبق أنَّ

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

الحل

.1 .a
$$
\begin{aligned}
l_1=(4b^2c^2)\,Sin^2A &= (4b^2c^2)(1-Cos^2A)\\
&= 4b^2c^2 - 4b^2c^2Cos^2A\\
&= 4b^2c^2 - 4b^2c^2\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2\\
&= 4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2 = l_2
\end{aligned}
$$

.b وجدنا أنّ $(4b^2c^2)\,Sin^2A = 4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2$ ومنه

$$
\begin{aligned}
(4b^2c^2)\,Sin^2A &= (2bc-(b^2+c^2-a^2)).(2bc+(b^2+c^2-a^2))\\
&= (a^2-(b-c)^2).((b+c)^2-a^2)\\
&= (a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)
\end{aligned}
$$

لدينا فرضاً $2p = a+b+c$ بطرح $2a$ للطرفين نجد

$$
\begin{aligned}
2p-2a &= a+b+c-2a\\
2(p-a) &= b+c-a
\end{aligned}
$$

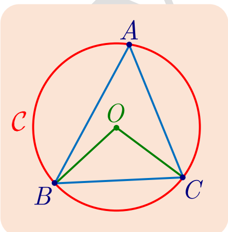
وبالمثل نجد

$$
\begin{aligned}
2(p-b) &= a+c-b\\
2(p-b) &= a+b-c
\end{aligned}
$$

نعوض
$$
\begin{aligned}
(4b^2c^2)\,Sin^2A &= 2(p-b)2(p-c)2(p-a)2p\\
b^2c^2\,Sin^2A &= 4p(p-a)(p-b)(p-c)
\end{aligned}
$$

.2
$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}b\,c\,SinA\\
S^2 &= \frac{1}{4}b^2c^2Sin^2A\\
S^2 &= \frac{1}{4}4p(p-a)(p-b)(p-c)\\
S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}
\end{aligned}
$$

② مساحة المثلّث والدائرة المارّة برؤوسه



لتكن $\mathcal{C}$ الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC، وليكن مركزها O ونصف قطرها R.

.1 في حالة BAC حادة : نعلم، استناداً إلى مبرهنة الزاوية المحيطية والزاوية المركزية، أنَّ $BAC = \frac{1}{2}BOC$. أثبت أنَّ $\frac{a}{2} = R\sin A$.

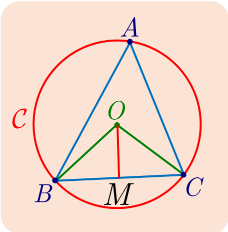
.2 في حالة BAC منفرجة: نعلم أنَّ $BAC = \pi - \frac{1}{2}BOC$. أثبت أيضاً أنَّ $\frac{a}{2} = R\sin A$.

.3 استنتج أنَّ :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad \text{و} \quad S = \frac{abc}{4R}.$$

الحل

1.في حالة $\widehat{BAC}$ زاوية حادة



$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$$

$$\widehat{BAC} = \widehat{MOC}$$

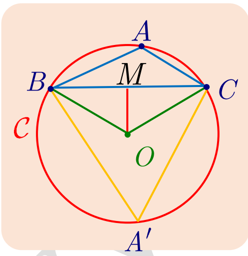
$$Sin\ \widehat{BAC} = Sin\,\widehat{MOC} = \frac{\frac{a}{2}}{R}$$

$$SinA = \frac{a}{2R}$$

$$RSinA = \frac{a}{2}$$

2.في حالة $\widehat{BAC}$ زاوية منفرجة

في الشكل المجاور نلاحظ أن



$$\widehat{A} = \pi - \widehat{A'}$$

$$\widehat{A'} = \frac{1}{2}\widehat{COB} = \widehat{COM}$$

$$\widehat{A} = \pi - \widehat{COM}$$

$$Sin\,\widehat{A} = Sin(\pi - \widehat{COM}) = Sin\,\widehat{COM}$$

$$Sin\,\widehat{A} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$$

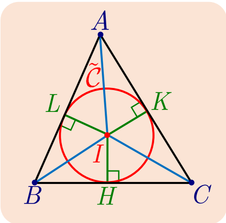
$$RSin\,\widehat{A} = \frac{a}{2}$$

3.مما سبق وجدنا أنّ $\frac{a}{Sin\,\widehat{A}} = 2R$ وبنفس الأسلوب نجد أن $\frac{b}{Sin\,\widehat{B}} = 2R$ و $\frac{c}{Sin\,\widehat{C}} = 2R$ ومنه

نستنتج $\frac{a}{Sin\,\widehat{A}} = \frac{b}{Sin\,\widehat{B}} = \frac{c}{Sin\,\widehat{C}} = 2R$

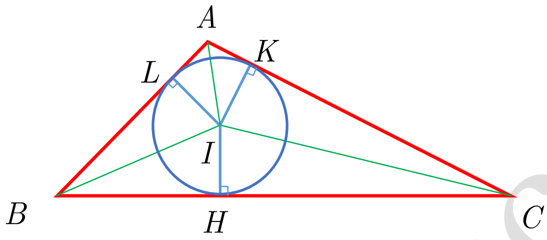
$$S = \frac{1}{2} a\, b\, SinC$$
$$S = \frac{1}{2} a\, b\, \frac{c}{2R}$$
$$S = \frac{a\, b\, c}{4R}$$

③ مساحة المثلّث والدائرة المماسّة لأضلاعه داخلاً



لتكن $\mathcal{C}$ الدائرة المماسة لأضلاع المثلث ABC داخلاً، وليكن مركزها I ونصف قطرها r. وليكن $2p$ محيط المثلث ABC، أي $2p = a + b + c$.
بملاحظة أنّ مساحة المثلث ABC تساوي مجموع مساحات المثلّثات IBC و ICA و IAB أثبت أنّ $S = pr$.

الحل



$$\begin{aligned} S &= S(IBC) + S(IAC) + S(IAB) \\ &= \frac{1}{2} a\, r + \frac{1}{2} b\, r + \frac{1}{2} c\, r \\ &= \frac{1}{2} r(a + b + c) \\ &= \frac{1}{2} r(2p) \\ S &= r\,.\,p \end{aligned}$$

نشاط 2 طول منصّف داخلي

في المثلث ABC، يقطعُ المنصفُ الداخلي للزاوية A الضلعَ $[BC]$ في النقطة D. لنرمز إلى قياسات A و B و C على التوالي بالرموز 2α و β و γ.

1. a. تحقق مما يأتي:

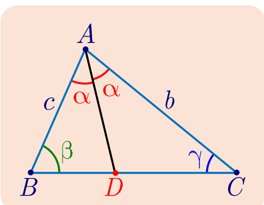
$$\frac{DC}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin \delta} = \frac{b}{\sin ADC} \quad \text{و} \quad \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin BDA}$$

b. استنتج أنَّ $\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b}$ و $b\,\overrightarrow{DB} + c\,\overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

2. a. استنتج أنَّ D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B, b) و (C, c).

b. أثبت أنَّ $b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC} = (b + c)\overrightarrow{AD}$.

c. استنتج أنَّ $(b + c)^2 AD^2 = 2b^2c^2(1 + \cos A)$.



3. أثبت، انطلاقاً مما سبق، أنَّ $AD = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$.

4. تطبيق: احسب AD في حالة $b = 2.4$ و $c = 3.2$ و $A = \dfrac{\pi}{3}$.

الحل

a.1 في المثلث ABD نجد $\dfrac{BD}{Sin\alpha} = \dfrac{AD}{Sin\beta} = \dfrac{c}{Sin\,\widehat{BDA}}$

في المثلث ADC نجد $\dfrac{DC}{Sin\alpha} = \dfrac{AD}{Sin\gamma} = \dfrac{b}{Sin\,\widehat{ADC}}$

b. من العلاقة الأولى نجد أن $\dfrac{BD}{c} = \dfrac{Sin\alpha}{Sin\,\widehat{BDA}}$

من العلاقة الثانية نجد أن $\dfrac{DC}{b} = \dfrac{Sin\alpha}{Sin\,\widehat{ADC}}$

ولكن $\widehat{BDA} = \pi - \widehat{ADC}$ أي $Sin\,\widehat{BDA} = Sin\,\widehat{ADC}$ ومنه $\dfrac{DC}{b} = \dfrac{BD}{c}$ أي $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{c}{b}$

$$\overrightarrow{DB} = -\frac{c}{b}\overrightarrow{DC}$$
$$b\overrightarrow{DB} = -c\,\overrightarrow{DC}$$
$$b\overrightarrow{DB} + c\,\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

a.2 بما أن $b\overrightarrow{DB} + c\,\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ ومنه D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,c),(B,b)$

b.
$$\begin{aligned}
l_1 &= b\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC} \\
&= b(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + c(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \\
&= b\overrightarrow{AD} + b\,\overrightarrow{DB} + c\overrightarrow{AD} + c\,\overrightarrow{DC} \\
&= (b + C)\overrightarrow{AD} + \underbrace{b\overrightarrow{DB} + c\overrightarrow{Dc}}_{=0} \\
&= (b + C)\overrightarrow{AD} = l_2
\end{aligned}$$

c. وجدنا أن
$$(b+c)\overrightarrow{AD} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$$
$$(b+c)^2 AD^2 = b^2AB^2 + C^2AC^2 + 2bc\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$
$$(b+c)^2 AD^2 = b^2c^2 + c^2b^2 + 2bc(c).(b)CosA$$
$$(b+c)^2 AD^2 = 2b^2c^2 + 2b^2c^2CosA$$
$$(b+c)^2 AD^2 = 2b^2c^2(1 + CosA)$$

3. وجدنا مما سبق $(b+c)^2 AD^2 = 2b^2c^2(1+CosA)$

$$(b+c)^2 AD^2 = 2b^2c^2 2Cos^2\frac{A}{2}$$

$$AD^2 = \frac{4b^2c^2}{(b+c)^2}Cos^2\frac{A}{2}$$

$$AD = \frac{2bc}{b+c}Cos\frac{A}{2}$$

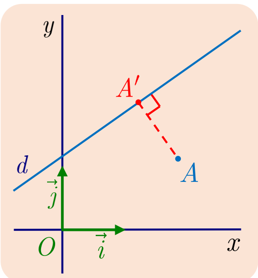
4. تطبيق: $c = 3.2 \qquad ,b = 2.4,\ A = \frac{\pi}{3}$

$$AD = \frac{2(2.4)(3.2)}{(2.4)+(3.2)}.\cos\frac{\pi}{6}$$

$$AD = \frac{15.36}{5.6}.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AD \approx 1.37\sqrt{3} \approx 2.3$$

نشاط ٣ بُعد نقطة عن مستقيم



لتكن $ax+by+c=0$ مع $(a,b)\neq(0,0)$ معادلة لمستقيم d، في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. ولتكن A نقطةً إحداثياتها (α,β) و A' هي المسقط القائم للنقطة A على d. الغاية هي حساب المسافة AA' بدلالة a و b و c و α و β.

1. الشعاع $\vec{n}(a,b)$ شعاعٌ ناظمٌ على d. أثبت أنَّ

$$\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AA'}\right| = \left\|\vec{n}\right\| \times AA' = \sqrt{a^2+b^2}\times AA'$$

2. A' نقطةٌ من المستقيم d، فإذا رمزنا إلى إحداثيتيها بالرمز (x,y)، كان $ax+by+c=0$.
احسب مركّبتي الشعاع $\overrightarrow{AA'}$ وأثبت ما يأتي :

$$\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AA'}\right| = \left|-a\alpha-b\beta-c\right| \quad \text{و} \quad AA' = \frac{\left|a\alpha+b\beta+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

3. **تطبيقات**. وجدنا في السؤال السابق صيغة تفيد في حساب بُعد نقطة عُلمت إحداثيّاتها في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ عن مستقيم عُلِمت معادلةٌ له. فيما يأتي نجد تطبيقين لهذه الصيغة.

a. لتكن $3x+4y-12=0$ معادلة لمستقيم d. أوجد معادلةً للدائرة $\mathcal{C}$ التي مركزها $A(5,3)$ وتمس المستقيم d.

b. لتكن $x+\sqrt{3}y-2=0$ معادلة لمستقيم d. أَيمسّ المستقيم d الدائرة $\mathcal{C}$ التي مركزها O ونصف قطرها 1؟

الحل

1.بفرض

$$A'(x,y)$$
$$\overrightarrow{AA'} = (x-\alpha, y-\beta)$$
$$\vec{n}(a,b)$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{AA'} = \|\vec{n}\|\left\|\overrightarrow{AA'}\right\|\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{AA'}\right)$$

بما أن الشعاعين $\overrightarrow{AA'},\vec{n}$ مرتبطان خطياً

فإن

$\vec{n},\overrightarrow{AA'} = \pi$ و 0أ

$Cos\left(\vec{n},\overrightarrow{AA'}\right) = 1$ و $-$أ1

ومنه $\left\|\overrightarrow{AA'}\right\|\|\vec{n}\| \mp = \vec{n}.\ \overrightarrow{AA'}$ للتخلص من $\mp$ نأخذ القيمة المطلقة للطرفين

$$\left|\vec{n}.\ \overrightarrow{AA'}\right| = \|\vec{n}\|\left\|\overrightarrow{AA'}\right\|$$
$$\left|a(x-\alpha)+b(y-\beta)\right| = \sqrt{a^2+b^2}.\left\|\overrightarrow{AA'}\right\|$$
$$\left|ax-a\alpha+by-b\beta\right| = \sqrt{a^2+b^2}.\left\|\overrightarrow{AA'}\right\|$$

2. بما أن $A'(x,y)$ تنتمي إلى المستقيم فهي تحقق معادلته

$$ax+by+c=0$$
$$ax+by=-c$$
$$\left|-c-a\alpha-b\beta\right| = \sqrt{a^2+b^2}\left\|\overrightarrow{AA'}\right\|$$
$$AA' = \frac{\left|a\alpha+b\beta+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

3. $a.$

$$R = \frac{\left|3(5)+4(3)-12\right|}{\sqrt{9+16}}$$
$$R = \frac{15}{5} = 3$$
$$(x-5)^2+(y-3)^2 = 9$$

$b.$

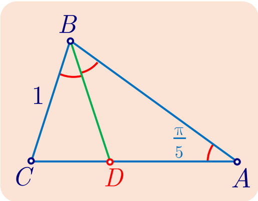
$$l = \frac{\left|1(0)+\sqrt{3}(0)-2\right|}{\sqrt{1+3}}$$
$$l = 1 = R$$

ومنه بعد مركز الدائرة عن المستقيم d يساوي R فالمستقيم d مماس للدائرة (c).

نشاط ٤ إنشاء مخمّس منتظم

هدف هذا النشاط هو إنشاء مخمس منتظم بالمسطرة والفرجار. نعلم أن قياس الزاوية المركزية المُقابلة لأحد أضلاع مخمس منتظم يساوي $\frac{2\pi}{5}$ ، فطبيعي إذن، أن يتطلب إنشاءُ هذا المخمس معرفةَ $\cos(\frac{2\pi}{5})$ و $\sin(\frac{2\pi}{5})$. هذا ما سنسعى إليه في الفقرة الأولى.

① تمهيد



ABC مثلث متساوي الساقين في A، فيه قياس الزاوية A يساوي $\frac{\pi}{5}$، و $BC = 1$، منصف الزاوية ABC يقطع القطعة $[AC]$ في D.

1. أثبت أنَّ المثلثين BAC و CBD متشابهان وأنَّ $BC^2 = AB \times CD$.
2. نضع $AB = x$. أثبت أنَّ $x(x-1) = 1$، واستنتج x.
3. *a*. أثبت أنَّ $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}$. مستفيداً من المسقط القائم H للنقطة A على (BC).
   b. احسب $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ بأسلوب آخر، واستنتج أنَّ $\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos\frac{2\pi}{5}$.
   c. باستعمال دساتير ضعفي زاوية، أثبت أنَّ $\frac{-\sqrt{5}-1}{4} = \cos\frac{4\pi}{5}$.

الحل

1. إنّ المثلثين CBD, BAC متشابهان لأن $\hat{BAD} = \hat{CBD} = \frac{\pi}{5}$ والزاوية $\hat{C}$ مشتركة

ومنه تشابه المثلثين نجد أن

$$\left.\begin{matrix} BAC \\ CBD \end{matrix}\right\} \frac{BA}{CB} = \frac{BC}{CD}$$

$$BC^2 = BA \,.\, CD$$

2. نلاحظ أن $CD = x - 1$ ووجدنا في الطلب السابق

$$BC^2 = AB \times CD$$

$$1 = x.(x-1)$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(1)(-1) = 5$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$$

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ مرفوض

3.a. $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC} =$

$$\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{BH} = 1\,.\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

حيث $\overrightarrow{BH}$ المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{BA}$ على BC

b. $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{BA}\right\|\,.\left\|\overrightarrow{BC}\right\| Cos\dfrac{2\pi}{5}$

$$\frac{1}{2} = x\,.\,1\ \ Cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\ \ Cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$Cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

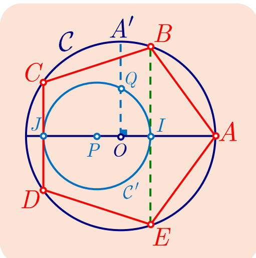
c.

$$Cos\left(4\frac{\pi}{5}\right) = 2Cos^2\frac{2\pi}{5} - 1$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 - 1 = 2\,\frac{6-2\sqrt{5}}{16} - 1 = \frac{6-2\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{3-\sqrt{5}}{4} - 1$$

$$Cos\left(4\frac{\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

② إنشاء مخمّس منتظم



$\mathcal{C}$ دائرة مركزها O ونصف قطرها R. $[OA]$ و $[OA']$ نصفا قطرين متعامدان في $\mathcal{C}$. النقطة P معينة بالعلاقة $4\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OA}$، والنقطة Q هي منتصف $[OA']$. $\mathcal{C}'$ هي الدائرة التي مركزها P والمارة بالنقطة Q. نرمز إلى نقطتي تقاطع الدائرة $\mathcal{C}'$ والمستقيم (OA) بالرمزين I و J. المماسان في I و J للدائرة $\mathcal{C}'$ يقطعان الدائرة $\mathcal{C}$ في أربع نقاط تؤلّف مع A رؤوس مخمس منتظم $ABCDE$.

1. لماذا يكفي لإثبات صحة الإنشاء، إثبات أنَّ $AOB = \dfrac{2\pi}{5}$ و $AOC = \dfrac{4\pi}{5}$؟

2.a. احسب PQ بدلالة R واستنتج أنَّ $OI = \dfrac{R}{4}(\sqrt{5}-1)$.

b. أثبت أنَّ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OI}$ ثمَّ احسب $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ بطريقة أخرى لتستنتج قيمة $\cos AOB$.

3.a. احسب $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ بطريقتين واستنتج حساب $\cos AOC$.

b. استنتج أنَّ $ABCDE$ مخمَّس منتظم.

الحل

1. نحن نعلم أن قياس الزاوية المركزية المقابلة لأحد أضلاع مخمس منتظم يساوي $\frac{2\pi}{5}$ فيجب علينا إثبات أن $\hat{AOB} = \frac{2\pi}{5}$ ، ونحن نعلم أن $BC = AB$ وعلينا إثبات أن $\hat{AOC} = \frac{4\pi}{5}$

2. a. لدينا فرضاً من خلال الإنشاء $4\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OA}$ ومنه $OP = \frac{1}{4}R$ وبما أن Q منتصف $[A'O]$

فإن

$$OQ = \frac{1}{2}OA'$$
$$OQ = \frac{1}{2}OA'$$
$$OQ = \frac{1}{2}R$$

حسب فيثاغورس في المثلث OPQ

$$PQ^2 = PO^2 + OQ^2$$
$$PQ^2 = \frac{R^2}{16} + \frac{R^2}{4} = \frac{5R^2}{16}$$
$$PQ = \frac{\sqrt{5}R}{4}$$
$$PQ = PI = \frac{\sqrt{5}R}{4}$$
$$OI = PI - PO$$
$$OI = \frac{\sqrt{5}R}{4} - \frac{1}{4}R$$
$$OI = \frac{R}{4}(\sqrt{5} - 1)$$

b. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OI}$

لأن $\overrightarrow{OI}$ المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{OB}$ على OA

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{OI}\right\|$$
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = R.\frac{R}{4}(\sqrt{5} - 1)$$
$$\left\|\overrightarrow{OA}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{OB}\right\| Cos(\hat{AOB}) = \frac{1}{4}R^2(\sqrt{5} - 1)$$
$$R.RCos(\hat{AOB}) = \frac{1}{4}R^2(\sqrt{5} - 1)$$
$$Cos(\hat{AOB}) = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{4}$$

ومنه $\hat{AOB} = \frac{2\pi}{5}$

3. a.

$$\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}\,.\overrightarrow{OJ}$$

$$\left\|\overrightarrow{OA}\right\|.\left\|\overrightarrow{OC}\right\|Cos(A\hat{O}C) = -\left\|\overrightarrow{OA}\right\|.\left\|\overrightarrow{OJ}\right\|$$

$$R^2Cos(A\hat{O}C) = -R\left(\frac{\sqrt{5}R}{4} + \frac{R}{4}\right)$$

$$R^2Cos(A\hat{O}C) = -R^2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$$

$$Cos(A\hat{O}C) = -\frac{-\sqrt{5}-1}{4}$$

ومنه $A\hat{O}C = \frac{4\pi}{5}$

.b $A\hat{O}B = \frac{2\pi}{5}$, $A\hat{O}C = \frac{4\pi}{5}$

ولما كانت E نظيرة B بالنسبة إلى OA

D نظيرة C بالنسبة إلى OA

فإن $A\hat{O}E = \frac{2\pi}{5}$ و $A\hat{O}D = \frac{4\pi}{5}$ فالشكل $ABCDE$ مخمس منتظم.

نشاط ٥ جماعة مستقيمات ومحلٌّ هندسي

① جماعات من المستقيمات

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، نقرنُ، بكل عدد حقيقي m، مستقيماً D_m معادلته

$$(m-1)x + my - m - 2 = 0$$

فمثلاً، عند $m = 2$، نحصل على المستقيم D_2 الذي معادلته $x + 2y - 4 = 0$. نقول إنَّ المستقيمات D_m هي **جماعة مستقيمات تتبع الوسيط m**.

.1 علّل كون الشعاع $\vec{u}_m(m-1, m)$ شعاعاً ناظماً على المستقيم D_m؟

.a.2 ارسم D_0 و D_1 و D_2 في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. ماذا تقول بشأن المستقيمات D_m؟

.b أثبت أنَّ جميع المستقيمات D_m تمرُّ بنقطة ثابتة A.

.3 نقرن، بكل عدد حقيقي m، مستقيماً Δ_m معادلته

$$mx + (1-m)y - m = 0$$

.a علّل كون الشعاع $\vec{v}_m(m, 1-m)$ شعاعاً ناظماً على المستقيم Δ_m؟

b. على الرسم السابق، ارسم Δ_0 و Δ_1 و Δ_2. ماذا تقول بشأن المستقيمات Δ_m؟

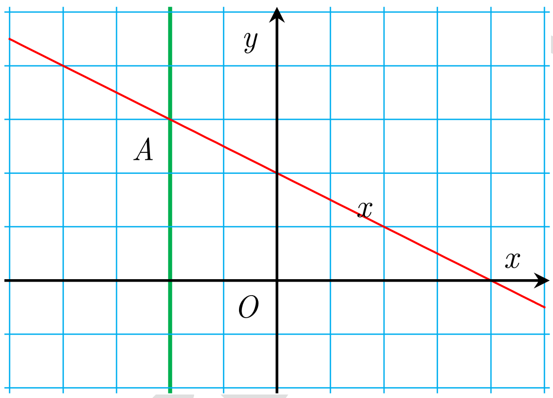
c. أثبت أنَّ جميع المستقيمات Δ_m تمرُّ بنقطة ثابتة B.

الحل

1. حسب مبرهنة (5)

في معلم متجانس ، إذا كانت $ax+by+c=0$ حيث $(a,b)\neq(0,0)$ معادلة مستقيم d كان الشعاع $\vec{n}(a,b)$ شعاعاً ناظماً على d ومنه المستقيم D_m الذي معادلته .

$(m-1)x+my-m-2=0$ يقبل الشعاع $\vec{u}_m(m-1,m)$ شعاعاً ناظماً عليه.



2. a. $D_0 : x=-2, D_1 : y=3, D_2 : x+2y-4=0$

يمكن أن نقول بأن المستقيمات D_m تتقاطع في نقطة ثابتة A

b. نلاحظ أن D_0 , D_1 , D_2 تتقاطع في نقطة ثابتة $A(-2,3)$ لنعوض هذه النقطة في D_m

$$(m-1)(-2)+m(3)-m-2=0$$

$$-2m+2+3m-m-2=0$$

ومنه $A(-2,3)\in D_m$ فجميع المستقيمات D_m تمر بنقطة ثابتة A

3. $\Delta_m : mx+(1-m)y-m=0$

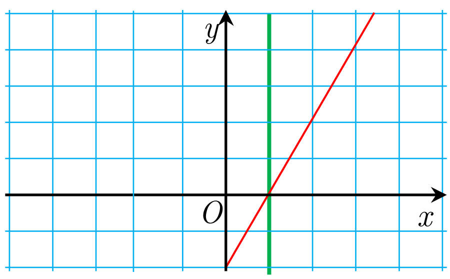
a. حسب مبرهنة 5 نجد أن $\overrightarrow{v_m}(m,1-m)$ شعاعاً ناظماً على Δ_m

b. $\Delta_m : mx+(1-m)y-m=0$

$\Delta_0 : y=0$

$\Delta_1 : x=1$

$\Delta_2 : 2x-y-2=0$



يمكن أن نقول بأن المستقيمات Δ_m تتقاطع في نقطة ثابتة $B(1,0)$

لنعوض النقطة $B(1,0)$ في معادلة Δ_m

$m-(1)+(1-m)(0)-m=m-m=0$ ومنه $B(1,0)$ تنتمي إلى Δ_m

فجميع المستقيمات Δ_m تمر بنقطة ثابتة B .

② **المحل الهندسي للنقاط M، نقاط تقاطع Δ_m و D_m.**

1. أثبت أنه، عند قيمة معطاة للوسيط m، يكون Δ_m و D_m متعامدين.
2. لتكن M نقطة تقاطع المستقيمين Δ_m و D_m. بيّن أنّ $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.
3. أثبت أنّ M تنتمي إلى الدائرة $\mathcal{C}$ التي قطرها $[AB]$. وأعطِ معادلةً للدائرة $\mathcal{C}$.

لقد أثبتنا أنّ المحلّ الهندسي للنقاط M محتوى في الدائرة $\mathcal{C}$، ولكننا لم نثبت أنّه كامل الدائرة $\mathcal{C}$، لأنّ ذلك يتطلب أن نبرهن أنّ كلَّ نقطة M من $\mathcal{C}$ هي نقطة تقاطع مستقيمين Δ_m و D_m عند قيمة للعدد الحقيقي m. في الحقيقة، يمكننا أن نثبت أنّ المحل الهندسي للنقاط M هي الدائرة $\mathcal{C}$ محذوفاً منها النقطة B.

الحل

1. $\vec{u}_m(m-1,m),\vec{v}_m(m-1,m)$

$$\vec{u}_m\cdot\vec{v}_m=(m-1)m+m(1-m)$$
$$=m^2-m+m-m^2=0$$

ومنه $\vec{v}_m\perp\vec{u}_m$ و منه D_m,Δ_m متعامدان عند قيمة معطاة للوسيط m.

2.
$$\begin{cases}M\in D_m\cap\Delta_m\\ A\in D_m\\ \Delta_m\perp D_m\end{cases}\Leftarrow ①\ldots\ldots AM\perp\Delta_m$$

$$\begin{cases}M\in D_m\cap\Delta_m\\ B\in \Delta_m\\ \Delta_m\perp D_m\end{cases}\Leftarrow ②\ldots\ldots BM\perp\Delta_m$$

$$③\ldots\ldots\Delta_m\perp D_m$$

من ①▲②▲③ نجد أن $AM\perp BM$ ومنه $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

3. بما أن $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ فإن حسب المبرهنة (8)

M تنتمي إلى دائرة قطرها $[AB]$

$$\begin{cases}A(-2,3)\\ B(1,0)\end{cases}$$

$$I\left(\frac{-2+1}{2},\frac{3+0}{2}\right)$$

مركز الدائرة $I(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

$$AB=\sqrt{(-2-1)^2+(3-0)^2}=\sqrt{18}$$

$$R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{18}}{2}$$

فمعادلة الدائرة هي : $C:\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$

لقد أثبتنا أنّ المحل الهندسي للنقاط M محتوى في الدائرة C ولكننا لم نثبت أنه كامل الدائرة C

وهذا يتطلب منا أن نبرهن أنه كل نقطة M من C هي نقطة تقاطع مستقيمين D_m , Δ_m

عند قيمة للعدد الحقيقي m.

إنّ جماعة المستقيمات D_m:

$(m-1)x+my-m-2=0$ تمر بنقطة ثابتة هي $A(-2,3)$

والسؤال الآن هل يوجد مستقيم يمر بالنقطة A ولا ينتمي إلى D_m؟

$$(m-1)x+my-m-2=0$$
$$m(x+y-1)=x+2$$

ومنه المستقيم $x+y-1=0$ يمر بالنقطة A ولكن لا ينتمي إلى D_m لأنه لا يوجد قيمة لـ m

تُنتج المستقيم $x+y-1=0$ ....L_1

وكذلك الأمر : إن جماعة المستقيمات Δ_m :

$mx+(1-m)y-m=0$ تمر بنقطة ثابتة هي $B(1,0)$

السؤال الآن : هل يوجد مستقيم يمر بالنقطة B ولا ينتمي إلى Δ_m ؟

$$mx+y-my-m=0$$
$$m(x-y-1)=-y$$

ومنه المستقيم $x-y-1=0$ يمر بالنقطة B ولكن لا ينتمي إلى Δ_m لأنه لا يوجد قيمة لـ m

تُنتج المستقيم $x-y-1=0$ ....L_2

بالحل المشترك لـ (1) و(2) نجد أنّ

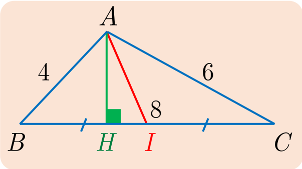
$$x+y-1=0$$
$$\underline{x-y-1=0}$$
$$2x-2=0$$

ومنه $x=1$ ومنه $y=0$

نلاحظ أن نقطة تقاطع هذين المستقيمين هو $B(1,0)$ ومنه المحل الهندسي للنقاط M هي الدائرة Cمحذوفاً منها النقطة $B(1,0)$ نقطة تقاطع المستقيمين L_2, L_1 المحذوفين من جماعتي المستقيمين Δ_m, D_m على الترتيب .

تمرينات ومسائل

١ ABC مثلث، I منتصف $[BC]$ و H هي المسقط القائم للنقطة A على $[BC]$. نفترض أنَّ $AB = 4$ و $AC = 6$ و $BC = 8$.



1. أيةُ مبرهنة تفيد في حساب AI؟ أنجزْ هذا الحساب.
2. أيةُ مبرهنة تفيد في حساب $\cos BAC$؟ أنجزْ هذا الحساب واستنتج $\sin BAC$.
3. احسب مساحة المثلث ABC واستنتج أنَّ $AH = \frac{3}{4}\sqrt{15}$.

الحل

1. مبرهنة (2) تفيد في حساب المتوسط

$$AI^2 = M_a{}^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$
$$AI^2 = \frac{36 + 16}{2} - \frac{64}{4}$$
$$AI^2 = 26 - 16 = 10$$
$$AI = \sqrt{10}$$

2. مبرهنة (1) (علاقة الكاشي) تفيد في حساب $Cos\,B\hat{A}C$

$$Cos\,A = \frac{b^2 + c^2 + a^2}{2bc}$$
$$Cos\,A = \frac{36 + 16 - 64}{2(6)(4)}$$
$$Cos\,A = \frac{-12}{2(6)(4)} = -\frac{1}{4}$$
$$Sin^2 A = 1 - Cos^2 A = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$
$$\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

ما يلائم المثلث $A \in \left]0, \pi\right[$

3.
$$S=\frac{1}{2}.b.c\ SinA$$
$$S=\frac{1}{2}(6)(4).\frac{\sqrt{15}}{4}$$
$$S=3\sqrt{15}$$
$$S=\frac{1}{2}BC.\ AH$$
$$3\sqrt{15}=\frac{1}{2}(8).\ AH$$
$$AH=\frac{3\sqrt{15}}{4}$$

٢ أطوال أضلاع المثلث ABC هي $AB=8$ و $AC=3$ و $BC=7$.

1. احسب $\cos BAC$ واستنتج $\sin BAC$.
2. احسب مساحة المثلث ABC.

الحل

بنفس الأسلوب

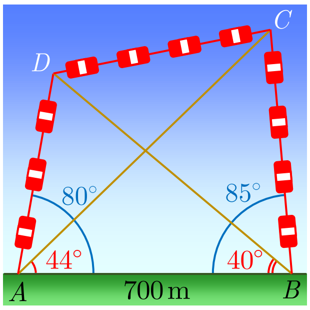
٣ $ABCD$ متوازي أضلاع فيه $AB=7$ و $AC=8$ و $AD=3$.

1. أثبت $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=3$. ثم احسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ بطريقة ثانية واستنتج قيم $\sin BAD, \cos BAD$.
2. احسب مساحة المثلث ABD واستنتج مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$.

الحل

1.
$$\overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(AC^2-AB^2-AD^2)$$
$$=\frac{1}{2}(64-49-9)=\frac{1}{2}(6)=3$$
$$\overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{AD}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{AD}\right\|.Cos\left(B\hat{A}D\right)$$
$$3=(7).(3)\ Cos\left(B\hat{A}D\right)$$
$$Cos\,B\hat{A}D=\frac{1}{7}$$
$$Sin^2\,(B\hat{A}D)=1-\frac{1}{49}=\frac{48}{49}$$
$$Sin\,(B\hat{A}D)=\frac{4\sqrt{3}}{7}\quad : A\in]0\ ,\ \pi[$$

$$S(ABD) = \frac{1}{2} AB \,.\, AD Sin(\widehat{BAD})$$
$$= \frac{1}{2}(7)(3)\frac{4\sqrt{3}}{7} = 6\sqrt{3}$$ .2
$$S(ABCD) = 2S(ABD) = 12\sqrt{3}$$



٤ صُمِّم حوضٌ لتربية الأسماك على شاطئ بحيرة بشكل رباعي $ABCD$، على أن تكون المسافة المشغولة من الشاطئ $AB = 700\,\text{m}$، كما في الشكل المجاور. ويمثّل المقدار $AD + DC + CB = \ell$ طول الشبكة اللازمة للإحاطة بالحوض داخل البحيرة.

1. احسب ADB واستنتج AD و DB.
2. بأسلوب مماثل، وباستعمال المثلث ABC، احسب BC.
3. استعمل مبرهنة الكاشي لحساب CD، ثمَّ استنتج طول الشبكة ℓ.
4. احسب مساحة الحوض بالمتر المربع.

الحل

.1

$$\widehat{ADB} = 180^\circ - \quad 80^\circ + 40^\circ \quad = 60^\circ$$
$$\frac{AD}{\sin 48^\circ} = \frac{700}{\sin 60^\circ}$$
$$AD = \frac{700 \,.\, \sin 40^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$AD = \frac{1400 \,.\, \sin 40^\circ}{\sqrt{3}} \approx 519{,}5$$
$$\frac{BC}{\sin 44^\circ} = \frac{700}{\sin 51^\circ}$$
$$BC = \frac{700 \,.\, \sin 44^\circ}{\sin 51^\circ} \approx 625.7$$
$$AD = \frac{1400 \,.\, \sin 40^\circ}{\sqrt{3}} \approx 519{,}5$$

نحسب AC أولاً في المثلث ABC

$$\frac{AC}{\sin 85^\circ} = \frac{BC}{\sin 44^\circ}$$
$$AC = \frac{(672.7) \,.\, \sin 85}{\sin 44} \approx 969$$

3.
$$DC^2 = AD^2 + AC^2 - 2AD.AC\ Cos36^\circ$$
$$DC^2 = (519.5)^2 + (969)^2 - 2(519.5)(969)Cos\ 3$$
$$DC^2 = 394330.2$$
$$DC \approx 628$$
$$\ell = 519.5 + 628 + 625.7$$
$$\ell = 1773.2$$

4. مساحة الحوض $= S(ADC) + S(ABC)$
$$= \frac{1}{2}AD.AC\ .Sin36^\circ + \frac{1}{2}AC.BA\,Sin44^\circ$$
$$= \frac{1}{2}AC(ADSin36^\circ + BA\,Sin44^\circ)$$
$$= \frac{1}{2}969((519.5)Sin36^\circ + 700\,Sin44^\circ)$$
$$= 383537.6$$

٥ احسب $\cos 2x$، في كلٍّ من الحالات الآتية:

❶ $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ❷ $\cos x = \frac{3}{5}$ ❸ $\sin x = -\frac{1}{3}$.

الحل

❶ $Cos\,2x = 2Cos^2 x - 1$
$$Cos\,2x = 2\left(\frac{3}{4}\right) - 1 = \frac{1}{2}$$

❸ $Cos\,2x = 1 - 2Sin^2 x = \frac{1}{2}$
$$= 1 - 2\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{7}{9}$$

٦ تحقّق من صحة كلٍّ مما يأتي :

❶ $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - \sin 2x$ ❷ $\cos x + \cos(\frac{2\pi}{3} + x) + \cos(\frac{4\pi}{3} + x) = 0$

❸ $\sin(\frac{\pi}{3} + x) - \sin(\frac{\pi}{3} - x) = \sin x$ ❹ $1 + 2\cos x + \cos 2x = 2\cos x(1 + \cos x)$

الحل

❶ $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - \sin 2x$
$$\ell_1 = (\cos x - \sin x)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x\cos x$$
$$= 1 - \sin 2x = \ell_1$$

$$\cos x + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} + x\right) = 0$$ ❷

$$\ell_1 = \cos x + \cos\frac{2\pi}{3}\cos x - \sin\frac{2\pi}{3}.\sin x + \cos\frac{4\pi}{3}\cos x - \sin\frac{4\pi}{3}.\sin x$$

$$\ell_1 = \cos x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}.\ \sin x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}.\sin x = 0 = \ell_2$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin x$$ ❸

$$\ell_1 = \sin\frac{\pi}{3} + \cos x + \cos\frac{\pi}{3}\sin x - \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \sin x = \ell_2$$

$$1 + 2\cos x + \cos 2x = 2\cos x(1 + \cos x)$$ ❹

$$\ell_1 = 1 + 2\cos x + \cos 2x = 1 + 2\cos x + 2\cos^2 x - 1$$

$$= 2\cos^2 x - 2\cos x$$

$$= 2\cos x(\cos x + 1) = \ell_2$$

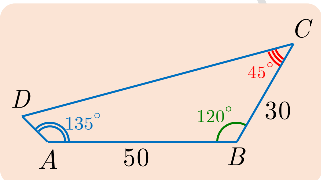
لنتعلّم البحث معاً

٧ حساب مساحة شكل رباعي و محيطه

$ABCD$ رباعي محدّب فيه $AB = 50\,\text{m}$ و $BC = 30\,\text{m}$ و $ABC = 120°$ و $BCD = 45°$ وأخيراً $BAD = 135°$. احسب محيط ومساحة الرباعي $ABCD$.

الحل

مجموعة زوايا رباعي محدب = 360°



.1 $\hat{CDA} = 360° - (135° + 120° + 45°) = 60°$

$$AC^2 = 900 + 2500 - 2(30)(50)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$AC^2 = 4900$$

ومنه $CA = 70m$

2. في المثلث $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{\sin \widehat{BCA}}{50} = \frac{\sin 120}{70}$$
$$\sin \widehat{BCA} = \frac{5}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$
$$\frac{\sin \widehat{BAC}}{30} = \frac{\sin 120}{70}$$
$$\sin \widehat{BAC} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

3. $\sin \widehat{BCA} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$ ومنه $\widehat{BCA} \approx 38°$ و $\sin(\widehat{BAC}) = \frac{3\sqrt{3}}{14}$ ومنه $\widehat{BAC} \approx 22°$

وجدنا في بداية الحل $\widehat{ADC} = 60°$

4. $\widehat{BAC} = 22°$ ومنه $\widehat{DAC} = 135° - 22° = 113°$

$\widehat{BAC} = 38°$ ومنه $\widehat{DCA} = 45° - 38° = 7°$

$\frac{AC}{\sin 60} = \frac{DC}{\sin(\widehat{DAC})}$ أي $\frac{70}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{DC}{0.92}$ ومنه $DC = \frac{(140)(0.92)}{\sqrt{3}}$ ومنه $DC \approx 76$

$\frac{70}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{DA}{\sin 7°}$ ومنه $DA \approx 10$

محيط الشكل$= 10 + 76 + 30 + 50 = 166m$

مساحة الشكل$= S(ABC) + S(ADC)$

$$= \frac{1}{2}(30)(50)\sin 120 + \frac{1}{2}(10)(76)\sin 60$$
$$= 750\frac{\sqrt{3}}{2} + 380\frac{\sqrt{3}}{2} = 375\sqrt{3} + 190\sqrt{3} = 565\sqrt{3}$$

٨ معادلة الدائرة المارة بثلاث نقاط

نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ النقاط $A(4,1)$ و $B(0,6)$ و $C(-2,1)$. اكتب معادلة $\mathcal{C}$ المارّة برؤوس المثلّث ABC.

الحل

1. لإنشاء الدائرة C يكفي تعيين مركزها I لأنّها تمر بالنقاط C,B,A ويكون مركز الدائرة I هو نقطة تقاطع محوري ضلعين من المثلث (ABC) بفرض M منتصف $[ADC]$ فتكون $M(1,1)$ ومعادلته محور القطعة المستقيمة $[AC]$ هو $x=1$ ومنه $x_I=1$ بفرض J منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ فتكون $J\left(2,\frac{7}{2}\right)$ ولدينا $I(1,\,y)$

2.

$$\overrightarrow{IJ}\,.\,\overrightarrow{AB}=0$$
$$\overrightarrow{IJ}\left(1,\frac{7}{2}-y\right)$$
$$\overrightarrow{AB}(-4,5)$$
$$-4+5\left(\frac{7}{2}-y\right)=0$$
$$-4+\frac{35}{2}-5y=0$$
$$5y=\frac{27}{2}$$
$$y=\frac{27}{10}$$

3. $I\left(1\,,\frac{27}{10}\right)$

$$R=IA=\sqrt{(4-1)^2+\left(1-\frac{27}{10}\right)^2}$$
$$R=\sqrt{\left(9+\frac{289}{100}\right)}=\sqrt{\frac{1189}{100}}$$

فمعادلة الدائرة : $(x-1)^2+\left(y-\frac{27}{10}\right)^2=\frac{1189}{100}$

٩ جماعة دوائر

نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ النقطتين $A(3,2)$ و $B(-1,4)$ ونرمز بالرمز $\mathcal{E}$ إلى مجموعة الدوائر التي تمرّ بالنقطتين A و B. اكتب معادلة دائرة ما $\mathcal{C}$ من $\mathcal{E}$.

الحل

جماعة دوائر:

1. بفرض I منتصف $[AB]$ فتكون $I(1,3)$

بفرض $M(x,y)$ مركز الدائرة المارة بالنقطتين A,B ومنه M تقع على محور القطعة المستقيمة AB وتحقق $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AB}=0$ حيث

$\overrightarrow{AB}(-4,+2)$
$\overrightarrow{MI}(1-x,3-y)$
$-4(1-x)+2(3-y)=0$
$-4+4x+6-2y=0$
$2x-y+1=0$
$\Delta y=2x+1$

2. بفرض فاصلة مركز الدائرة $x_M=m$ فيكون $y_M=2m+1$

ومنه مركز الدائرة من الشكل $M(m,2m+1)$

ويكون نصف قطرها $R=AM$

$R^2=AM^2=(m-3)^2+(2m+1-2)^2$
$R^2=(m-3)^2+(2m-1)^2$
$R^2=m^2-6m+9+4m^2-4m+1$
$R^2=5m^2-10m+10$

فمعادلة الدائرة المطلوبة هي :

$(x-m)^2+(y-2m-1)^2=5m^2-10m+10$
$x^2-2mx+m^2+y^2-2(2m+1)y+(2m+1)^2=5m^2-10m-10$
$x^2+y^2-2mx-2(2m+1)y+m^2+4m^2+4m+1=5m^2-10m-10$
$x^2+y^2-2mx-2(2m+1)y+14m-9=0$

3. في حالة $m=1$ يكون $M(1,3)$

$M=I$
$R=AM=AI$

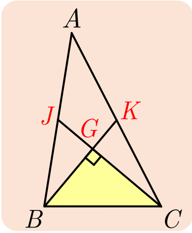
فالدائرة C_1 الموافقة لحالة $M=I$ هي الدائرة التي قطرها $[AB]$.

١٠ خاصّة مميّزة لمثلّث

ميِّز المثلّثات التي فيها متوسطان متعامدان بعلاقة تربط بين أطوال أضلاعها.

الحل

خاصة مميزة لمثلث :



$$BK^2 = \frac{BC^2 + BA^2}{2} - \frac{AC^2}{4}$$
$$CJ^2 = \frac{BC^2 + AC^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$$
$$CG = \frac{2}{3}CJ$$
$$CG^2 = \frac{4}{9}CJ^2$$
$$CG^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{BC^2 + AC^2}{2} - \frac{AB^2}{4}\right)$$
$$BG = \frac{2}{3}BK$$
$$BG^2 = \frac{4}{9}BK^2$$
$$BG^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{BC^2 + BA^2}{2} - \frac{AC^2}{4}\right)$$

حسب فيثاغورس في المثلث $\overset{\Delta}{BGC}$ يكون

$$BG^2 + CG^2 = BC^2$$
$$\frac{4}{9}\left(\frac{BC^2 + AC^2 + BC^2 + BA^2}{2} - \frac{AB^2 + AC^2}{4}\right) = BC^2$$
$$\frac{4}{9}\left(\frac{4BC^2 + AC^2 + BA^2}{4}\right) = BC^2$$
$$4BC^2 + AC^2 + BA^2 = 9BC^2$$
$$AC^2 + BA^2 = 5BC^2$$

لقد أثبتنا إذا كان المتوسطان $(CJ),(BK)$ في المثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ متعامدان كان

$$AB^2 + AC^2 = 5BC^2$$

ولكن هل العكس صحيح أي إذا تحققت العلاقة $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$ كان المتوسطان $(CJ),(BK)$ متعامدين

ليكن I منتصف $[BC]$ عندئذ

.1 $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} = (\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IC})$

$$= (\overrightarrow{GI} - \overrightarrow{IC}).(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IC})$$
$$= GI^2 - IC^2$$
$$= \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)^2$$
$$= \frac{1}{9}\overrightarrow{AI}^2 - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2$$

$$= \frac{4}{36}AI^2 - \frac{9}{36}BC^2$$
$$= \frac{1}{36}(4AI^2 - 9BC^2)$$

.2
$$AI^2 = \frac{AC^2 - AB^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$$
$$4AI^2 = 2AC^2 - 2AB^2 - BC^2$$

.3 الفرض : $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$

الطلب : $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} = 0$

الإثبات : وجدنا أن :

$$\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} = \frac{1}{36}(4AI^2 - 9BC^2)$$
$$\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} = \frac{1}{36}(\underbrace{2AC^2 + 2AB^2} - BC^2 - 9BC^2)$$
$$= \frac{1}{36}(10BC^2 - 10BC^2) = 0$$

ومنه $GC \perp GB$

١١ تعيين مجموعة نقاط تحليلياً

نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ النقطتين $A(-3,-1)$ و $B(5,3)$. عيّن $\mathcal{E}$ مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي يكون عندها الشعاعان $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$ متعامدين.

الحل

.1 بفرض $M(x,y)$

$$\overrightarrow{MA} = (-3-x, -1-y)$$
$$2\overrightarrow{MA} = (-6-2x, -2-2y)$$
$$\overrightarrow{MB} = (5-x, 3-y)$$
$$2\overrightarrow{MB} = (10-2x.6-2y)$$
$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = (7-3x, 5-3y)$$
$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (-1-3x, 1-3y)$$

يتعامد الشعاعان $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$, $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ إذا كان جداؤهما السلمي معدوم أي

$$(7-3x)(-1-3x)+(5-3y)(1-3y)=0$$
$$-7-21x+3x+9x^2+5-15y-3y+9y^2=0$$
$$9x^2+9y^2-18x-18y-2=0 \qquad \div 9$$
$$x^2+y^2-2x-2y-\frac{2}{9}=0$$
$$x^2-2x+1+y^2-2y+1=\frac{2}{9}+1+1$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2=\frac{20}{9}$$

ومنه ε هي مجموعة نقاط دائرة مركزها $I(1,1)$ ونصف قطرها $R=\frac{2\sqrt{5}}{3}$

طريقة 2: بفرض I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,2),(B,1)$ومنه $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

وبالتالي $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MI}$ وبفرض J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1),(B,2)$

ومنه $\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}=\vec{0}$ وبالتالي $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MJ}$

$$(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB})=0$$

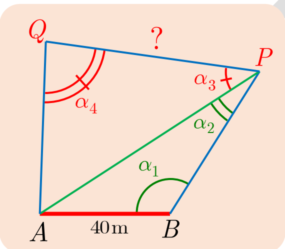
هذا يكافئ

$$3\,\overrightarrow{MI}\;.\;3\overrightarrow{MJ}=0$$
$$\overrightarrow{MI}\;.\;\overrightarrow{MJ}=0$$

ومنه M تقع على دائرة قطرها $[IJ]$

قُدُماً إلى الأمام

١٢ مثال على التثليث



نفترض أننا نعرف بدقة المسافة بين نقطتين A و B في موقع مرتفع وأنّ هذه المسافة تساوي $40\,\text{m}$، ونريد الاستفادة من ذلك في حساب المسافة بين نقطتين P و Q. لتحقيق ذلك نتبع الأسلوب المعروف باسم التثليث، فنقيس الزوايا:

$\alpha_1=ABP$ و $\alpha_2=APB$ و $\alpha_3=APQ$ و $\alpha_4=AQP$.

1. a. أثبت أنّ $AP=\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}AB$ وأنّ $PQ=\frac{\sin(\alpha_3+\alpha_4)}{\sin\alpha_4}AP$.

b. استنتج أنَّ $PQ=\frac{\sin\alpha_1\sin(\alpha_3+\alpha_4)}{\sin\alpha_2\sin\alpha_4}AB$.

2. تطبيق. احسب PQ لأقرب متر في الحالة التي يكون فيها:

$\alpha_4 = 105^\circ$ و $\alpha_3 = 60^\circ$ و $\alpha_2 = 4^\circ$ و $\alpha_1 = 120^\circ$

الحل

1. a. في المثلث $\overset{\triangle}{ABP}$

$$\frac{AB}{\sin\alpha_2} = \frac{AP}{\sin\alpha_1}$$
$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{AP}{AB}$$

في المثلث $\overset{\triangle}{APQ}$:

$$\frac{AP}{\sin\alpha_4} = \frac{PQ}{\sin(\overset{\wedge}{QAP})}$$
$$\overset{\wedge}{QAP} = \pi - (\alpha_3 + \alpha_4)$$
$$\sin(\overset{\wedge}{QAP}) = \sin(\pi - (\alpha_3 + \alpha_4))$$
$$= \sin(\alpha_3 + \alpha_4)$$
$$\frac{AP}{\sin\alpha_4} = \frac{PQ}{(\alpha_3 + \alpha_4)}$$
$$PQ = \frac{\sin(\alpha_3 + \alpha_4)}{\sin\alpha_4}.AP$$

b. لدينا $AP = \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_4}.\ AB$ نعوض

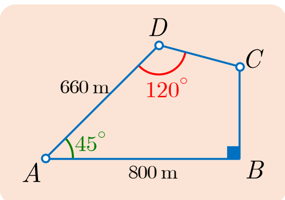
$$PQ = \frac{\sin(\alpha_3 + \alpha_4)}{\sin\alpha_4}\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}AB$$
$$PQ = \frac{\sin\alpha_1 \sin(\alpha_3 + \alpha_4)}{\sin\alpha_2.\ \sin\alpha_4}\ .\ AB$$

2. تطبيق.

$$PQ = \frac{\sin 120^\circ . \sin 165^\circ}{\sin 4^\circ . \sin 105^\circ}.40$$
$$PQ \approx 9.3\ m$$

١٣ يمثِّل الشكل $ABCD$ المرسوم جانباً، حقلاً.

1. احسب طول محيط هذا الحقل.
2. احسب مساحة سطحه.



الحل

1. نلاحظ أن $ABCD$ شكل رباعي محدب مجموع زوايا 360° ومنه $\hat{C} = 150^\circ$ في المثلث $\overset{\triangle}{ABD}$

نحسب BD حسب علاقة الكاشي

$$BD^2 = (660)^2 + (800)^2 - 2(660)(800)\cos 45^\circ$$
$$BD^2 = 435600 + 640000 - 746704.761$$
$$BD^2 \approx 573.5$$

لنحسب $\widehat{DBA}$:

$$\frac{660}{\sin DBA} = \frac{573.5}{\sin 45}$$
$$\sin \widehat{DBA} = \frac{660 \sin 45^\circ}{573.5}$$
$$\sin \widehat{DBA} = 0.813758$$
$$\widehat{DBA} \approx 54^\circ$$
$$\widehat{BDA} = 180^\circ - (45^\circ + 54^\circ) = 81^\circ$$
$$\widehat{CBD} = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$$
$$\widehat{BDC} = 39^\circ$$

في المثلث $\overset{\triangle}{BCD}$:

$$\frac{573.5}{\sin 105} = \frac{DC}{\sin 36} = \frac{CB}{\sin 39}$$
$$DC \simeq 349$$
$$CB \simeq 373.7$$

محيط الشكل$= 800 + 660 + 349 + 373.7 = 2182.7$

2. مساحة الشكل$= S(ABD) + S(BCD)$

$$= \frac{1}{2}(800)(600).\sin 45^\circ + \frac{1}{2}(349).(373.7).\sin(105)$$
$$= 186.7 + 63 \approx 231.7$$

١٤ ABC مثلثٌ، فيه $AB = 13$ ، $AC = 14$ ، $BC = 15$. و H هي المسقط القائم للنقطة B على (AC).

1. أثبت أنَّ $\sin B = \dfrac{56}{65}$.
2. استنتج مساحة المثلث ABC ، وكذلك الأطوال BH و AH و HC .

الحل

.1

$$\cos B = \frac{(15)^2 + (13)^2 - (14)^2}{2(15)(13)}$$

$$\cos B = \frac{225 + 169 - 196}{390}$$

$$\cos B = \frac{198}{390} = \frac{33}{65}$$

$$\sin^2 B = 1 - \cos^2 B$$

$$= 1 - \frac{1089}{4225}$$

$$\sin^2 B = \frac{3136}{4225}$$

$$\sin B = \frac{56}{65} : B \in \left]0, \pi\right[$$

.2 $S(ABC) = \frac{1}{2}\ 15\quad 13\ .\frac{56}{65} = 84$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AC.BH$$

$$84 = \frac{1}{2}(14)BH$$

$$BH = \frac{84}{7} = 12$$

حسب فيثاغورس في المثلث $\overset{\triangle}{AHB}$ القائم في H

$$AH^2 = (13)^2 - (12)^2 = 25$$

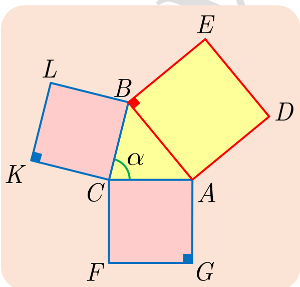
$$AH = 5$$

ومنه $HC = 14 - 5 = 9$

١٥ في حالة الشكل المرسوم جانباً، نكتب α دلالة على قياس الزاوية BCA. و S_1 دلالة على مجموع مساحتي المربعين $ACFG$ و $BCKL$، و S_2 مجموع مساحتي المربع $ABDE$ والمثلث ABC.

أثبت تكافؤ القضيتين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$ الآتيتين:

$(\mathcal{P}) : S_1 = S_2$ و $(\mathcal{Q}) : \tan\alpha = 4$.



الحل

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 + \frac{1}{2}AC.BC\sin\alpha$$
$$\frac{1}{2}AC.BC.\sin\alpha = AC^2 + AB^2 - AB^2$$
$$\frac{1}{2}AC.BC.\sin\alpha = 2AC.BC\cos\alpha$$
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 4$$
$$\tan\alpha = 4$$

١٦ نتأمّل النقطتين $A(8,0)$ و $B(0,6)$، و I منتصف $[AB]$، و H المسقط القائم للنقطة O على $[AB]$

1. أعطِ معادلةً للمستقيم (AB) ومعادلة للمستقيم (OH)، ثمَّ استنتج إحداثيتي النقطة H.
2. ليكن E المسقط القائم للنقطة H على محور الفواصل، وليكن F المسقط القائم للنقطة H على محور التراتيب. أثبت أنَّ المستقيمين (OI) و (EF) متعامدان.

الحل

.1

$$m_{AB} = \frac{6-0}{0-8} = \frac{6}{-8} = \frac{-3}{4}$$
$$(y-0) = \frac{-3}{4}(x-8)$$
$$(AB) : y = \frac{-3}{4}x + 6$$
$$m_{OH} = \frac{-1}{m_{AB}} = +\frac{4}{3}$$
$$(OH) : y = \frac{3}{4}x$$

بالحل المشترك لمعادلتي المستقيمين OH, AB نجد

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{4}{3}\right)x - 6 = 0$$
$$\frac{25}{12}x = 6$$
$$x = \frac{72}{25}$$
$$y = +\frac{4}{3}\left(\frac{72}{25}\right)$$
$$y = +\frac{96}{25}$$
$$H\left(\frac{72}{25}, \frac{96}{25}\right)$$

.2

$$E\left(\frac{72}{25},0\right)$$
$$F\left(0,\frac{96}{25}\right)$$
$$\overrightarrow{OI} = \ 4,3$$
$$\overrightarrow{EF} = \left(\frac{-72}{25},\frac{96}{25}\right)$$
$$\overrightarrow{OI}\ .\ \overrightarrow{EF} = \ 4\ \left(\frac{-72}{25}\right) + 3\left(\frac{96}{25}\right) = 0$$

ومنه (OI) ، (EF) متعامدان.

١٧ مستقيم سيمسون في المثلث

نُعطى النقاط $A(6,0)$ و $B(0,6)$ و $C(-2,0)$.

1. وضِّعْ هذه النقاط في معلمٍ متجانس وارسم الدائرة $\mathcal{C}$ المارّة برؤوس المثلث ABC ، ثمَّ اكتب معادلةً لها.
2. لتكن M النقطة من $\mathcal{C}$ ، التي لها ترتيب B ، والمختلفة عن B . ولتكن I و J و K المساقط القائمة للنقطة M على المستقيمات (AC) و (AB) و (CB) بالترتيب.
   a. احسب فاصلة M .
   b. اكتب معادلةً لكلٍّ من المستقيمات (AB) و (BC) و (MJ) و (MK) .
   c. استنتج إحداثيات النقاط I و J و K .
3. أثبت وقوع النقاط I و J و K على مستقيم واحد، نسميه مستقيم سيمسون.

في الحقيقة تبقى الخاصّة السابقة صحيحة مهما كان موضع النقطة M على الدائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC .

الحل

مستقيم سيمسون في المثلث:

1. منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$ $\qquad (2,0)$

فمعادلة محور القطعة المستقيمة $[AC]$ $\qquad x = 2$

منتصف $[AB]$ هي النقطة $N\ \ 3,3$

$\overrightarrow{O'N}.\overrightarrow{AB} = 0 \quad : O'(2, y_{O'})$

$\overrightarrow{O'N}(1, 3 - y_{O'})$

$\overrightarrow{AB}(-6, 6)$

$\overrightarrow{O'N}.\overrightarrow{AB} = 0$

$(1)(-6) + 6(3 - y_{O'}) = 0$

$-6 - 6y_{O'} + 18 = 0$

$6y_{O'} = 12$

$y_{O'} = 2$

$O'(2, 2)$

$R = O'A = \sqrt{(6-2)^2 + (0-3)^2} = 2\sqrt{5}$

$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 20$

.2 .a $y_M = 6$ نعوض في معادلة الدائرة

$(x-2)^2 + (6-2)^2 = 20$

$(x-2)^2 = 4$

$x - 2 = 2 \Rightarrow x = 4$

$x - 2 = -2 \Rightarrow x = 0$

$B(0, 6)$ وهي نقطة متوقعة $M(4, 6)$

.b كتابة معادلة المستقيم AB

$$m_{AB} = \frac{6-0}{0-6} = -1$$

$(y - 0) = -1(x - 6)$

$(AB) : y = -x + 6$

كتابة معادلة المستقيم BC

$$m_{BC} = \frac{6-0}{0-(-2)} = 3$$

$(y - 0) = 3(x + 2)$

$(BC) : y = 3x + 6$

معادلة المستقيم MJ

$$m_{MJ} = -\frac{1}{m_{AB}} = 1$$

$(y - 6) = 1(x - 4)$

$(MJ) : y = x + 2$

معادلة المستقيم MK

$$m_{MK} = -\frac{1}{m_{BC}} = -\frac{1}{3}$$
$$(y-6) = -\frac{1}{3}(x-4)$$
$$(MK) : y = -\frac{1}{3}x + \frac{22}{3}$$

c. $I(4,0)$

J نقطة تقاطع المستقيمين AB, MJ

$$\begin{aligned} y &= -x+6 \\ y &= -x+2 \\ \hline 2y &= 8 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

ومنه $x = 2$ ومنه $J\ \ 2,4$

k نقطة تقاطع المستقيمين BC, MK

$$\begin{aligned} y &= 3x+6 \\ y &= -\frac{1}{3}x + \frac{22}{3} \\ \hline 0 &= \left(3+\frac{1}{3}\right)x - \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3}x &= \frac{4}{3} \\ x &= \frac{2}{5} \\ y &= \frac{6}{5} + 6 = \frac{36}{5} \\ k&\left(\frac{2}{5}, \frac{36}{5}\right) \end{aligned}$$

3. إثبات أن النقاط K, J, I على مستقيم واحد . نسميه مستقيم سيمبسون

$$\overrightarrow{IJ} = (-2,4)$$
$$\overrightarrow{IK} = \left(-\frac{18}{8}, \frac{36}{5}\right)$$

نلاحظ أن $\overrightarrow{IK} = \frac{9}{5}\overrightarrow{IJ}$ فالشعاعان $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ مرتبطان خطياً فالنقاط I, J, K تقع على مستقيم واحد .

لتكن $x^2+y^2-2x-2y-8=0$ معادلةً للدائرة $\mathcal{C}$.

1. احسب إحداثيتي I مركز هذه الدائرة واحسب نصف قطرها، ثمَّ ارسمها.
2. تقطعُ الدائرةُ $\mathcal{C}$ محورَ الفواصل في A و B ومحور التراتيب في C و D. ولقد اخترنا أن يكون ترتيب D سالباً.

a. احسب إحداثيات النقاط A و B و C و D.

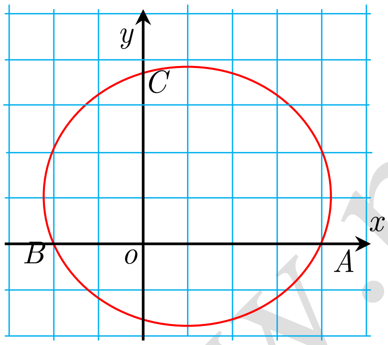
b. أثبت أنَّ صورة D وفق التناظر القائم الذي محوره (AB) هي نقطة تلاقي ارتفاعات ABC.

في الحقيقة، بوجه عام، تقع نظائر نقطة تلاقي ارتفاعات مثلّث بالنسبة إلى أضلاعه، على الدائرة المارّة برؤوسه.

الحل

من خواص نقطة تلاقي الارتفاعات

.1
$$x^2+y^2-2x-2y-8=0$$
$$x^2-2x+1+y^2-2y+1=10$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2=10$$
$$I(1,1)\ ,\ R=\sqrt{10}$$



.a .2
$$y=0$$
$$(x-1)^2=9$$
$$\left[\begin{array}{l} x-1=3 \Rightarrow x=4 \\ x-1=-3 \Rightarrow x=-2 \end{array}\right.$$
$$A(4,0)$$
$$B(-2,0)$$
$$x=0$$
$$(y-1)^2=9$$
$$\left[\begin{array}{l} y=4 \\ y=-2 \end{array}\right.$$
$$D(0,-2)$$
$$C(0,4)$$

.b صورة D وفق التناظر القائم الذي محوره (AB) هي النقطة

$$H(0,2)$$
$$\overrightarrow{AH}(-4,2)$$
$$\overrightarrow{BC}(2,4)$$
$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = -8+8=0 \Rightarrow BC \perp AH$$
$$\overrightarrow{BH}(2,2)$$
$$\overrightarrow{AC}(-4,4)$$
$$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = -8+8=0 \Rightarrow AC \perp BH$$

ومنه H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

١٩ لتكن $x^2+y^2-6x-2y-15=0$ معادلةً للدائرة $\mathcal{C}$، ولتكن $4x+3y=0$ معادلةً لمستقيم Δ.

$a.1$ ارسم كلاً من الدائرة $\mathcal{C}$ والمستقيم Δ.

b أنشئ Δ_1 و Δ_2 مماسي الدائرة $\mathcal{C}$ الموازيَيْن للمستقيم Δ.

$a.2$ اكتب معادلةً للمستقيم d، المارّ بمركز الدائرة $\mathcal{C}$ والعمودي على المستقيم Δ.

b أثبت أنَّ المستقيم d يقطع الدائرة $\mathcal{C}$ في نقطتين A و B تُطلب إحداثيّاتهما.

c استنتج معادلةً لكلٍّ من المُماسين Δ_1 و Δ_2.

الحل

$a.1$

$$x^2+y^2-6x-2y-15=0$$
$$x^2-6x+9+y^2-2y+1=15+1+19$$
$$(x-3)^2+(y-1)^2=25$$
$$I(3,1)\ ,\ R=5$$

b.معادلة Δ_1' و Δ_2 من الشكل

$4x+3y+h=0$ بعد I عن Δ_1' و Δ_2 يساوي $R=5$

$$5=\frac{|4(3)+3(1)+h|}{\sqrt{16+9}}$$
$$25=|15+h|$$
$$\begin{cases} 25=15+h \\ h=10 \\ -25=15+h \\ h=-40 \end{cases}$$
$$\Delta_2 = 4x+3y+10=0$$
$$\Delta_1 = 4x+3y-40=0$$

$$m_d = -\frac{1}{m_\Delta} = \frac{-1}{\frac{-4}{3}} = \frac{3}{4}$$ .a.2

معادلة المستقيم d المار بالنقطة $I(3,1)$ وميله $m_d = \frac{3}{4}$

$$(y-1) = \frac{3}{4}(x-3)$$
$$d : y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$

.b تقاطع d مع الدائرة C

$$(x-3)^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{5}{4} - 1\right)^2 = 25$$
$$(x-3)^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{9}{4}\right)^2 = 25$$
$$(x-3)^2 + \left(\frac{3}{4}(x-3)\right)^2 = 25$$
$$\frac{25}{16}(x-3)^2 = 25$$
$$(x-3)^2 = 16$$
$$\left.\begin{array}{l} x - 3 = 4 = 7 \\ y = \frac{3}{4}(7) - \frac{5}{4} = 4 \end{array}\right\} A(7,4)$$
$$\left.\begin{array}{l} x - 3 = -4 = -1 \\ y = \frac{3}{4}(-1) - \frac{5}{4} = -2 \end{array}\right\} B(-1,-2)$$

.c المستقيم Δ مار بالنقطة $A(7,4)$ وميله $m = -\frac{4}{3}$

$$(y-4) = -\frac{4}{3}(x-7)$$
$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{40}{3}$$
$$\Delta_1 \quad 4x + 3y - 40 = 0$$

المستقيم Δ_2 مار بالنقطة $B(-1,-2)$ وميله $m = -\frac{4}{3}$

$$(y+2) = -\frac{4}{3}(x+1)$$
$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{4}{3} - 2$$
$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$$
$$\Delta_2 \quad 4x + 3y + 10 = 0$$

٢٠ a و b عددان من المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ يُحقّقان $\cos a=\frac{3}{5}$ و $\sin b=\frac{1}{2}$. احسب المقادير $\sin a$ و $\cos b$ واستنتج قيم $\cos(a+b)$ و $\sin(a-b)$.

الحل

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$$
$$\sin^2\alpha = 1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$$
$$\sin\alpha = \frac{4}{5} : a\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$
$$\cos^2 b = 1-\sin^2 b$$
$$\cos^2 b = 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$
$$\cos b = \frac{\sqrt{3}}{2} : b\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$
$$\cos(a+b) = \cos a\cos b-\sin a\sin b$$
$$=\frac{3}{5}.\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{5}.\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b+\cos a\sin b$$
$$=\frac{4}{5}.\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{5}.\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$$

٢١ لتكن النقطتان $A(6,0)$ و $B(0,3)$. نرمز في حالة عددٍ حقيقي k بالرمز $\mathcal{L}_k$ إلى مجموعة النقاط M التي تُحقّق : $MO^2+MA^2+MB^2=k$.

1. أثبت تكافؤ الخاصّتين: « $M\ \ x,y$ نقطةٌ من $\mathcal{L}_k$ » و « $x^2+y^2-4x-2y+15=\frac{k}{3}$ »

2. ناقش تبعاً لقيم k طبيعة $\mathcal{L}_k$.

الحل

.1
$$MO^2+MA^2+MB^2=K$$
$$x^2+y^2+(x-6)^2+(y-0)^2+x^2+(y-3)^2=K$$
$$x^2+y^2+x^2-12x+36+y^2+x^2+y^2-6y+9=K$$
$$2x^2+3y^2-12x-6y+45=k$$

2. $2x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = k - 15 + 5$

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = k - 10$

★ عندما $0 < k - 10$ أي $k < 10$ المعادلة تمثل مجموعة نقاط دائرة مركزها $I(2,1)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{k-10}$

★ عندما $k = 10$ المعادلة تمثل مجموعة مكونة من نقطة وحيدة $I(2,1)$

★ عندما $k - 10 < 0$ أي $k < 10$ المعادلة تمثل مجموعة خالية من النقط .

٢٢ a و b عددان من $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$، يُحقّقان $\sin a = \frac{1}{2}$ و $\sin b = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

1. احسب $\cos a$، وتحقّق أنّ $\cos b = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
2. احسب $\cos(a+b)$ و $\sin(a+b)$، واستنتج $a+b$ ثمّ b.

الحل

.1

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\cos a = \frac{\sqrt{3}}{2} : a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos^2 b = 1 - \sin^2 b$$

$$\cos^2 b = 1 - \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{16} = \frac{16-(8-2\sqrt{2})}{16} = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$$

$$\cos b = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} : b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

.2

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} . \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{18}+\sqrt{6}-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$$

$$\cos \;\; a+b \;\; = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

وبنفس الأسلوب نجد أن $\sin \;\; a+b \;\; = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه $a+b = 45^\circ$

ولكن $\sin a = \dfrac{1}{2}$ ومنه $a = 30^\circ$ ومنه $b = 15^\circ$

٢٣ x عددٌ من المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. أثبت أنَّ

$$\tan x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$$

ثُمّ استنتج قيم $\tan \frac{\pi}{8}$ و $\tan \frac{\pi}{12}$.

الحل

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin \cos x} = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$$

$$\tan \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

$$\tan \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$$

٢٤ أثبت صحّة ما يأتي:

① $4 \cos^2 x + 2 \sin^2 x = 3 + \cos 2x$.

② $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$.

③ $\sin(a + b) \cos(a - b) + \cos(a + b) \sin(a - b) = \sin 2a$.

الحل

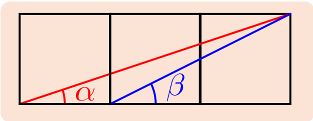
①
$$\begin{aligned} \ell_1 &= 4 \cos^2 x + 2 \sin^2 x \\ &= 2 \cos^2 x + 2(\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= 2 \cos^2 x + 2 = 1 + (\cos 2x + 2) \\ &= 3 + \cos 2x = \ell_2 \end{aligned}$$

②
$$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x$$

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \cos^4 x - \sin^4 x \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= \cos 2x(1) = \cos 2x = \ell_2 \end{aligned}$$

$$\textcircled{3}\quad \begin{aligned}\ell_1 &= \sin(a+b)\cos(a-b)+\cos(a+b)+\sin(a-b)\\ &= \sin((a+b)+(a-b)) = \sin 2b = \ell_2\end{aligned}$$

٢٥ ثلاثةُ مربعاتٍ طول ضلع كلٍّ منها يساوي a وهي مرتبة كما في الشكل المجاور. α و β هما قياسا الزاويتين BAE و CBE بالراديان.



1. احسب $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$ و $\cos\beta$ و $\sin\beta$.

2. استنتج أنَّ $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

الحل

.1

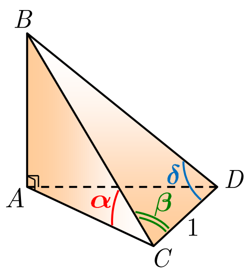
$$AE^2 = 9a^2 + a^2 = 10a^2$$
$$AE = \sqrt{10}\ a$$
$$BE^2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2$$
$$BE = \sqrt{5}\ a$$
$$\cos\alpha = \frac{3a}{\sqrt{10}\,a} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$
$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{10}\,a} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$
$$\cos\beta = \frac{2a}{\sqrt{5}\,a} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\sin\beta = \frac{a}{\sqrt{5}\,a} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

.2

$$\cos(\alpha+\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$
$$= \frac{3}{\sqrt{10}}.\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{10}}.\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$$

٢٦ $ABCD$ رباعي وجوه فيه المستقيم (AB) عموديٌّ على المستوي (ACD) و $CD=1$. نعرف

$ACB=\alpha$ و $BCD=\beta$ و $CDB=\delta$



a.1. أثبت أنَّ $BC = \dfrac{\sin\delta}{\sin(\beta+\delta)}$.

.b استنتج أنَّ $AB = \dfrac{\sin\alpha\sin\delta}{\sin(\beta+\delta)}$.

.2 احسب طول $[AB]$ عندما $\alpha = \beta = \dfrac{\pi}{4}$ و $\delta = \dfrac{\pi}{3}$.

الحل

.a.1 في المثلث

$$BDC$$

$$\frac{CD}{\sin B} = \frac{BC}{\sin\gamma}$$

$$\frac{1}{\sin B} = \frac{BC}{\sin\gamma}$$

$$\hat{B} = \pi - (\hat{\beta} + \hat{\gamma})$$

$$\sin B = \sin(\beta+\gamma)$$

$$\frac{1}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{BC}{\sin\gamma}$$

$$BC = \frac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$

$$\widehat{BCA} = \frac{\pi}{2}$$

$$AB = BC\sin\alpha$$

.b

$$AB = \frac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}\,.\,\sin\alpha$$

$$AB = \frac{\sin\gamma.\,\sin\alpha}{\sin(\beta+\gamma)}$$

.2

$$AB = \frac{\sin\frac{\pi}{3}.\,\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$AB = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$$

$$AB = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2}$$

٢٧ ليكن x عدداً حقيقياً.

1. أثبت أنَّ

$$8\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x = \sin 8x \text{ .}$$

2. أثبت أنَّ $\sin\frac{8\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}$ ، واستنتج أنَّ

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$$

3. أثبت بأسلوب مماثل أنَّ

$$\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8} \text{ .}$$

الحل

.1

$$8\sin x.\cos x.\cos 2x\cos 4x = \sin 8x$$

$$\ell_1 = 4\sin 2x.\cos 2x.\cos 4x = 2\sin 4x.\cos 4x = \sin 8x = \ell_2$$

.2 $$\sin\frac{8\pi}{7} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) = -\sin\frac{\pi}{7}$$

لنعوض في ① $x = \frac{\pi}{7}$

$$8\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7} = \sin\frac{8\pi}{7}$$

$$8\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}$$

$$\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$$

.3 ③ $$\sin\frac{8\pi}{9} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right) = \sin\frac{\pi}{9}$$

نعوض في ① $x = \frac{\pi}{9}$ فنجد أن

$$8\sin\frac{\pi}{9}.\cos\frac{\pi}{9}.\cos\frac{2\pi}{9}.\cos\frac{4\pi}{9} = \sin\frac{8\pi}{9}$$

$$8\sin\frac{\pi}{9}.\cos\frac{\pi}{9}.\cos\frac{2\pi}{9}.\cos\frac{4\pi}{9} = \sin\frac{\pi}{9}$$

$$\cos\frac{\pi}{9}.\cos\frac{2\pi}{9}.\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}$$

٢٨ القطع الزائد والاشتقاق

نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ الخط البياني $\mathcal{H}$ للقطع الزائد المُمَثِّل للتابع $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$.

لتكن A و B نقطتين من $\mathcal{H}$ فاصلتيهما x_1 و x_2 بالترتيب. ونفترض أنّ $0 < x_1 < x_2$. يقطع

المستقيم العمودي على (AB) في A القطع الزائد $\mathcal{H}$ مجدّداً في نقطة C نرمز إلى فاصلتها بالرمز x_3.

الهدف من هذه المسألة هو إثبات أنّ المماس في A للقطع $\mathcal{H}$ عمودي على (BC).

1. أثبت أنّ $x_1^2x_2x_3+1=0$.

a.2 اكتب معادلةً للمستقيم d المماس في A للقطع $\mathcal{H}$.

b. أثبت أنّ المستقيمين (BC) و d متعامدان.

الحل

1. $x \to f(x)=\dfrac{1}{x}$

$$\overrightarrow{AB}\left(x_2-x_1, \frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right) \qquad ①$$

$$\overrightarrow{AC}\left(x_3-x_1, \frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_1}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{AC}=0$$

$$(x_2-x_1)(x_3-x_1)+\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right).\left(\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_1}\right)=0$$

$$x_2x_3-x_2x_1-x_1x_3+{x_1}^2+\frac{(x_1-x_2)}{x_1.x_2}.\frac{(x_1-x_3)}{x_1.x_3}=0$$

$$x_2x_3-x_2x_1-x_1x_3+{x_1}^2\left(1+\frac{1}{{x_1}^2x_2x_3}\right)=0$$

$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)\left(\frac{{x_1}^2x_2x_3+1}{{x_1}^2x_2x_3}\right)=0$$

بما أن f متناقص تماماً على كل من المجالين $]0\ ,+\infty[\ ,\ ]-\infty,0[$ فإن

$$x_1 \neq x_2$$
$$x_1 \neq x_3$$
$$x^2{}_1x_2x_3+1=0$$

a.2 f اشتقاقي على كل من المجالين $]0\ ,+\infty[\ ,\ ]-\infty,0[$

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}$$

$$m=\frac{-1}{x_1^2}$$

$$d:\left(y-\frac{1}{x_1}\right)=\frac{-1}{x_1^2}(x-x_1)$$

$.b$

$$m_{BC} = \frac{\frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_2}}{x_3 - x_2} = 0$$

$$m_{BC} = \frac{x_2 - x_3}{x_2.x_3 \quad x_3 - x_2} = \frac{-1}{x_2.x_3}$$

$$m_{BC}.m_d = \frac{-1}{x_2.x_3}.\frac{-1}{x_1^2} = \frac{1}{x_1^2 x_2.x_3}$$

ومنه d و BC متعامدان

الهدف العام: توظيف التحاكي وخواصه في حل المشكلات

المقدمة	**الهدف**	يحدد الطالب أن هناك تحويل هندسي جديد هو (التحاكي).
	دور المدرس ودور الطالب	عرض صور عن تحويلات هندسية طبوقة (دوران، انسحاب، تناظر). طرح أسئلة عن المقدمة ، يقرأ الطالب المقدمة ويجيب عن أسئلة المدرس
	آلية التنفيذ	- يقرأ الطالب المقدمة - يسأل المدرس: ما هي التحويلات الهندسية التي درستها سابقاً؟ - يعرض صوراً لتحويلات هندسية طبوقة ثم تحويلات تعتمد على التصغير والتكبير (التشابه). - يسمي التحويل الذي يعطينا أشكالاً متشابهة هو التحاكي.٧ د
انطلاقة نشطة	**الهدف**	تعزيز المعارف السابقة حول التحويل الهندسي الدوران.
	دور المدرس ودور الطالب	عرض مسألة الانطلاقة النشطة ، حل مسألة الانطلاقة النشطة.
	آلية التنفيذ	- يطلب المدرس من الطلاب حل مسألة الانطلاقة النشطة. ٨ دقائق ملاحظة: لا تصحح إجابات الانطلاقة النشطة تترك للطالب ليتوصل إلى الإجابة الصحيحة في نهاية الدرس.

التحاكي في المستوى	**الهدف**	إيجاد صورة نقطة وفق تحاكٍ.
	دور المدرس ودور الطالب	عرض التعريف والمبرهنة والنتائج والخواص والأمثلة. الإجابة عن أسئلة المدرس.
	آلية التنفيذ	– يقدم المدرس تعريف التحاكي ويناقش الطلاب في نتائج التعريف. – يعرض إثبات المبرهنة ١ ويناقش نتائجها. ٣٠ د
تكريساً للفهم	**الهدف**	قياس مدى قدرة الطالب على التعبير الشعاعي عن صورة نقطة وفق تحاك، ووقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة.
	دور المدرس ودور الطالب	تغذية راجعة. الإجابة عن أسئلة المدرس.
	آلية التنفيذ	–يسأل المدرس: ١. **كيف ننتقل من تحاك إلى مساواة شعاعية؟** ثم يعرض أمثلة صفحة ١٣٩ –يسأل المدرس: ٢. **أيوجد في حالة ثلاث نقاط مختلفة على استقامة واحدة** A,B,C **تحاك** h **مركزه** A **يحقق** $h(B)=c$ **؟** – يعرض مثال: طريقة لإنشاء صورة نقطة وفق تحاكٍ.

<table>
<tr><td rowspan="3">تدرب صفحة ١٤٠+١٤١</td><td>الهدف</td><td>تقويمي لقياس قدرة الطالب على تحديد صورة نقطة وفق تحاكٍ أو رسم صورة نقطة وفق تحاكٍ.</td></tr>
<tr><td>دور المدرس ودور الطالب</td><td>تغذية راجعة.
حل المشكلات</td></tr>
<tr><td>آلية التنفيذ</td><td>يختار المدرس من تمرينات تدرب ويطلب من الطلاب حلها كواجب بيتي ويناقش الحلول في الحصة التالية ،٤٥د</td></tr>
<tr><td rowspan="3">صورة مستقيم، وصورة قطعة مستقيمة، وصورة دائرة.</td><td>الهدف</td><td>إيجاد صورة مستقيم، وصورة قطعة مستقيمة، وصورة دائرة وفق تحاكٍ</td></tr>
<tr><td>دور المدرس ودور الطالب</td><td>توجيه الطلاب ومناقشتهم ، الإجابة عن أسئلة المدرس.</td></tr>
<tr><td>آلية التنفيذ</td><td>- يعرض المدرس المبرهنة٢ والمبرهنة٣ والمثلثات المتحاكية وصورة دائرة.
- يناقش الطلاب قي الإثبات. ٣٠د</td></tr>
<tr><td rowspan="3">تكريساً للفهم</td><td>الهدف</td><td>قياس مدى قدرة الطالب على تحديد صورة مستقيم وفق تحاكٍ وعلى تحديد الصلة بين التحاكي ومبرهنة تالس.</td></tr>
<tr><td>دور المدرس ودور الطالب</td><td>تغذية راجعة.
الإجابة عن أسئلة المدرس.</td></tr>
<tr><td>آلية التنفيذ</td><td>- يسأل المدرس:
١. كيف نستفيد من المبرهنة ٢؟
٢. ما الصلة بين التحاكي ومبرهنة تالس؟
- يناقش الطلاب في الحل.
- يوضح المدرس الصلة بين التحاكي ومبرهنة تالس.
يعرض المثال ويناقش الطلاب بالحل.</td></tr>
</table>

تدرب صفحة ١٤٥	**الهدف**	تقويمي لقياس قدرة الطالب على تحديد صورة مستقيم وقطعة مستقيمة ودائرة وفق تحاكٍ.
	دور المدرس ودور الطالب	تغذية راجعة، حل المشكلات.
	آلية التنفيذ	يطلب المدرس حل تمرينات تدرب صفحة ١٤٥ وما تبقى من التدريبات تعطى كواجب بيتي ويتم مناقشة الحل في الحصة التالية . ١٠د
خواص التحاكي ومفاعليه.	**الهدف**	تطبيق خواص التحاكي في حل المسائل.
	دور المدرس ودور الطالب	توجيه الطلاب ومناقشتهم الإجابة عن أسئلة المدرس.
	آلية التنفيذ	يعرض المدرس المبرهنة٢ والمبرهنة٣ والمثلثات المتحاكية وصورة دائرة ويناقش الطلاب قي الإثبات. ٣٠د
تكريساً للفهم	**الهدف**	قياس مدى قدرة الطالب على تحديد فوائد خواص التحاكي في حل المسائل.
	دور المدرس ودور الطالب	تغذية راجعة. الإجابة عن أسئلة المدرس.
	آلية التنفيذ	يسأل المدرس: **ما فائدة خواص التحاكي؟** ويناقش الطلاب في الإجابة. ثم يعرض الأمثلة ويناقش الطلاب بالحل.

تدرب صفحة ١٤٨	**الهدف**	تقويمي لقياس قدرة الطالب على استعمال خواص التحاكي في حل المسائل.
	دور المدرس ودور الطالب	تغذية راجعة. حل المشكلات
	آلية التنفيذ	يطلب المدرس حل تمرينات تدرب صفحة ١٤٩ وما تبقى من التدريبات تعطى كواجب بيتي ويتم مناقشة الحل في الحصة التالية. ١٠د
الأنشطة	**الهدف**	نشاط١: تحديد التحاكيات بين قطعتين مستقيمتين. نشاط٢: تحديد المحلات الهندسية بالاستفادة من التحاكي. نشاط٣: الاستفادة من التحاكي وخواصه في الإنشاء الهندسي
	دور المدرس ودور الطالب	ميسر وموجه. تغذية راجعة حل الأنشطة
	آلية التنفيذ	يعرض المدرس النشاط ويطلب من الطلاب حله ثم يناقش الحل معهم. حصتان درسيتان ملاحظة : ✳ حصة للتمرينات ومسائل. ✳ استنتاج العبارة التحليلية للتحاكي لم تعرض.
لنتعلم البحث معاً	**الهدف**	تزويد الطالب بمنهجية التفكير الاستقصائي
	دور المدرس ودور الطالب	ميسر وموجه. تغذية راجعة حل المشكلات

	آلية التنفيذ	يعرض المدرس مسائل لنتعلم البحث معاً ويناقشهم في الحل ويطلب من الطلاب حلها وفق الآلية المعروضة في الكتاب، ثم صياغة الحل وكتابته بلغة سليمة. ثلاث حصص درسية.
قدماً إلى الأمام	**الهدف**	تعزيز مهارات حل المسائل والتفكير الناقد.
قدماً إلى الأمام	**دور المدرس ودور الطالب**	ميسر وموجه. تغذية راجعة حل مسائل وتمارين قدماً إلى الأمام
قدماً إلى الأمام	**آلية التنفيذ**	يطلب المدرس من الطلاب حل تمارين ومسائل قدماً إلى الأمام يمكن اختيار من مسائل قدماً إلى الأمام ١٢، ١٤، ١٦، ١٩، ٢٢، ٢٣. حصتان درسيتان ملاحظة : التمارين والمسائل التي لم تعالج يمكن أن تعطى إلى الطالب كواجب منزلي يتابعها المدرس خارج الحصص الدرسية.

تَدرَّبْ ص١٤٠

① عبِّرْ عن كلٍّ من المقولات الآتية باستخدام مساواة شعاعية:

❶ B هي صورة A وفق التحاكي الذي مركزه I ونسبته -2.

❷ I و J هما بالترتيب صورتا A و B وفق التحاكي $h_{O,1/3}$.

الحل

❶ $\overrightarrow{IB} = -2\overrightarrow{IA}$

❷ $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

② عبِّرْ عن كلٍّ من العلاقات الشعاعية الآتية باستعمال مفهوم التحاكي:

❶ $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$

❷ $\overrightarrow{ON} = -2\overrightarrow{MO}$

❸ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'} = \vec{0}$

الحل

❶ $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$

B هي صورة النقطة C وفق التحاكي h الذي مركزه A ونسبته -2

$h_{A,-2} : h(C) = B$

❷ $\overrightarrow{ON} = -2\overrightarrow{MO}$ أي $\overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OM}$

N هي صورة النقطة M وفق التحاكي h الذي مركزه O ونسبته 2

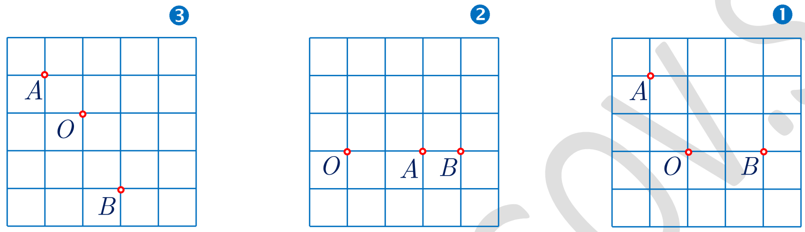
$h_{O,2} : h(M) = N$

❸ $\overrightarrow{AB'} = -\overrightarrow{AB}$ أي $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'} = \vec{0}$

B' هي صورة النقطة B وفق التحاكي h الذي مركزه A ونسبته -1

$h_{A,-1} : h(B) = B'$

③ في كلٍّ من الأشكال المرافقة، أَثمة تحاكٍ h مركزه O ينقل A إلى B ؟ وما هي نسبته في حال وجوده؟



الحل

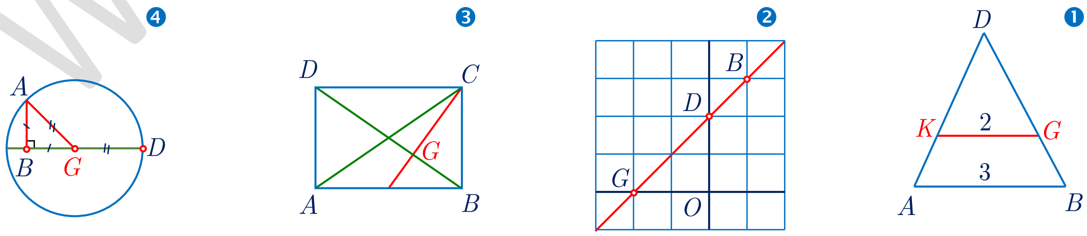
❶ لا يوجد تحاكٍ.

❷ $\overrightarrow{OB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$ فالشكل الثاني يمثل تحاكٍ مركزه O ينقل A إلى B

$h_{O,\frac{3}{2}} : h(A) = B$

❸ لا يوجد تحاكٍ.

④ في كلٍّ من الأشكال الأربعة الآتية، عيّن نسبة التحاكي h الذي مركزه G وينقل B إلى D .



الحل

❶ حسب المبرهنة الأساسية في التشابه:

$$\frac{GD}{DB}=\frac{2}{3} \quad , \quad GD=\frac{2}{3}DB \quad , \quad DB=\frac{3}{2}DG$$

وبما أن G,B,D على استقامة واحدة فإن:

$$\overrightarrow{DB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DG}$$
$$\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DG}$$
$$\overrightarrow{GB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DG}$$
$$\overrightarrow{GB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GD}$$
$$\overrightarrow{GD}=-2\overrightarrow{GB}$$
$$h_{G,-2}(B)=D$$

❷ $B(1,3) \quad , \quad D(0,2) \quad , \quad G(-2,0)$

$$\overrightarrow{GB}=(3,3) \quad , \quad \overrightarrow{GD}=(2,2)$$

ومنه: $\overrightarrow{GD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{GB}$

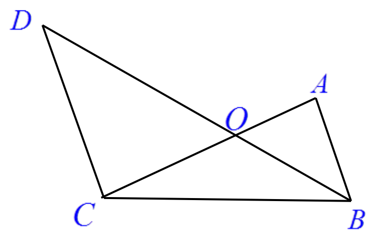
$$h_{G,\frac{2}{3}}(B)=D$$

❸ G هي نقطة تلاقي المتوسطات في المثلث ABC (مركز ثقل المثلث)

بفرض O منتصف $[AC]$

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BO}$$
$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{BD})$$
$$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GD})$$
$$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BG} + \frac{1}{3}\overrightarrow{GD}$$
$$\frac{2}{3}\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GD}$$
$$\overrightarrow{GD} = -2\overrightarrow{GB}$$
$$h_{G,-2}(B) = D$$

❹ حسب فيثاغورس في المثلث ABG :



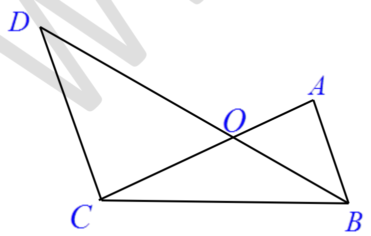
$$2\ GB^2 = GA^2$$
$$2\ GB^2 = GD^2$$
$$GD = \sqrt{2}\ GB$$

بما أن D, B, G على استقامة واحدة:

$$\overrightarrow{GD} = -\sqrt{2}\ \overrightarrow{GB}$$
$$h_{G,-\sqrt{2}}(B) = D$$

⑤ ABC مثلثٌ و O نقطةٌ من الضلع $[AC]$. ارسمْ صورة B وفق التحاكي h الذي مركزه O ويحقق $h(A) = C$.

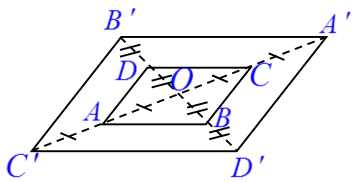
الحل



$h(B) = D$ حيث: $h(A) = C$

⑥ $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O، و A' هي نقطة تحقّق $\overrightarrow{OA'} = -2\overrightarrow{OA}$. ارسم صورَ النقاط B و C و D وفق التحاكي الذي ينقل A إلى A'.

الحل



⑦ ABC مثلثٌ، مركز ثقله G.

❶ f هو التحويل الذي يقرن بكلِّ نقطةٍ M من المستوي، نقطةً M' تحقّق

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

a. أثبت أنَّ $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$.

b. استنتج طبيعة التحويل f.

❷ g هو التحويل الذي يقرن بكلِّ نقطةٍ M من المستوي، نقطةً M' تحقّق

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$$

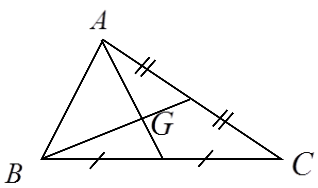
و D هي النقطة التي تجعل $ABDC$ متوازيَ أضلاع

a. أثبت أنَّ $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DA}$.

b. استنتج أنَّ g انسحابٌ، يطلب إيجاد شعاعه.

الحل

❶ a. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

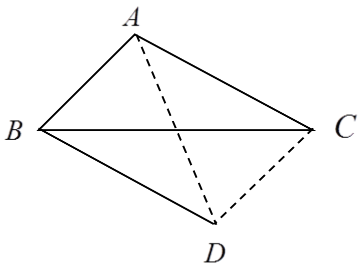


ومنه:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\,\overrightarrow{MG}$$
$$\overrightarrow{MM'}=3\ \overrightarrow{MG}$$
$$\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GM'}=3\ \overrightarrow{MG}$$
$$\overrightarrow{GM'}=2\ \overrightarrow{MG}$$
$$\overrightarrow{GM'}=-2\ \overrightarrow{GM}$$

b.طبيعة التحويل f هو تحاكٍ مركزه G ونسبته -2

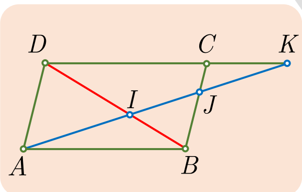
❷



a. $L_1=2\,\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}$
$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}=L_2$

b. بما أن $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{DA}$ ومنه g يمثل انسحاباً متجهه $\overrightarrow{DA}$

تَدرَّبْ ص١٤٥



① $ABCD$ متوازي أضلاع. K نقطةٌ على المستقيم (DC) تختلف عن كلٍّ من D و C. يقطعُ المستقيمُ (AK) المستقيمَ (BD) في I والمستقيم (BC) في J. نرمز إلى التحاكي الذي مركزه I وينقل B إلى D بالرمز h.

a.1 لماذا تفيد المبرهنة 2 في تأكيد أنَّ صورة المستقيم (AB) هي (DC)؟

b. استنتج أنَّ $h(A)=K$؟

a.2 ما هي صورة المستقيم (BC) وفق h؟

b. استنتج أنَّ $h(J)=A$.

3. نرمز إلى نسبة التحاكي h بالرمز k. استنتج من الأسئلة السابقة أنّ

$\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK} = k\overrightarrow{IA}$ و $IA^2 = IJ \times IK$.

الحل

a.1. إن صورة مستقيم (AB) وفق تحاكٍ h هو مستقيم يوازيه.

صورة B هي D وفق تحاكٍ h مركزه I

ومنه صورة BA هو مستقيم مار من D موازياً BA فهو المستقيم DC

b. A نقطة تقاطع المستقيمين $(AI),(BA)$ وبما أن صورة المستقيم (BA) وفق التحاكي h الذي مركزه I هو المستقيم (DC) و صورة المستقيم (AI) هو نفسه (AI) فنقطة تقاطع المستقيمين $(DC),(AI)$ وهي k صورة النقطة A وفق التحاكي h

a.2. $h(B) = D$

فصورة المستقيم (BC) وفق h هو مستقيم مار من D ويوازي BC ومنه صورة المستقيم (BC) هو المستقيم DA

b. J نقطة تقاطع المستقيمين $(AI),(BC)$ اللذين صورتاهما وفق h هما $(AI),(AD)$ على الترتيب ومنه نقطة تقاطع المستقيمين $(AI),(AD)$ وهي النقطة A صورة J وفق تحاكٍ h مركزه I ،

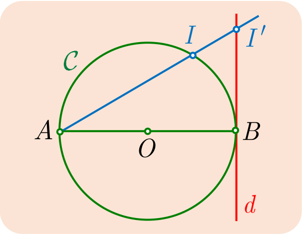
$h(J) = A$

3. بما أن $h(J) = A$ $\overrightarrow{IA} = k\,\overrightarrow{IJ}$

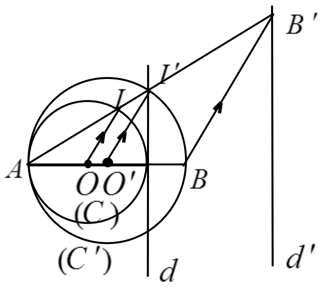
وبما أن $h(A) = k$ $\overrightarrow{Ik} = k\,\overrightarrow{IA}$

ومنه: $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{Ik} = k\,\overrightarrow{IA}^2$ ومنه $IA^2 = IJ.Ik$

② المستقيم d مماسّ للدائرة $\mathcal{C}$ في النقطة B منها. و h هو التحاكي الذي مركزه A، وينقل النقطة I من $\mathcal{C}$ إلى النقطة I'. ارسم النقطة $O' = h(O)$. وارسم الدائرة $\mathcal{C}'$ صورة $\mathcal{C}$ وفق التحاكي h. وأخيراً ارسم المستقيم d' صورة d وفق h.

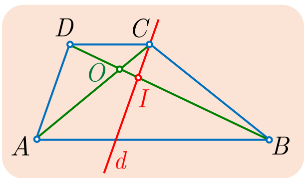


الحل



(C') هي دائرة مركزها O' ونصف قطرها $O'I'$

③ $ABCD$ شبه منحرف فيه $\overrightarrow{AB} = 3\,\overrightarrow{DC}$، و O نقطة تلاقي قطريه. نرمز إلى التحاكي الذي مركزه O وينقل A إلى C بالرمز h.



1.a. لماذا يكون المستقيمُ (AB) صورةَ المستقيم (DC) وفق h؟

b. لماذا نسبةُ التحاكي h تساوي $-\frac{1}{3}$؟

2. يقطع المستقيم d المرسوم من C موازياً (DA) المستقيمَ (DB) في I.

a. لماذا يكون d صورةَ المستقيم (AD) وفق h؟

b. استنتج أنَّ $h(D) = I$.

3. ليكن Δ المستقيم المار بالنقطة D موازياً (BC) وقاطعاً (AC) في J.

a. آخذاً بالحقائق التي توصلت إليها، أثبت أنَّ $h(C) = J$.

b. استنتج أنَّ $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

الحل

.a.1 $h(A)=C$

فصورة المستقيم (AB) وفق h هو مستقيم مار من C موازياً لـ AB ومنه

صورة المستقيم (AB) وفق h هو المستقيم (DC)

.b لدينا فرضاً $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{DC}$

$$\frac{DC}{AB}=\frac{1}{3}=\frac{OC}{OA}$$

ومنه: $\overrightarrow{OC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$

ومنه نسبة التحاكي h تساوي $-\frac{1}{3}$

.a.2 بما أن $h(A)=C$ فصورة المستقيم (AD) هو مستقيم مار من C موازياً لـ AD وهو المستقيم d

.b D نقطة تقاطع المستقيمين $(DB),(AD)$ صورتاهما وفق التحاكي h المستقيمان $(DB),(d)$

على الترتيب اللذين يتقاطعان في I ومنه $h(D)=I$

.a.3 من تشابه المثلثين ODC , OAB نجد أن $\overrightarrow{OD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

ومنه: $h(B)=D$ فصورة المستقيم (CB) وفق h هو المستقيم Δ المار من D موازياً BC فتكون

صورة (C) وفق h هي نقطة تقاطع (CO) مع (Δ) فهي النقطة J $h(C)=J$

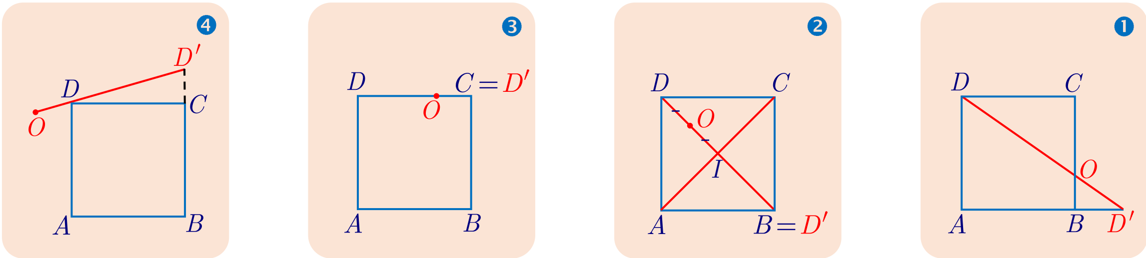
.b

$$\overrightarrow{OJ}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$
$$\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$$
$$\overrightarrow{OJ}-\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})$$

$$\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$$
$$\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$$

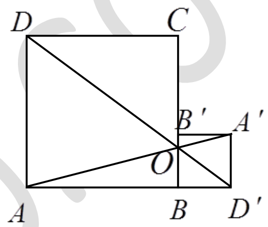
تَدرَّبْ ص١٤٨

① في كلٍّ من الحالات الآتية، ارسم صورة المربع $ABCD$ وفق التحاكي h الذي مركزه O وينقل النقطة D إلى D'.

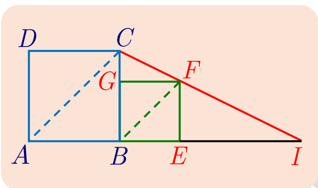


الحل

❶



② $ABCD$ و $BEFG$ مربعان طولا ضلعيهما بالترتيب 3 و 2، ومتوضّعان كما في الشكل.



❶ .a احسب قياس كلٍّ من الزاويتين BAC و EBF.

.b استنتج أنَّ المستقيمين (AC) و (BF) متوازيان.

❷ ليكن h التحاكي الذي مركزه I وينقل A إلى B. أثبت أنّ $h(C) = F$، وأنّ نسبة التحاكي h تساوي $\frac{2}{3}$.

❸ لماذا تقع النقاط D و G و I على استقامة واحدة؟

الحل

❶ .a $BAC = \frac{\pi}{4}, EBF = \frac{\pi}{4}$

.b بما أن $B\hat{A}C = E\hat{B}F$ وهما في وضع التناظر بالنسبة إلى المستقيمين (BF) , (AC)

فالمستقيمان (BF) , (AC)متوازيان.

❷ بما أن $h(A) = B$ و $AC \parallel BF$ والنقاط C , F , I على استقامة واحدة فإن:

$$h(C) = F$$
$$\overrightarrow{IB} = k\,\overrightarrow{IA}$$

إن المثلثين IBF , IAC متشابهان:

$$\frac{IB}{IA} = \frac{BF}{AC} = \frac{\sqrt{2}\ 2}{\sqrt{2}\ 3} = \frac{2}{3}$$
$$\overrightarrow{IB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IA}$$

ومنه نسبة التحاكي $\frac{2}{3}$

❸ بما أن $h(A) = B$ و $AD \parallel BC$ ومنه صورة D وفق h هي نقطة تقاطع BC مع ID ولتكن M

$h(D) = M$ ومنه $\overrightarrow{IM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{ID}$

بقي أن نثبت $M = G$

إن المثلثين IFM , IDC متشابهان

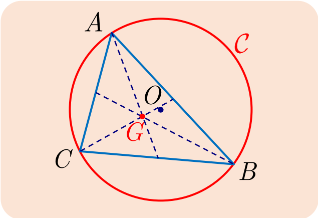
$$\frac{IM}{ID} = \frac{FM}{CD} = \frac{2}{3}$$
$$\overrightarrow{FM} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{CD}$$

ولدينا فرضاً $\overrightarrow{FG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ ومنه $M = G$

$$h(D) = G$$

فالنقاط D , G , I تقع على استقامة واحدة.

③ في الشكل المقابل، G هو مركز ثقل المثلث ABC، و $\mathcal{C}$ هي الدائرة المارّة برؤوسه. أعدْ رسم الشكل، وارسم عليه الدائرة $\mathcal{C}'$ صورة $\mathcal{C}$ وفق التحاكي h الذي مركزه G وينقل A إلى منتصف $[BC]$.



الحل

بفرض A' منتصف $[BC]$

$$GA' = -\frac{1}{2}GA$$
$$h(A) = A'$$

وبفرض B' منتصف $[AC]$ يكون $\overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$

$$h(C) = C'$$

ومنه الدائرة (C') صورة (C) وفق h هي الدائرة المارة برؤوس المثلث $A'B'C'$ وليكن مركزها O' يحقق $\overrightarrow{GO'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$

④ ABC مثلث، و M نقطة تحقّق $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. المستقيم المار بالنقطة M موازياً (AC) يقطع (BC) في N، والمستقيم المار بالنقطة N موازياً (AB) يقطع (AC) في P. ليكن h التحاكي الذي مركزه B وينقل A إلى M.

❶ احسب نسبة التحاكي h وعيّن $h(C)$.

❷ أثبت أنَّ $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$، واستنتج أنَّ مساحة المثلّث NPC تساوي رُبع مساحة المثلّث MBN.

الحل

❶ $h(A) = M$

$$\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$$

نسبة التحاكي $k = \frac{2}{3}$

بما أن $h(A) = M$ و $MN \parallel AC$ فإن $h(C) = N$

❷ $h(C) = N$ فإن $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ ومنه $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

بما أن $h(B) = B$, $h(C) = N$, $h(A) = \mathrm{M}$

$$S(MNB) = \frac{4}{9}S(ABC)$$

ولما كان المثلثان CNP , ABC متشابهين

$$\frac{1}{3} = \frac{PN}{AB} = \text{نسبة التشابه}$$

$$S(CNP) = \frac{1}{9}S(ABC)$$

من و نجد أن:

$$\frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{S(CNP)}{S(MNP)} \quad \text{ومنه:} \quad S(CNP) = \frac{1}{4}S(MNP)$$

أنشطة

1 نشاط قطع مستقيمة متحاكية

قطعتان مستقيمتان معلومتان $[AB]$ و $[A'B']$. أتوجد تحاكيات تنقل $[AB]$ إلى $[A'B']$؟ عند الإيجاب، تعرَّفْها.

① حلّ المسألة

1. نفترض أنَّ المستقيمين (AB) و $(A'B')$ غير متوازيين. اشرح لماذا لا يوجد أي تحاك ينقل $[AB]$ إلى $[A'B']$.

2. نفترض أنَّ (AB) و $(A'B')$ متوازيان وأنّ $A \neq A'$ و $AB \neq A'B'$. عندئذ يتقاطع المستقيمان (AA') و (BB') في نقطة O. كما يتقاطع (AB') و $(A'B)$ في نقطة I.

a. من المثلثات المتحاكية، التي تظهر في الشكل، نتبيّن وجود تحاكيين h_1 و h_2 ينقل كلٌّ منهما $[AB]$ إلى $[A'B']$. تعرَّفْ هذين التحاكيين.

b. السؤال هو تبيان إذا كان هناك غيرهما. لنفترض وجود تحاكٍ h ينقل $[AB]$ إلى $[A'B']$. علِّل لماذا ينبغي أن تكون $h(A)$ هي A' أو B'، ثمّ أثبت أنَّ $h = h_1$ أو $h = h_2$.

3. حلّ المسألة عندما $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ و $A \neq A'$.

الحل

1. نفترض أن المستقيمين (AB) و $(A'B')$ غير متوازيين، عندئذٍ لا يوجد أي تحاكٍ ينقل $[AB]$ إلى $[A'B']$ لأن صورة قطعة مستقيمة $[AB]$ وفق تحاكٍ هي قطعة مستقيمة $[A'B']$

2. نفترض أن (AB) و $(A'B')$ متوازيان وأن $A \neq A'$ و $AB \neq A'B'$ عندئذ يتقاطع المستقيمان (AA') و (BB') في نقطة O ، كما يتقاطع (AB') و $(A'B)$ في نقطة I

a. من المثلثين المتحاكيين OAB , $OA'B'$ نلاحظ أنه يوجد تحاكٍ h_1 مركزه O وينقل A إلى A'

ومن المثلثين المتحاكيين IAB , $IA'B'$ نلاحظ أنه يوجد تحاكٍ h_2 مركزه I وينقل A إلى B'

إذن عندئذ هنالك تحاكيان.

b. بقي أن نثبت أن هذين التحاكيين وحيدان.

نفترض وجود تحاكٍ h ينقل $[AB]$ إلى $[A'B']$ عندئذ يكون:

$h(A) = A'$ ومنه $h = h_1$

أو $h(A) = B'$ ومنه $h = h_2$

وبالتالي h_1, h_2 وحيدان.

3.لنناقش حالة $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ و $A \neq B$

عندئذ هناك تحاكٍ وحيد h ينقل A إلى B' وينقل B إلى A' مركزه O نقطة تقاطع (AB') و $(A'B)$

$$h(A) = B'$$
$$h(B) = A'$$

② تطبيق : من خواص شبه المنحرف

$ABB'A'$ شبه منحرف قاعدتاه $[AB]$ و $[A'B']$، يتقاطع (AA') و (BB') في O، ويتقاطع (AB') و $(A'B)$ في I. نرمز إلى منتصفي $[AB]$ و $[A'B']$ بالترتيب بالرمزين E و F. بالاستفادة من إحدى خواص التحاكي، أثبت أنَّ النقاط O و E و I و F تقع على استقامة واحدة.

الحل

هنالك تحاكيين ينقلان $[AB]$ إلى $[A'B']$

التحاكي الأول الذي مركزه O وينقل A إلى A' و B إلى B'

$$h_{O,k}(A) = A'$$
$$h_{O,k}(B) = B'$$

وبما أن E منتصف $[AB]$ أي E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1)$ و $(B,1)$ والتحاكي يحافظ على مركز الأبعاد المتناسبة فإن: $h_{O,k}(E) = F$ حيث F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A',1)$ و $(B',1)$ (F منتصف $[A'B']$)

فالنقاط O , E , F على استقامة واحدة. □

التحاكي الثاني: مركزه I وينقل A إلى B' وينقل B إلى A'

$$h_{I,k'}(B) = A' \ , \ h_{I,k'}(A) = B'$$

E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1)$ و $(B,1)$ والتحاكي يحافظ على مركز الأبعاد المتناسبة

$$h_{I,k'}(E) = F$$

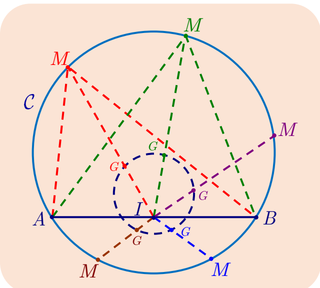
فالنقاط I , E , F على استقامة واحدة. □

من □ و □ نجد أن النقاط O , I , E , F على استقامة واحدة.

نشاط ٢ محلات هندسيّة بالاستفادة من التحاكي

A و B نقطتان من دائرة $\mathcal{C}$ مركزها O، M نقطةٌ ترسم $\mathcal{C}$ عدا النقطتين A و B. النقطة I هي منتصف $[AB]$، والنقطة G هي مركز ثقل المثلث MAB. الغاية من هذا التمرين هي إيجاد المحل الهندسي $\mathcal{L}$ للنقطة G عندما ترسم M الدائرة $\mathcal{C}$ عدا A و B.

① تخمين المحل الهندسي



الدائرة $\mathcal{C}$ والنقاط A و B و I هي عناصر ثابتة من الشكل. لتخمين $\mathcal{L}$ ، يمكن أن نختار عدداً من النقاط M ثُمّ ننشئ النقاط G الموافقة. فنحصل على نقاط تبدو وكأنها على دائرة أو على جزء من دائرة.

② إثبات صحّة التخمين

لنبحث عن علاقات بين G و M والنقاط الثابتة. النقاط M و G و I تقع على استقامة واحدة، وهذا يجعلنا نفكّر باستعمال تحاكٍ.

1. أثبت أنَّ G هي صورة M وفق تحاكٍ h مركزه I يطلب حساب نسبة هذا التحاكي.

2. إيجاد $\mathcal{L}$، المحل الهندسي للنقطة G، هو إذن إيجاد صورة الدائرة $\mathcal{C}$، عدا A و B، وفق h. ولمّا كانت صورة الدائرة $\mathcal{C}$ وفق h هي دائرة $\mathcal{C}'$، كانت $\mathcal{L}$ هي الدائرة $\mathcal{C}'$ محذوفٌ منها صورتا النقطتين A و B. أوجد $h(O)$ ثمَّ ارسم $\mathcal{L}$.

الحل

1. G مركز ثقل المثلث AMB ومنه $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$ ومنه النقطة G صورة النقطة M وفق تحاكٍ مركزه I ونسبته تساوي $\frac{1}{3}$

2. وبما أن M ترسم الدائرة $\mathcal{C}$ التي مركزها O عدا النقطتين A و B فإن G ترسم دائرة $\mathcal{C}'$ مركزها $O' = h(O)$ عدا النقطتين $A' = h(A)$ و $B' = h(B)$

النقطة O' تحقق: $\overrightarrow{IO'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IO}$ ، بما أن $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$ فإن O' نقطة تقاطع المستقيم المرسوم من G موازياً OM فتكون $h(B) = B'$, $h(A) = A'$ هما نقطتي تقاطع الدائرة $\mathcal{C}'$ مع AB .

فيكون المحل الهندسي للنقطة G الدائرة $\mathcal{C}'$ محذوفاً منها النقطتين B' , A' .

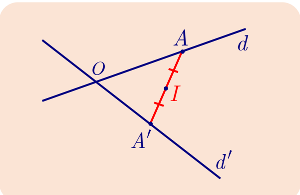
نشاط ٣ مسائل إنشاء

① الشرح بمثال

d و d' مستقيمان متقاطعان. النقطة I نقطة لا تقع على أيٍّ من هذين المستقيمين. نريد إنشاء نقطة A على d ونقطة A' على d' شرط أن تقع I في منتصف $[AA']$.

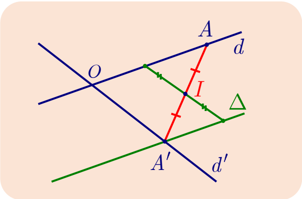
1. المرحلة الأولى : تحليل المسألة

لنفترض أنّ الإنشاء منجزٌ، ولندرس الشكل التقريبي بحثاً عن توضُّع النقاط المفيدة في هذا الرسم. عموماً، نحاول إثبات وقوع هذه النقاط عند تقاطع خطّين معلومين.



فمثلاً، تقع النقطة A' على المستقيم المعطى d'، فهل يمكننا إيجاد خطٍّ آخر تقع عليه النقطة A'؟ في الحقيقة، إنّ A' هي صورة A وفق التحاكي $h(I,-1)$ أي التناظر المركزي الذي مركزه I. والنقطة A تقع على المستقيم d، إذن، تقع A' على المستقيم Δ الذي هو صورة المستقيم d وفق h.

2. المرحلة الثانية : تركيب الحل



نبيّن في هذا الجزء طريقةً لإنشاء الشكل المطلوب، مبرِّرين صحّة هذا الإنشاء.

a. نرسم المستقيم Δ صورة المستقيم d وفق h. فيتقاطع Δ مع d' في A'. علِّل تقاطع هذين المستقيمين.

b. يتقاطع المستقيم $(A'I)$ مع d في النقطة A. فتكون I منتصف $[AA']$. لماذا؟

الحل

a. نرسم المستقيم Δ صورة المستقيم d وفق $h_{I,-1}$ فيتقاطع Δ' مع d' في النقطة A' كون المستقيم القاطع أحد مستقيمين متوازيين قاطع للآخر.

b. يتقاطع المستقيم $(A'I)$ مع d في النقطة A فيكون $h_{I,-1}(A) = A'$ ومنه I منتصف $[AA']$

② الاستفادة من انسحاب

$\mathcal{C}$ دائرة مركزها O، و A نقطة من هذه الدائرة، و B هي نقطة تُحقِّق $\overrightarrow{OB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$. نرمز بالرمز d إلى المستقيم المار بالنقطة B عمودياً على (OA). أنشئ على d نقطة M، وعلى $\mathcal{C}$ نقطة N تجعلان من الرباعي $OAMN$ متوازي أضلاع.

مساعدة : N هي صورة M وفق الانسحاب $T_{\overrightarrow{AO}}$.

الحل

نعين النقطة M على المستقيم d بحيث يكون $AM = R = OA$

أو: بما أن

$$\overrightarrow{OB} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OA}$$
$$AB = \frac{1}{2}OA$$

ومنه $AB = \frac{1}{2}AM$ فالزاوية $AMB = 30^{\circ}$ ومنه $MAB = 60^{\circ}$

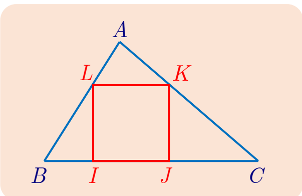
فنعين النقطة M على d بحيث يكون $MAB = 60^{\circ}$ ثم نرسم N صورة النقطة M وفق انسحاب متجهه $\overrightarrow{AO}$

③ الاستفادة من تحاكٍ

ABC مثلّثٌ حاد الزوايا. نريد إنشاء مربّع $IJKL$ داخل المثلّث ABC، على أن تقع النقطتان I و J على $[BC]$، و K على الضلع $[AC]$ و L على الضلع $[AB]$.

1. تحليل المسألة

بافتراض الإنشاء مُنجزاً، نرى مثلّثين متحاكيين، مما يوحى بالاستفادة من تحاكٍ. نرمز بالرمز h إلى التحاكي الذي مركزه A وينقل L إلى B.



a. عيّن $h(K)$ و $h(I)$ و $h(J)$.

b. عيّن المربّع $BEDC$ صورة $IJKL$ وفق h.

بافتراض الإنشاء منجزاً، نرى مثلثين متحاكيين، مما يوحي بالاستفادة من تحاكٍ ، نرمز بالرمز h إلى التحاكي الذي مركزه A وينقل L إلى B ، $h(L) = B$

الحل

a. + b. $h(J) = D$, $h(I) = E$, $h(K) = C$

2. تركيب الحل

نعود إلى المثلّث ABC.

a. أنشئ المربع $BEDC$، متذكّراً أنّ A و D تقعان في جهتين مختلفتين من (BC).

b. المستقيم (AE) يقطع (BC) في I، والمستقيم (AD) يقطع (BC) في J، والعمود على (BC) في I يقطع (AB) في L، والعمود على (BC) في J يقطع (AC) في K. أثبت أنّ $IJKL$ مربّع.

الحل

a. ننشئ المربع $BEDC$

b. المستقيم (AE) يقطع المستقيم (BC) في I

المستقيم (AD) يقطع المستقيم (BC) في J

والعمود على (BC) في I يقطع (AB) في L

والعمود على (BC) في J يقطع (AC) في K

وبما أن المربع $BEDC$ صورة $LIJK$ وفق تحاكٍ h والتحاكي يحافظ على التوازي والتعامد ويضرب الأطوال بالعدد $|K|$ فالشكل $LIJK$ مربع.

تمرينات ومسائل

١ d مستقيمٌ معادلته $2x - y + 3 = 0$ في معلمٍ $(O;\vec{i},\vec{j})$. يقطعُ d محور التراتيب في A.

نرمز إلى التحاكي الذي مركزه O ونسبته -2 بالرمز h.

1. اكتب إحداثيتي النقطة $A' = h(A)$.

2. استنتج معادلةً للمستقيم d' صورة d وفق h.

الحل

$d: 2x - y + 3 = 0$

لنقاطع d مع محور التراتيب فنضع $x = 0$

$-y + 3 = 0$ ومنه $y = 3$

$A(0,3)$

.1

$$h(A) = A'$$
$$\overrightarrow{OA'} = -2\,\overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{OA'} = (0,-6)$$
$$A'(0,-6)$$

d' .2 صورة d وفق h

حسب خواص التحاكي يكون $d \parallel d'$ ويمر بالنقطة A'

معادلة d' من الشكل $2x - y + c = 0$

$A' \in d'$ فهي تحقق معادلته:

$$0 + 6 + c = 0$$
$$c = -6$$
$$d': 2x - y - 6 = 0$$

٢ في معلمٍ $(O;\vec{i},\vec{j})$. نتأمل مستقيمين d و d' مستقيمان معادلتاهما بالترتيب $x - y + 3 = 0$ و $x - y - 2 = 0$. يقطع المستقيمان d و d' محور التراتيب في A و B بالترتيب.

1. تحقّق أنَّ d و d' متوازيان واحسب إحداثيات A و B.

2. ليكن h التحاكي الذي مركزه O ويحقق $h(A) = B$.

a. لماذا d' هو صورة d وفق h؟

b. ما نسبة هذا التحاكي؟

الحل

$$d : x - y + 3 = 0$$
$$d' : x - y - 2 = 0$$

1. $m_d = m_{d'} = 1$ ومنه $d \parallel d'$

لإيجاد إحداثيات A نقطة تقاطع d مع محور التراتيب نضع $x = 0$ فنجد: $\boxed{y = -2}$

$B(0, -2)$

2. $h(A) = B$

a. لما كان $d \parallel d'$ والمستقيم d يمر بـ A والمستقيم d' يمر بـ B و $h(A) = B$

فصورة المستقيم d' وفق h هو المستقيم d

b.

$$h(A) = B$$
$$\overrightarrow{OB} = (0, -2)$$
$$\overrightarrow{OA} = (0, 3)$$
$$\overrightarrow{OB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$$

ومنه $k = -\frac{2}{3}$ (نسبة التحاكي)

٣ نتأمّل، في معلمٍ متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$، الدائرتين $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ اللتين معادلتاهما بالترتيب

$x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$.

1. ارسم الدائرتين $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ وتحقق أنهما متماستان.

2. أثبت أنَّ $\mathcal{C}'$ هي صورة $\mathcal{C}$ وفق تحاكٍ h مركزه $I(2,0)$. ما نسبة هذا التحاكي؟

الحل

1. $(C): x^2 + y^2 = 4, O(0,0)\ ,\ R = 2$

$(C'): x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 = -8 + 9$

$(x-3)^2 + y^2 = 1$

$O'(3,0)\ \ ,\ \ R' = 1$

$OO' = 3 = R + R'$ فالدائرتان متماستان خارجاً.

2. $\overrightarrow{IO'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{IO}$ ومنه O' صورة O وفق تحاكٍ h مركزه I ونسبته $-\frac{1}{2}$

$\left(h_{I,-\frac{1}{2}}(O) = O' \right)$

$R' = \left|-\frac{1}{2}\right| R$

ومنه (C') صورة الدائرة (C) وفق h نسبة التحاكي $h = -\frac{1}{2}$

٤ $\mathcal{C}$ دائرة معادلتها $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$. عيّن، في كلٍ من الحالات الآتية، معادلةً للدائرة $\mathcal{C}'$، صورة $\mathcal{C}$ وفق التحويل T.

① T هو الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

② T هو التناظر الذي مركزه O.

③ T هو التحاكي الذي مركزه O ونسبته -2.

④ T هو التناظر بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $y = -1$.

٥

الحل

$$
\begin{aligned}
(C): & x^2+y^2-6x-2y+6=0 \\
& x^2-6x+9+y^2-2y+1=-6+9+1 \\
& (x-3)^2+(y-1)^2=4
\end{aligned}
$$

$I(3,1)$ مركز الدائرة. $R=2$,

① T هو الانسحاب الذي شعاعه: $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$

$I'(3+1,1+2)$

$I'(4,3)$ مركز الدائرة (C')

$R=R'=2$

فمعادلة الدائرة (C') عندئذ: $(x-4)^2+(y-3)^2=4$

② T هو التناظر الذي مركزه O

$$
\begin{aligned}
& I'(-3,-1) \\
& R=R'=2 \\
& (x+3)^2+(y+1)^2=4
\end{aligned}
$$

③ T التحاكي الذي مركزه O ونسبته -2

$$
\begin{aligned}
& \overrightarrow{OI'}=-2\,\overrightarrow{OI} \\
& \overrightarrow{OI'}=(-6,-2)
\end{aligned}
$$

ومنه:

$$
\begin{aligned}
& I'(-6,-2) \\
& R'=\left|-2\right|R=4 \\
& (x+6)^2+(y+2)^2=16
\end{aligned}
$$

④ T هو التناظر بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $y=-1$

$M_o(3,-1)$ هي المسقط القائم للنقطة $I(3,1)$ على المستقيم $y=-1$

بفرض I' نظيرة النقطة I بالنسبة إلى M_o فتكون M_o منتصف القطعة المستقيمة $[I\,I']$

$$
\begin{aligned}
&3=\frac{3+x_{I'}}{2}\\
&x_{I'}=3\\
&-1=\frac{1+y_{I'}}{2}\\
&y_{I'}=-2-1=-3\\
&I'(3,-3)\\
&R=R'=2\\
&(C'):(x-3)^2+(y+3)^2=4
\end{aligned}
$$

٥ في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ دائرتان، معادلتاهما بالترتيب

$x^2+y^2-6x+8y=0$ و $x^2+y^2-12x-6y+41=0$

احسب إحداثيات مراكز التحاكيات الذي ينقل كلٌّ منها $\mathcal{C}$ إلى $\mathcal{C}'$.

الحل

$$
\begin{aligned}
(C):\;&x^2+y^2-6x+8y=0\\
&x^2-6x+9+y^2+8y+16=9+16\\
&(x-3)^2+(y+4)^2=25\\
&I(3,-4)\\
&R=5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(C'):\;&x^2+y^2-12x-6y+41=0\\
&x^2-12x+36+y^2-6y+9=-41+36+9\\
&(x-6)^2+(y-3)^2=4\\
&I'(6,3)\;,\;\; R'=2\\
&R=5
\end{aligned}
$$

بفرض مركز التحاكي h الذي ينقل I إلى I' هو النقطة $A(a,b)$ ونسبة التحاكي k عندئذ يكون:

$$\overrightarrow{AI'} = k\,\overrightarrow{AI}$$
$$R' = |k|.R$$

$$2 = |k|.5$$
$$|k| = \frac{2}{5}$$

إما $k = \frac{2}{5}$ أو $k = -\frac{2}{5}$

في حالة $k = \frac{2}{5}$:

$$\overrightarrow{AI'} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AI}$$

$$(6-a\ ,\ 3-b) = \frac{2}{5}(3-a\ ,\ -4-b)$$
$$(6-a\ ,\ 3-b) = (\frac{6}{5}-\frac{2}{5}a\ ,\ -\frac{8}{5}-\frac{2}{5}b)$$
$$6-\mathrm{a} = \frac{6}{5}-\frac{2}{5}a$$
$$6-\frac{6}{5} = \frac{3}{5}a$$
$$\frac{24}{5} = \frac{3}{5}a$$

ومنه $a = 8$

$$3-b = -\frac{8}{5}-\frac{2}{5}b$$
$$3+\frac{8}{5} = \frac{3}{5}b$$
$$b = \frac{23}{3}$$

فمركز التحاكي عندئذ يكون $A_1(8,\frac{23}{3})$

في حالة $k = -\frac{2}{5}$: $\overrightarrow{AI'} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AI}$

$$(6-a\ ,\ 3-b) = -\frac{2}{5}(3-a\ ,\ -4-b)$$
$$(6-a\ ,\ 3-b) = (-\frac{6}{5}+\frac{2}{5}a\ ,\ \frac{8}{5}+\frac{2}{5}b)$$
$$6-\mathrm{a} = -\frac{6}{5}+\frac{2}{5}a$$
$$\frac{36}{5} = \frac{7}{5}a$$
$$a = \frac{36}{7}$$

$$3-b = \frac{8}{5}+\frac{2}{5}b$$
$$3-b = \frac{8}{5}+\frac{2}{5}b$$
$$\frac{7}{5} = \frac{7}{5}b$$
$$b = 1$$

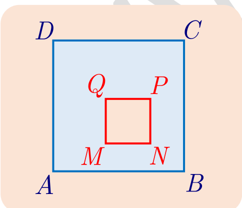
فمركز التحاكي عندئذ يكون $A_2(\frac{36}{7}\ ,1)$

مما سبق نستنتج أن هنالك تحاكيان ينقلان (C) إلى (C')

الأول هو $h_{1_{A_1,\frac{2}{5}}}$ والثاني هو $h_{2_{A_2,-\frac{2}{5}}}$

لنتعلّم البحث معاً

٦ إثبات تلاقي مستقيمات في نقطة واحدة



$ABCD$ و $MNPQ$ مربعان أضلاعهما متوازية مثنى مثنى. أثبت أنَّ المستقيمات (AM) و (BN) و (CP) و (DQ) تتلاقى في نقطة واحدة.

نحو الحلّ

لنتأمّل الشكل. «المربع الصغير» تصغيرٌ للمربع الكبير، يمكننا إذن التفكير بأنهما متحاكيان.

نريد إثبات تلاقي أربعة مستقيمات. أحد مداخل البرهان هو إثبات أنَّ اثنين من هذه المستقيمات يمران بنقطة تقاطع الاثنين الآخرين.

ارسمْ، على سبيل المثال، (DQ) و (AM) ولتكن O نقطة تقاطعهما.

✌ يحثنا تحاكي المثلثين OAD و OMQ، بالإضافة إلى ما توصلنا إليه أعلاه، على الاستفادة من التحاكي h الذي مركزه O وينقل النقطة A إلى M. لإثبات أنَّ (CP) يمرُّ بالنقطة O، يكفي التيقُّن من أنَّ $h(C) = P$.

1. لماذا تقع $h(C) = C'$ على المستقيم المار بالنقطة Q موازياً (CD)؟
2. لماذا تقع C' على (OC)؟ أكمل.
3. أثبت أنَّ النقاط O و N و B تقع على استقامة واحدة.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

الحل

إن المستقيمين (DQ) , (AM) متقاطعان ولتكن نقطة تقاطعهما O

نلاحظ تحاكي المثلثين OMQ , AOD ومنه يوجد تحاكٍ مركزه O ينقل A إلى M

$h(A) = M$

بفرض $h(C) = C'$

ووجدنا $h(D) = Q$

ومنه C' صورة C وفق h هي نقطة تقاطع المستقيم المار من Q موازياً (DC) والمستقيم (OC)

ونلاحظ تحاكي المثلثين ODC , $OC'Q$ حيث: $h(C) = C'$, $h(D) = Q$

ومنه: $C'Q$ يوازي CD

$C'Q = k\ CD$

حيث $k = \dfrac{QM}{DA}$

وبما أن:

$$QP = QM$$
$$DC = AD$$

QP يوازي DC

فإن $\overrightarrow{PQ} = k\,\overrightarrow{CD}$ ومنه $C' = P$ ومنه $h(C) = P$

أصبح لدينا صور ثلاث نقاط من المربع $ABCD$

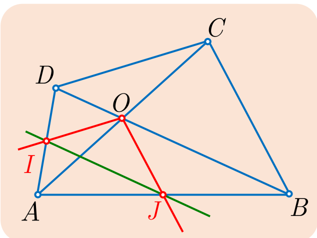
$$h(A) = M \ , \ h(D) = Q \ , \ h(C) = P$$

ونحن نعلم أن صورة مربع وفق تحاكٍ مربع ومنه صورة $ABCD$ وفق التحاكي h الذي مركزه O هو المربع $MNPQ$ ومنه $h(B) = N$ فالنقاط B , N , O تقع على استقامة واحدة

فالمستقيمات (DQ) , (CP) , (BN) , (AM) تتلاقى في نقطة واحدة.

٧ إثبات توازي مستقيمين

$ABCD$ رباعي محدب، قطراه $[AC]$ و $[BD]$ متقاطعان في O.
المستقيم المرسوم من O موازياً (DC) يقطع $[DA]$ في I،
المستقيم المرسوم من O موازياً (BC) يقطع (AB) في J. أثبت أنَّ المستقيمين (IJ) و (BD) متوازيان.



نحو الحلّ

☝ لنحلّلْ الشكل كي نستنبط النتائج. استناداً إلى الفرْض، (OI) يوازي (CD) و (OJ) يوازي (CB).
فإذا تفحصنا الشكل، تبيّنّا مثلثاتٍ متحاكيةً مشتركة بالرأس A، تحثنا على استعمال تحاكٍ مركزه النقطة A.

1. دلّ على زوجين من المثلثات المتحاكية.

2. احسب نسبة التحاكي في كلٍّ من حالتي التحاكي.

✌ يتعلق الأمر بإثبات توازي مستقيمين. فإنْ استعملنا تحاكياً h، كان إحدى طرائق الحل هو إثبات أنَّ أحد المستقيمين هو صورة الآخر وفق h.

1. بالاستفادة مثلاً من التحاكي h الذي مركزه A وينقل O إلى C، أثبت أنَّ صورة المستقيم (IJ) هي المستقيم (DB).

2. أنجز هذا الإثبات.

أنجِزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

الحل

نلاحظ تحاكي المثلثين AJO , ABC لأن OJ يوازي CB حيث هذا التحاكي h ينقل النقطة B إلى J ومركزه A

ولما كانت .. منتصف $[AB]$ كانت نسبة التحاكي $k = \frac{1}{2}$

حيث $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

ونلاحظ تحاكي المثلثين AIO , ADC لأن OI يوازي DC حيث هذا التحاكي هو نفسه h الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ وهو ينقل C إلى O وينقل D إلى I حسب خواص التحاكي

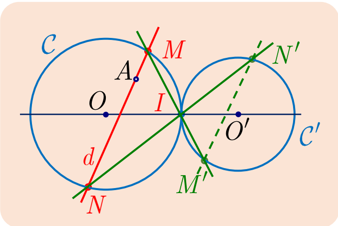
وبما أن $h(D) = I$, $h(B) = J$ فإن IJ يوازي BD

٨ مستقيم متحول يمرّ بنقطة ثابتة

C و C' دائرتان متماستان خارجاً في I، مركزاهما O و O' ونصفا قطريهما r و r'، مع $r \neq r'$. ليكن d مستقيماً ماراً بنقطةٍ معطاة A، وقاطعاً الدائرة C في M و N. يقطعُ المستقيمُ

الدائرة (MI) في C' في M'، و يقطعها المستقيم (NI) في N'. أثبت أنَّ المستقيم $(M'N')$ يمرُّ بنقطةٍ ثابتة عندما يدور المستقيم d حول A.

نحو الحلّ



لنتأمّل الشكل كي نستنبط بعض النتائج، ونخمّن موضع النقطة الثابتة. يبدو أنَّ المثلثين IMN و $IM'N'$ متحاكيان. أيَكون المستقيم $(M'N')$ صورة (MN) وفق تحاكٍ h مركزه I؟ لنقبل بوجود مثل هذا التحاكي ولنرَ ما يترتَّب على ذلك من نتائج.

يتعلّق موضع النقطة الثابتة بموضع النقطة A، ولمّا كانت A تقع على (MN)، وقعت صورتها $h(A) = A'$ على $(M'N')$. فمن المعقول التفكير بأنَّ A' هي النقطة المنشودة. يبقى إذن إيجاد التحاكي h الذي مركزه I وينقل (MN) إلى $(M'N')$. ولكن تقع النقطتان M و N على الدائرة $\mathcal{C}$، وتقع صورتاهما M' و N' على الدائرة $\mathcal{C}'$، نفكِّرُ إذن بالتحاكي الذي مركزه I وينقل $\mathcal{C}$ إلى $\mathcal{C}'$.

1. احسب نسبة التحاكي h ولاحظ أنَّها لاتتعلق بالمستقيم d.

2. عيّن $h(M)$ و $h(N)$.

أنجِز البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

الحل

بما أن صورة دائرة وفق تحاكٍ هو دائرة لنفكر بوجود تحاكٍ ينقل الدائرة (C) إلى (C')

نفترض أن مركز هذا التحاكي هو I

$$\overrightarrow{IO'} = k\ \overrightarrow{IO}$$
$$r' = |k| r$$
$$|k| = \frac{r'}{r}$$

ومنه $|k| = -\frac{r'}{r}$ لأن الشعاعين $\overrightarrow{IO'}, \overrightarrow{IO}$ مختلفان بالجهة وبالتالي صورة أي نقطة من الدائرة (C)

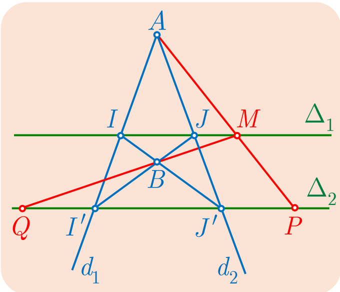
وفق هذا التحاكي هو نقطة من الدائرة (C')

$$h(M) = M'$$
$$h(N) = N'$$

وبما أن المستقيم (MN) يمر بنقطة ثابتة A فصورته المستقيم $(M'N')$ يمر بنقطة ثابتة $h(A) = A'$ لأن صورة مستقيمات متلاقية بنقطة ثابتة هي مستقيمات متلاقية بنقطة ثابتة.

٩ مساواة شعاعيّة

في الشكل المجاور Δ_1 و Δ_2 مستقيمان متوازيان، M نقطة ما من Δ_1، المستقيم (AM) يقطع Δ_2 في P والمستقيم (BM) يقطع Δ_2 في Q. أثبت أنَّ $\overrightarrow{I'Q} = -\overrightarrow{J'P}$.



نحو الحل

- يبيّن الشكل خمسة أزواج من المثلّثات المتحاكية، بعضها بالنسبة إلى الرأس A وبعضها الآخر بالنسبة إلى الرأس B. عيّن أزواج المثلّثات المتحاكية الظاهرة في الشكل.

- يبدو من الصعب إثبات الخاصّة المطلوبة مباشرة، نفكّر إذن بالتعبير عن هذين الشعاعين بدلالة شعاع ثالث، خاصّة وأنّ الملاحظة السابقة تبيّن أنّ الشعاع $\overrightarrow{J'P}$ هو صورة الشعاع $\overrightarrow{JM}$ وفق تحاك مركزه A، و $\overrightarrow{I'Q}$ هو صورة الشعاع $\overrightarrow{JM}$ وفق تحاك مركزه B. إذن

1. ليكن h_1 التحاكي الذي مركزه A وينقل J إلى J'، ونسبته k_1. أثبت أنّ $\overrightarrow{J'P} = k_1\overrightarrow{JM}$.

2. ليكن h_2 التحاكي الذي مركزه B وينقل J إلى I'، ونسبته k_2. أثبت أنّ $\overrightarrow{I'Q} = k_2\overrightarrow{JM}$.

- لإنجاز المطلوب يكفي إذن إثبات أنّ $k_1 = -k_2$. وليس هذا صعباً إذا تذكّرنا أننا لم نستعمل بعدُ جميع الفرضيّات، وبوجه خاص كون AIJ و $AI'J'$ متحاكيين، وكذلك الأمر بالنسبة إلى BIJ و $BI'J'$.

1. أثبت أنّ $\overrightarrow{I'J'} = k_1\overrightarrow{IJ}$.

2. أثبت أنّ $\overrightarrow{I'J'} = -k_2\overrightarrow{IJ}$.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

الحل

نلاحظ أن المثلثين AJM , AJP متحاكيان حيث هذا التحاكي h مركزه A وينقل M إلى P ونسبته k_1

$$h(M) = P \ , \ h(J) = J'$$

فيكون $\overrightarrow{J'P} = k\ \overrightarrow{JM}$....①

ونلاحظ أيضاً أن المثلثين BJM , $BI'Q$ متحاكيان حيث هذا التحاكي h_1 مركزه B وينقل M إلى Q وينقل J إلى I' ونسبته k_2

$$h_1(M) = I' \ , \ h_1(J) = Q$$

فيكون $\overrightarrow{I'Q} = k_2\ \overrightarrow{JM}$....②

ونلاحظ أن المثلثين BIJ , $BI'J'$ متحاكيان وفق التحاكي h_1 الذي مركزه B ونسبته k_2

فيكون $\overrightarrow{I'J'} = -k_2\ \overrightarrow{IJ}$....③

ونلاحظ أن المثلثين AIJ , $AI'J'$ متحاكيان وفق التحاكي h الذي مركزه A ونسبته k_1

فيكون $\overrightarrow{I'J'} = k_1\ \overrightarrow{IJ}$....④

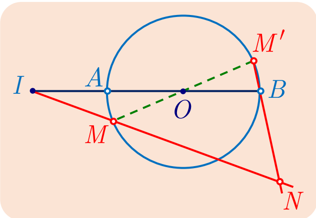
من ③ و ④ نجد أن $k_1 = -k_2$

بتعويضه في ① و ② نجد أن
$$\overrightarrow{J'P} = -k_2\ \overrightarrow{JM}$$
$$\overrightarrow{I'Q} = k_2\ \overrightarrow{JM}$$

ومنه $\overrightarrow{I'Q} = -\overrightarrow{J'P}$

١٠ البحث عن محلٍّ هندسي

$\mathcal{C}$ دائرةٌ مركزها O، و AB أحدُ أقطارها. I هي نقطة تحقّق $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AO}$. M نقطةٌ من $\mathcal{C}$ مختلفة عن A و B، و M' هي النقطة المقابلة قطرياً للنقطة M، وأخيراً N هي نقطة تقاطع المستقيمين (IM) و (BM'). عيّن المحل الهندسي للنقطة N عندما ترسم M الدائرة $\mathcal{C}$ عدا النقطتين A و B.



نحو الحل

☝ علينا بدايةً الاهتمام بالنقاط الثابتة والنقاط المتحركة.

- النقاط I و A و O و B نقاط ثابتة.
- النقاط M و M' و N نقاط متحركة، ترسمُ M الدائرة $\mathcal{C}$ عدا A و B، إذن كذلك الأمر بالنسبة إلى النقطة M'، وتتعلّق مواضع النقطة N بمواضع M.

لنبحث، في الشكل، عن الروابط بين النقطتين M و N من جهة والنقاط الثابتة من جهة أخرى.

1. $[AB]$ و $[MM']$ قطران في الدائرة $\mathcal{C}$، ماذا تستنتج بشأن الشكل الرباعي $AMBM'$؟ استنتج من ذلك أنَّ (AM) و (BN) متوازيان.

2. المثلثان IAM و IBN متحاكيان. استنتج أنَّ N هي صورة M وفق تحاكٍ h يُطلب معرفة مركزه ونسبته. لاحظ أنهما لا يتبعان موقع M على $\mathcal{C}$.

✌ وهكذا فإنَّ كلَّ نقطة N مقرونة بنقطة M هي صورتها وفق تحاكٍ ثابت. المحل الهندسي للنقطة N هي، كما نعلم من تعريفه، مجموعة جميع النقاط N المرتبطة بجميع النقاط M من الدائرة $\mathcal{C}$ عدا النقطتين A و B. فهي إذن صورة $\mathcal{C}$ عدا A و B وفق التحاكي h.

عيّن هذه الصورة.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

الحل

نلاحظ أن قطري الشكل $MBM'A$ متناصفان فالشكل متوازي أضلاع. ومنه BN يوازي AM

فالمثلثان IBN , IAM متحاكيان هذا التحاكي h مركزه I وينقل M إلى N وأيضاً ينقل A إلى B

$$h(A) = B \,,\, h(M) = N$$

ولدينا فرضاً $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AO}$

$$\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AO}$$
$$\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

ومنه $\overrightarrow{IB} = 3\,\overrightarrow{IA}$

فالتحاكي h مركزه I ونسبته 3 وبما أن M ترسم الدائرة (C) التي مركزها O ونصف قطرها OA عدا النقطتين A , B فإن $h(M) = N$ ترسم دائرة (C') مركزها $h(O) = O'$ ونصف قطرها $3\,OA$ عدا النقطتين $h(A) = A' = B$ و $h(B) = B'$ (B' النقطة المقابلة قطرياً للنقطة B في الدائرة (C')) حيث:

$$\overrightarrow{IO'} = 3\,\overrightarrow{IO}$$
$$\overrightarrow{IA'} = 3\,\overrightarrow{IA}$$
$$\overrightarrow{IB'} = 3\,\overrightarrow{IB}$$

١١ مسألة وجود

نتأمّل، في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، الدائرتين $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$، اللتين معادلتاهما بالترتيب :

$$x^2 + y^2 - 14x + 2y + 41 = 0 \text{ و } x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$$

المطلوب هو تبيان وجود تحاكيات تنقل $\mathcal{C}$ إلى $\mathcal{C}'$. وتعيينها في حال وجودها.

نحو الحلّ

لنفترض وجود تحاكٍ h، ينقل $\mathcal{C}$ إلى $\mathcal{C}'$ فماذا نستنتج ؟ إذا رمزنا بالرمزين A و A' إلى مركزي $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ على التوالي. وبالرمزين r و r' إلى نصفي قطريهما كان $h(A) = A'$ و $r' = |k|r$.

1. احسب إحداثيات A و A' واحسب r و r'.

2. ارسم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3. استنتج أنَّ $|k| = \frac{3}{2}$ ومن ثمَّ وجود قيمتين ممكنتين للعدد k هما $k_1 = \frac{3}{2}$ و $k_2 = -\frac{3}{2}$.

يوجد إذن تحاكيان ممكنان. ليكن h_1 ذلك الذي نسبته k_1 ومركزه النقطة I_1، و h_2 ذلك الذي نسبته k_2 ومركزه النقطة I_2.

1. أثبت أنَّ I_1 هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,-3)$ و $(B,2)$، وأنَّ I_2 هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,3)$ و $(B,2)$.

2. أنشئ على الشكل النقطتين I_1 و I_2.

إذن لقد أثبتنا أنّ أي تحاكٍ h ينقل $\mathcal{C}$ إلى $\mathcal{C}'$ هو واحدٌ من بين التحاكيين h_1 و h_2. ولكن لم نثبت بعدُ أنّ هذين التحاكيين يجيبان فعلاً عن هذه المسألة.

أثبت أنَّ صورة $\mathcal{C}$ وفق h_1 أو h_2 هي الدائرة $\mathcal{C}'$.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

الحل

1. $(C): x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = -16 + 16 + 4$$

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$A(4,2) \ , \ r = 2$$

$$(C'): x^2 + y^2 - 14x + 2y + 41 = 0$$

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 + 2y + 1 = -41 + 49 + 1$$

$$(x-7)^2 + (y+1)^2 = 9$$

$$A'(7,-1) \ , \ r' = 3$$

2. نفترض وجود تحاكٍ h ينقل (C) إلى (C') فيكون: $h(A) = A'$

$$r' = |k| r$$
$$3 = |k| \cdot 2$$

$k_1 = \frac{3}{2}$ أو $k_2 = -\frac{3}{2}$

يوجد إذن تحاكيان ممكنان

ليكن h_1 ذلك الذي نسبته k_1 ومركزه النقطة I_1

و h_2 ذلك الذي نسبته k_2 ومركزه النقطة I_2

إن I_1 هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A',2)$, $(A,-3)$ لأن ذلك يحقق:

$$-3\overrightarrow{I_1A} + 2\overrightarrow{I_1A'} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{I_1A'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{I_1A}$$

$h_1(A') = A$: h_1 تحاكٍ مركزه I_1 ونسبته $k_1 = \frac{3}{2}$

ومنه:

$$\overrightarrow{AI_1} = \frac{2}{-3+2}\overrightarrow{AA'}$$
$$\overrightarrow{AI_1} = -2\overrightarrow{AA'}$$

و إن I_2 هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A',2)$, $(A,3)$ لأن ذلك يحقق:

$$3\overrightarrow{I_2A} + 2\overrightarrow{I_2A'} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{I_2A'} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{I_2A}$$

$h_2(A') = A$: h_2 تحاكٍ مركزه I_2 ونسبته $k_2 = -\frac{3}{2}$

ومنه:

$$\overrightarrow{AI_2} = \frac{2}{2+3}\overrightarrow{AA'}$$
$$\overrightarrow{AI_2} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AA'}$$

لقد أثبتنا أن أي تحاكٍ h ينقل (C) إلى (C') هو واحد من بين التحاكيين h_2 , h_1 ولكن لم نثبت بعد أن هذين التحاكيين يجيبان فعلاً عن هذه المسألة.

لنوجد صورة (C)وفق h_1 الذي مركزه I_1 ونسبته $k_1 = \frac{3}{2}$

لنوجد إحداثيات I_1 أولاً:

$$\overrightarrow{AI_1} = (x-4, y-2)$$

$$\overrightarrow{AA'} = (3, -3)$$

$$\overrightarrow{AI_1} = -2\overrightarrow{AA'}$$

$$(x-4, y-2) = (6, -6)$$

$x - 4 = -6$ ومنه $x = -2$

$y - 2 = 6$ ومنه $y = 8$

$$I_1(-2, 8)$$

قُدُماً إلى الأمام

١٢ $ABCD$ رباعي محدَّب، O هي نقطة تقاطع قطريه AC و BD . المستقيم المرسوم من A موازياً (BC) يقطع (BD) في E، والمستقيم المرسوم من B موازياً (AD) يقطع (AC) في F.

1. ليكن h_1 التحاكي الذي مركزه O ونسبته k_1 ويحقّق $h_1(A) = F$. أثبت أنَّ $h_1(D) = B$، واستنتج أنَّ $\overrightarrow{OF} = k_1\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB} = k_1\overrightarrow{OD}$.

2. ليكن h_2 التحاكي الذي مركزه O ونسبته k_2 ويحقّق $h_2(C) = A$. أثبت أنَّ $h_2(B) = E$ واستنتج أنَّ $\overrightarrow{OE} = k_2\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OA} = k_2\overrightarrow{OC}$.

3.a. استنتج من الأسئلة السابقة أنَّ $\overrightarrow{OE} = k_1k_2\overrightarrow{OD}$ و $\overrightarrow{OF} = k_1k_2\overrightarrow{OC}$.

b. أثبت أنَّ المستقيمين (DC) و (EF) متوازيان.

الحل

1. ليكن h_1 التحاكي الذي مركزه O ونسبته k_1 ، $h_1(A) = F$ ومنه: $\overrightarrow{OF} = k_1\,\overrightarrow{OA}$...①

لما كان $FB \parallel DA$ فالمثلثان OFB , ODA متحاكيان ومنه $h_1(D) = B$ ومنه: $\overrightarrow{OB} = k_1\,\overrightarrow{OD}$....②

2. ليكن h_2 التحاكي الذي مركزه O ونسبته k_2 ويحقق $h_2(C) = A$ ومنه: $\overrightarrow{OA} = k_2\,\overrightarrow{OC}$....③

لما كان $AE \parallel BC$ فالمثلثان OCB , OEA متحاكيان ومنه $h_2(B) = E$ ومنه: $\overrightarrow{OE} = k_2\,\overrightarrow{OB}$....④

3.a. من ② و ④ نستنتج أن: $\overrightarrow{OE} = k_2k_1\,\overrightarrow{OD}$....❶

من ① و ③ نستنتج أن: $\overrightarrow{OF} = k_1k_2\,\overrightarrow{OC}$....❷

b. من ❶ و ❷ نستنتج أنه يوجد تحاكٍ h_3 مركزه O ونسبته $k_1.k_2$ ينقل C إلى F وينقل D إلى E

ومنه صورة المستقيم (DC) وفق التحاكي h_3 هو المستقيم (EF)

وحسب خواص التحاكي يكون المستقيمان (DC) و (EF) متوازيان.

١٣ $ABCD$ شبه منحرف، و O نقطة تقاطع قطريه. و M نقطة « خارج » شبه المنحرف. المستقيم المرسوم من C موازياً (AM) يقطع المستقيم المرسوم من D موازياً (BM) في N. ليكن h التحاكي الذي مركزه O ويحقق $h(A) = C$. أثبت، مستفيداً من التحاكي h، أنَّ النقاط O و M و N تقع على استقامة واحدة.

الحل

$h(A) = C$

وبما أن AM يوازي CN ، صورة المستقيم (AM) وفق h هو المستقيم (CN)

ولما كان AB يوازي DC و$h(A) = C$ فإن $h(B) = D$ (المثلثان OAB , ODC متحاكيان)

وبما أن BM يوازي ND ، صورة المستقيم (BM) وفق h هو المستقيم (DN)

ولما كان AM , BM متقاطعان في M فصورتاهما DN, CN متقاطعان في $h(M) = N$

فالنقاط N, M, O على استقامة واحدة.

١٤ $[OO']$ قطعة مستقيمة طولها 6، و I نقطة منها تحقق $OI = 4$. لتكن $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ الدائرتين اللتين مركزاهما بالترتيب O و O' والمارتين بالنقطة I. يمرُّ مستقيمٌ d، مختلفٌ عن (OO')، بالنقطة I ويقطع $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ في M و N على التوالي.

a. 1. ما صورة C وفق التحاكي h الذي مركزه I ونسبته $-\frac{1}{2}$؟

b. أثبت أنَّ المستقيمين (OM) و $(O'N)$ متوازيان.

2. لتكن N' النقطة المقابلة قطرياً للنقطة N على الدائرة $\mathcal{C}'$، و A نقطة تقاطع (MN') و (OO').

a. احسب العدد k الذي يحقق $\overrightarrow{AO} = k\overrightarrow{AO'}$.

b. استنتج أنَّ النقطة A ثابتةٌ عندما يتحوّل المستقيم d حول I.

c. تحقّق أنَّ A هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(O,-1)$ و $(O',2)$.

الحل

a .1 لما كان $\overrightarrow{IO'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{IO}$ كان $h(O) = O'$

$$r_1 = 4 \ , \ r_2 = 2$$

$$r_2 = \left|-\frac{1}{2}\right| r_1$$

ومنه صورة الدائرة C وفق التحاكي h الذي مركزه I ونسبته $-\frac{1}{2}$ هو الدائرة C'

b. لما كان $h(O) = O'$, $h(M) = N$ كان $O'N$ يوازي OM

a .2 $O'N$ يوازي OM ومنه $O'N'$ يوازي OM

نلاحظ وجود مثلثين متحاكيين هما AOM , $AO'N'$

إن هذا التحاكي مركزه A وينقل O' إلى O

$$\overrightarrow{AO} = k\,\overrightarrow{AO'}$$

ومن تشابه المثلثين الأخيرين نجد أن:

$$\frac{AO}{AO'} = \frac{OM}{O'N'} = \frac{4}{2} = 2 = k$$

ومنه: $\overrightarrow{AO} = 2\,\overrightarrow{AO'}$

b. لما كان $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{AO'}$ و O' , O ثابتتين فإن A نقطة ثابتة.

c. لما كان $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{AO'}$

$$2\overrightarrow{AO'} - \overrightarrow{AO} = \vec{0}$$

ومنه A مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(O,-1),(O',2)$

١٥ A و B نقطتان، نرمز بالرمز f إلى التحويل الذي يقرنُ بكل نقطةٍ M من المستوي، نقطةً M' تحقّق $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$، وليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(B,1)$. ارسمْ النقطة G وأثبت أنَّ $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$. ثُمَّ استنتج طبيعة التحويل f.

الحل

لتعيين G : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$$2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

ومنه أياً كانت M فإن $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MG}$

$$\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MG}$$

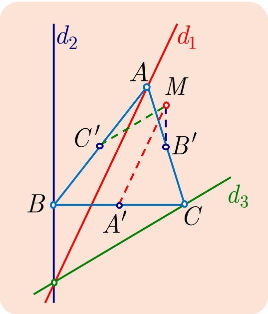
$$\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = 3\overrightarrow{MG}$$
$$\overrightarrow{GM'} = 3\overrightarrow{MG}$$
$$\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$$

ومنه نلاحظ أن هنالك تحاكٍ ينقل النقطة M إلى M' مركزه G ونسبته -2

$$h_{G,-2}(M) = M'$$

ومنه طبيعة التحويل f هو تحاكٍ مركزه G ونسبته -2

١٦ ABC مثلث، النقاط A' و B' و C' هي على التوالي منتصفات BC و CA و AB . M نقطة في المستوي (ABC)، و d_1 هو المستقيم المار بالنقطة A موازياً (MA')، و d_2 هو المستقيم المار بالنقطة B موازياً (MB')، و d_3 هو المستقيم المار بالنقطة C موازياً (MC'). نضع G مركز ثقل المثلث ABC، و h التحاكي الذي مركزه G ونسبته -2.



1. a. لماذا d_1 هي صورة (MA') وفق h؟

b. ما صورة كلٍّ من (MB') و (MC') وفق h؟

2. استنتج أنَّ المستقيمات d_1 و d_2 و d_3 تتلاقى في نقطة واحدة M' وأنَّ النقاط G و M و M' تقع على استقامة واحدة.

3. **مستقيم أويلر**. ليكن O مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC، ولنأخذ النقطة M في O.

a. أثبت أنَّ صورة (OA') وفق h هي الارتفاع المرسوم من A في المثلث ABC.

b. استنتج أنه إذا انطبقت M على O انطبقت M' على النقطة H أي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

c. استنتج أنَّ النقاط O و H و G واقعة على مستقيم واحد، يسمى **مستقيم أويلر**.

الحل

1. a. G مركز ثقل المثلث و h التحاكي الذي مركزه G ونسبته -2

$\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$ ومنه $h_{G,-2}(A') = A$

بما أن $(MA') \parallel d_1$ و $h(A') = A \in d$ إذن صورة المستقيم (MA') هو المستقيم d_1 وفق h حسب خواص التحاكي.

b. بالمثل نجد أن صورة المستقيم (MB') هو المستقيم d_2 وفق h و صورة المستقيم (MC') هو المستقيم d_3 وفق h

2. بما أن المستقيمات (MA') و (MB') و (MC') تتلاقى في نقطة واحدة M فصورها وفق h التي هي d_1 و d_2 و d_3 تتلاقى في نقطة واحدة هي $h(M) = M'$

وبما أن $h(M) = M'$ فالنقاط M', M, G تقع على استقامة واحدة.

a. 3. $h(A') = A$

لنرسم الارتفاع النازل من A وليكن AE فيكون $OA' \parallel AE$

وبما أن التحاكي يحافظ على التوازي و $h(A') = A$ ومنه صورة O وفق h هي نقطة تقاطع OG مع AE ولتكن H ومنه صورة المستقيم (OA') وفق h هو الارتفاع المرسوم من A.

b. بالمثل نجد أن صورة (OB') وفق h هو الارتفاع المرسوم من B

وصورة (OC') وفق h هو الارتفاع المرسوم من C

وبما أن (OA') , (OB') , (OC') تتلاقى في النقطة O فصورها الارتفاعات المرسومة من A , B , C تتلاقى في نقطة واحدة هي $h(O) = H$

وبما أن M انطبقت على O فرضاً فصورتها M' تنطبق على H وفق h

c. بما أن $h(O) = H$ فالنقاط G , H , O تقع على استقامة واحدة يسمى مستقيم أولر.

١٧ ليكن h التحاكي الذي مركزه $I\ \ 2,-1$ ونسبته $k = -\dfrac{3}{2}$.

1. $\mathcal{C}$ هي الدائرة التي مركزها O والمارة بالنقطة I. ارسم الدائرة $\mathcal{C}'$، صورة $\mathcal{C}$ وفق h، واكتب معادلةً لها.

2. d هو المستقيم الذي معادلته $x - 3y + 5 = 0$. ارسم المستقيم d'، صورة d وفق h، واكتب معادلةً له.

الحل

1. $h(I) = I$ ومنه C' تمر بالنقطة I

$$\overrightarrow{IO'} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{IO}$$

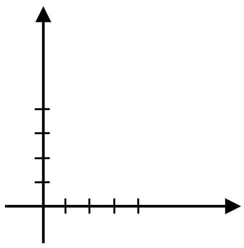
بفرض $O'(a,b)$

$$(a-2, b+1) = -\frac{3}{2}(-2,1)$$

$$(a-2, b+1) = \left(3, -\frac{3}{2}\right)$$

$a - 2 = 3$ ومنه $a = 5$

$b + 1 = -\dfrac{3}{2}$ ومنه:



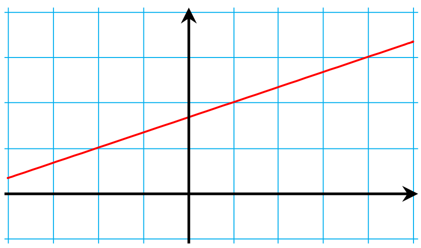
$$b = -\frac{3}{2} - 1 \quad , \quad b = -\frac{5}{2}$$

$$O'\left(5, -\frac{5}{2}\right)$$

$R = \sqrt{5} = \sqrt{4+1} = OI$ نصف قطر الدائرة C

ومنه: $\dfrac{3\sqrt{5}}{2} = \left|-\dfrac{3}{2}\right| R = R'$ ومنه معادلة الدائرة C' هي: $\dfrac{45}{4} = \left(y + \dfrac{5}{2}\right)^2 + (x-5)^2$

2. $d : x - 3y + 5 = 0$



لرسم d

x	-5	1
y	0	2

بفرض $A(1,2) \in d$ ولنوجد صورة A وفق h ولتكن A' فيكون $\overrightarrow{IA'} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{IA}$

لننشئ النقطة A' ونرسم من A' مستقيماً يوازي d فيكون هو المستقيم d' صورة المستقيم d وفق h حسب خواص التحاكي.

لنوجد إحداثيات A' :

بفرض $A'(x,y)$

$$(x-2, y+1) = -\frac{3}{2}(-1,3)$$
$$(x-2, y+1) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$$

$x - 2 = \frac{3}{2}$ ومنه $x = \frac{7}{2}$

$y + 1 = -\frac{9}{2}$ ومنه $y = -\frac{11}{2}$

$$A'\left(\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}\right)$$

d' معادلته من الشكل: $x - 3y + c = 0$ وبما أن $A' \in d'$ فهي تحقق معادلته

$\frac{7}{2} + \frac{33}{2} + c = 0$ ومنه $c = -20$

$$d' : x - 3y - 20 = 0$$

١٨ ABC مثلث، و k عددٌ حقيقي من $]0,1[$، M هي النقطة التي تحقق $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$.
المستقيم المرسوم من M موازياً (AC) يقطع (BC) في N والمستقيم المرسوم من N موازياً (AB) يقطع (AC) في P. ليكن h_1 التحاكي الذي مركزه B ويحقّق $h_1(A) = M$ و h_2 التحاكي الذي مركزه C ويحقّق $h_2(B) = N$.

1. احسب بدلالة k نسبة كلٍّ من التحاكيين h_1 و h_2.

2. استنتج أنَّ مساحة المثلث NPC تساوي جداء ضرب العدد $(\frac{k}{1-k})^2$ بمساحة المثلث BMN.

الحل

1. $h_1(A) = M$

$$\overrightarrow{BM} = k_1 \overrightarrow{BA}$$
$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = k_1 \overrightarrow{BA}$$
$$\overrightarrow{AM} = (k_1 - 1)\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{AM} = (1 - k_1)\overrightarrow{AB}$$

ولدينا فرضاً $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ ومنه $k_1 = 1 - k$

ومنه نسبة التحاكي h_1 هي $1 - k$

$$h_2(B) = N$$

ونلاحظ أن المثلثين CNP , PBA متحاكيان وفق التحاكي h_2 الذي مركزه C ونسبته k_2

$$k_2 = \frac{PN}{AB} = \frac{AM}{AB} = k$$

$$k_2 = k$$

نلاحظ أن المثلثين CNP , ABC متحاكيان وفق التحاكي h_2 الذي نسبته k_2 ومنه

$$\frac{S(CNP)}{S(ABC)} = k_2{}^2 = k^2 \ldots ①$$

ونلاحظ أن المثلثين BMN , BAC متحاكيان وفق التحاكي h_1 الذي مركزه B ونسبته $k_1 = 1 - k$

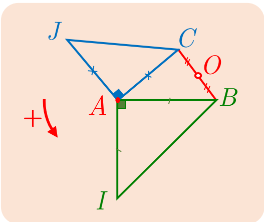
ومنه : $\frac{S(BMN)}{S(ABC)} = k_1{}^2 = (1-k)^2 \ldots ②$

من ① و ② نجد أن:

$$\frac{S(CNP)}{S(BMN)}=\left(\frac{k}{1-k}\right)^2$$

$$S(CNP)=\left(\frac{k}{1-k}\right)^2 S(BMN)$$

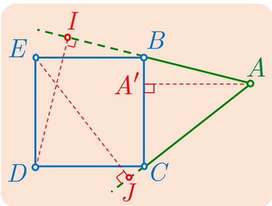
١٩ نتأمّل في المستوي الموجّه الشكل المجاور. ليكن h التحاكي الذي مركزه B ونسبته 2. وليكن r الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.



1. وضِّع على الشكل النقطة $D=h(A)$.
2. استفدْ من الدوران r لإثبات أنَّ $CD=IJ$ وأنَّ (CD) و (IJ) متعامدان.
3. استنتج أنَّ $IJ=2AO$ وأنَّ المستقيمين (OA) و (IJ) متعامدان.

الحل

٢٠ نتأمّل في المستوي الموجّه الشكل المجاور الذي فيه $BCDE$ مربّع. ليكن t الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{DC}$. بالاستفادة من t أثبت أنَّ المستقيمات (AA') و (DI) و (EJ) تتلاقى في نقطة واحدة.

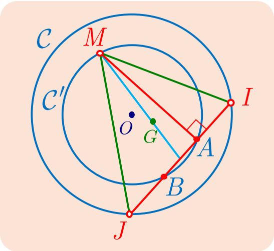


الحل

٢١ A و B نقطتان من دائرة $\mathcal{C}$ مركزها O. و M نقطةٌ من $\mathcal{C}$ مختلفة عن كلٍّ من A و B.
ليكن G مركز ثقل المثلث AMB، و I منتصف AM .

1. ما هو المحل الهندسي للنقطة I عندما ترسمُ M الدائرة $\mathcal{C}$ ما عدا A و B؟
2. ما هو المحل الهندسي للنقطة G عندما ترسمُ M الدائرة $\mathcal{C}$ ما عدا A و B؟

الحل



٢٢ $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ دائرتان متمركزتان في النقطة O، نصفا قطريهما 4 و 3 بالترتيب. A نقطة ثابتة من $\mathcal{C}'$ و M نقطة متحولة منها مختلفة عن A. المستقيم المار بالنقطة A عمودياً على (AM) يقطع الدائرة $\mathcal{C}$ في النقطتين I و J. وليكن G مركز ثقل المثلث IMJ.

1. ما هي العناصر المتحركة في الشكل؟

a.2 أثبت أنَّ القطعتين AB و IJ متناصفتان.

b. استنتج أنَّ النقطة G ثابتة عندما ترسم M الدائرة $\mathcal{C}'$ وأنَّ $2\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}=\vec{0}$.

a.3 ما المحل الهندسي لمنتصف القطعة IJ عندما ترسمُ M الدائرة $\mathcal{C}'$ محذوفاً منها A؟

b. ليكن K منتصف القطعة MI ، و L منتصف القطعة MJ ، و H منتصف القطعة OA . أثبت أنَّ المحل الهندسي للنقطة L هو الدائرة التي مركزها H ونصفُ قطرها 2.

c. عيّن المحل الهندسي للنقطة K.

الحل

٢٣ d و d' مستقيمان متقاطعان في O، A نقطة ثابتة في المستوي (O,d,d')، لا تنتمي إلى أي من المستقيمين d و d'. أنشئ دائرة مارة بالنقطة A على أنْ تمس d و d'. كم حلاً تجد لهذه المسألة؟

الحل

تَدرَّبْ ص ١٦٧

① في تجربة إلقاء حجر نرد مكعّب الشكل وجوهه مرقّمة من 1 إلى 6. نهتمّ برقم الوجه الظاهر في الأعلى.

❶ اكتب فضاء العينة.

❷ عبّر بعبارة نصية عن كلّ من الأحداث الآتية :

- $\{1,2,3\}$
- $\{1,3,5\}$
- $\{2,4,6\}$
- $\{5,6\}$

❸ اكتب بصيغة مجموعة جزئية من فضاء العينة كلاً من الأحداث الآتية :

- "الحصول على عدد أوّلي".
- "الحصول على عدد فردي".
- "الحصول على عدد يقبل القسمة على 2 أو 3".
- "الحصول على مربّع كامل".

الحل

❶ $\Omega = \quad 1,2,3,4,5,6$

❷ إن الحدث $1,2,3$ يعبّر عن الحدث : A حدث ظهور الرقم 1 أو 2 أو 3

إن الحدث $1,3,5$ يعبّر عن الحدث B : حدث ظهور عدد فردي

إنّ الحدث $2,4,6$ يعبّر عن الحدث C : حدث ظهور عدد زوجي

إنّ الحدث $5,6$ يعبّر عن الحدث D : حدث ظهور العدد 5 أو 6

❸ E : حدث الحصول على عدد أولي : $E = \quad 2,3,5$

B : حدث الحصول على عدد فردي : $B = \quad 1,3,5$

F : حدث الحصول على عدد يقبل القسمة على 2 أو 3 إذن $F = \quad 2,3,6$

G : حدث الحصول على مربع كامل: $G = \quad 1\ ,\ 4$

② في تجربة إلقاء حجر نرد رباعي الوجوه متوازن تماماً مرقّم من 1 إلى 4 مرّتين متتاليتين، نهتمّ بمجموع الرقمين الناتجين.

❶ علّل لماذا يكون فضاء العينة: $\Omega = \{8,7,6,5,4,3,2\}$؟

❷ اكتب قانون الاحتمال مُتمِّماً الجدول الآتي:

النتيجة	2	3	4	5	6	7	8
احتمال وقوعها							

❸ احسب احتمال وقوع الحدث $S = \ 3,5,7$.

❹ احسب احتمال وقوع الحدث $T = \ 6,7,8$.

الحل

❶ لنضع جدول عدد بمدخلين لإيجاد مجموعة النتائج الممكنة

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

$\Omega = \ 2,3,4,5,6,7\ ,8$

❷

النتيجة	2	3	4	5	6	7	8
احتمال وقوعها	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

❸

$$P(S) = P\ \ 3,5,7$$
$$= P(3) + P(5) + P(\text{v})$$
$$= \frac{2}{16} + \frac{4}{16} + \frac{2}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

❹

$$P(T) = P\ \ 6,7,8\ \ = P(6) + P(7) + P(8) = \frac{3}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

تَدرَّبْ ص ١٨٢

① لدينا حجر نرد غير مثاليّ، نعلم أنّ احتمالات ظهور الوجوه ، ، ،  متساوية، وأنّ احتمال ظهور  هو نصف احتمال ظهور أحد الوجوه السابقة وأنّ احتمال ظهور  هو $\frac{1}{2}$.

اكتب علاقات تربط الاحتمالات السابقة، واستنتج قانون الاحتمالات المعرّف على $\Omega = \ 1,2,3,4,5,6$.

الحل

$$P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = K$$
$$P(6) = \frac{1}{2}K$$
$$P(1) = \frac{1}{2}$$
$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$
$$\frac{1}{2} + k + k + k + k + \frac{1}{2}k = 1$$
$$4k + \frac{1}{2}k = \frac{1}{2}$$
$$\frac{9}{2}k = \frac{1}{2}$$
$$k = \frac{1}{9}$$

النتيجة	1	2	3	4	5	6
احتمال وقوعها	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

② نلقي حجر نرد رباعيّ الوجوه منتظم، وجوهه مرقّمة من 1 إلى 4. نسجّل الرقم المخفيّ من النرد.
اكتب قانون احتمال هذه التجربة مع العلم أنّ النرد مثاليّ.

الحل

النتيجة	1	2	3	4
احتمال وقوعها	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

③ تحمل وجوه حجر نرد مثالي مكعّب الشكل الأرقام 3,2,2,1,1,1. نلقيه مرّةً واحدةً. ونتأمّل الأحداث الآتية:

A: «الرقم الظاهر هو 1»

B: «الرقم الظاهر هو 2»،

C: «الرقم الظاهر مختلف عن 3»

احسب احتمالات A و B و C.

الحل

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} \text{ ، } P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} \text{ ، } P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{5}{6}$$

تدرّب ص ١٧٨

① الجدول الآتي يبين عدد الكتب المباعة يومياً في مكتبة.

	اللغة العربية	اللغة الفرنسية	اللغة الانكليزية	المجموع
الكتب العلمية	20	5	15	40
الكتب الثقافية	33	10	12	55
المجموع	53	15	27	95

دخل زبون واشترى كتاباً من هذه المكتبة، المطلوب:

1. ما احتمال شرائه لكتاب باللغة العربية علماً أنه كتاب علمي؟
2. ما احتمال شرائه لكتاب ثقافي علماً أنه باللغة الانكليزية؟

الحل

1. الحدث المعلوم B : الكتاب علمي .

الحدث المطلوب : A : شراء كتاب باللغة العربية .

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

2. الحدث المعلوم : C : الكتاب باللغة الإنكليزية .

الحدث المطلوب: D : شراء كتاب ثقافي .

$$P(D|C) = P_C(D) = \frac{n(D\cap C)}{n(C)} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$$

② مغلف يحتوي 6 بطاقات متماثلة سجل على كل منها أحد الأعداد الآتية: $0,1,1,1,2,2$ نسحب من المغلف بطاقتين بالتتالي بدون إعادة البطاقة المسحوبة.

إذا علمت أن مجموع العددين المسجلين على البطاقتين يساوي 2، ما احتمال أن تحمل إحدى البطاقتين المسحوبتين العدد 1؟

الحل

١ ـ الحدث المعلوم B : مجموع العددين المسجلين على البطاقتين يساوي 2 .

الحدث المطلوب A : أن تحمل إحدى البطاقتين المسحوبتين العدد 1 .

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$n(\Omega) = 6\times 5 = 30$$

$$n(B) = ?$$

نلاحظ أن

$$B = \quad (0,2)\ ,\ (2,0)\ ,\ (1,1)$$

$$n(B) = 1\times2 + 2\times1 + 3\times2 = 2+2+6 = 10$$

$$A\cap B = \quad (1,1)$$

$$n(A\cap B) = 3\times2 = 6$$

ومنه

$$P(A\cap B) = \frac{6}{30}$$

$$P(A \mid B) = P_B(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

③ يحتوي مغلف على 7 بطاقات مرقمة من 1 إلى 7، نسحب من المغلف بطاقتين عشوائياً بالتتالي دون إعادة، إذا علمت أن مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين فرديٌ، ما احتمال أن تحمل إحداها الرقم 4؟

الحل

الحدث المعلوم B : مجموع رقمي البطاقتين فردي .

الحدث المطلوب A : أن تحمل إحداها الرقم 4

$$P(A \mid B) = P_B(A) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

$$n(\Omega) = 7\times6 = 42$$

الحدث B يقع إذا كان إحدى البطاقتين فردية والأخرى زوجية

$$n(B) = 4\times3 + 3\times4 = 24$$

الحدث $A\cap B$ يقع إذا كان إحدى البطاقتين تحمل الرقم 4 والأخرى فردية

$$n(A\cap B) = 4\times1 + 1\times4 = 8$$

$$P(A \mid B) = P_B(A) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

④ يحوي صندوق 8 كرات (5 بيضاء و 3 سوداء) سُحب عشوائياً من الصّندوق كرتان معاً. ما احتمال أنّ تكون الكرتان المسحوبتان حمراوين إذا علمت أنّهما كانتا من لون واحد؟

الحل

الحدث المعلوم B : الكرتان المسحوبتان من لون واحد .

الحدث المطلوب A : أن تكون الكرتان المسحوبتان بيضاويين

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

الحدث B يقع إذا كانت الكرتان المسحوبتان سوداوين أو بيضاوين

لنعد أولاً الثنائيات المرتبة التي تشكل الحدث B

$$3\times2 + 5\times4 = 26$$

ومنه

$$n(B) = \frac{26}{2} = 13$$

الحدث $A\cap B$ يقع إذا كانت الكرتان المسحوبتان بيضاوين

لنعد أولاً الثنائيات المرتبة التي تشكل الحدث $A \cap B$

$$4 \times 5 = 20$$

ومنه $n(A \cap B) = \frac{20}{2} = 10$

$$P(A|B) = \frac{10}{13}$$

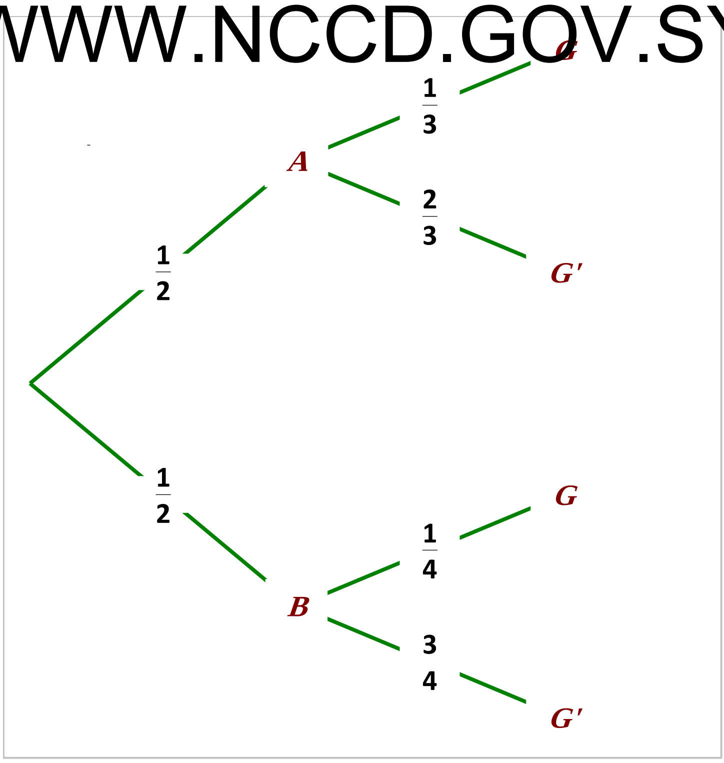
⑤ في إحدى مراحل لعبة إلكترونية أمام اللاعب خياران: إما أن يتسلق الجبل M_1 واحتمال وصوله إلى القمة عندئذ يساوي $\frac{1}{3}$، أو أن يتسلق الجبل M_2 واحتمال وصوله إلى القمة عندئذ يساوي $\frac{1}{4}$، نفترض أنّ احتمال أن يتسلق الجبل M_1 يساوي احتمال أن يتسلق الجبل M_2. ونتأمّل الأحداث:

- الحدث A : «يتسلق اللاعب الجبل M_1»
- الحدث B : «يتسلق اللاعب الجبل M_2»
- الحدث G : «وصول اللاعب إلى قمة جبل»

❶ احسب الاحتمالات الآتية $\mathbb{P}(A \cap G)$ و $\mathbb{P}(B \cap G)$.

❷ استنتج قيمة $\mathbb{P}(G)$.

الحل



$$P(A \cap G) = P(A) \ . \ P(G|A) = \frac{1}{2} \ . \ \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P(B \cap G) = P(B) \ . \ P(G|B) = \frac{1}{2} \ . \ \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

⑥ في دراسة إحصائية تبين أن 53% ممن يمارسون الرياضة رجالٌ، و 31% منهم يرتادون نادياً رياضيّاً، وفي الوقت ذاته 21% من النساء اللواتي يمارسن الرياضة يرتدن نادياً رياضياً. نتأمّل الأحداث الآتية:

- الحدث M : «الشخص الذي يمارس الرياضة رجل»
- الحدث F : « الشخص الذي يمارس الرياضة امرأة»
- الحدث C : « الشخص الذي يمارس الرياضة يرتاد نادياً رياضياً»

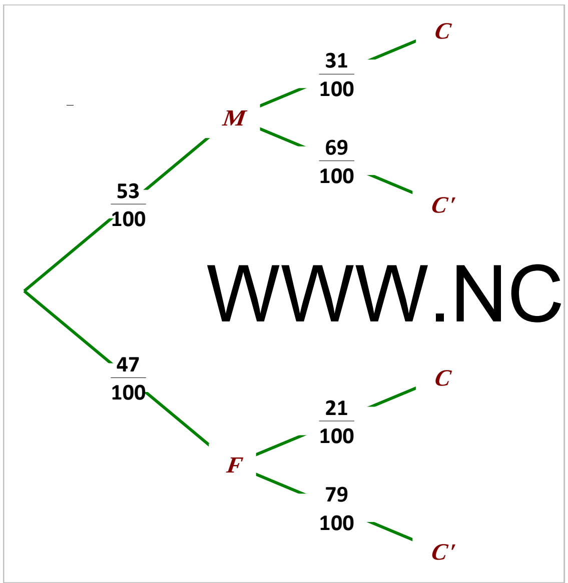
❶ اكتب معطيات المسألة مستعملاً ترميزات الاحتمال.

❷ احسب احتمال أن يكون من يمارس الرياضة رجلاً يرتاد نادياً رياضياً.

❸ احسب احتمال أن يكون من يمارس الرياضة امرأة ترتاد نادياً رياضياً.

❹ احسب $\mathbb{P}(C)$.

الحل



❶ $P(M) = \dfrac{53}{100}$

$P(C|M) = \dfrac{31}{100}$

$P(C|F) = \dfrac{21}{100}$

❷ $P(M \cap C) = P(M) \,.\, P(C|M)$

$= \dfrac{53}{100} \,.\, \dfrac{31}{100} = \dfrac{1643}{10000}$

❸ $P(F \cap C) = P(F) \,.\, P(C|F)$

$= \dfrac{47}{100} \,.\, \dfrac{21}{100} = \dfrac{987}{10000}$

❹ $P(C) = P(M \cap C) + P(F \cap C)$

$= \dfrac{1643}{10000} + \dfrac{987}{10000} = \dfrac{2630}{10000} = \dfrac{263}{1000}$

تَدرَّبْ

① تقدّم طالبان إلى امتحان اللغة الإنكليزية. احتمال نجاح الأول $\frac{3}{4}$، واحتمال نجاح الثاني $\frac{4}{5}$.

❶ ما احتمال نجاحهما معاً؟

❷ ما احتمال نجاح أحدهما على الأقل؟

الحل

❶ بفرض A: حدث نجاح الأول في اللغة الإنكليزية .
B : حدث نجاح الثاني في اللغة الإنكليزية.

$$P(A) = \frac{3}{4}$$
$$P(B) = \frac{4}{5}$$
$$P(A \cap B) = ?$$

بما أنّ نجاح الأول لا يؤثر على نجاح الثاني فالحدثان A و B مستقلان احتمالياً

$$P(A \cap B) = P(A) \ . \ P(B) = \frac{3}{4} \ . \ \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

❷ $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$$

② وُجِدَ في أحد المشافي أن 50% من المرضى يعانون من ارتفاع ضغط الدم، وأن 30% من المرضى مصابون بمرض التهاب الكبد وأن 20% يعانون من المرضين معاً. هل ارتفاع ضغط الدم ومرض التهاب الكبد مستقلان احتمالياً ؟

الحل

بفرض A : حدث أن المريض يعاني من ارتفاع ضغط الدم.
B : حدث أن المريض مصاب بالتهاب الكبد.

$$P(A) = \frac{50}{100}$$
$$P(B) = \frac{30}{100}$$
$$P(A \cap B) = \frac{20}{100}$$
$$P(A)\,P(B) = \frac{50}{100} . \frac{30}{100} = \frac{15}{100}$$

نلاحظ أن $P(A \cap B) \neq P(A).\ P(B)$ فالحدثان A و B غير مستقلين احتمالياً

تمرينات ومسائل

١ في التجارب الآتية، حدّد فضاء العينة للتجربة العشوائيّة، وعدد النتائج الممكنة.

① نلقي نرداً مكعّباً فيه وجه عليه الرقم 1، ووجهان عليهما الرقم 2 والوجوه المتبقّية عليها الرقم 3.

② نلقي نردين: الأوّل أزرق والثاني أحمر. نسجّل العدد الذي يتكوّن على النحو الآتي: يُحدّد رقم الآحاد بالوجه العلوي للنرد الأحمر، ورقم العشرات بالوجه العلوي للنرد الأزرق.

③ نلقي ثلاث قطع نقديّة مرقّمة 1 و 2 و 3. نسجّل الوجوه الثلاثة الظاهرة على شكل ثلاثيّة، فمثلاً الثلاثيّة THH تعني أنّنا حصلنا على الوجه T في القطعة الأولى وعلى الوجه H في القطعتين الباقيتين.

④ نلقي قطعة نقود واحدة ثلاث مرّات متتالية. ونسجّل بالترتيب الوجه الذي يظهر في كلّ رمية.

الحل

①

$$1 , 2 , 2 ,3 , 3 ,3$$

$$\Omega_1 = 1,2,3$$

$$n(\Omega_1) = n(1) + n(2) + n(3) = 1 + 2 + 3 = 6$$

②

	1	2	3	4	5	6
1	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66

$$n(\Omega) = 36$$

③

$$\Omega_3 = \left\{ \begin{array}{l} HHH, HHT, THH, HTH, \\ TTT, TTH, HTT, THT \end{array} \right\}$$

$$n(\Omega_3) = 8$$

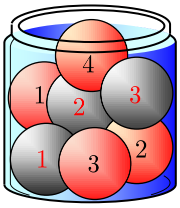
④

$$\Omega_4 = \Omega_3$$

$$n(\Omega_4) = n(\Omega_3) = 8$$

٢ يحوي صندوق سبع كرات ثلاث، منها سوداء ومرقّمة $1,2,3$، وأربع حمراء مرقّمة $1,2,3,4$.

نسحب عشوائيّاً كرة من الصندوق.



① احسب احتمالات الأحداث الآتية:

A: « الكرة المسحوبة سوداء ».

B: « الكرة المسحوبة حمراء ».

C: « تحمل الكرة المسحوبة رقماً زوجيّاً ».

② احسب احتمالات الأحداث $A\cap B$ و $A\cap C$ و $B\cap C$ و $A\cup B$ و $A\cup C$ و $B\cup C$.

الحل

① $P(A)=\frac{3}{7}$ ، $P(B)=\frac{4}{7}$ ، $P(C)=\frac{3}{7}$.

② $A\cap B=\varnothing$

$P \quad A\cap B \quad =0$

$A\cap C$: حدث أن تكون الكرة المسحوبة سوداء وتحمل رقماً زوجياً

$$P(A\cap C)=\frac{1}{7}$$

$B\cap C$: حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء وتحمل رقماً زوجياً

$$P(B\cap C)=\frac{2}{7}$$

إنّ الحدثين A و B منفصلان ومنه

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$
$$=\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=1$$
$$P(A\cup C)=P(A)+P(C)-P(A\cap C)$$
$$=\frac{3}{7}+\frac{3}{7}-\frac{1}{7}=\frac{5}{7}$$
$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)$$
$$=\frac{4}{7}+\frac{3}{7}-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

٣ في تجربة عشوائيّة، A و B حدثان يحقّقان

$\mathbb{P}(A')=0.44$ و $\mathbb{P}(B')=0.63$ و $\mathbb{P}((A\cup B)')=0.32$.

احسب $\mathbb{P}(A\cap B)$.

الحل

$$P(A') = 1 - P(A)$$
$$0.44 = 1 - P(A)$$
$$P(A) = 1 - 0.44 = 0.56$$
$$P(B) = 1 - P(B')$$
$$P(B) = 1 - 0.63 = 0.27$$
$$P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$$
$$0.32 = 1 - P(A \cup B)$$
$$P(A \cup B) = 1 - 0.32 = 0.68$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$
$$= 0.56 + 0.27 - 0.68 = 0.15$$

٤ صندوقان متماثلان فيهما كرات متماثلة. الصندوق (I) يحوي ثلاث كرات مرقمة بالأرقام $1,2,3$ ويحوي الصندوق (II) أربع كرات مرقمة بالأرقام $2,3,4,5$. نسحب عشوائياً كرة من الصندوق (I) ثم نسحب كرة من الصندوق (II). نتأمّل الحدثين:

A : إحدى الكرتين على الأقل تحمل الرقم 3.

B : مجموع رقمي الكرتين أكبر تماماً من 5

هل الحدثان A و B مستقلان احتمالياً؟

الحل

لنضع مجموعة النتائج الممكنة :

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,2),(1,3),(1,4),(1,5) \\ (2,2),(2,3),(2,4),(2,5) \\ (3,2),(3,3),(3,4),(3,5) \end{Bmatrix}$$

نلاحظ أن

$$P \quad 1,2 \quad = \frac{1}{3}.\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$
$$P \quad 1,3 \quad = \frac{1}{3}.\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

و هكذا نستنتج أن التجربة متساوية الاحتمال

$$A = \quad (1,3),(2,3),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5)$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$B = \quad (1,5),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4),(3,5)$ ومنه $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$

ومنه $A \cap B = \quad (3,3),(3,4),(3,5)$

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$
$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$
محققة فالحدثان A و B مستقلان احتمالياً

لنتعلّم البحث معاً

٥ احتمال الحصول على العدد السري

5	1	3

يتطلّب فتح حقيبة، معرفة عدد سرّي مؤلّف من ثلاث خانات بين 0 و 9.
لنشكّل عشوائيّاً عدداً مؤلّفاً من ثلاث خانات. ولنتأمّل الأحداث:

A: « العدد المختار هو العدد السري الصحيح».

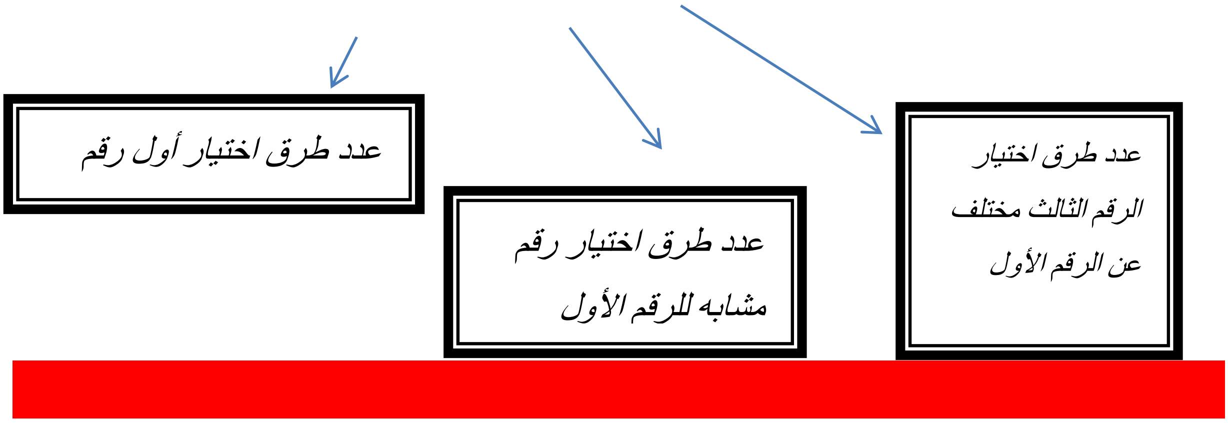
B: « العدد المختار مؤلّف من ثلاثة أرقام مختلفة».

C: « في العدد المختار رقمان متساويان فقط».

احسب $\mathbb{P}(A)$ و $\mathbb{P}(B)$ و $\mathbb{P}(C)$.

الحل

$$n(\Omega) = \overset{a}{10} \times \overset{b}{10} \times \overset{c}{10} = 1000$$
$$n(A) = \overset{a}{1} \times \overset{b}{1} \times \overset{c}{1} = 1$$
$$p(A) = \frac{1}{1000}$$
$$n(\Omega) = \overset{a}{10} \times \overset{b}{9} \times \overset{c}{8} = 720$$
$$n(B) = \frac{720}{1000} = \frac{72}{100}$$
$$n(C) = \overset{a}{10} \times \overset{a}{1} \times \overset{c}{9} \times 3 = 720$$
$$P(c) = \frac{270}{1000} = \frac{27}{100}$$



٦ إلقاء قطعة نقود عدّة مرّات

نلقي قطعة نقديّة متوازنة ستّ مرّات ونسجّل بالترتيب الجهة الظاهرة H أو T. بيّن أيُّ الحدثين الآتيين هو الأكثر احتمالاً:

A: « ظهور ثلاثة وجوه T فقط».

B: « ظهور 4 وجوه T فقط ، أو ظهور وجهين H فقط».

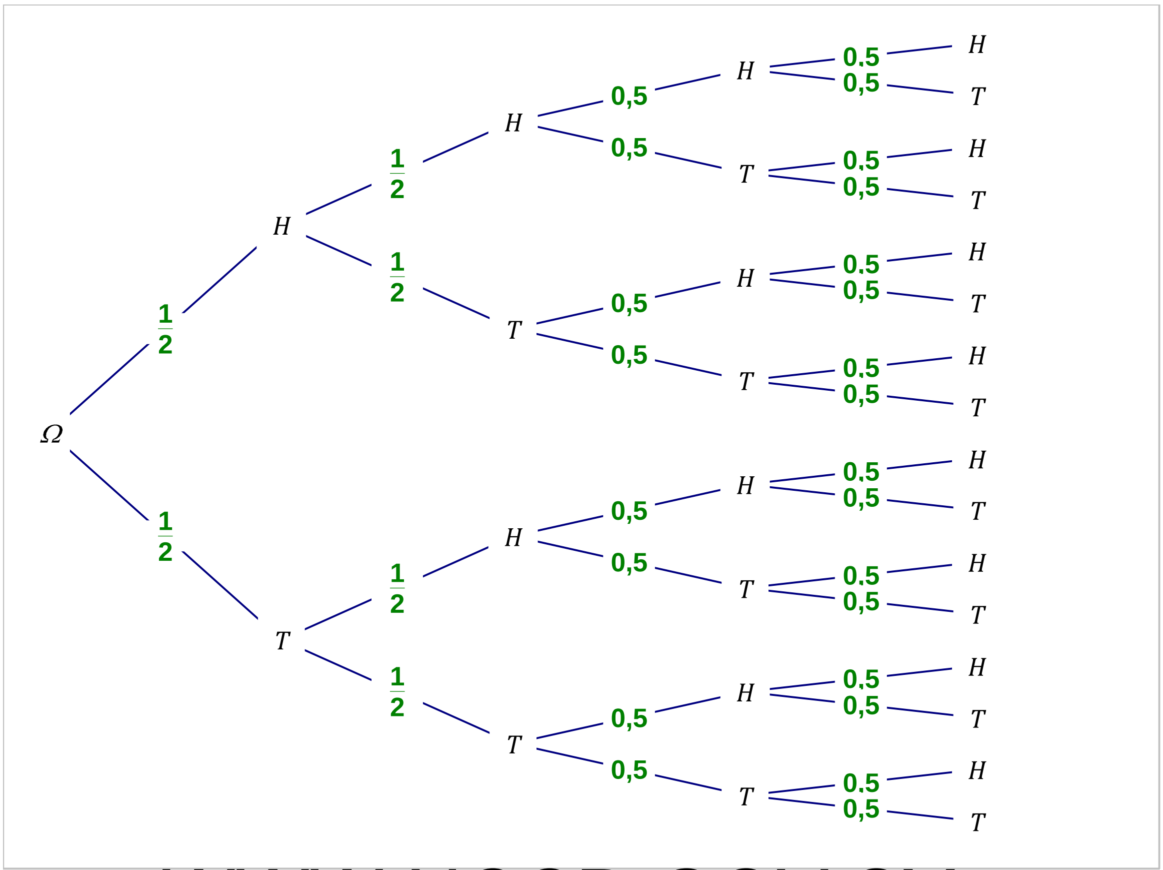
الحل

$$n(\Omega) = 2^6 = 64$$

$$n(A) = \frac{6!}{3! \times 3!} = 20$$

$$P(A) = \frac{20}{64} = \frac{5}{16} = 0.3125$$

الشكل المرسوم لمخطط شجري لرمي قطعة نقود أربعة مرات متتالية ، ويمكن للمدرس أن يتابع رسم فروع الرمية الخامسة والسادسة



لنفرض الحدث C ظهور 4 وجوه T فقط

الحدث D ظهور وجهين T فقط

فيكون $B = D \cup C$ ومنه $P(B) = P(D \cup C) = P(D) + P(C)$ لأنّ الحدثين C و D منفصلان

$$n(D) = \frac{6!}{4! \times 2!} = 15$$

$$P(D) = \frac{15}{64}$$

$$n(C) = \frac{6!}{4! \times 2!} = 15$$

$$P(C) = \frac{15}{64}$$

فيكون $P(B) = P(D \cup C) = P(D) + P(C) = \frac{30}{64} = 0.46875$

نلاحظ أن $P(B) > P(A)$

٧ سحب عناصر في آن معاً

لتصوير مشهد إعلانيّ لحليب أطفال، على المخرج اختيار طفلين من سبعة أطفال: ثلاثة صبية وأربع بنات. ما احتمال أن يختار بنتين اثنتين؟

الحل

لنوجد عدد الثنائيات المرتبة أولاً المكونة من طفلين $7 \times 6 = 42$ وبما أن $B_1, G_2 \quad = \quad G_2, B_1$ مثلاً

$$n(\Omega) = \frac{42}{2} = 2$$

A : حدث أن يختار بنتين :

عدد الثنائيات المرتبة التي تتألف من بنتين $= 4 \times 3 = 12$

بما أن $G_1, G_2 \quad = \quad G_2, G_1$

فإن

$$n(A) = \frac{12}{2} = 6$$

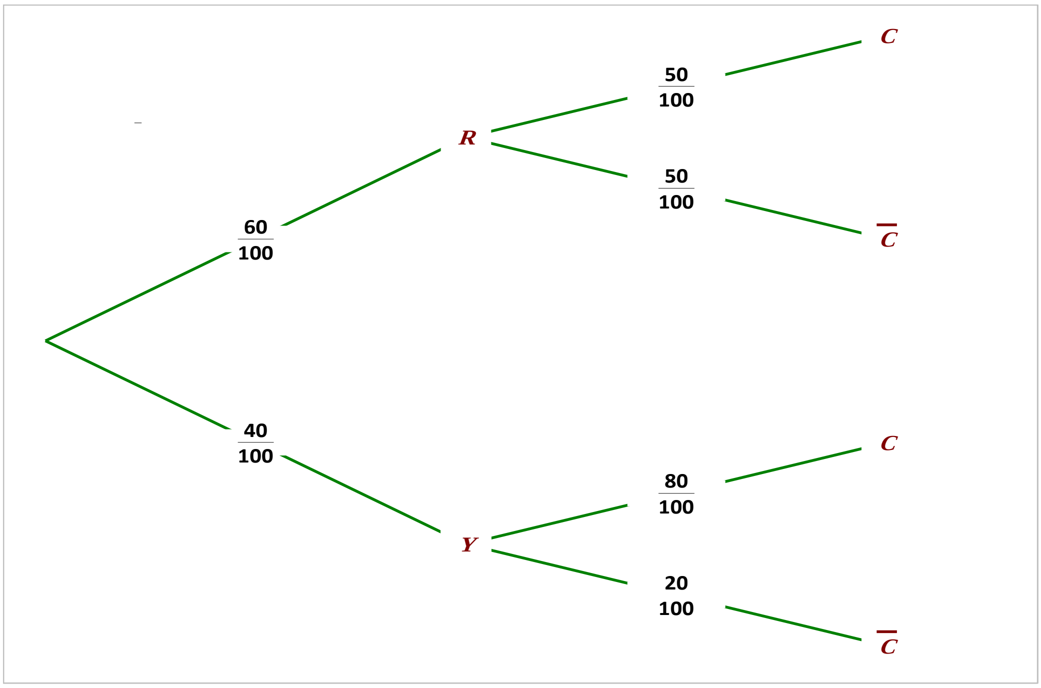
$$p(A) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

٨ باقة من الأزهار

مجموعة من الأزهار 60% منها حمراء اللون والباقي أصفر اللون. نصف عدد الأزهار الحمراء و 80% من الصفراء من القرنفل. اخترنا من المجموعة زهرة عشوائياً. ما احتمال أن تكون حمراء اللون علماً أنها قرنفلة.

الحل

الطلب: $P \quad R|C$



$$
\begin{aligned}
P(C) &= P(R \cap C) + P(Y \cap C) \\
&= p(R).p(C \mid R) + p(Y).p(C \mid Y) \\
&= \frac{60}{100}.\frac{50}{100} + \frac{40}{100}.\frac{80}{100} \\
&= \frac{30}{100} + \frac{32}{100} = \frac{62}{100}
\end{aligned}
$$

$$p(R \cap C) = \frac{30}{100}$$

$$p(R|C) = \frac{\frac{30}{100}}{\frac{62}{100}} = \frac{30}{62} = \frac{15}{31}$$

قُدُماً إلى الأمام

٩ قصة عامل ريزوس

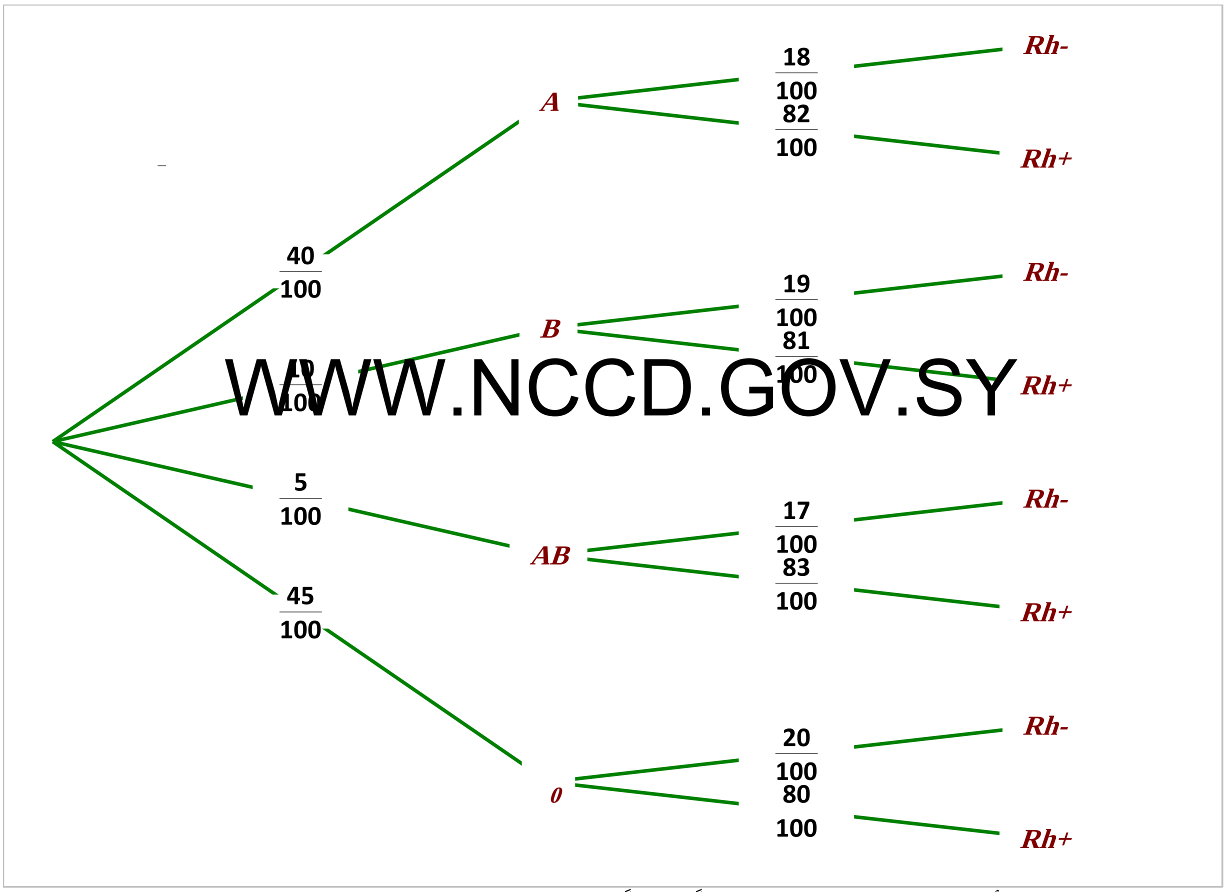
يُصنّف الدم البشري في أربع زمر منفصلة A و B و AB و O. وأيّاً كانت الزمرة، فإمّا أن تملك عامل ريزوس *Rhesus factor* (ونرمز إلى ذلك بالرمز Rh^+) أو لا تملك هذا العامل (ونرمز إلى ذلك بالرمز Rh^-). من بين سكّان إحدى البلدان، هناك 40% منهم زمرتهم الدمويّة A و 10% زمرتهم B و 5% زمرتهم AB و 45% زمرتهم O. نعلم بالإضافة إلى ذلك أنّ:

	A	B	AB	O
Rh^+	82%	81%	83%	80%
Rh^-	18%	19%	17%	20%

نقول عن شخص زمرته الدمويّة O وعامل ريزوس لديه سلبي إنّه متبرّع مطلق. نختار شخصاً عشوائياً، ما احتمال أن يكون: متبرعاً مطلقاً؟ وما احتمال أن يكون عامل ريزوس لديه سلبياً؟

الحل

$$p(A) = \frac{40}{100}$$
$$p(B) = \frac{10}{100}$$
$$p(AB) = \frac{5}{100}$$
$$p(O) = \frac{45}{100}$$



D : : حدث أن يكون الشخصي متبرعاً مطلقاً :

$$P(D) = p(O \cap R\bar{h})$$
$$= p(O).p(R\bar{h} \,|\, O)$$
$$= \frac{45}{100}.\frac{20}{100} = \frac{90}{1000}$$
$$p(D) = \frac{9}{100}$$
$$p(R\bar{h}) = p(A \cap R\bar{h}) + p(B \cap R\bar{h}) + p(AB \cap R\bar{h}) + p(O \cap R\bar{h})$$
$$= \frac{40}{100} \times \frac{18}{100} + \frac{10}{100} \times \frac{19}{100} + \frac{5}{100} \times \frac{17}{100} + \frac{45}{100} \times \frac{20}{100}$$
$$= \frac{72}{1000} + \frac{19}{1000} + \frac{8.5}{1000} + \frac{90}{1000} = 0.1895$$

٩ نمذجة التجربة

نمثّل سباقاً بين الأرنب والسلحفاة بتجربة إلقاء نرد مثاليّ. عندما نحصل على 6 يربح الأرنب، أمّا في الحالات الأخرى فتتقدّم السلحفاة خانة واحدة وتربح عندما تقطع ستّ خانات.

يتكوّن فضاء العينة من نتيجتين هما R : «يربح الأرنب» و T : «تربح السلحفاة». المطلوب حساب أحد الاحتمالين $\mathbb{P}(R)$ أو $\mathbb{P}(T)$ (لأنّ $\mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(T) = 1$). لنتأمّل الحدث T. يتحقّق هذا الحدث إذا كانت نتيجة إلقاء النرد ستّ مرّات متتابعة مختلفة عن 6. هناك 6^6 طريقة لإلقاء النرد ستّ مرّات متتابعة. والنتائج هنا متساوية الاحتمال. علينا إذن حساب عدد النتائج التي تؤدّي إلى ربح السلحفاة. احسب احتمال T. واستنتج احتمال R.

الحل

$$p(T) = \left(\frac{5}{6}\right)^6$$
$$p(R) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$$

١٠ صح أم خطأ

بيّن، مُعلّلاً إجابتك، الصحيح من الخطأ في الاستنتاجات الآتية.

① لتكن a و b و c ثلاثة أعداد من المجال $[0,1]$، وهي بهذا الترتيب حدودٌ متوالية في متتالية هندسيّة. وليكن $\Omega = \ 1,2,3,4,5,6$ فضاء العينة لتجربة عشوائيّة نفترض أنّ $\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) = a$ ، $\mathbb{P}(3) = \mathbb{P}(4) = b$ ، و $\mathbb{P}(5) = \mathbb{P}(6) = c$. إذن $b = \frac{1}{6}$.

② نلقي قطعة نقديّة متوازنة عشر مرّات. إنّ احتمال أن نحصل على الوجه F في المرّات العشر أقلّ من 0.001.

③ إذا كان A و B حدثين في تجربة عشوائيّة، كان $\mathbb{P}(A' \cap B') = 1 - \mathbb{P}(A \cap B)$.

④ نلقي نرداً مثاليّاً مرّتين، ونسجّل الرقمين الناتجين a و b بالترتيب. إنّ احتمال أن يكون للمعادلة $x^2 + ax + b = 0$ جذر حقيقيّ على الأقلّ هو $\frac{1}{2}$.

الحل

①

$$\Omega_3 = \quad 1,2,3,4,5,6$$

$$p(1) = p(2) = a$$

$$p(3) = p(4) = b$$

$$p(5) = p(6) = c$$

$$2a + 2b + 2c = 1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \mathrm{I}$$

$$b^2 = ac \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \mathrm{II}$$

كون a, b, c حدود متعاقبة في متتالية هندسية

لنعوض $b = \frac{1}{6}$ في المعادلتين السابقتين فنحصل على

$$a \,.\, c = \frac{1}{36}$$

$$a = \frac{1}{3} - c$$

بالحل المشترك نجد أن :

$$\left(\frac{1}{3} - c\right)c = \frac{1}{36}$$

$$\frac{1}{3}c - c^2 = \frac{1}{36}$$

$$c^2 - \frac{1}{3}c + \frac{1}{36} = 0$$

$$\left(c - \frac{1}{6}\right)^2 = 0$$

$$c = \frac{1}{6}$$

$$a = \frac{1}{6}$$

فالمتتالية الهندسية ثابتة.

فالجواب $b = \frac{1}{6}$ عندما تكون المتتالية الهندسية أساسها 1 .

② بفرض A : حدث أن تحصل على الوجه H في المرات العشر .

$P(A) = \frac{1}{2^{10}} < 0.001$ فالجواب صحيح .

③

$$A' \cap B' = (A \cup B)'$$
$$P(A' \cup B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$$

فالإجابة المعطاة خاطئة .

④ يكون للمعادلة $x^2 + a\,x + b = 0$ جذر حقيقي عندما يكون $\Delta = a^2 - 4b \geq 0$

$a^2 \geq 4b$

بفرض A : حدث أن يكون للمعادلة جذر حقيقي على الأقل .

$$a : 2 \;,\; 3 \;,\; 4 \;,\; 5 \;,\; 6$$
$$b : 1 \;,\; 1\;\; 2 \;,\; 1\;2\;3\;4 \;,\; 1......6 \;,\; 1......6$$

$$n(A) = 19$$
$$p(A) = \frac{19}{36} \neq \frac{1}{2}$$

فالعلاقة خاطئة

١١ يذهب أربعة أصدقاء إلى دار للسينما فيها أربع قاعات. يختار كلّ واحد منهم قاعةً عشوائيّاً وبشكلٍ مستقلّ عن الآخرين. احسب احتمالات الأحداث الآتية:

A: «أن يختاروا أربع قاعات مختلفة».

B: «اثنان على الأقلّ منهم في قاعة واحدة».

C: «جميعهم في قاعة واحدة».

الحل

$$n(\Omega) = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$$
$$n(A) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$
$$p(A) = \frac{24}{256}$$
$$P(B) = P(A') = 1 - P(A)$$
$$= 1 - \frac{24}{256} = \frac{232}{256}$$
$$n(c) = 4 \times 1 \times 1 \times 1$$
$$p(c) = \frac{4}{4^4} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

١٢ نختار عشوائيّاً عدداً طبيعيّاً بين 1 و 1000. نفترض أنّ الاختيارات متساوية الاحتمال. ما هو احتمال أن يكون العدد:

① مربّع عدد طبيعيّ. ② مكعّب عدد طبيعيّ. ③ لا مربّع ولا مكعّب عدد طبيعيّ.

الحل

①

$$1^2 = 1$$
$$2^2 = 4$$
$$3^2 = 9$$
$$\vdots$$
$$(31)^2 = 961$$

ومنه عدد الأعداد بين 1000, 1 التي هي مربع لعدد طبيعي هي 31 عدد

بفرض A : حدث الحصول على مربع عدد طبيعي: $p(A) = \dfrac{31}{1000}$

②

$$1^3 = 1$$
$$1^3 = 1$$
$$2^3 = 8$$
$$3^3 = 27$$
$$\vdots$$

$$(10)^3 = 1000$$

ومنه عدد الأعداد بين 1000 , 1 التي هي مكعب لعدد طبيعي هي 10 أعداد .

بفرض B حدث الحصول على مكعب عدد طبيعي فيكون $P(B) = \dfrac{10}{1000} = \dfrac{1}{100}$

③

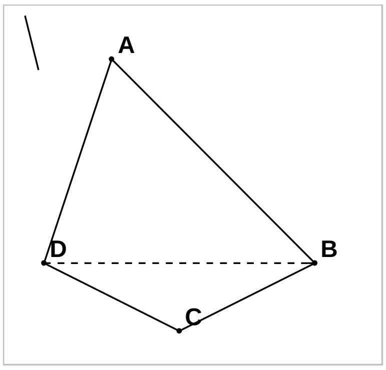
$$p(A' \cap B') = p(A \cup B)'$$
$$P(A' \cup B') = 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - (P(A) + p(B) - p(A \cap B))$$
$$= 1 - \left(\frac{31}{1000} + \frac{10}{1000} - \frac{1}{1000}\right)$$
$$= \frac{960}{1000} = \frac{96}{1000}$$

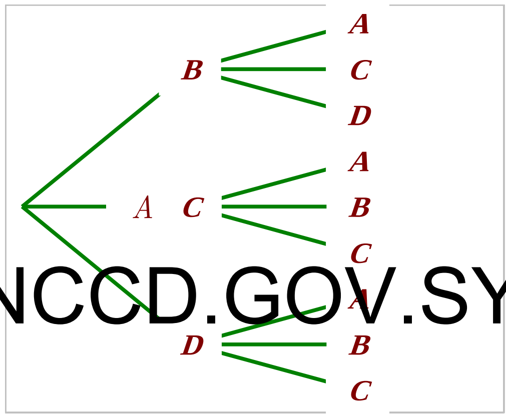
١٣ ليكن $ABCD$ رباعيّ وجوه منتظماً. تتنقّل خنفساء على أحرف هذا الرباعيّ وفق القواعد الآتية: ① الزمن اللازم لقطع أحد الأحرف دقيقة واحدة. ② عندما تكون على أحد الرؤوس، تختار الحرف الذي ستمشي عليه عشوائيّاً. ③ تنطلق الخنفساء من الرأس A . احسب احتمالات الأحداث الآتية.

A : » تعود الخنفساء إلى A بعد ثلاث دقائق«.

B : « لا تمرّ الخنفساء بالرأس C في الدقائق الثلاث الأولى».

الحل





أو نحل بطريقة ملء الخانات :

$$n(A) = \overset{1m}{3}\times \overset{2m}{2}\times \overset{3m}{1} = 6$$

$$n(\Omega) = 3\times 3\times 3 = 27$$

$$p(A) = \frac{6}{27}$$

$$n(B) = \overset{1m}{2}\times \overset{2m}{2}\times \overset{3m}{2} = 8$$

$$p(B) = \frac{8}{27}$$

١٤ يحوي صندوق 19 كرة مرقّمة من 1 إلى 19. نسحب عشوائيّاً ثلاث كرات تباعاً ودون إعادة.

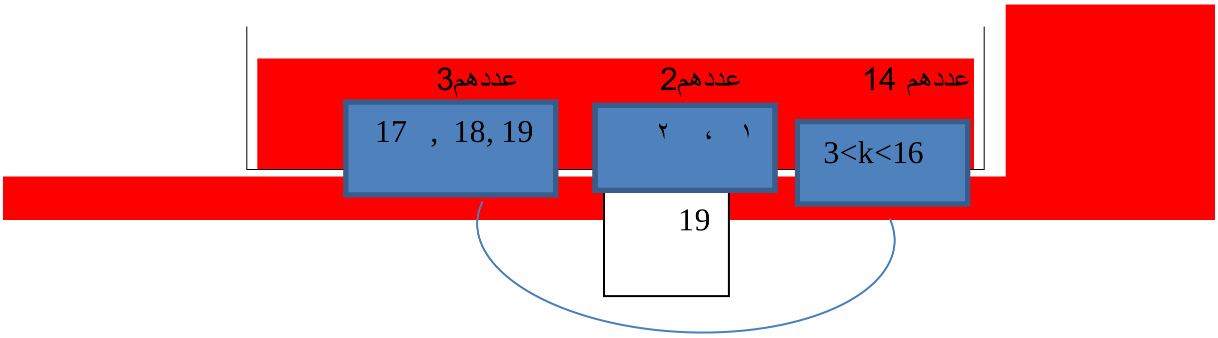
ليكن k عدداً طبيعيّاً بين 3 و 16، $3 \le k \le 16$. ولنتأمّل الحدثين الآتيين:

A_k : « k هو أصغر الأرقام المسحوبة». B_k : « k هو أكبر الأرقام المسحوبة».

ما هي قيم k التي تجعل $p(A_k) = p(B_k)$ ؟

الحل

بفرض A_k حدث k أصغر الأرقام المسحوبة



بفرض D_1 : حدث أن الكرة المسحوبة أولاً تحمل رقماً $3 \leq k \leq 16$

D_2 : حدث أن الكرة المسحوبة ثانياً تحمل رقماً أكبر تماماً من 16

D_3 : حدث أن الكرة المسحوبة ثالثاً تحمل رقماً أصغر تماماً من 3

$$n(A_k) = n\ \ D_1 \cap D_2 \cap D_3\ \ \times 3$$

$$n(A_k) = 14 \times\ 3 \times\ 2 \times\ 3 = 27$$

$$n(\Omega) = 19 \times\ 18 \times\ 17 = 8$$

$$p(A_k) = \frac{14 \times\ 3 \times\ 2 \times\ 3}{19 \times\ 18 \times\ 17} = \frac{14}{503}$$

B_k : حدث k أكبر الأرقام المسحوبة.

$$n(B_k) = n(D_1 \cap D_3 \cap D_3) \times 3$$

$$n(B_k) = 14 \times 2 \times 1 \times 3 = 27$$

$$p(B_k) = \frac{14 \times\ 2 \times 1 \times\ 3}{19 \times\ 18 \times\ 17} = \frac{14}{1509}$$

إن قيم k التي تجعل $p(B_k) = p(A_k)$ هي قيم k التي تجعل عدد العناصر الأكبر تماماً من 16 يساوي عدد العناصر التي هي أصغر تماماً من 3 و هذا يتحقق مثلاً عندما تكون $4 \leq k \leq 16$

١٥ يحوي صندوق ثلاث كرات متماثلة كتب عليها الأحرف «ح»، «ب»، «ر». نسحب الكرات الثلاث على التوالي دون إعادة، ونسجّل الأحرف التي نحصل عليها. لتكن E مجموعة الكلمات التي نحصل عليها في هذه التجربة. احسب احتماليّ الحدثين الآتيين:

A : «حصلنا على كلمة بحر».

الحل

$$n(\Omega) = 3 \times 2 \times 1 = 6$$
$$n(A) = 1 \times 1 \times 1 = 1$$
$$p(A) = \frac{1}{6}$$
$$n(B) = 1 \times 2 \times 1 = 2$$
$$p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

١٦ تنهي الجارتان A و B عملهما معاً، تستقل كل منهما قطار الساعة 6 إن أمكنها وإلا فإنها تستقل قطار الساعة $6{:}30$. لنفترض أن وقت انتهاء عمل كل منهما غير متعلق بالأخرى. إذا كان احتمال أن تستقل A قطار الساعة 6 يساوي 0.9 واحتمال ان تستقله B يساوي 0.8. ما احتمال ان تلتقي الجارتان في القطار نفسه؟

الحل

$$p(B) = \frac{8}{10} \quad , \quad p(A) = \frac{9}{10}$$
$$p(B') = \frac{2}{10} \quad , \quad p(A') = \frac{1}{10}$$

إن الحدثين B, A مستقلان احتمالياً .

بفرض C حدث أن تلتقي الجارتان في القطار نفسه.

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A \cap B) + P(A' \cap B') \\ &= p(A).p(B) + p(A').p(B') \\ &= \frac{9}{10}.\frac{8}{10} + \frac{1}{10}.\frac{2}{10} \\ &= \frac{72}{100} + \frac{2}{100} = \frac{74}{100} \end{aligned}$$

١٧ يحتوي كيس على 24 بطاقة مرقمة من 1 إلى 24، نسحب بطاقة عشوائياً.

- الحدث T : « رقم البطاقة المسحوبة بطاقة من مضاعفات العدد 3».
- الحدث F : « رقم البطاقة المسحوبة أصغر تماماً من 15».
- الحدث E : « رقم البطاقة المسحوبة زوجي».

① احسب $\mathbb{P}(T)$ ، $\mathbb{P}(F)$ ، $\mathbb{P}(F \cap T)$، هل الحدثان T و F مستقلان احتمالياً؟

② احسب $\mathbb{P}(T|E)$ ، هل الحدثان T و E مستقلان احتمالياً؟

الحل

① $n(T) = \dfrac{\text{أك برمضاء ف}}{\text{أصغرمضاء ف}} = \dfrac{8}{24}$

$P(T) = \dfrac{8}{24} = \dfrac{1}{3}$

$F = \quad 1, 2, \dots\dots\dots\dots 14$

$n(F) = 14$

$p(F) = \dfrac{14}{24} = \dfrac{7}{12}$

$n(F \cap T) = \dfrac{12}{3} = 4$

$p(F \cap T) = \dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6}$

نلاحظ أن $p(F \cap T) \neq p(F).p(T)$

فالحدثان T, F غير مستقلين احتمالياً

② $p(T \mid E) = \dfrac{n(T \cap E)}{n(E)}$

$n(E) = 12$

$T \cap E = \quad 6, 12, 18, 24$

$n(T \cap E) = 4$

$p(T \mid E) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} = p(T)$

فالحدثان T, E مستقلان احتمالياً

١٨ في أحد المستوصفات تم تسجيل معلومات عن عينات الدم المسحوبة من المرضى وملاحظة زمرهم الدموية وعامل الريزوس (إيجابي أو سلبي) وكانت نسب الزمر الدموية للعينات كما في الجدول:

الزمرة	A	B	AB	O
عامل ريزوس إيجابي	32.8	8.1	4.15	36
عامل ريزوس سلبي	7.2	1.9	0.85	9

① احسب احتمال إذا كانت زمرة الدم O ما احتمال أن يكون عامل الريزوس سلبي؟

② احسب احتمال إذا كان عامل الريزوس سلبي ما احتمال أن تكون زمرة الدم O؟

الحل

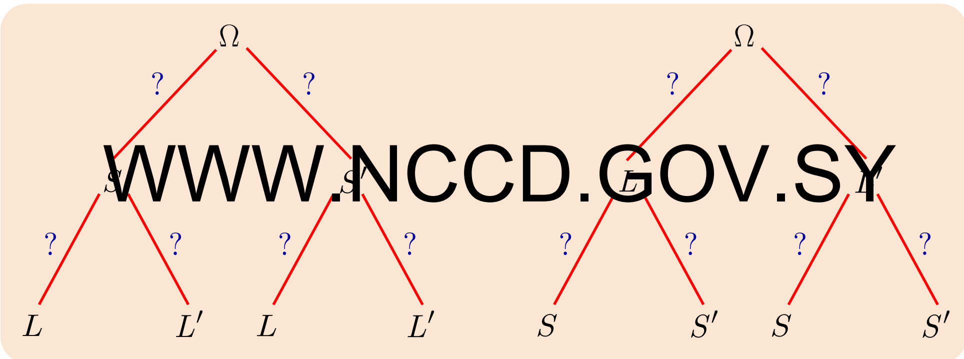
① $$p(R\bar{h}|O)=\frac{p(R\bar{h}\cap O)}{p(O)}=\frac{\frac{9}{100}}{\frac{45}{100}}=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$$

② $$p(O|R\bar{h})=\frac{p(R\bar{h}\cap O)}{p(R\bar{h})}=\frac{\frac{9}{100}}{\frac{18.95}{100}}=\frac{9}{18.95}$$

١٩ في أحد الصفوف $50\,\%$ من الطلاب يحبون المطالعة و $75\,\%$ يحبون الرياضة و $40\,\%$ يحبون الرياضة والمطالعة معاً. نختار عشوائياً طالباً، ونتأمّل الحثين الأتيين:

L: « الطالب يحب المطالعة » S: « الطالب يحب الرياضة ».

① أكمل المخططين الشجريين الآتيين:

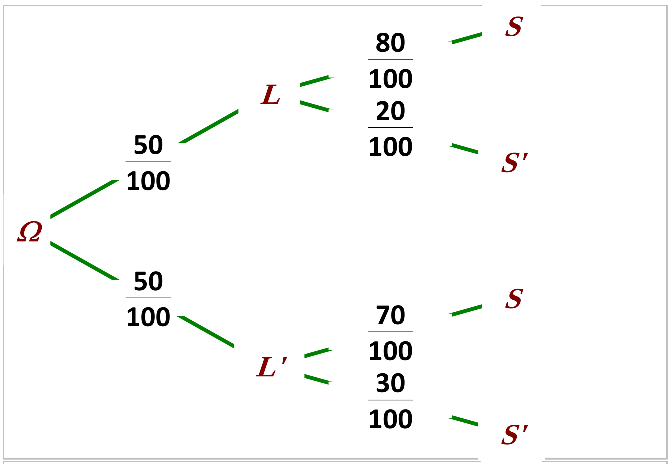


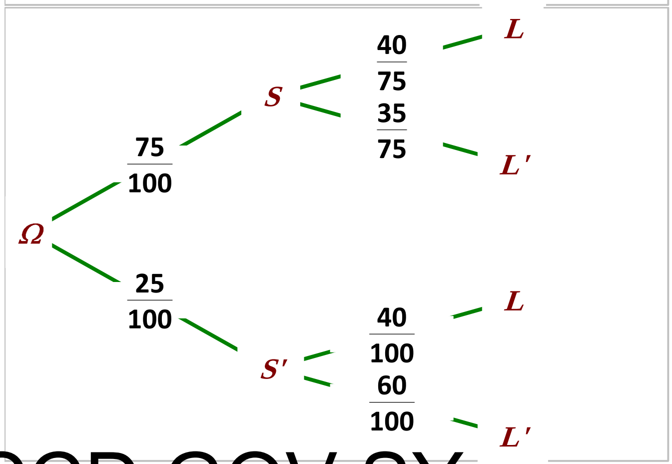
② إذا كان الطالب يحب الرياضة ما احتمال أن يحب المطالعة.

③ إذا كان الطالب يحب المطالعة ما احتمال أن يحب الرياضة.

الحل

① $$P(L)=\frac{50}{100}$$
$$P(S)=\frac{75}{100}$$
$$P(L\cap S)=\frac{40}{100}$$


Ω
50/100
L
80/100
S
20/100
S′
50/100
L′
70/100
S
30/100
S′


Ω
75/100
S
40/75
L
35/75
L′
25/100
S′
40/100
L
60/100
L′

$$p(S|L)=\frac{p(S\cap L)}{p(L)}=\frac{\frac{40}{100}}{\frac{50}{100}}=\frac{4}{5}=\frac{80}{100}$$

$$p(S|L')=\frac{p(S\cap L')}{p(L')}=\frac{P(S)-P(S\cap L)}{\frac{50}{100}}$$

$$=\frac{\frac{75}{100}-\frac{40}{100}}{\frac{50}{100}}=\frac{35}{50}=\frac{70}{100}$$

$$p(L|S)=\frac{P(L\cap S)}{P(S)}=\frac{\frac{40}{100}}{\frac{75}{100}}=\frac{40}{75}$$

$$p(L|S')=\frac{P(L\cap S')}{P(S')}$$

$$=\frac{P(L)-P(L\cap S)}{\frac{25}{100}}$$

$$=\frac{\frac{10}{100}}{\frac{25}{100}}=\frac{10}{25}=\frac{40}{100}$$

② $p(L|S)=\frac{40}{75}$

③ $p(S|L)=\frac{80}{100}$

٢٠ قرر أستاذ لطيف في مادة الاحتمالات أن يعطي الحظ فرصته في نجاح الطلاب. فصنع عدداً $n=100$ من البطاقات المتماثلة ورقّمها من 1 إلى n ووضع قاعدة النجاح الآتية:

- يختار الطالب عشوائياً ورقة ويسجل رقمها R_1، ثُم يعيدها ، ويُعد ناجحاً إذ كان الرقم الذي حصل عليه أكبر تماماً من $p=50$.
- إذا لم ينجح، يذهب إلى امتحان الإكمال، فيختار عشوائياً ورقة ويسجّل رقمها R_2، ثُم يعيدها، ويُعدّ ناجحاً إذ كان مجموع النتيجتين R_1+R_2 أكبر تماماً من $q=60$.

① احسب احتمال أن ينجح الطالب في مقرر الاحتمالات

② إذا نجح طالبٌ فما احتمال أن يكون قد نجح دون المرور بالإكمال؟

الحل

بفرض A حدث نجاح الطالب في مقرر الاحتمالات :

بفرض A_1 : حدث نجاح الطالب عند سحبه البطاقة التي تحمل الرقم R_1

A_2 : حدث نجاح الطالب في الإكمال (أي مجموع رقمي البطاقتين $60 < R_1 + R_2$)

نلاحظ أن الحدثيين A_1 , A_2 منفصلان

$$p(A) = p(A_1) + p(A_2)$$

$$p(A_1) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

R_1	1	2	3		50
R_2	$60 \to 100$ عددهم 41	$59 \to 100$ عددهم 42	$58 \to 100$ عددهم 43		$11 \to 100$ عددهم 90

$$p(A_2) = \frac{1}{100}\left(\frac{41}{100} + \frac{42}{100} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{90}{100}\right)$$

$$= \frac{1}{10000}\left(\underbrace{41 + 42 + \ldots\ldots\ldots + 90}\right)$$

$$= \frac{1}{10000}\cdot\frac{50}{2}(41+90)$$

$$= \frac{1}{400}(131) = \frac{131}{400}$$

$$p(A) = p(A_1) + p(A_2)$$

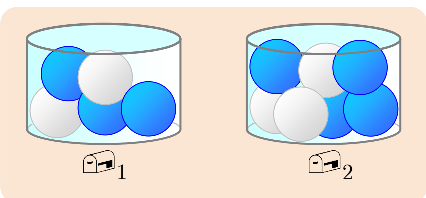
$$= \frac{1}{2} + \frac{131}{400} = \frac{331}{400}$$

$$p(A_1 | A) = \frac{p(A_1 \cap A)}{p(A)}$$

$$= \frac{p(A_1)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{331}{400}}$$

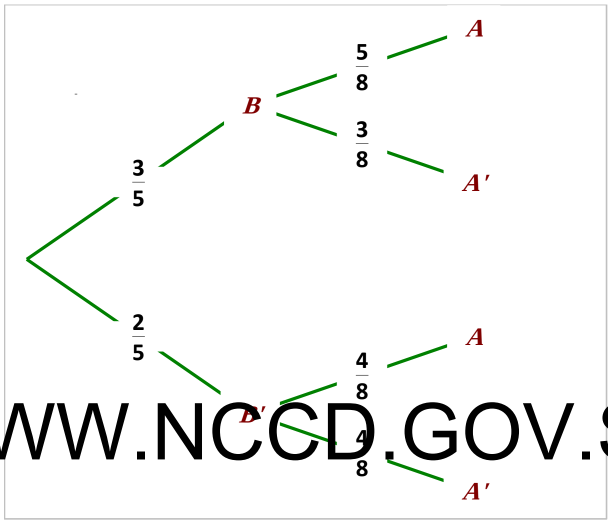
$$p\ \ A_1 | A\ \ = \frac{200}{331}$$

مجموع متتالية حسابية أساسها يساوي 1 عدد
حدودها = 50 وحدها الأول = 41



لنتأمّل صندوقين $\Box_1$ و $\Box_2$ يحتوي كلٌّ منهما على عدد من الكرات. يوجد في الصندوق $\Box_1$ كرتان بيضاوان وثلاث كرات زرقاء، في حين يوجد في الصندوق $\Box_2$ ثلاث كرات بيضاء وأربع كرات زرقاء. نُجري التجربة الآتية : نسحب سحباً عشوائياً كرة من الصندوق $\Box_1$ ونضعها في الصندوق $\Box_2$ ثُمّ نسحب عشوائياً كرة من الصندوق $\Box_2$ ونتفحّص لونها، ما هو احتمال أن تكون زرقاء؟ **مساعدة**: عرّف الحدثين A : «الكرة المسحوبة من $\Box_2$ زرقاء» و B : «الكرة المسحوبة من $\Box_1$ زرقاء».

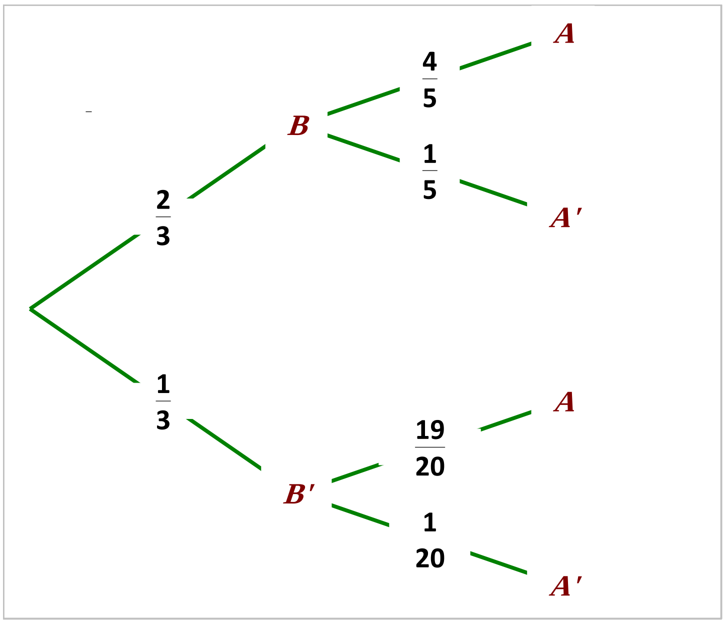
الحل



$$\begin{aligned} p(A) &= p(B\cap A) + p(B'\cap A) \\ &= p(B).p(A|B) + p(B').p(A|B') \\ &= \frac{3}{5}.\frac{5}{8} + \frac{2}{5}\times\frac{4}{8} \\ &= \frac{15+8}{40} = \frac{23}{40} \end{aligned}$$

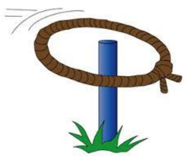
٢٢ يوجد في مدينة مَصْنعان للمصابيح. $\frac{1}{5}$ من المصابيح التي ينتجها المصنع I معطوبة و $\frac{1}{20}$ من المصابيح التي ينتجها المصنع II معطوبة أيضاً. نفترض أن المصنع الأوّل I ينتج في أسبوع واحد ضعفي عدد المصابيح التي ينتجها المصنع الثاني في أسبوع. ما هو احتمال أن يكون مصباحٌ مسحوبٌ عشوائياً من إنتاج المصنعين في أحد الأسابيع صالحاً ؟ **مساعدة**: عرّف الحدثين A : «المصباح المسحوب صالح» و B : «المصباح المسحوب مصنوع في المصنع I».

الحل



$$\begin{aligned} p(A) &= p(B \cap A) + p(B' \cap A) \\ &= p(B).p(A\big|B) + p(B').p(A\big|B') \\ &= \frac{2}{3}.\frac{4}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{19}{20} = \frac{51}{60} \end{aligned}$$

٢٣ تحاول سعاد إدخال حلقات تُلقيها في وتد، تُكرّر سعاد التجربة عدداً من المرات. عندما تنجح سعاد في إدخال حلقة يصبح احتمال نجاحها في إدخال الحلقة اللاحقة $\frac{1}{3}$، وعندما تفشل في إدخال حلقة يصبح احتمال فشلها في إدخال الحلقة اللاحقة $\frac{4}{5}$. نفترض أنّ احتمال نجاح سعاد في إدخال الحلقة في المرة الأولى يساوي احتمال فشلها. نتأمّل، أياً كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n، الحدثين الآتيين:



A_n : « نجحت سعاد في إدخال الحلقة عند الرمية n».

B_n : « فشلت سعاد في إدخال الحلقة عند الرمية n».

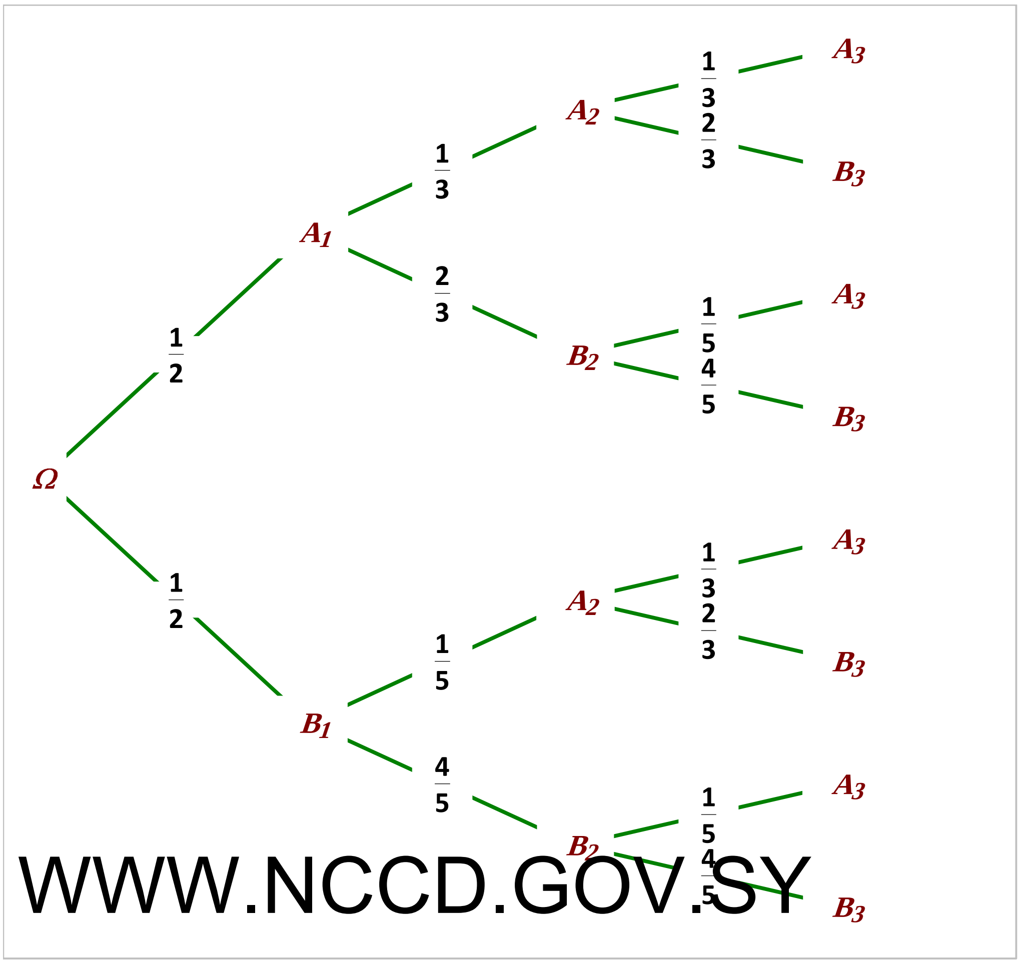
ونعرّف $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.

① عيّن p_1 وبرهن أنّ $p_2 = \frac{4}{15}$.

② أثبت أنّه أياً كان $n \geq 2$ كان $p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5}$.

③ نعرّف في حالة $n \geq 1$ المقدار u_n بالعلاقة $u_n = p_n - \frac{3}{13}$ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية وعيّن حدها الأوّل u_1 وأساسها q.

④ استنتج قيمة u_n ثُمّ p_n بدلالة n، ثُمّ احسب $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.



$$p_1 = \frac{1}{2}$$

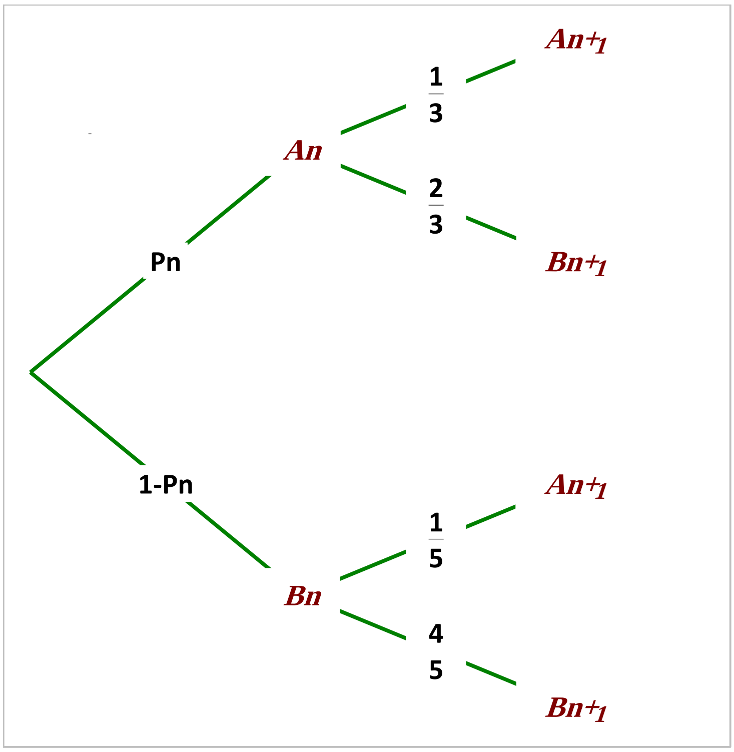
$$p_2 = p(A_2) = p(A_1 \cap A_2) + p(B_1 \cap A_2)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{10}$$

$$p_2 = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

$$p_n = \frac{2}{15} \quad p_{n-1} \; + \; \frac{1}{5} \quad : n \geq 2 \quad ②$$



$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{5}p(1-p_n)$$

$$= \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}p_n$$

$$p_{n+1} = \frac{2}{15}p_n + \frac{1}{5}$$

ومنه : $n \geq 2$: $p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5}$

③

$$U_n = p_n - \frac{3}{13} \qquad n \geq 1$$

$$U_{n+1} = p_{n+1} - \frac{3}{13}$$

$$U_{n+1} = \frac{2}{15}p_n + \frac{1}{5} - \frac{3}{13}$$

$$U_{n+1} = \frac{2}{15}p_n - \frac{2}{65}$$

$$U_{n+1} = \frac{2}{15}\left(p_n - \frac{3}{13}\right)$$

$$U_{n+1} = \frac{2}{15}U_n$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2}{15}$$

ومنه U_n متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{15}$ وحدها الأول هو U_1:

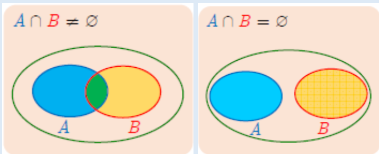
$$U_1 = p_1 - \frac{3}{13}$$
$$U_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{13} = \frac{7}{26}$$

④

$$U_n = U_1 \; q^{n-1}$$
$$U_n = \frac{7}{26}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}$$
$$p_n = U_n + \frac{3}{13}$$
$$p_n = \frac{7}{26}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} + \frac{3}{13}$$
$$\lim_{x\to\infty} p_n = 0 + \frac{3}{13} = \frac{3}{13}$$

المقدمة	الهدف	إثارة مشكلات لربط الاحتمالات بالواقع
	دور المدرس ودور الطالب	طرح المشكلة و إثارة التفكير و الواقعية
	آلية التنفيذ	طرح المشكلة وفق أسئلة موجهة لتحفيز الطالب على ضرورة بحث الاحتمالات في الحياة الواقعية.10د ملاحظة: لا داعي لتفسير كيفية الحصول على النسب التي في المقدمة
انطلاقة نشطة	الهدف	التعرّف على قانون الأعداد الكبيرة. التعرف على دراسة تجربة عشوائياً.
	دور المدرس ودور الطالب	توضيح أنّ التكرار الكبير للتجربة يعطي قيم أقرب للاحتمالات توضيح و أسئلة موجهة
	آلية التنفيذ	* إجراء تجربة (إلقاء قطعة نقود ، حجر نرد) * يطلب المدرس من الطلاب تحديد فضاء العينة. * يطرح المعلم أسئلة حول توقع نسبة المر الدموية لدى السكان في بلدنا. ١٠ د
عناصر الاحتمال	الهدف	التعرف على التجربة العشوائية ، الأحداث البسيطة ، فضاء العينة ، قانون الاحتمال ، التجارب العشوائية متساوية الاحتمال ، احتمال حدث
	دور المدرس ودور الطالب	توضيح الأفكار الجديدة ، طرح الأسئلة

	آلية التنفيذ	* تحديد عناصر التعريف. * التمييز بينهما. * مناقشة المثال ص164. * يحل الطالب المثال ويقوم المدرس بالتوجيه و التقويم. * مناقشة المثال ص166 بنفس الأسلوب. ٤٠ د ملاحظة : التاكيد على أن حساب احتمال أي حدث A ((منته)) يعطى بالعلاقة: $P(A) = n(A)/n(\Omega)$
تدرب ص ١٦٧	الهدف	حالة تقويمية و تدريبية
	دور المدرس ودور الطالب	تغذية راجعة حل التمارين
	آلية التنفيذ	* يجب حل ① ، ② كاملاً ص167. 30 د
عمليات على الأحداث	الهدف	التعرف على العمليات على الأحداث.
	دور المدرس ودور الطالب	توجيه أسئلة، الإجابة على أسئلة المدرس و حل تطبيق مباشر
	آلية التنفيذ	* من خلال تعريف4 يتذكر الطالب المجموعات والعمليات عليها. * يتم ربط خبرة الطالب السابقة بالمجموعات بالتعرف على الأحداث والعمليات عليها. * يتم مناقشة حل المثال ص168 كتقويم مرحلي. ٢٥ د

خواص احتمالات الأحداث	الهدف	إيجاد قانون احتمال اجتماع حدثين.
	دور المدرس ودور الطالب	طرح أسئلة ، الإجابة عن الأسئلة
	آلية التنفيذ	* يتم برهان المبرهنة1 من خلال رسم الحالتين على السبورة و مناقشة الطلاب بالبرهان.  * إكمال البرهان بنفس الآلية الموجودة في الكتاب. * مناقشة حل المثالين 1 ، 2 في ص170 حسب الآلية الموجودة في الكتاب. ٢٠ د
تكريساً للفهم	الهدف	كيفية عد النتائج الممكنة و الموافقة لحدث ما.
	دور المدرس ودور الطالب	طرح مشكلة مع التوجيه للحل ، الإجابة عن الأسئلة
	آلية التنفيذ	* مناقشة المثال ص171 لتوضيح طريقة إنشاء شجرة من أجل عد النتائج الممكنة لتجربة. * مناقشة المثالين ص172،173 لتوضيح طريقة ملئ الخانات. ٢٥ د
تدرب ص ١٧٣	الهدف	حالة تقويمية و تدريبية
	دور المدرس ودور الطالب	تغذية راجعة ، حل التمارين
	آلية التنفيذ	* حل التمارين كلها. ٢٠ د

<table>
<tr><td rowspan="3">الاحتمالات المشروطة</td><td>الهدف</td><td>* إيجاد احتمال حدث ما بشرط وقوع حدث آخر .

استخدام التمثيل الشجري للتجارب الاحتمالية المركبة.

إيجاد احتمال أي حدث بدلالة الاحتمال الشرطي.</td></tr>
<tr><td>دور المدرس

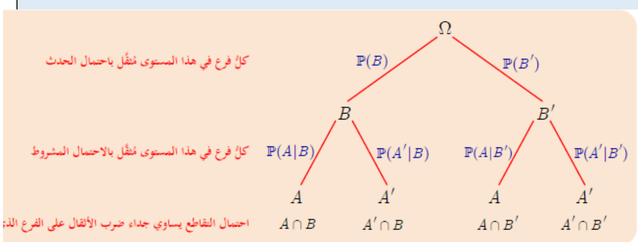
ودور الطالب</td><td>التغذية الراجعة في حل الأمثلة

توجيه

توجيه أسئلة ، حل الأمثلة

الوصول إلى برهان المبرهنة</td></tr>
<tr><td>آلية التنفيذ</td><td>* إعطاء التعريف مع توضيح الرموز الموجودة.

* مناقشة حل الأمثلة التطبيقية ص174– 175 وفق آلية الكتاب. * توضيح التمثيل الشجري للتجارب الاحتمالية المركبة من خلال رسم المخطط ومناقشة الأفرع من أجل ربطها بالمبرهن التالية.



* مناقشة برهان المبرهنة من خلال المخطط. ٢٥ د

ملاحظة : تبدأ الفقرة بعد نهاية حل تدرب ص173 ويتم إكمالها في الحصة القادمة.</td></tr>
</table>

تكريساً للفهم	الهدف	تنمية مهارات التفكير الناقد لدى الطالب. التعرف على سبب تسمية الاحتمال المشروط (بالاحتمال)
	دور المدرس ودور الطالب	طرح المشكلة مع الإضاءة لحلها. طرح أسئلة حول خواص الاحتمال
	آلية التنفيذ	* آلية التنفيذ حسب الطريقة الموجودة في الكتاب. ٢٠ د
تدريب ص ١٧٦	الهدف	حالة تقويمية و تدريبية
	دور المدرس ودور الطالب	تغذية راجعة ، حل التمارين
	آلية التنفيذ	* حل كامل التمارين ص178 على أن تترك الأسئلة المتبقية كواجب منزلي تحل في الحصة القادمة. ٤٥ د
الاستقلال الاحتمالي	الهدف	دراسة العلاقات الاحتمالية بين الأحداث التي لا يتعلق احدهما بوقوع الآخر. تحديد الأحداث المستقلة. إثبات أن استقلال حدثين.
	دور المدرس ودور الطالب	توجيه أسئلة ، الإجابة عن الأسئلة
	آلية التنفيذ	* طرح أسئلة حول الأحداث المستقلة. * كتابة التعريف. * تطبيق التعريف حول الحدث الشرطي. $\mathbb{P}(A\|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$

		* حل المثال التطبيقي ص180 و يقوم به الطالب على السبورة ومناقشة زملائه. * مناقشة برهان المبرهنة حسب الكتاب ويمكن إضافة رسم توضيحي. * مناقشة النتيجة. * يحل الطالب المثال ص181 حسب الآلية المعروضة في الكتاب كحالة تقويمية ويعطي المدرس تغذية راجعة. ٢٥ د
تدرب ص ١٨٢	الهدف	حالة تقويمية و تدريبية
	دور المدرس ودور الطالب	تغذية راجعة ، حل التمارين
	آلية التنفيذ	حل كامل التدريب ص182 ، ٢٠ د
تمرينات و مسائل + لنتعلم البحث + قدماً إلى الأمام	الهدف	آلية توظيف الاحتمالات في حل المشكلات و المسائل المطروحة.
	دور المدرس ودور الطالب	تحديد المسائل التي سيقوم الطالب بحلها كواجبات منزلية+ متابعة حل هذه المسائل+ ليس موجه
	آلية التنفيذ	يختار المدرس تمرين من كل مجموعة من المسائل التي تحقق نفس الهدف وتعتبر بقية المسائل إثرائية يمكن للطالب أن يحلها و تصحح خارج وقت الحصص الدراسية. * في الجدول التالي سيجد المدرس تصنيف للمسائل المتشابهة في الأهداف. ١٠ حصة

جدول تصنيف المسائل حسب الهدف											
الهدف		رقم المسألة									
تطبيق لقوانين الاحتمالات	رقم المسألة	2	3	١٠	١٧						
	الصفحة	185	185	189	190						
تحديد فضاء العينة، عدد النتائج الممكنة	رقم المسألة	1									
	الصفحة	185									
استقلال الأحداث	رقم المسألة	4									
	الصفحة	185									
تطبيقات واقعية لبحث الاحتمال	رقم المسألة	٥	7	8	٩ + ٩م	١١	١٣	١٥	١٦	١٨	٢٣
	الصفحة	186	187	187	189	189	190	190	190	191	192
إلقاء قطعة نقود عدة مرات	رقم المسألة	6									
	الصفحة	186									
ربط بحث المتتاليات بالاحتمالات	رقم المسألة	١٠	٢٠								
	الصفحة	189	191								
ربط نظرية الأعداد بالاحتمالات	رقم المسألة	١٢	١٤								
	الصفحة	189	190								
مسألة عن وجود تجربتين منفصلتين	رقم المسألة	٢١	٢٢								
	الصفحة	192	192								