المؤسسة العامة للطباعة

الجُمْهوريّة العَربيّة السُّوريّة

وزارة التّربيَة

المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية

دليل المدرس

الجزء الأول

الصّف الثّاني الثّانوي العلمي

العام الدراسي ٢٠١٥ - ٢٠١٦ م / ١٤٣٦ - ١٤٣٧ هـ

طُبِعَ أوّل مرّة للعام الدراسي ٢٠١٥ - ٢٠١٦ م

إعداد

ميكائيل الحمود	أيشوع اسحق	حبيب عيسى
وفاء حمشو	عيسى عثمان	محمد خلدون شماع

المراجعة والتدقيق العلمي

الأستاذ الدكتور عمران قوبا

خطة توزيع منهاج الرياضيات

يخصص ثلاث حصص أسبوعياً لكتاب الرياضيات الجزء الأول إضافة إلى وحدة الإحصاء من الجزء الثاني

الشهر	الأسبوع الأول	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
أيلول			① اطراد تابع ② التوابع المرجعية	③ عمليات على التوابع ④ جهة اطراد تابع
تشرين أول	⑤ دراسة جهة اطراد تابع ⑥ كثيرات الحدود	أنشطة +مسائل لنتعلم البحث	مسائل: قُدُماً إلى لأمام	① العدد المشتق ② تطبيقات الاشتقاق
تشرين ثاني	③ مشتقات التوابع المألوفة ④ العمليات على التوابع الاشتقاقية	أنشطة+ لنتعلم البحث	مسائل: قُدُماً إلى لأمام	① المشتق والاطراد والقيم الحدية محلياً
كانون الأول	① المشتق والاطراد والقيم الحدية محلياً	② حل المعادلة $f(x)=0$	أنشطة+مسائل لنتعلم البحث	مسائل: قُدُماً إلى لأمام
كانون الثاني	امتحان الفصل الأول – العطلة الانتصافية			① نهاية تابع في $+\infty$ ② نهاية تابع في $-\infty$
شباط	③ نهاية تابع عند نقطة ④ مبرهنات النهايات	⑤ التوابع كثيرات الحدود وبعض التوابع الكسرية	أنشطة+ مسائل لنتعلم البحث	مسائل: قُدُماً إلى لأمام
آذار	① تعريف المتتالية ② المتتاليات المتزايدة، والمتتاليات المتناقصة	③ المتتاليات الحسابية	④ المتتاليات الهندسية	⑤ مجموع عدود متوالية لمتتالية ⑥ تقارب المتتاليات
نيسان	أنشطة+مسائل لنتعلم البحث	مسائل: قُدُماً إلى لأمام	① المتوسط الحسابي والانحراف المعياري	② التغاير ومعامل الارتباط ③ مستقيم الارتجاع
أيار	أنشطة+مسائل لنتعلم البحث	مسائل: قُدُماً إلى لأمام		

مُقدّمة

لما كان منهاج الرياضيات للثاني الثانوي يعتمد أسلوباً ينمي قدرة الطالب على توظيف المعلومات التي اكتسبها خلال دراسته وجعله محوراً اساسياً في بناء معارفه ، كانت الأنشطة والتمارين والمسائل لتضعه في مواقف تعليمية مختلفة ،بعضها لتوظيف مكتسباته ، وبعضها للبحث والمعرفة وبعضها تحثه على تطبيق ما تعلمه أو لتمكينه من التعود على البرهان الرياضياتي وصياغته بلغة سليمة .

يأتي كتاب حلول تمارين منهاجُ الرياضياتِ للصّف الثّاني الثّانوي العلمي مُتمماً لكتاب حلول التمارين في الصف الأول الثانوي حيث جرى استعمال طرائق سهلة متنوعة ومدعّمة بالتبريرات المناسبة واعتماد عبارات لفظية منطقية بعيداً عن الرموز أثناء صياغة البراهين.

يشتملُ الكتاب على حلول التدريبات والتمرينات والمسائل للوحدات الخمس في الجزء الأول . ونجدُ حلولاً للتدريبات والأنشطة والتمرينات والمسائل المميَّزةِ التي نُجْمِلُها فيما يأتي:

1- تدريبات الدروس كانت عبارة عن تطبيقات مباشرة للدساتير والمبرهنات الواردة في الدرس
2- الأنشطة في نهاية كل وحدة لأنها غالبا ما تتضمن أفكاراً يمكن للطالب أن يستعملها ويوظفها أثنا حل التمارين والمسائل في نفس الوحدة وفي وحدات لاحقة
3- مسائل مميزة تتضمن خاصة هندسية عامة لمماس قطع ماأو إنشاء هندسي.
4- تمرينات ومسائل لنتعلم البحث حيث تم التقيد بالإرشادات الواردة وبخطوات حل المسألة ومن ثم صياغتها بلغة رياضياتية سليمة.
5- مسائل قدماً إلى الأمام وخاصة التي تتضمن تعيين محل هندسي أو خاصة عامة.
6- تم استعمال الحاسبة في بعض التمارين لإيجاد نتائج دقيقة أو للحصول على تقريب أفضل وبزمن أقل.

وعلى المدرس أن يدرك بأن جميع وحدات كتاب الطالب جرى إعدادها وفق إستراتيجية واحدة وأن أمثلة الكتاب هي في أغلب الأحيان تعرض حلولاً نموذجية جرى صوغها صياغة لغوية سليمة وبأسلوب منهجي علمي لتكوّن نماذجَ يجبُ إتباعها عند حلِّ الأنشطة والتدريبات والمسائل.

كما انه جرت الإشارة إلى الكثير من الأخطاء الشائعة التي يقع فيها الطلاب عادة، أو المفاهيم التي يستعملها الطلاب في غير مكانها، أو بأسلوب منقوص تحت أسم أخطاءٌ يجبُ تجنُّبَها.وجرى التنويهُ إلى قضايا ومفاهيمَ أساسيّة في الوحدة حيث تُعادُ صياغتُها بأسلوبٍ مختصرٍ ومبسَّطٍ متضمِّنة إرشاداتٍ على كيفية استعمالها في أمثلة توضيحيّة في فقرة منعكساتٌ يجبُ امتلاكَها.ولابد من التنويه إلى بقية الفقرات وهي

الأنشطة: وهي هادفة حيث كل وحدة من الوحدات انتهت بنشاط على الأقل وعلى زملائنا المدرسين أن يخصصوا الوقت المناسب لمناقشة هذه الأنشطة مع الطالب داخل الغرفة الصفية .

تمرينات ومسائل لنتعلّمِ البحثَ: وهي فقرة تُدَرِّب المتعلّمَ على طرائق حلِّ المشكلات وتشجّعُ التعلُّم الذاتيَّ عن طريق تزويد الطالب بمنهجية التفكير الاستقصائي وجَعْلِهِ يطرح على نفسه الأسئلة الصحيحة بهدف الوصول إلى حلول المسائل ثُمّ صياغة هذه الحلول بلغة سليمة.

تمرينات ومسائل قُدُماً إلى الأمام: وهي تمارين ومسائل متنوعة ومتدرجة في صعوبتها تشمل في بعض الأحيان مواقف حياتية تُتيحُ للمُتَعلِّم فُرَص تعلم كثيرة وتعزز مهارات حل المسائل والتفكير الناقد لديه.

وهنا نريد التأكيد على أنّ تحقيق الأهداف المرجوّة من الكتاب في تنمية مهارات التفكير المختلفة وخاصة مهارات التفكير الناقد والتفكير الإبداعي، يتطلّب من المدرّس أن يؤدي دور المُيسر والموجّه للعملية التعلُّمية، فيطرح التساؤلات المُناسبة، ويختار المناسب من الأمثلة، ويرتب الأفكار ترتيباً منطقيّاً، ويوجه ممهداً الطريق لحل المسائل، ويصوغ مع طلابه الحلول صياغة لغوية سليمة على السبّورة.

وأخيراً نأمل من زملائنا المدرّسين الإسهام معنا في إنجاح هذه التجربة الجديدة وتزويدنا بمقترحاتهم البنّاءة المتعلقة بهذا الكتاب متعاونين معاً لتطوير الكتاب المدرسي باستمرار.

المُعدّون

المحتويات

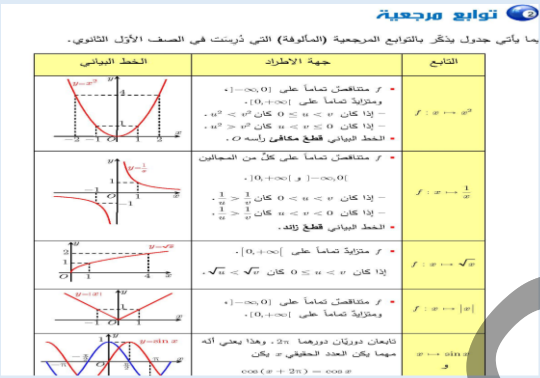
تحليل المحتوى للوحدة الأولى

عموميات عن التوابع

الهدف العام: تعريف العمليات على التوابع وجهة اطرادها

المقدمة	الهدف	مقدمة تاريخية تهدف إلى تنمية اتجاهات إيجابية نحو الرياضيات واحترام ما قدمه العلماء من إسهامات في ميادين العلوم المختلفة.
	دور المدرس ودور الطالب	تشجيع الطلاب على قراءة المقدمة – والسؤال هل يمكن تعميم العمليات الحسابية الأربع على هذا الكائن الرياضي الجديد وهذا ما سنتعلمه في هذه الوحدة
	الية التنفيذ	حوار بين المدرس وطلابه وقراءة المقدمة من قبل الطلاب (5 دقيقية)
انطلاقة نشطة	الهدف	التذكير ببعض صفات التوابع المرجعية.
	دور المدرس ودور الطالب	ذكر خواص بعض التوابع المرجعية
	الية التنفيذ	حوار بين المدرس وطلابه وقراءة المقدمة من قبل الطلاب والسؤال هل يحتفظ مجموع تابعين أو جدائهما على نفس خواص هذين التابعين ؟ (25 دقيقة)

اطراد تابع	الهدف	تذكير الطالب بما تعلمه في الصف الأول الثانوي مجموعة تعريف تابع ، جذري ، كسري ، الخط البياني الممثل لتابع
	دور المدرس ودور الطالب	يذكر المدرس بشروط التعريف ويعطي مجموعة من التوابع ويطلب من الطلاب ايجاد مجموعة التعريف
	الية التنفيذ	التوابع ذوات قواعد الربط البسيطة ويمكن أن يعرض الصورة ص13 الممثلة لخط بياني ليتعرف الطلاب على مجموعة التعريف ومجموعة القيم (20 دقيقة)
جهة اطراد تابع	الهدف	تعريف التابع المتزايد والتابع المتناقص
	دور المدرس ودور الطالب	باستعمال الرسم على السبورة ومناقشة الفقرة ص 14 مع اعطاء اهمية للرسم للتوضيح المفهوم
	الية التنفيذ	توضيح كيف يمكن لتابع ألا يكون متزايد أو متناقص (مطرد على مجال ما). بالاستفادة من التمثيل البياني ومناقشة المثال المحلول ص14 ، توضيح : لدينا تابع متزايد على مجال ، تابع متناقص على مجال ، تابع ليس متزايد أو ليس متناقص . وظيفة تدرب ص 16 (20 دقيقة)
تكريسا للفهم ص 18 زوجية تابع	الهدف	التمييز بين التابع الفردي والتابع الزوجي
	دور المدرس ودور الطالب	مناقشة شرطي التابع الزوجي – الفردي – مناقشة الحالة التي يكون فيها التابع ليس زوجيا وليس فردياً.
	الية التنفيذ	التذكير بمحور التناظر – التناظر لمستقيم – التناظر بالنسبة للمبدأ – ذكر شرطي التابع الزوجي – وكذلك الفردي – مع رسم خطوط بيانية تمثل كل منها – التنويه للاضاءة في نهاية الصفحة تدرب ص 19 وظيفة

<table>
<tr><td rowspan="3">التوابع المرجعية</td><td>الهدف</td><td>ذكر التوابع المرجعية – تكتب على السبورة من قبل الطلاب لأهميتها وخصوصاً عند دراسة خواص التوابع الناتجة عن تركيب تابعين .</td></tr>
<tr><td>دور المدرس ودور الطالب</td><td>يطلب المدرس فتح الكتاب ص 17 وملاحظة الخطوط البيانية</td></tr>
<tr><td>الية التنفيذ</td><td>عرض الخطوط البيانية المرسومة والتنويه إلى معرفة شكل هذه الخطوط وقواعد ربطها – وجهة الاطراد

توابع مرجعية
فيما يأتي جدول يذكّر بالتوابع المرجعية (المألوفة) التي دُرِست في الصف الأول الثانوي.
<table>
<tr><th>التابع</th><th>جهة الاطراد</th><th>الخط البياني</th></tr>
<tr><td>$f : x \mapsto x^2$</td><td>▪ f متناقص تماماً على $]-\infty, 0]$، ومتزايد تماماً على $[0, +\infty[$.
– إذا كان $0 \le u < v$ كان $u^2 < v^2$.
– إذا كان $u < v \le 0$ كان $u^2 > v^2$.
▪ الخط البياني قطع مكافئ رأسه O.</td><td>$y = x^2$</td></tr>
<tr><td>$f : x \mapsto \frac{1}{x}$</td><td>▪ f متناقص تماماً على كلٍّ من المجالين $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$.
– إذا كان $0 < u < v$ كان $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$.
– إذا كان $u < v < 0$ كان $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$.
▪ الخط البياني قطع زائد.</td><td>$y = \frac{1}{x}$</td></tr>
<tr><td>$f : x \mapsto \sqrt{x}$</td><td>▪ f متزايد تماماً على $[0, +\infty[$.
إذا كان $0 \le u < v$ كان $\sqrt{u} < \sqrt{v}$.</td><td>$y = \sqrt{x}$</td></tr>
<tr><td>$f : x \mapsto \lvert x \rvert$</td><td>▪ f متناقص تماماً على $]-\infty, 0]$، ومتزايد تماماً على $[0, +\infty[$.</td><td>$y = \lvert x \rvert$</td></tr>
<tr><td>$x \mapsto \sin x$ و</td><td>تابعان دوريّان دورهما 2π. وهذا يعني أنه مهما يكن العدد الحقيقي x يكن
$\cos(x + 2\pi) = \cos x$</td><td>$y = \sin x$</td></tr>
</table>
(20 دقيقة)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">العمليات على التوابع</td><td>الهدف</td><td>تساوي تابعين – ومن ثم العمليات (جمع – طرح – ضرب – قسمة – التركيب).</td></tr>
<tr><td>دور المدرس ودور الطالب</td><td>يكتب المدرس مجموعة من التوابع ويطلب من الطالب جمع قواعد ربطها ومن ثم يثير النقاش حول امكانية اجراء العمليات ومعرفة خواص اكثر</td></tr>
<tr><td>الية التنفيذ</td><td>يعيد المدرس سؤال الطلاب عن السؤال الذي كان قد ط رحه في بداية الدرس عن العمليات ويستنتج مع الطلاب مجموعة التعريف وقاعدة ربط كل منها
(20 دقيقة)</td></tr>
</table>

دراسة جهة اطراد تابع	الهدف	استعمال المبرهنات لدراسة جهة اطراد مجموع تابعين – ضرب تابع بعدد حقيقي – تركيب تابعين
	دور المدرس ودور الطالب	دور المدرس ودور الطالب يسأل المدرس عن معنى الإطراد وهل يوجد طريقة ثانية للدراسة ثم يعرض المبرهنتين ص 24
	الية التنفيذ	كتابة نص المبرهنة وادارة النقاش مع الطلاب للوصول إلى الإثبات (20 دقيقة)
كثيرات الحدود	الهدف	تعريف التابع المتزايد والتابع المتناقص
	دور المدرس ودور الطالب	التذكير بتابع الدرجة الأولى وتابع الدرجة الثانية وهو إحدى توابع كثيرات الحدود عرض التعريف – الصيغة القانونية – درجة كثير الحدود – جمع كثيرات الحدود وضربها –
	الية التنفيذ	ادارة الحوار – والتوقف عند الحالات الخاصة المميزة بلون مختلف في الصفحة 28 مناقشة الأمثلة فَكِّرْ إذا كان P و Q كثيري حدود، كان $P+Q$ كثيرَ حدودٍ درجته أصغر أو تساوي أكبر درجتيهما. وكان جداء ضربهما تابع كثير الحدود درجته تساوي مجموع درجتي P و Q. عند قسمة تابعين كثيرَي حدود لا نحصل، عموماً، على كثير حدود بل على تابعٍ كسريّ. (20 دقيقة)

أفكار يجب تمثلها	الهدف	مراجعة الأفكار الرئيسة للوحدة
	دور المدرس ودور الطالب	دور المدرس ادارة الحوار من خلال طرح الأسئلة المناسبة لعرض النقاط الرئيسية للوحدة
	الية التنفيذ	فمثلاً العمليات على التوابع – يمكن للمدرس أن يحاور الطلاب ويسأل هل مجموعة تعريف مجموع تابعين أو قسمتهما أو ضربهما هي نفسها مجموعة التابع f أو g – هل تتغير جهة الأطراد – إذا علمت جهة اطراد تابعين هل يمكن معرفة جهة اطراد التابع المركب –– (20 دقيقة)

الهدف	لهذه النشطة وظائف هامة لحاجة الطالب اليها عند حل التمارين في نفس الوحدة او في واحدات لاحقة لتركيز على دستوري الانسحاب , بالتطبيق يمكن الوصول إلى تابع مرجعي و خواصه معروفة لدينا نشاط1: دستورا الانسحاب ونقطة التناظر ، نشاط2 : محور التناظر	
دور المدرس ودور الطالب	يمكن أن يطلب المدرس من الطلاب تحضير الأنشطة كواجب منزلي – ومن ثم المناقشة	
الية التنفيذ	عرض النشاط 1 مع التطبيق , عرض النشاط 2 محور التناظر ونقطة التناظر (ستوظف في دراسة التوابع والمقاربات) $\overrightarrow{AM} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ و $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ تفيد علاقة شال $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$، بالانتقال إلى الإحداثيات، واستنتاج ما يلي: $y = Y + b$ و $x = X + a$ (دساتير تغيير المَعْلَم) يقود هذا التغيير للمعلم إلى معادلة الخط البياني C في المعلم الجديد $A, \vec{i}, \vec{j}$. لنرمز بالرمز $Y = g(X)$ إلى هذه المعادلة• إذا كان g زوجيّاً، كان المحور $(A; \vec{j})$ محور تناظر للخط C, إذا كان g فردياً، كانت النقطة A مركز تناظر للخط C. (20 دقيقة)	

أنشطة	الهدف	تعزيز مهارات الحل عند الطالب وتوظيف ما اكتسبه من معلومات
	دور المدرس ودور الطالب	ميسر وموجه. تغذية راجعة حل الأنشطة
	الية التنفيذ	يعرض المدرس نشاط 1ويطلب من الطلاب حله ثم يناقش الطلاب بالحل. يعرض المدرس نشاط2ويطلب من الطلاب حلها ثم يناقش الحل معهم.
	الزمن المخصص	

تمارين الدرس والمسائل	التمارين الأولى	الهدف	تقويمي لقياس مدى قدرة الطالب على توظيف العمليات على التوابع في دراسة الاطراد
		دور المدرس ودور الطالب	ميسر وموجه تغذية راجعة.
		الية التنفيذ	يطلب المدرس من الطلاب حل تمرينات ومسائل في الحصة وما يتبقى تُعطى كواجب منزلي. بحيث تتضمن مسائل تشمل أهدافاً مختلفة وتغطي جميع الأهداف المذكورة
	لنتعلم البحث معاً	الهدف	تزويد الطالب بمنهجية التفكير الاستقصائي والتعلم الذاتي
		دور المدرس ودور الطالب	حل المسائل والقيام بكتابة الصيغة بأسلوب منطقي
		الية التنفيذ	يعرض المدرس مسائل لنتعلم البحث معاً ويناقشهم في الحل ويطلب من الطلاب حلها وفق الآلية المعروضة في الكتاب، ثم صياغة الحل وكتابته بلغة سليمة.
	قدماً إلى الأمام	الهدف	تعزيز مهارات حل المسائل والتفكير الناقد
		دور المدرس ودور الطالب	حل المشكلات
		الية التنفيذ	يطلب المدرس من الطلاب حل تمارين ومسائل قدماً إلى الأمام يمكن اختيار من مسائل قدماً إلى الأمام المسائل 22 – 25 – 27

حل التدريبات و التمارين

تَدرَّبْ ص16

① بيِّن في الحالات الآتية ما إذا كانت النقطة المعطاة $M(x,y)$ تقع على الخط البياني للتابع f :

❶ $f(x)=x^2+2x-5$ ① $M(-1,-6)$ ② $M(2,3)$ ③ $M(1,0)$

❷ $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$ ① $M(0,-1)$ ② $M(2,-4)$ ③ $M(1,1)$

❸ $f(x)=|2x-3|$ ① $M(-1,6)$ ② $M(3,-3)$ ③ $M(1,1)$

الحل

❶ $f(x)=x^2+2x-5$

① $M(-1,-6)$ نجد أنّ: $f(x_M)=f(-1)=1-2-5=-6=y_M$ وهذا يقتضي أن $M\in C_f$.

② $M(2,3)$ نجد أنّ: $f(x_M)=f(2)=4+4-5=3=y_M$ وهذا يقتضي أن $M\in C_f$.

③ $M(1,0)$ نجد أنّ: $f(x_M)=f(1)=-2\neq y_M=0$ وهذا يقتضي أن $M\notin C_f$.

❷ و ❸ بنفس الطريقة.

② عيِّن في الحالات الآتية الإحداثي المفقود إذا علمتَ أنّ النقطة المعطاة M تقع على الخط البياني للتابع f :

❶ $f(x)=x^3-4x+1$ ① $M(1,\dots)$ ② $M(0,\dots)$ ③ $M(-2,\dots)$

❷ $f(x)=2x-1$ ① $M(2,\dots)$ ② $M(\dots,1)$ ③ $M(\dots,-1)$

الحل

❶ $f(x)=x^3-4x+1$

① لدينا $f(1)=-2$ ومنه $M(1,-2)$.

② لدينا $f(0)=1$ ومنه $M(0,1)$.

③ لدينا $f(-2)=1$ ومنه $M(-2,1)$.

❷ $f(x)=2x-1$

① $f(2)=3$ ومنه $M(2,3)$.

② $y=1$ تقتضي: $f(x)=1$ وهذه تقتضي $2x-1=1$ ومنه : $x=1$ أي أن $M(1,1)$.

③ $y=-1$ تقتضي: $f(x)=-1$ وهذه تقتضي $2x-1=-1$ ومنه : $x=0$ أي أن $M(0,-1)$.

③ عيِّن مجموعة تعريف كل من التوابع الآتية:

❶ $f(x)=\dfrac{3}{x^2}$ ❷ $g(x)=\dfrac{x+1}{x\ \ x-1}$ ❸ $h(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+1}$

❹ $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2+x}$ ❺ $g(x)=\dfrac{x+1}{x^2-4}$ ❻ $h(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3}$

❼ $f(x)=\sqrt{x+2}$ ❽ $g(x)=\sqrt{3-x}$ ❾ $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

الحل

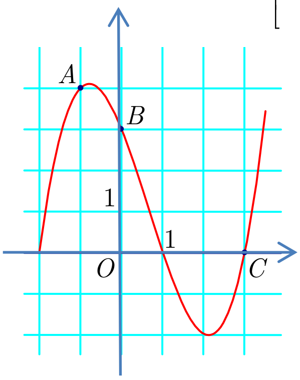
توابع كثيرات الحدود معرفة على $\mathbb{R}$ ، أما التابع الكسري شرطه أن لا ينعدم المقام ، والتابع الجذري (الجذر التربيعي) ماتحت الجذر اكبر أو يساوي الصفر .

❶ $D_f=\mathbb{R}^*$ ❷ $D_g=\mathbb{R}^*\setminus\ 1$ ❸ $D_h=\mathbb{R}$

❹ $D_f=\mathbb{R}^*\setminus\ -1$ ❺ $D_g=\mathbb{R}\setminus\ -2,+2$ ❻ $D_h=\mathbb{R}$

❼ $D_f=[-2,+\infty[$ ❽ $D_g=]-\infty,3]$ ❾ $D_h=]0,+\infty[$

④ في الشكل المرسوم جانباً C_f هو الخط البياني لتابع f على المجال $\left[-2,\dfrac{7}{2}\right]$.



$.i$ استفدْ من الشكل للإجابة عن الأسئلة الآتية.

$.a$ ما هي على التوالي صُوَرُ الأعداد -2 و -1 و 2 ؟

$.b$ ما حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

$.c$ ما حلول المتراجحة $f(x)\geq 0$ ؟

$.d$ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=3$ ، أعطِ قيماً تقريبيّة لهذه الحلول؟

$.e$ أعِد السؤال السابق في حالة $f(x)=4$.

$.ii$ نرمز إلى نقاط C_f التي فواصلها -1 و 0 و 3 على التوالي بالرموز A و B و C.

$.a$ أثبت وقوع A و B و C على استقامة واحدة.

$.b$ اكتب معادلة المستقيم (AC).

$.c$ استنتج مما سبق وبالاستفادة من الشكل حل المتراجحة $f(x)\geq 3-x$.

الحل

.i نلاحظ من الشكل أن

.a $f(-2)=0$ $f(-1)=4$ $f(2)=-2$

.b $S=\ -2,+1,+3$. وهي فواصل نقط تقاطع الخط البياني مع المحور Ox

.c $S=[-2,1]\cup\left[3,\dfrac{7}{2}\right]$. حيث يقع الخط البياني فوق المحور Ox أو يلاقيه.

.d المستقيم الذي معادلته $y=3$ يشترك مع خط الدالة بثلاث نقاط وبالتالي فللمعادلة $f(x)=3$ ثلاث حلول هي فواصل النقط المشتركة بين C_f و هذا المستقيم وهي : $x\approx-\frac{3}{2}$ و $x\approx3.4$ و $x=0$.

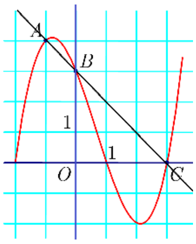
.e المستقيم الذي معادلته $y=4$ يشترك مع C_f بنقطتين ومنه فللمعادلة $f(x)=4$ حلان هما فاصلتيهما وهما: $x=-1$ و $x\approx-0.5$.

.ii

.a نلاحظ من الشكل البياني أن: $A(-1,4)$ ، $B(0,3)$ ، $C(3,0)$

$\overrightarrow{AB}(1,-1)$ و $\overrightarrow{BC}(3,-3)$ مرتبطان خطياً لأن $x_1y_2-x_2y_1=3(-1)-1(-3)=-3+3=0$

إذن A ، B ، C على استقامة واحدة.



.b معادلة AC : $(x_C-x_A)(y-y_A)-(y_C-y_A)(x-x_A)=0$

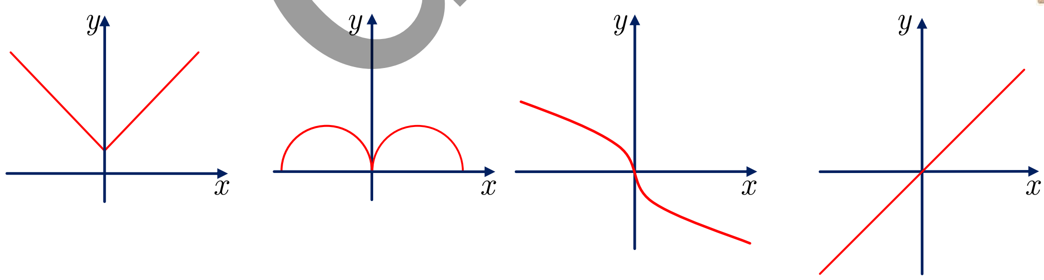
ومنه $(3-(-1))(y-4)-(0-4)(x-(-1))=0$

بالإصلاح نجد $y=3-x$

.c من الرسم نجد $f(x)\geq3-x$ عندما $x\in[-1,0]\cup\left[3,\frac{7}{2}\right]$

تَدرَّبْ ص19

① بيّن أيُّ المنحنيات الآتية هو خطٌّ بيانيٌّ لتابع زوجي وأي منها خطٌّ بيانيٌّ لتابع فردي:



فردي فردي زوجي زوجي

② ادرس زوجيّة كلٍّ من التوابع المعطاة كما يأتي:

❶ ① $f(x)=\dfrac{3}{x^2}$ ② $g(x)=\left|2x\right|$ ③ $h(x)=x^2-x$

❷ ① $f(x)=x\sin x$ ② $g(x)=\tan x$ ③ $h(x)=\cos x+\sin x$

❸ ① $f(x)=\sqrt{x}$ ② $g(x)=\sqrt{x^2}$ ③ $h(x)=\sqrt[3]{x}$

الحل

❶ ① التابع $f(x)=\dfrac{3}{x^2}$ معرف على $\mathbb{R}^*$ وهي متناظرة بالنسبة إلى الصفر كما أن :

$f(-x)=\dfrac{3}{(-x)^2}=\dfrac{3}{x^2}=f(x)$ وبالتالي f زوجي .

② التابع $g(x)=\left|2x\right|$ معرف على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$$g(-x)=\left|2(-x)\right|=\left|-2x\right|=\left|2x\right|=g(x)$$

ومنه نجد أن f زوجي.

③ التابع $h(x)$ معرف على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$h(-x)=(-x)^2-(-x)=x^2+x$ وبالتالي نجد أن $h(-x)\neq h(x)$ و $h(-x)\neq -h(x)$ فالتابع h لا زوجي ولا فردي .

❷ $f(x)=x\sin x$ مشابه للسابق وهو زوجي.

② التابع $g(x)=\tan(x)$ معرف على $K\in\mathbb{Z}$: $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi K\right\}$, أياَ كان $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi K\right\}$ فإن:

$;K\in\mathbb{Z}$ $\quad -x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2}-\pi K\right\}$ ولكن : $-\dfrac{\pi}{2}-\pi K=-\dfrac{\pi}{2}+\pi-\pi-\pi K$

$$=\frac{\pi}{2}-(1+K)\pi=\frac{\pi}{2}+\pi K'$$

حيث $K'=-(1+K)\in\mathbb{Z}$ و منه فإن : $-x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi K\right\}$

ولدينا $g(-x)=\tan(-x)=-\tan(x)=-g(x)$ إذن التابع f فردي .

③ $h(x)=\cos x+\sin x$ مشابه للسابق وهو لا فردي ولا زوجي.

❸ ① $f(x)=\sqrt{x}$ التابع f معرف على $D=[0,+\infty[$ وهذه المجموعة غير متناظرة بالنسبة إلى الصفر ومنه f لا زوجي ولا فردي .

② $g(x)=\sqrt{x^2}$ مشابه للسابق وهو زوجي.

③ التابع $h(x)=\sqrt[3]{x}$ معرف على $\mathbb{R}$ ولدينا: $h(-x)=\sqrt[3]{-x}=-\sqrt[3]{x}=-h(x)$

ومنه فإن التابع h فردي.

تَدَرَّبْ ص23

① التابعان f و g معرّفان وفق $f(x)=x^2+2x-3$ و $g(x)=x^2-1$. أوجد مجموعة تعريف كلٍّ من f و g و $f+g$ و fg ، ثُمَّ احسب $(f+g)(x)$ و $(fg)(x)$.

الحل

التابعان g,f معرفان على $\mathbb{R}$ وبالتالي فإن التابعين $f+g$ و fg معرفان على $\mathbb{R}$ أيضاً ولدينا :

$$(f+g)(\mathrm{x})=2\mathrm{x}^2+2x-4$$

$$(fg)(\mathrm{x})=(\mathrm{x}^2+2x-3)(x^2-1)=x^4+2x^3-3x^2-x^2-2x+3$$
$$=x^4+2x^3-4x^2-2x+3$$

② التابعان f و g معرفان وفق $f(x)=\dfrac{1}{x}+x-1$ و $g(x)=2x+3-\dfrac{1}{x}$. ما هي مجموعة تعريف $f+g$ ؟ احسب $(f+g)(x)$.

الحل

f و g معرفان على $\mathbb{R}^*$ وبالتالي: $f+g$ معرف على $\mathbb{R}^*$ ويكون:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=3x+2$$

③ احسب في الحالات التالية كلاً من $(g\circ f)(x)$ و $(f\circ g)(x)$ بعد تعيين مجموعة تعريف كلٍّ من f و g و $g\circ f$ و $f\circ g$.

1. $f(x)=2x,\quad g(x)=3x$
2. $f(x)=3x-1,\quad g(x)=2x+1$
3. $f(x)=x^2,\quad g(x)=2x-1$
4. $f(x)=2x+3,\quad g(x)=\dfrac{1}{x}$
5. $f(x)=\dfrac{1}{x+1},\quad g(x)=3x$

الحل

4. f معرف على $\mathbb{R}$ و g معرف على $\mathbb{R}^*$ ويكون:

أولاً:_ إيجاد $(g\circ f)(\mathrm{x})$ أي $x\to f(x)\to g(f(x))$

نبدأ بحساب $f(x)$ وبما أن f معرف على $\mathbb{R}$ فيمكن إجراء هذا الحساب دوماً ولكن لحساب $g(f(x))$ يلزم ويكفي أن يكون $f(x)\in \mathrm{D}_g$ وهذا يكافئ أن $f(x)\neq 0$ ويكافئ $2x+3\neq 0$ ويكافئ $x\neq -\dfrac{3}{2}$

وبالتالي : $g\circ f$ معرف على $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$ ولدينا :

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+3)=\frac{1}{2x+3}$$

ثانياَ: إيجاد $(f\circ g)(\text{x})$ أي $x \to g(x) \to f \;\; g \;\; x$

نبدأ بحساب $g(x)$ وهذا ممكن عندما $x \neq 0$ وبما أن f معرف على $\mathbb{R}$ فنتابع حساب $f(g(x))$ دون شرط إضافي وبالتالي :

$g\circ f$ معرف على $\mathbb{R}^*$ ويكون :

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = 2\left(\frac{1}{x}\right) + 3 = \frac{2}{x} + 3$$

.5 $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ ، $g(x) = 3x$

التابع g معرف على $\mathbb{R}$ والتابع f معرف على $\mathbb{R} \setminus \ -1$

أولاَ: حساب $(g\circ f)(\text{x})$ أي $x \to f(x) \to g(f(x))$

بما أن f معرف على $\mathbb{R} \setminus \ -1$ فنبدأ باختيار x من $\mathbb{R} \setminus \ -1$ لنحسب $f(x)$

وبما أن gمعرف على $\mathbb{R}$ نتابع حساب $g(f(x))$ دون

أي شرط إضافي وبالتالي التابع $g\circ f$ معرف على $\mathbb{R} \setminus \ -1$ويكون :

$$(f\circ g)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x+1}\right) = 3\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{3}{x+1}$$

ثانياَ: حساب $(f\circ g)(\text{x})$ أي $x \to g(x) \to f(g(x))$

نبدأ بحساب $g(x)$ وبما أن g معرف على $\mathbb{R}$فإننا نختار x من $\mathbb{R}$ ونحسب $g(x)$ وبما أن التابع f معرف على $\mathbb{R} \setminus \ -1$ فإنه لحساب $f(g(x))$ يلزم ويكفي أن يكون $g(x) \neq -1$ وهذا يكافئ

$3x \neq -1$ ويكافئ $x \neq -\dfrac{1}{3}$ فالتابع $f\circ g$ معرف على $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ولدينا :

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = \frac{1}{3x+1}$$

وباقي التمارين بطريقة مماثلة

تَدرَّبْ ص 27

① ادرس جهة الاطراد لكل من التوابع الآتية

الحل

❶التابع $g + f$، حيث f و g التابعين المعرفين على المجال $I = \ 0,+\infty$ وفق $f(x) = -x^2$ و $g(x) = -\sqrt{x}$.

التابع f متناقص تماماً على المجال $[0,+\infty[$ والتابع g متناقص تماماً على المجال $[0,+\infty[$ ومنه التابع $f+g$ حاصل جمع تابعين متناقصين تماماً على المجال $[0,+\infty[$ وحسب المبرهنة 1 يكون التابع $f+g$ متناقص تماماً على المجال $[0,+\infty[$.

❷ التابع $-3f$، حيث f التابع المعرف على المجال $I=[-2,+\infty[$ وفق $f(x)=\sqrt{x+2}$.

التابع f متزايد تماماً على المجال $I=[-2,+\infty[$ ومنه التابع $-3f$ متناقص تماماً على المجال $I=[-2,+\infty[$ (حسب المبرهنة 2).

❸ التابع $f\circ g$، حيث f و g التابعين المعرفين على المجال $I=\ 0,+\infty$ وفق $f(x)=-2x^2$ و $g(x)=x^2$.

التابع g متزايد تماماً على المجال $I=\ 0,+\infty$ والتابع f متناقص تماماً على المجال $g([0,+\infty[)=[0,+\infty[$ ومنه $f\circ g$ متناقص تماماً على $I=\ 0,+\infty$ (حسب المبرهنة 3)

❹ التابع f، حيث f التابع المعرف على المجال $I=\ 0,+\infty$ وفق $f(x)=x+\sqrt{x}$.

التابع f هو مجموع تابعين متزايدين على المجال $I=\ 0,+\infty$ وبالتالي f متزايد تماماً.

② لماذا يكون التابع $x\mapsto x^2+\frac{1}{x}$ متناقصاً على المجال $]-\infty\,,0[$ ؟

③ بعد كتابة f بصيغة تركيب تابعين مألوفين، ادرس اطراد f على المجال المعطى I.

1. $f(x)=\sqrt{2x+1}$ ، $I=\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$.
2. $f(x)=\frac{1}{x+1}$ ، $I=\ -1,+\infty$.
3. $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ ، $I=\ -\infty,0$.

الحل

3. نفترض أن $h(x)=x^2+1$ وللتابع $g(x)=\frac{1}{x}$ فيكون التابع f تركيب $g\circ h$ وللتابع h متناقص تماماً على المجال $I=\ -\infty,0$ وللتابع g متناقص تماماً على المجال $h\,]-\infty,0[\ =]1,+\infty[$ فالتابع $g\circ h$ متزايد تماماً على المجال $I=\ -\infty,0$.

تدريب ص 31

① احسب $Q(x)$ و $R(x)$ خارج وباقي القسمة الإقليدية لكثير الحدود $A(x)$ على $B(x)$ في الحالات الآتية:

❶ $A(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ ، $B(x) = x + 2,$

❷ $A(x) = x^3 + x^2 + 3$ ، $B(x) = x - 1,$

❸ $A(x) = x^3 - 3x^2 - 14x - 8$ ، $B(x) = x + 2,$

❹ $A(x) = x^4 + 4$ ، $B(x) = x^2 - 2x + 2,$

❺ $A(x) = x^4 - 2x^3 + 3x + 7$ ، $B(x) = x^2 + 1,$

الحل

❶

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 1 \\ \hline x + 2 & x^3 + 2x^2 - x - 2 \\ & x^3 + 2x^2 \\ \hline & 0 \quad 0 \quad - x - 2 \\ & - x - 2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

ومنهُ نجد: $R(x) = 0$ و $Q(x) = x^2 - 1$

❷ بنفس الطريقة السابقة نجد : نجد: $R(x) = 5$ و $Q(x) = x^2 + 2x + 2$

❸ بنفس الطريقة السابقة نجد : نجد: $R(x) = 0$ و $Q(x) = x^2 - 5x - 4$

❹

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + 2x + 2 \\ \hline x^2 - 2x + 2 & x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 4 \\ & x^4 - 2x^3 + 2x^2 \\ \hline & 0 \ + 2x^3 - 2x^2 + 0x + 4 \\ & 2x^3 - 4x^2 + 4x \\ \hline & 0 \quad 2x^2 - 4x + 4 \\ & 2x^2 - 4x + 4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

ومنه $R(x) = 0$ و $Q(x) = x^2 + 2x + 2$

❺ بنفس الطريقة السابقة نجد: $R(x) = 5x + 8$ و $Q(x) = x^2 - 2x - 1$.

② احسب باقي قسمة كثير الحدود $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 5x + 3$ على كل من $x - 2$ و $x + 1$.

الحل

باقي قسمة $\mathrm{P}(x)$ على $x - 2$ كما وجدنا أثناء إثبات مبرهنة العامل يساوي

$$P(2) = 2(2)^3 - 2(2^2) - 5(2) + 3 = 1$$

وبنفس الطريقة باقي القسمة على $x + 1$ هو $P(-1)$

③عين $\lambda \in \mathbb{R}$ إذا علمتَ أنّ باقي قسمة $P(x) = x^4 + x^3 + 2\lambda$ على $x + 2$ يساوي 4.

الحل

بما أن باقي القسمة يساوي 4 فإن $P(-2)=4$ أي $-2^{4} + -2^{3} + 2\lambda = 4$ ومنه $\lambda = -2$

④ حلل كلاً من كثيري الحدود الآتيين:

❶ $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

❷ $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$

الحل

❶ لتحليل كثير الحدود $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ وبما أن مجموع الأمثال يساوي الصفر فإن $P(1) = 0$, لذلك فإن $p(x)$ يقبل القسمة على $x - 1$.

نقسم على $x - 1$

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 & x - 1 \\
\underline{x^4 - x^3} \qquad\qquad\qquad & x^3 - 7x - 6 \\
0 \quad + 0 \quad - 7x^2 + x + 6 & \\
\underline{- 7x^2 + 7x} \qquad & \\
0 \quad - 6x + 6 & \\
\underline{- 6x + 6} & \\
0 &
\end{array}
$$

ومنه

$P(x) = (x - 1)(x^3 - 7x - 6)$

وبنفس الطريقة نحلل $x^3 - 7x - 6$, حيث نجد بالتجريب أن -1 جذر لكثير الحدود $x^3 - 7x - 6$ وهكذا نقسم على $x + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 + 0x^2 - 7x - 6 & x + 1 \\
\underline{x^3 + x^2} \qquad\qquad & x^2 - x - 6 \\
- x^2 - 7x - 6 & \\
\underline{- x^2 - x} \qquad & \\
- 6x - 6 & \\
\underline{- 6x - 6} & \\
0 &
\end{array}
$$

ومنه

$x^3 - 7x - 6 = (x + 1)(x^2 - x - 6)$ ولكن $(x^2 - x - 6) = (x - 3)(x + 2)$

وبالتعويض في $P(x)$ نجد $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 2)$

❷ بنفس الطريقة السابقة.

⑤ حل في $\mathbb{R}$ كلاً من المعادلتين:

❶ $4x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$

❷ $2x^3 + 7x^2 + 8x + 3 = 0$

الحل

❶ بنفس الطريقة في التمرين السابق نحلل أو نحلل بالتجميع في فئات:

$$4x^3-4x^2-x+1=0$$
$$4x^2(x-1)-(x-1)=0$$
$$(x-1)(4x^2-1)=0$$
$$(x-1)(2x-1)(2x+1)=0$$

ومنه مجموعة الحلول هي $\left\{1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\}$.

❷ نحلل كما تعلمنا سابقاً:

$$2x^3+7x^2+8x+3=0$$
$$(x+1)^2(2x+3)=0$$

ومنه مجموعة الحلول هي $\left\{-1,-\frac{3}{2}\right\}$.

تمرينات ومسائل ص36

1 التابعان f و g معرّفان وفق : $f(x)=\frac{3x+9}{x+1}$ و $g(x)=2+\frac{4}{x+1}$. عيّن مجموعة تعريف كلٍّ من f و g . وعيِّن مجموعة تعريف $2f-3g$ ، واحسب $(2f-3g)(x)$.

الحل

$D_f=\mathbb{R}\setminus -1$ و $D_g=\mathbb{R}\setminus -1$ وبالتالي فإن مجموعة تعريف $2f-3g$ هي: $\mathbb{R}\setminus -1$ ولدينا:

$$(2f-3g)(x)=2f(x)-3g(x)=2\left(\frac{3x+9}{x+1}\right)-3\left(2+\frac{4}{x+1}\right)=6\left(\frac{x+3}{x+1}\right)-6\left(\frac{x+3}{x+1}\right)=0$$

2 بيِّن أيُّ التوابع الآتية كثيرُ حدود.

.1 $f(x)=x^2+\frac{x}{2}+3$ .2 $g(x)=5x^2+x\sqrt{2}-1$

.3 $h(x)=\frac{2x^2+1}{4}+\frac{1}{x+1}$ .4 $k(x)=x^2+2\sqrt{x}$

.5 $\ell(x)=(x-1)(x+3)$ .6 $m(x)=x(x+3)$

الحل

.1 $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x+3$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

.2 $g(x)=5x^2+\sqrt{2}x-1$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

3. $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{x+1}$ ليس كثير حدود.

4. $k(x) = x^2 + 2\sqrt{x}$ ليس كثير حدود.

5. $l(x) = x^2 + 2x - 3$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

6. $m(x) = x^2 + 3x$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

3 في كل حالة، اكتب كثير الحدود المعطى بالصيغة القانونية.

1. $A(x) = (3x+1)^2 - 2(3x-1)$
2. $B(x) = (x^2 + \sqrt{5})(x^2 - \sqrt{5})$
3. $C(x) = (x-3)(x^2+3x+9)$
4. $D(x) = (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{12}) + \sqrt{3}(x+2\sqrt{3})$
5. $E(x) = (\frac{1}{2}x^2 + 3x - 1)(-4x^3 + 6x - 10)$
6. $F(x) = (x+1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$

الحل

1. $A(x) = 9x^2 + 0x + 3$.
2. $B(x) = x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 5$.
3. $C(x) = x^3 + 0x^2 + 0x - 27$.
4. $D(x) = x^2 + 0x + 0$.
5. $E(x) = -2x^5 - 12x^4 + 7x^3 + 13x^2 - 36x + 10$.
6. $F(x) = x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1$.

4 انشر كثيري الحدود $(x-1)(x^2+x+1)$ و $(x+1)(x^2-x+1)$. ثم استنتج أنّ $x^6 - 1$ يساوي جداء ضرب ثلاثة كثيرات حدود من الدرجة الثانية.

الحل

$$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$$

$$(x+1)(x^2-x+1) = x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = x^3 + 1$$

ولكن لدينا: $(x^3-1)(x^3+1) = x^6 - 1$

وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned} x^6 - 1 &= (x^3-1)(x^3+1) \\ &= (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2+x+1) \\ &= (x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

5 ليكن كثير الحدود $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ ، احسب $P(1)$ ، ثم استنتج حلول المعادلة $P(x) = 0$ باستعمال مبرهنة العامل. ثم حلها بتحليل طرفها الأول إلى جداء عوامل بطريقة التجميع إلى فئات.

الحل

$P(1) = 0$ ومنه 1 جذر لكثير الحدود ، و بالقسمة على $x - 1$ نجد أن الناتج $x^2 - 4$ ومنه

$P(x) = (x-1)(x^2-4)$

$$P(x) = (x-2)(x-1)(x+2)$$

ومنه حلول المعادلة $P(x) = 0$ هي $S = \ 1,2,-2$.

ملاحظة: يمكن الحل بالتجميع في فئات كما يلي:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x-1) - 4(x-1) \\ &= (x-1)(x^2-4) = (x-2)(x-1)(x+2) \end{aligned}$$

ومنه حلول المعادلة $P(x) = 0$ هي $S = \ 1,2,-2$.

6 ليكن f و g التابعين المعرفين على المجال $I = [0,+\infty[$ وفق $f(x) = x^2$ و $g(x) = x$. علّل لماذا يكون $f + g$ متزايداً تماماً على I .

الحل

التابع $f(x) = x^2$ متزايد تماماً على $[0,+\infty[$ لأنه بفرض u,v عددان من $[0,+\infty[$ وبحيث: $u < v$ فإن :

$f(u) - f(v) = u^2 - v^2 < 0$ ومنه $f(u) < f(v)$ والتابع $g(x) = x$ متزايد تماما على $[0,+\infty[$ لأنه تابع تآلفي وفيه $a = 1 > 0$ وبما أن مجموع تابعين متزايدين تماماً على مجال هو تابع متزايد تماماً على هذا المجال فإن : $f + g$ متزايد تماماً على $[0,+\infty[$.

7 لماذا يكون التابع $x \mapsto x^2 + |x|$ متناقصاً على المجال $]-\infty, 0]$ ؟

الحل

التابع $f(x) = x^2$ متناقص تماماً على $]-\infty, 0]$

والتابع $g(x) = |x|$ متناقص تماماً على $]-\infty, 0]$

وبالتالي فإن : $x \to f(x) + f(g)$ متناقص تماماً $]-\infty, 0]$

8 لماذا يكون التابع المعرف على $I =]0,+\infty[$ متزايداً على I ؟

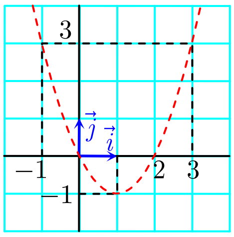
الحل

طريقة 1: التابع $x \mapsto x$ متزايد تماماً على $]0,+\infty[$ و التابع $x \mapsto -\frac{1}{x}$ متزايد تماما على $]0,+\infty[$ حيث ($x \mapsto \frac{1}{x}$ متناقص تماما على $]0,+\infty[$) وبما أن مجموع تابعين متزايدين تماماً على مجال هو تابع متزايد تماماً على هذا المجال فإن $x \mapsto x-\frac{1}{x}$ متزايد تماماً على $]0,+\infty[$.

طريقة 2: نفترض u,v عددان كيفيان من $]0,+\infty[$ وبحيث $u<v$ عندئذٍ :

$$\begin{aligned} f(u)-f(v) &= \left(u-\frac{1}{u}\right)-\left(v-\frac{1}{v}\right) \\ &= u-v+\frac{1}{v}-\frac{1}{u} = u-v+\frac{u-v}{u.v} \\ &= (u-v)\left(1+\frac{1}{u.v}\right) < 0 \end{aligned}$$

ومنه فإن: $f(u)<f(v)$ والتابع $f(x)=x-\frac{1}{x}$ متزايد تماماً على $]0,+\infty[$.

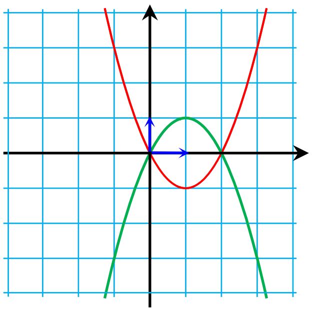


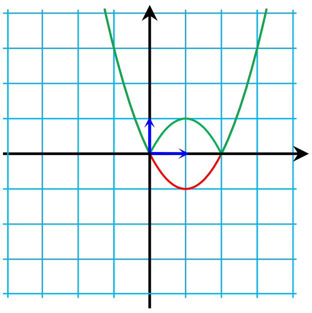
9 رسمنا في معلمٍ متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، الخط البياني C_f للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=x^2-2x$.

أعِدْ رسم C_f في كرّاسك، ثمَّ استنتج رسم الخطوط البيانية للتوابع g و h و k المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقات :

$g(x)=-f(x)$ و $h(x)=\left|f(x)\right|$ و $k(x)=f(|x|)$.

الحل





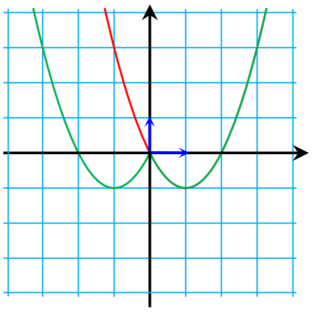
- كل نقطة $M(x,f(x))$ من C_f تقابلها النقطة $M'(x,-f(x))$ من C_g وبما أن النقطتان M و M' متناظرتان بالنسبة إلى xx' (لأن لهما نفس الفاصلة وترتيباهما متعاكسان) استنتجنا أن C_g هو نظير C_f بالنسبة للمحور xx'.
- نلاحظ أن :

$h(x)=f(x)$ عندما $f(x)\geq 0$ أي $x\in]-\infty,0]\cup[2,+\infty[$

$h(x)=-f(x)$ عندما $f(x)\leq 0$ أي $x\in[0,2]$

وبالتي فإن $h(x)=f(x)$ عندما يقع C_f فوق المحور xx' (لأنه في هذه الحالة تتحقق المتراجحة $f(x)\geq 0$) , كما أن $h(x)=-f(x)$ عندما C_f يقع تحت المحور xx' (لأنه في هذه الحالة تتحقق المتراجحة $f(x)\leq 0$. نستنتج أن C_h ينطبق على C_f عندما $x\in]-\infty,0]\cup[2,+\infty[$.

و أن C_h هو نظير C_f بالنسبة إلى المحور xx' عندما $x\in[0,2]$.



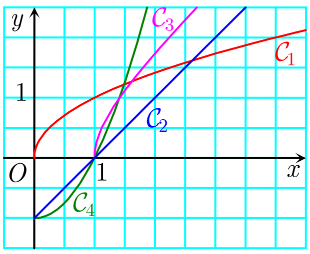
- بما أن k معرف على $\mathbb{R}$ ويحقق

$k(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=k(x)$ فإن التابع k زوجي

نعلم أن $x=|x|$ عندما $x\geq 0$ وبالتالي C_F منطبق على C_f عندما $x\geq 0$ حيث يكون $k(x)=f(x)$.

وبما أن k زوجي فإن خطه البياني متناظر بالنسبة للمحور yy'، وبالتالي نكمل الخط C_k عندما $x<0$ بحيث يكون متناظر بالنسبة لـ yy'

التمرين 9 و 22 لهما نفس الهدف.



10 في الشكل المجاور، الخطان البيانية للتابعين f و g المعرفة على $[0,+\infty[$ بالعلاقتين $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=\sqrt{x}$. نضع $h=g\circ f$ و $k=f\circ g$.

1. دلَّ كلاً من هذه التوابع على خطه البياني.
2. علّل كونَ كلٍّ من التابعين h و k متزايداً على مجال تعريفه.

الحل

1. التابع $g(x)=\sqrt{x}$ يحقق: $g(0)=0$ فخطه البياني يمر بالمبدأ وبالتالي C_1 هو خطه البياني.

التابع $f(x)=x^2-1$ يحقق: $f(0)=-1$ ، $f(1)=0$ ولدينا C_2 ، C_4 يحققان هذان الشرطان ولكن خط التابع f ليس مستقيم وبما أن C_2 مستقيم بالتالي C_4 هو الخط البياني لـ f

$$h(x)=g\circ f(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^2-1}$$

وهذا النابع غير معرف على المجال $]0,1[$ وبالتالي C_3 هو خطه البياني .

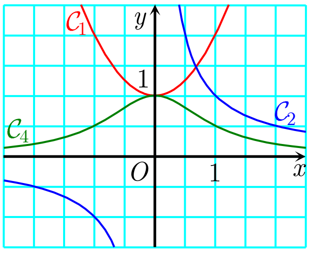
$$k(x)=f\circ g(x)=[g(x)]^2-1=(\sqrt{x})^2-1=x-1$$

وهي معادلة مستقيم بالتالي C_2 هو خطه البياني.

.2 $f(x)=x^2-1$ متزايد تماماً على المجال $[0,\infty[$ فهو متزايد تماماً على المجال $[1,\infty[$ و $g(x)=\sqrt{x}$ متزايد تماماً على المجال $[0,\infty[$ $f([1,\infty[)=[0,\infty[$ فيكون $h=g\circ f$ متزايد تماماً على المجال $[1,\infty[$.

$g(x)=\sqrt{x}$ متزايد تماماً على المجال $[0,\infty[$ و $f(x)=x^2-1$ متزايد تماماً على المجال $g([0,\infty[)=[0,\infty[$ فيكون $h=g\circ f$ متزايد تماماً على المجال $[0,\infty[$.

11 في الشكل المجاور، الخطوط البيانية للتوابع f و g و h المعرفة وفق: $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=\dfrac{1}{x},(x\neq 0)$ و $h=g\circ f$.



.1 علّل كون التابع h معرفاً على $\mathbb{R}$.

.2 خصّص لكل تابع خطه البياني.

.3 a. علّل كون h متناقصاً تماماً على $[0,+\infty[$.

b. علّل كون h متزايداً تماماً على $]-\infty,0]$.

الحل

.1 لدينا التابع f معرف على $\mathbb{R}$ و $h:x\longrightarrow f(x)\longrightarrow g(x)$

إذن نبدأ باختيار x من D_f وبما أن f معرفة على $\mathbb{R}$ فحساب $f(x)$ ممكن دوما ولحساب $g(f(x))$ يلزم ويكفي أن يكون $f(x)\neq 0$ وهذا يكافئ أن يكون $x^2+1\neq 0$ وهذا بدوره محقق دوماً وبالتالي : h معرف على $\mathbb{R}$.

.2 $g(x)$ هو التابع الوحيد الغير معرف عند $x=0$ و C_2 المنحني الوحيد الذي لا يملك نقطة فاصلتها $x=0$ وبالتالي C_2 هو خط التابع g.

$f(x)$ هو دالة تربيعية فخطه البياني قطع مكافئ وبالتالي C_1 هو خط التابع f .

ويبقى C_3 هو خط التابع h.

.3 a. واضح من الرسم أن f متزايد تماماً على المجال $[0,+\infty[$ و g متناقص تماماً على هذا المجال ، وبالتالي تركيبهما h سيكون متناقص تماماً على هذا المجال .

b. واضح من الرسم أن كلاً من f متناقص تماماً على المجال $]-\infty,0]$ ، g متناقص تماماً على المجال $f(]-\infty,0])=[1,\infty[$ وبالتالي فإن تركيبهما h سيكون متزايداً تماماً على هذا المجال .

12 f و g تابعان معرفان على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2x^2-1$ و $g(x)=4x^3-3x$. أثبت أنَّ $f\circ g=g\circ f$.

الحل

إن f و g معرفان $\mathbb{R}$ وبالتالي فإن كلاً من fog و gof سيكون معرفاً على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))=2(g(x))^2-1=2(4x^3-3x)^2-1\\&=2(16x^6-24x^4+9x^2)-1=32x^6-48x^4+18x^2-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=g(f(x))=4(f(x))^3-3(f(x))=4(2x^2-1)^3-3(2x^2-1)\\&=4(8x^6-3(2x^2)^2+3(2x^2)-1)-6x^2+3\\&=32x^6-48x^4+24x^2-4-6x^2+3=32x^6-48x^4+18x^2-1\end{aligned}$$

وبالتالي $f\circ g$ و $g\circ f$ لهما نفس مجموعة التعريف ونفس قاعدة الربط فالتابعان متساويان .

13 احسب $(f\circ f)(x)$ في الحالات الآتية.

① : $f(x)=2x-3$ ② : $f(x)=x^2-3x+1$ ③ : $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

الحل

في ① و ② f معرف على $\mathbb{R}$ وبالتالي التركيب $f\circ f$ سيكون معرفاً على $\mathbb{R}$ أما قاعدة الربط نوجدها كما تعلمنا سابقاً.

③ $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ معرف على $\mathbb{R}\setminus -1$ ونريد إيجاد $f\circ f$ أي : $x\to f(x)\to f(f(x))$

نبدأ بحساب $f(x)$ لذلك نختار x من $\mathbb{R}\setminus -1$ ولحساب $f(f(x))$ يصبح لدينا شرط إضافي هو:

$f(x)\neq -1$ أي $x\neq -2$

وبالتالي $f\circ f$ معرف على $\mathbb{R}\setminus -1,-2$ ، وقاعدة ربطه :

$$(fof)(x)=f(f(x))=\frac{1}{f(x)+1}=\frac{1}{\dfrac{1}{x+1}+1}=\frac{1}{\dfrac{x+2}{x+1}}=\frac{x+1}{x+2}$$

14 احسب $(x^2+px+q)^2$ ثمَّ تحقق أنَّ $x^4+6x^3+7x^2-6x+1$ هو مربع ثلاثي حدود من الدرجة الثانية.

الحل

$$(x^2+px+q)^2=(x^2)^2+(px)^2+(q)^2+2(x^2)(px)+2(x^2)(q)+2(px)(q)$$

ومنه

$$(x^2+px+q)^2 = x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2 \quad (*)$$

وبمقارنة $x^4+6x^3+7x^2-6x+1$ مع $(*)$ نجد:

$$x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2 = x^4+6x^3+7x^2-6x+1$$

بالمطابقة مع أمثال قوى x نجد جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} 2p=6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ 1 \\ p^2+2q=7 \ldots\ldots\ 2 \\ 2pq=-6 \ldots\ldots\ldots\ 3 \\ q^2=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ 4 \end{cases}$$

من 1 نجد $p=3$ بالتعويض في 2 نجد $q=-1$ ، وهكذا نجد أن هذان الحلان يحققان كل من 3 و 4 وبالاستفادة من $(*)$ نجد أن:

$$x^4+6x^3+7x^2-6x+1 = (x^2+3x-1)^2$$

16 أثبت أنَّ $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ هو مربع ثلاثي حدود من الدرجة الثانية.

الحل

بالنشر نجد:

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = x^4+6x^3+11x^2+6x+1$$

وبالمقارنة مع $(*)$:

$$x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2 = x^4+6x^3+11x^2+6x+1$$

بالمطابقة مع أمثال قوى x نجد جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} 2p=6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ 1 \\ p^2+2q=11 \ldots\ldots\ 2 \\ 2pq=6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ 3 \\ q^2=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ 4 \end{cases}$$

من 1 نجد $p=3$ وبالتعويض في 2 نجد $q=1$ ، ونجد أن هذان الحلان يحققان كل من 3 و 4 وبالاستفادة من $(*)$ نجد:

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = x^4+6x^3+7x^2-6x+1 = (x^2+3x+1)^2$$

17 أوجد عدداً حقيقياً a يكون في حالته كثير الحدود $x^4+2ax^3-4ax+4$ مربعَ ثلاثي حدود من الدرجة الثانية.

الحل

بمقارنة $x^4+2ax^3-4ax+4$ مع $(*)$ نجد:

$$x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)x^2 + 2pqx + q^2 = x^4 + 2ax^3 - 4ax + 4$$

بالمطابقة مع أمثال قوى x نجد جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} 2p = 2a \ldots\ldots\ldots\ldots\ 1 \\ p^2 + 2q = 0 \ldots\ldots\ 2 \\ 2pq = -4a \ldots\ldots\ldots\ 3 \\ q^2 = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ 4 \end{cases}$$

من 1 نجد $p = a$ و بالتعويض في 2 نجد: $q = -\dfrac{a^2}{2} \ldots.\ 5$

نعوض في 3 نجد:

$$2a\left(-\frac{a^2}{2}\right) = -4a \text{ ومنه } a(a^2 - 4) = 0$$

إما $a = 0$ بالتعويض في 5 نجد $q = 0$ مرفوضة لأنها لا تحقق 4 .

أو $a = \pm 2$

بالتعويض في 5 نجد $q = -2$ وهي تحقق 4 .

عندما $a = 2$ نجد $x^4 + 4x^3 - 8x + 4 = (x^2 + 2x - 2)^2$

و عندما $a = -2$ نجد $x^4 - 4x^3 + 8x + 4 = (x^2 - 2x - 2)^2$

لنتعلّم البحث معاً

18 تحليل تابع.

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R} \setminus \frac{1}{2}$ بالعلاقة $f(x) = \dfrac{1}{2x - 1}$. اكتب f تركيبَ تابعين h ثُمّ g . ثم أعِد السؤال في حالة $f(x) = (1 + x^2)^2$.

الحل

من الواضح أنه لحساب $f(x)$ فإننا نوجد أولاً القيمة $2x - 1$ ثم نقلبها، سنسمي العملية الأولى $h(x) = 2x - 1$ ، والعملية الثانية $g(h(x)) = \dfrac{1}{h(x)}$ ولذلك نضع $g(x) = \dfrac{1}{x}$ ، فيكون $f = g \circ h$

بنفس الأسلوب السابق نضع $h(x) = 1 + x^2$ ، $g(x) = x^2$ فيكون $f = g \circ h$

19 صيغة أخرى لتابع كسري.

ليكن f التابع الكسري المعرّف على $\mathbb{R} \setminus 2$ بالعلاقة $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 2}$. عيّن أعداداً حقيقيّة a و b و c تُحقّق، في حالة x من $\mathbb{R} \setminus 2$ ، العلاقة :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$$

الحل

طريقة أولى : $\frac{x^2-x}{x-2}=ax+b+\frac{c}{x-2}$ نضرب الطرفين بـ $(x-2)$

$$x^2-x=(x-2)(ax+b)+c$$

$$x^2-x=ax^2+(-2a+b)x-2b+c$$

بمطابقة أمثال x^0,x^1,x^2 نجد: $a=1$

$-2a+b=-1$ ومنه $b=1$

$-2b+c=0$ ومنه $c=2$

ويكون :

$$f(x)=x+1+\frac{2}{x-2}$$

طريقة ثانية: نقسم البسط على المقام فنجد:

$$\begin{array}{r|l} x^2-x & x-2 \\ \underline{x^2-2x} & x+1 \\ x & \\ \underline{x-2} & \\ 2 & \end{array}$$

ناتج القسمة هو $ax+b$ ، باقي القسمة هو c , وبالتالي $a=b=1$ و $c=2$.

طريقة ثالثة:

$$f(x)=\frac{x^2-x-2+2}{x-2}=\frac{(x-2)(x+1)+2}{x-2}$$
$$=x+1+\frac{2}{x-2}$$

ومنه $a=b=1$ و $c=2$.

20 محدودية تابع

ليكن f التابع المعرف بالعلاقة $f(x)=\frac{1}{\sin x+2}$.

① عيّن عددين حقيقيين m و M يُحقّقان $m\le f(x)\le M$ وذلك أياً كان x من $\mathbb{R}$.

② ادرس اطّراد التابع f .

الحل

① نعلم أنه أياً كانت $x\in\mathbb{R}$ فإن $-1\le\sin x\le+1$ وبجمع 2 نجد $+1\le\sin x+2\le+3$

وبما أن $\sin x+2\neq0$ فإن $\frac{1}{3}\le\frac{1}{\sin x+2}\le1$ ومنه $\frac{1}{3}\le f(x)\le1$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$

②نلاحظ أن $f=g\circ u$ حيث أن $u(x)=\sin x$ وهو تابع دوري دوره 2π

وأن $g(x)=\dfrac{1}{x+2}$ معرف على $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ وبما أن f دوري ودوره 2π لذلك ندرسه على المجال $[0,\pi]$ فقط ، نعلم أنّ g متناقص تماماً على المجال $[-1,+1]$ ومنه $u([0,2\pi])=[-1,+1]$

u متزايد تماماً على المجال $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ إذن $f=g\circ u$ متناقص تماماً على المجال $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

u متناقص تماماً على المجال $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ إذن $f=g\circ u$ متزايد تماماً على المجال $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$

u متزايد تماماً على المجال $\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$ إذن $f=g\circ u$ متناقص تماماً على المجال $\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$

قُدُماً إلى الأمام

21 عمليّات على التوابع التآلفيّة

f و g تابعان تآلفيان معرفان على $\mathbb{R}$: $f(x)=ax+b$ و $g(x)=cx+d$.

1. أثبت أنَّ المجموع $f+g$ تابع تآلفي.
2. أثبت أنّ التابع المركّب $f\circ g$ تابعٌ تآلفي.
3. أيكون جداء الضرب fg تابعاً تآلفيّاً؟
4. نفترض أنّ $g(x)=x$ أيّاً كانت x . أثبت أنّ الشرط $(f\circ f)(x)=x$ يُكافئ $(f=g)$ أو $(a=-1)$.

الحل

1. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(a+c)x+d+b=mx+n$

حيث $m=a+c\in\mathbb{R}$, $n=d+b\in\mathbb{R}$ وبالتالي $f+g$ تابع تآلفي .

2. $(f\circ g)(x)=f(g(x))=ag(x)+b=a(cx+d)+b=acx+ad+b=mx+n$

حيث $m=a.c\in\mathbb{R}$ ، $n=ad+c\in\mathbb{R}$ وبالتالي $f\circ g$ تابع تآلفي .

3. كلا، لأن $(f.g)(x)=f(x)g(x)=(ax+b)(cx+d)=acx^2+(b+d)x+bd$

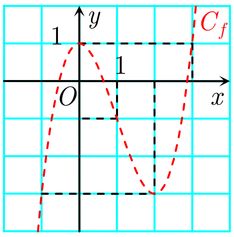
وهو تابع تربيعي وليس تآلفي.

4. العبارة $(f\circ f)(x)=id(x)$ أي $f(ax+b)=x$ تُكافئ $a(ax+b)+b=x$ أو

$a^2x+ab+b-x=0$ ومنه $(a+1)((a-1)x+b)=0$ بالإصلاح $(a+1)((a-1)x+b)=0$

وحل المعادلة الأخيرة $(a=-1)$ و $a=1$ و $b=0$ بالتالي $f(x)=x$ أي $f=g$

22 في الشكل المجاور، يمثّل المنحني C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.



1. ارسم الشكل في كرّاسك واستنتج رسم الخطوط البيانية للتوابع g و h و k المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقات :

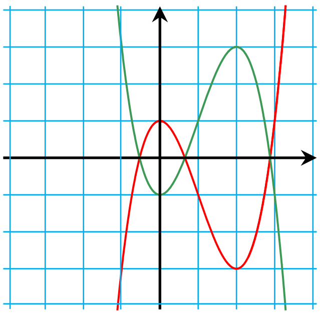
$g(x) = -f(x)$ و $h(x) = |f(x)|$ و $k(x) = f(-x)$.

2. نعرِّف على $\mathbb{R}$، التابع F وفق $F(x) = f(|x|)$.

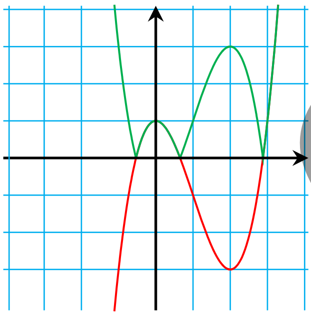
a. أثبت أنَّ F تابعٌ زوجي.

b. استنتج من C_f الخط البياني للتابع F.

الحل



1. كل نقطة $M(x, f(x))$ من C_f تقابلها النقطة $M'(x, -f(x))$ من C_g وبما أن النقطتان M و M' متناظرتان بالنسبة إلى xx' (لأن لهما نفس الفاصلة وترتيباهما متعاكسان) استنتجنا أن C_g هو نظير C_f بالنسبة للمحور xx'.



- بما أن $h(x) = |f(x)|$ فإن حساب التابع $h(x)$ يكون ممكناً عندما يكون حساب التابع $f(x)$ ممكناً ومنه: $D_h = D_f = \mathbb{R}$

ونلاحظ أن :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & : f(x) \geq 0 \\ -f(x) & : f(x) \leq 0 \end{cases}$$

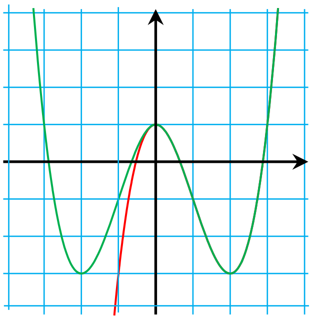
وبالتالي فإن $h(x) = f(x)$ عندما يقع C_f فوق المحور xx' (لأنه في هذه الحالة تتحقق المتراجحة $f(x) \geq 0$) , كما أن $h(x) = -f(x)$ عندما C_f يقع تحت المحور xx' (لأنه في هذه الحالة تتحقق المتراجحة $f(x) \leq 0$.

نستنتج أن C_h ينطبق على C_f عندما C_f فوق xx'.

و أن C_h هو نظير C_f بالنسبة إلى المحور xx' عندما C_f تحت xx'.

- وكل نقطة $M(x,f(x))$ من C_f تقابلها النقطة $M'(-x,-f(x))$ من C_k وبما أن النقطتين M و M' متناظرتان بالنسبة إلى yy' (لأن لهما نفس الترتيب وفاصلتهما متعاكسان) استنتجنا أن C_g هو نظير C_k بالنسبة للمحور yy'.

2. a. بما أن F معرف على $\mathbb{R}$ ويحقق $F(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=F(x)$ فإن التابع F زوجي



b. نعلم أن $x=|x|$ عندما $x\geq 0$ وبالتالي C_F منطبق على C_f عندما $x\geq 0$ حيث يكون $F(x)=f(x)$.

وبما أن F زوجي فإن خطه البياني متناظر بالنسبة للمحور yy' ، وبالتالي نكمل الخط C_F عندما $x<0$ بحيث يكون متناظر بالنسبة لـ yy'

23 ليكن f و g التابعين المعرفين وفق $f(x)=\dfrac{x+3}{x+1}$ و $g(x)=\dfrac{x}{x+2}$ ، وليكن $h=g\circ f$.

1. أوجد مجموعة تعريف h واحسب $h(x)$.
2. ليكن k التابع المعرف بالعلاقة $k(x)=\dfrac{x+3}{3x+5}$. أيكون التابعان h و k متساويين؟

الحل

1. من الواضح أن $D_g=\mathbb{R}\setminus -2$ ، $D_f=\mathbb{R}\setminus -1$ ، عندئذ ستكون مجموعة تعريف h هي $D_h=D_f\setminus x:f\ x=-2$.

$$f(x)=-2$$

$\dfrac{x+3}{x+1}=-2$ بالحل نجد $x=-\dfrac{5}{3}$ وبالتالي $D_h=\mathbb{R}\setminus\left\{-1,-\dfrac{5}{3}\right\}$

$$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{x+3}{x+1}\right)=\frac{\dfrac{x+3}{x+1}}{\dfrac{x+3}{x+1}+2}=\frac{x+3}{3x+5}$$

.2 على الرغم من أن لهما نفس قاعدة الربط ولكن من الواضح أن التابعين غير متساويين لأنهما مختلفان في مجموعة التعريف حيث $D_k = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}\right\}$ بينما $D_h = \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{5}{3}\right\}$.

24 f_1 و f_2 تابعانِ معرفان على $\mathbb{R}$ وفق $f_1(x) = x^2 + 1$ و $f_2(x) = 2x - 1$، و f_3 معرف على $\mathbb{R} \setminus 0$ وفق $f_3(x) = \frac{1}{x}$، و f_4 معرف على $[0, +\infty[$ وفق $f_4(x) = \sqrt{x}$. اكتب كلاً من التوابع f و g و h و k الآتية بصيغة مركب تابعين، مستفيداً من التوابع f_1, f_2, f_3, f_4.

① $f : x \mapsto 2\sqrt{x} - 1$ ② $g : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$

③ $h : x \mapsto \frac{1}{2x - 1}$ ④ $k : x \mapsto \frac{2}{x} - 1$

الحل

① $f : x \mapsto 2\sqrt{x} - 1$ ومنه $f = f_2 \circ f_4$.

② $g : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ ومنه $g = f_4 \circ f_1$.

③ $h : x \mapsto \frac{1}{2x - 1}$ ومنه $h = f_3 \circ f_2$.

④ $k : x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ ومنه $k = f_2 \circ f_3$.

25 التوابع f و g و h معرفة بالترتيب وفق ما يلي

$$f(x) = 2x - \frac{1}{2x} \quad \text{و} \quad g(x) = 1 + \frac{1}{2x} \quad \text{و} \quad h(x) = 2x - 1$$

الحل

.1 *a*. اكتب f بصيغة مجموع تابعين u و v موضحاً ما قمت به.

بوضع: $u(x) = 2x$ و $v(x) = -\frac{1}{2x}$ نجد:

$$f(x) = u(x) + v(x) = (u + v)x$$

b. ما جهة اطراد التابعين u و v على كلٍّ من المجالين $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$؟ استنتج من ذلك جهة اطراد f على كلٍ من هذين المجالين.

$u(x)$ متزايد تماماً على المجال $]0, +\infty[$ وَ $v(x)$ متزايد تماماً على المجال $]0, +\infty[$ ومنه f متزايد تماماً على المجال $]0, +\infty[$

$u(x)$ متزايد تماماً على المجال $]-\infty, 0[$ وَ $v(x)$ متزايد تماماً على المجال $]-\infty, 0[$ ومنه f متزايد تماماً على المجال $]-\infty, 0[$

.2 a. احسب وبسّط $\frac{f(x)}{g(x)}$.

a. $$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x-\frac{1}{2x}}{1+\frac{1}{2x}}=\frac{\frac{4x^2-1}{2x}}{\frac{2x+1}{2x}}=\frac{(2x-1)(2x+1)}{2x+1}=2x-1$$

ولدينا : f و g معرفان على $\mathbb{R}\setminus 0$

مع الشرط: $g(x)\neq 0$ ومنه $2x\neq -1$ و منه $x\neq -\frac{1}{2}$ وهكذا نجد:

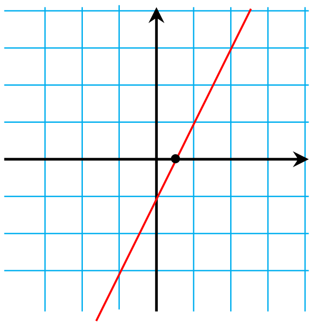
$$\frac{f}{g}:\mathbb{R}\setminus\left\{0,-\frac{1}{2}\right\}\to\mathbb{R}:x\to 2x-1$$

b. هل التابعان h و $\frac{f}{g}$ متساويان؟

كلا ، فبرغم أن لهما نفس قاعدة الربط لكنهما يختلفان بمجموعة التعريف حيث : $D_h=\mathbb{R}$ ،

$$D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}\setminus\left\{0,-\frac{1}{2}\right\}$$

c. ما هو بالضبط الخط البياني للتابع $\frac{f}{g}$ ؟



هو المستقيم الذي معادلته $y=2x-1$ محذوفة منه النقطتين $(0,1)$ و $\left(-\frac{1}{2},-2\right)$

26 لنتأمل التابعين f و g المعرفين على المجال $I=]0,+\infty[$ وفق

$$g(x)=\frac{x^2-1}{2x} \quad \text{و} \quad f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}$$

الحل

.1 اكتب g بصيغة فرق تابعين بسيطين، بيِّن جهة تغير g على I.

.1 $$g(x)=\frac{x^2-1}{2x}=\frac{x^2}{2x}-\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}$$

بأخذ $v(x)=-\frac{1}{2x}$ ، $u(x)=\frac{1}{2}x$ نجد $g(x)=(u-v)x$

نعلم أنّ $u(x)=\frac{1}{2}x$ متزايد تماماً على I، وكذلك $x\mapsto\frac{1}{2x}$ متناقص تماماً على I وبالتالي

$v(x)=-\frac{1}{2x}$

$g(x) = (u-v)x$ متزايد تماماً على I لأنه مجموع تابعين متزايدين تماماً على I

.2 نستعمل الرموز $s = f + g$ و $d = f - g$.

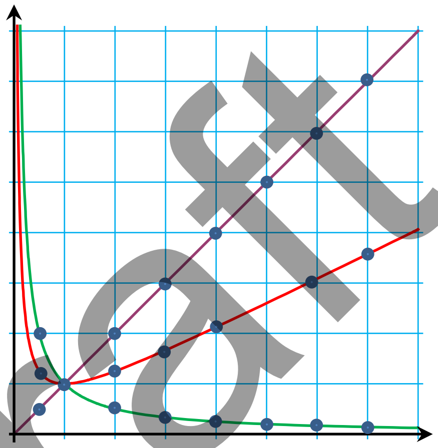
.a ما جهة اطراد s وما جهة اطراد d على I.

$s(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x$ وبالتالي s متزايد تماماً على I

$d(x) = (f-g)x = f(x) - g(x) = +\dfrac{1}{x}$ وبالتالي d متناقص تماماً على I

.b ارسم في المعلم نفسه الخط البياني لكل من s و d.

.3 بملاحظة أنَّ $f = \dfrac{1}{2}(s+d)$ ، ارسم نقطياً بالدّقة الممكنة الخط البياني للتابع f.



27 جهة اطراد $\dfrac{1}{f}$.

ليكن f تابعاً معرفاً على مجالٍ I ويحافظاً على إشارةٍ ثابتة عليه. ($f(x) > 0$ على I أو $f(x) < 0$ على I). نفترض أنّ التابع f مطردٌ على I أي إنّه متزايدٌ أو متناقصٌ عليه.

الحل

.1 استعرض جميع الحالات الممكنة، وأوجد في كل حالة جهة اطراد $\dfrac{1}{f}$ على I.

ليكن $u, v \in I$ بحيث $u < v$

$$\frac{1}{f(u)} - \frac{1}{f(v)} = \frac{f(v) - f(u)}{f(v)f(u)}$$

بما أن f يحافظ على إشارته على المجال I فإن $f(v)f(u) > 0$ ، وإذن كان f متزايد فإن

$\dfrac{1}{f(u)} - \dfrac{1}{f(v)} \geq 0$ وبالتالي $\dfrac{1}{f}$ متناقص على I.

وإذا كان f متناقص فإن $\dfrac{1}{f(u)} - \dfrac{1}{f(v)} \leq 0$ على I وبالتالي $\dfrac{1}{f}$ متزايد على I.

وهكذا نكون قد أثبتنا النتيجة التالية:

نتيجة

ليكن f تابعاً معرفاً على مجالٍ I ويحافظاً على إشارةٍ ثابتة عليه عندئذ نميز حالتين:

✓ f متزايد فإن $\frac{1}{f}$ متناقص على I.

✓ f متناقص فإن $\frac{1}{f}$ متزايد على I.

2. تطبيقات: أوجد جهة اطراد كلٍ من التوابع g الآتية على المجال المعطى I.

① $I=[0,+\infty[, g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

بما أن $x \to x^2+1$ متزايد تماماً على I و يحافظ على إشارته فإن g متناقص تماماً على هذا المجال .

② $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $I=]0,+\infty[$ بنفس الطريقة السابقة

③ $g(x)=\dfrac{1}{\cos x}$, $I=\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ بما أن $x \to \cos(x)$ متناقص على المجال I ويحافظ على إشارته فحسب ما سبق فإن g متزايد تماماً على I.

28 ليكن f التابع المعرّف على $I=]-1,+\infty[$ بالعلاقة

$$f(x)=\frac{(x-1)(x^2+3x+3)}{(x+1)^2}$$

الحل

1. أوجد ثلاث أعداد حقيقيّة a و b و c تُحقّق أياً كان x من I العلاقة

$$f(x)=ax+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$$

طريقة 1:

بالقسمة نجد:

$$\begin{array}{r|l} & x \\ x^2+2x+1 & x^3+2x^2+0x-3 \\ & x^3+2x^2+\ x \\ \hline & 0\ +0\quad\ -x-3 \end{array}$$

ومنه

$$f(x)=x-\frac{x+3}{(x+1)^2}$$
$$f(x)=x-\frac{x+1+2}{(x+1)^2}$$
$$f(x)=x+\frac{-1}{x+1}+\frac{-2}{(x+1)^2}$$

طريقة 2: بتوحيد المقامات والتبسيط نجد:

$$(x-1)(x^2+3x+3)=x^3+3x^2+3x-x^2-3x-3=x^3+2x^2-3$$

ومنه $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-3}{(x+1)^2}$

ومن جهة أخرى

$$f(x)=\frac{ax(x+1)^2+b(x+1)+c}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{ax^3+2ax^2+ax+bx+b+c}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{ax^3+2ax^2+(a+b)x+b+c}{(x+1)^2}$$

وبالتالي $x^3+2x^2-3=ax^3+2ax^2+(a+b)x+b+c$

بالمطابقة بالنسبة لأمثال x^0 ، x^1 ، x^3 نجد: $a=1\ ,\ b=-1\ ,\ c=-2$

$$f(x)=x+\frac{-1}{x+1}+\frac{-2}{(x+1)^2}$$

.2 استنتج أنّ f متزايدٌ تماماً على I.

وكما تعلمنا سابقاَ يمكن إثبات أن $x\to x$ متزايد تماماَ و $x\to\dfrac{-1}{x+1}$ متزايد تماما $x\to\dfrac{-2}{(x+1)^2}$

متزايد تماماَ، وعليه فإن f مجموع توابع متزايدة تماماَ فهو متزايد تماماَ على I

.3 *a.* تيقّن أنّه، مهما تكن x من I يكن $x^2+3x+3=(x+1)^2+x+2$، ولستنتج من ذلك أنّه، مهما تكن x من I يكن $\dfrac{x^2+3x+3}{(x+1)^2}>1$.

$$(x+1)^2+x+2=x^2+2x+1+x+2$$
$$=x^2+3x+3$$

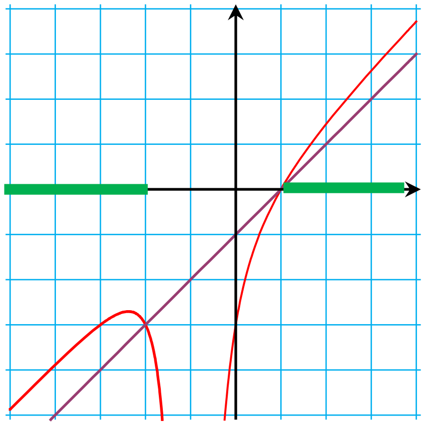
$$\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2+x+2}{(x+1)^2}=1+\frac{x+2}{(x+1)^2}$$

عندما $x\in I$ فإن : $x>-1$ ومنه $x+1>0$ وبالتالي $x+2>0$ ومنه : $\dfrac{x+2}{(x+1)^2}>0$

وبالتالي $\dfrac{x^2+3x+3}{(x+1)^2}>1$

اشرح كيف يمكننا أن نستنتج، أنّه في حالة $x>1$ يكن $f(x)>x-1$.

$$f(x)=\frac{(x-1)(x^2+3x+3)}{(x+1)^2}=(x-1).\frac{(x^2+3x+3)}{(x+1)^2}$$



وبما أن $\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^2}>1$ وبما أن $x>1$ فإن

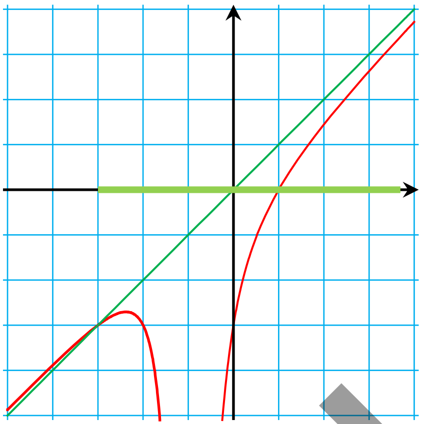
$x-1>0$ بضرب طرفي المتراجحة بـ

$x-1$ نجد:

$$(x-1)\frac{(x^2+3x+3)}{(x+1)^2}>x-1$$

ومنه : $f(x)>x-1$.

b. أثبت أنّه مهما تكن x من I يكن $f(x)<x$.



عندما x من I فإن $x>-1$

ومنه $x+1>0$ وبالتالي

$$\frac{-1}{x+1}<0 \text{ و } \frac{-2}{(x+1)^2}<0$$

وبالتالي:

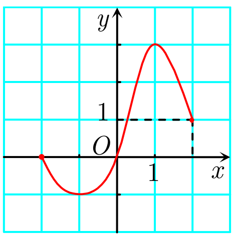
$$x+\frac{-2}{(x+1)^2}+\frac{-1}{x+1}<x$$

ومنه $f(x)<x$

c. اشرح بيانيّاً معنى المتراجحتين السابقتين، مُظلّلاً على الرسم منطقة المستوي التي تحوي الخط البياني للتابع.

المتراجحة $f(x)>x-1$ عندما $x>1$ تعني أنَّ نقاط الخط البياني لـ f التي فواصلها تقع في المجال $]1,+\infty[$ تقع فوق المستقيم الذي معادلته $y=x-1$

و المتراجحة $f(x)<x$ من أجل $x\in I$ تعني أنَّ نقاط الخط البياني لـ f التي فواصلها تنتمي إلى I تقع تحت المستقيم الذي معادلته $y=x$ (المنصف الأول).



29 دلَّ على الخواص الصحيحة فيما يأتي :

1. مثّلنا جانباً الخطّ البياني C_f لتابع f معرّف على $[-2,2]$.

a. للمعادلة $|f(x)|=\frac{1}{2}$ ثلاثة حلول. صح

$|f(x)|=\frac{1}{2}$ إما $f(x)=+\frac{1}{2}$ لها حل في المجال $]0,1[$ أو $f(x)=-\frac{1}{2}$ لها حلان أحدهما في المجال $]-1,0[$ والآخر في المجال $]-2,-1[$

a. .b الخطّ البياني للتابع $x \overset{g}{\mapsto} 2f(x)$ يقع فوق C_f. خطأ

.c نعرّف $h(x) = f(-x)$ في حالة $x < 0$، و $h(x) = f(x)$ في حالة $x \geq 0$. عندئذ يكون h زوجيّاً.
صح

.d نعرّف $k(x) = -f(x)$ في حالة $x < 0$، و $k(x) = f(-x)$ في حالة $x \geq 0$. عندئذ يكون للخطّ البياني للتابع k مركز تناظر. صح، لأنه يصبح فردي

.2 f تابعٌ فردي معرّف على $\mathbb{R}$.

.a $f(0) = 0$. صح

.b $f \circ f$ تابعٌ زوجي. صح

.c $-f$ تابعٌ زوجي. خطأ

.d $\dfrac{1}{f}$ تابعٌ فردي. صح

.3 للخطّ البياني C_f محور تناظر هو المستقيم $x = a$، و f معرّف على $\mathbb{R}$.

.a f تابعٌ زوجي. خطأ

.b $f(2a - x) = f(x)$. صح

.c ليس للخطّ البياني C_f محور تناظر آخر. خطأ مثلاً تابع دروي معرف على $\mathbb{R}$ أو مستقيم يوازي $x'x$

.4 f تابعٌ معرّف على $]-1, +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$.

.a مهما تكن $x > -1$، يكن $f(x) \geq 0$. صح

.b يقع الخط البياني C_f فوق القطع المكافئ الذي معادلته $y = x^2$. خطأ

.c للمعادلة $f(x) = 1$ حلاّن. صح

.d مهما تكن $x > -1$، يكن $f(x) - x > 0$. خطأ

الوحدة الثانية
الاشتقاق

تدرّب ص 48

① ليكن f التابع المعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقيّة بالصيغة $f(x) = 3x^2 - 4$.

ادرس قابلية اشتقاق f عند 5 واحسب $f'(5)$.

الحل

ليكن h عدداً حقيقياً غير معدوم. إن معدل تغير f بين النقطتين 5 وَ $5+h$ هو

$$t(h) = \frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \frac{(3(5+h)^2-4)-(3\times 25-4)}{h}$$
$$= \frac{75+30h+3h^2-4-71}{h} = \frac{30h+3h^2}{h} = 30+3h$$
$$\lim_{h\to 0} t(h) = 30$$

ولما كان $\lim_{h\to 0} t(h) = 30 \in \mathbb{R}$ ، كان f اشتقاقياً عند 5 و عدده المشتق عند 5 هو $f'(5) = 30$

② ليكن f التابع المعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقيّة بالصيغة $f(x) = x^3 - 1$.

ادرس قابلية اشتقاق f عند 1 واحسب $f'(1)$.

الحل

ليكن h عدداً حقيقياً غير معدوم إن معدل تغير التابع f بين النقطتين 1 وَ $1+h$ هو

$$t(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{((1+h)^3-1)-(0)}{h}$$
$$= \frac{1+3h+3h^2+h^3-1}{h} = h^2+3h+3$$
$$\lim_{h\to 0} t(h) = 3 \in \mathbb{R}$$

ولما كان $\lim_{h\to 0} t(h) = 3 \in \mathbb{R}$ كان f اشتقاقياً عند 1 و العدد المشتق عند 1 هو $f'(1) = 3$

تدرّب ص 51

① أوجد معادلةً لمماس الخطّ البياني للتابع المعطى f في النقطة التي فاصلتها a.

❶ $a=0$ $\quad f(x)=x^3$

❷ $a=1$ $\quad f(x)=-x+4$

❸ $a=1$ $\quad f(x)=-x^2+2$

الحل

❶ $a=0$ $\quad f(x)=x^3$.

ليكن h عدداً حقيقياً غير معدوم. إن معدل تغير التابع f بين النقطتين 0 وَ h هو

$$t(h)=\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h^3-0}{h}=h^2$$

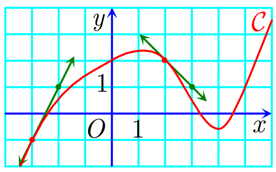
$$\lim_{h\to 0} t(h)=0\in\mathbb{R}$$

ولما كان $\lim\limits_{h\to 0} t(h)\in\mathbb{R}$. كان f اشتقاقياً عند 0 و العدد المشتق عند 0 هو $f'(0)=0$

وعليه يقبل الخط البياني للتابع f مماساً T في النقطة التي فاصلتها 0 وهي المبدأ $O(0,0)$ وميله معدوم فهو محور الفواصل الذي معادلته $y=0$.

❷❸ ينجز الحل بطريقة مماثلة.

② نجد في الشكل المجاور الخط البياني لتابع اشتقاقي f. تأمّل الشكل، وأجب عن الأسئلة الآتية.



❶ اكتب معادلة المماسين المبيَّنين في الشكل.

❷ استنتج تقريباً تابعاً تآلفياً محليّاً لكلٍّ من $f(-3+h)$ و $f(2+h)$.

الحل

❶ المماس للخط البياني للتابع في النقطة $(2,2)$ يمر بالنقطتين $A_1(2,2)$ و $A_2(3,1)$ فمعادلته هي

$$(x_2-x)(y-y_1)-(y_2-y_1)(x-x_1)=0$$

نعوض فنجد

$$1(y-2)-(-1)(x-2)=0 \text{ أو } y-2+x-2=0 \text{ أو } y=-x+4$$

و ميل هذا المماس هو $m_1=-1$ وبالتالي فإن $f'(2)=-1$

والمماس للخط البياني التابع في النقطة $(-3,-1)$ يمر بالنقطتين $B_1(-3,-1)$ و $B_2(-2,1)$ فمعادلته هي $1\cdot(y+1)-2(x+3)=0$ ، أي $y=2x+5$

وميل هذا المماس هو $m_2=2$ و بالتالي فإن $f'(-3)=2$

❷ $f(2+h)\approx f(2)+h.f'(2)$ ولكن $f(2)=2$ و $f'(2)=-1$ ومنه $f(2+h)\approx 2-h$

$$f(-3+h)\approx f(-3)+h.f'(-3)$$

ولكن $f(-3)=-1$ و $f'(-3)=2$ ومنه $f(-3+h)\approx -1+2h$

تدرّب ص54

احسب فيما يأتي المشتقّات $f'(x)$ ، مبيّناً المجموعة التي تكون عليها حساباتك صحيحة ثم احسب $f'(a)$.

❶ $f(x)=-\sqrt{3},\quad a=0$ ❷ $f(x)=\sqrt{x},\quad a=4$

❸ $f(x)=3x-1,\quad a=-1$ ❹ $f(x)=\sin x\quad a=\frac{\pi}{2}$

الحل

❶ $f(x)=-\sqrt{3}$ هذا التابع اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه هو $f'(x)=0$ وبالتالي $f'(0)=0$

❷ $f(x)=\sqrt{x}$ هذا التابع اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ومشتقه هو $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ وبالتالي $f'(4)=\frac{1}{4}$

❸ $f(x)=3x-1$ هذا التابع اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه هو $f'(x)=3$ وبالتالي $f'(-1)=3$.

❹ $f(x)=\sin x$ هذا التابع اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه هو $f'(x)=\cos x$ وبالتالي $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

تدرّب ص 60

احسب فيما يأتي المشتقّات f' ، مبيّناً المجموعة التي تكون عليها حساباتك صحيحة.

❶ $f(x)=x^3+2x^2-7x$ ❷ $f(x)=x+\sqrt{x+3}$

❸ $f(x)=\sin(2x+\pi)$ ❹ $f(x)=\frac{5x-4}{2x-3}$

❺ $f(x)=x+\cos(3x)$ ❻ $f(x)=x\sqrt{x}+\frac{1}{x}$

❼ $f(x)=x\sin 2x+\pi$ ❽ $f(x)=\frac{5}{x+1}$

الحل

❶ $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x$

هذا التابع اشتقاقي على $\mathbb{R}$ وتابعه المشتق هو $f'(x) = 3x^2 + 4x - 7$ حسب المبرهنة (5)

❷ $f(x) = x + \sqrt{x+3}$

هذا التابع اشتقاقي في حالة $x + 3 > 0$ فهو اشتقاقي على $]-3, +\infty[$

$f'(x) = (x)' + (\sqrt{x+3})'$ حسب المبرهنة (5)

و حسب المبرهنة (10) نجد $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

❸ $f(x) = \sin(2x + \pi)$

هذا التابع اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ، وتابعه المشتق هو $f'(x) = 2\cos(2x + \pi)$ حسب المبرهنة (10)

ينجز حل باقي التمارين بطريقة مماثلة.

تمرينات ومسائل ص 66

1 استعمل تعريف العدد المشتق، لإثبات وجود مشتق التابع f عند a وحسابه في كلٍّ من الحالات الآتية.

①	$a=3$	$f(x)=-2x+3,$
②	$a=1$	$f(x)=\dfrac{1}{x},$
③	$a=2$	$f(x)=x^2-5x+3,$
④	$a=2$	$f(x)=2x+p,$
⑤	$a=0$	$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$
⑥	$a\in\mathbb{R}$	$f(x)=2x^3-6x,$
⑦	$a\in\mathbb{R}$	$f(x)=x^3+1,$
⑧	$a\neq 0$	$f(x)=\dfrac{2}{x},$

الحل

① $a=3$ $\quad f(x)=-2x+3,$

ليكن h عدداً حقيقياً غير معدوم. إن معدل تغير f بين النقطتين 3 وَ $3+h$ هو

$$t(h)=\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{-2(3+h)+3+3}{h}=\frac{-6-2h+6}{h}=-2$$

$\lim\limits_{h\to 0} t(h)=-2\in\mathbb{R}$ ، إذن f اشتقاقي عند $a=3$ و $f'(3)=-2$

② $a=1$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{x},$

ليكن h عدد حقيقي غير معدوم فيكون معدل تغير f بين النقطتين 1 وَ $1+h$ هو

$$t(h)=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\frac{1}{1+h}-\frac{1}{1}}{h}=\frac{-h}{(1+h)h}=\frac{-1}{(1+h)}$$

$\lim\limits_{h\to 0} t(h)=-1\in\mathbb{R}$ إذن f اشتقاقي عند $a=1$ و $f'(1)=-1$

ينجز حل باقي التمارين بطريقة مماثلة، وهذه هي الأجوبة:

③ $a=2 \quad f(x)=x^2-5x+3 \;:\; f'(2)=-1$

④ $a=2 \quad f(x)=2x+p \;:\; f'(2)=2$

⑤ $a=0$ $\qquad f(x)=\dfrac{1}{1-x}$: $f'(0)=1$

⑥ $a\in\mathbb{R}$ $\qquad f(x)=2x^3-6x$: $f'\ a\ =6a^2-6$

⑦ $a\in\mathbb{R}$ $\qquad f(x)=x^3+1,$: $f'(a)=3a^2$

⑧ $a\neq 0$ $\qquad f(x)=\dfrac{2}{x},$: $f'(a)=-\dfrac{2}{a^2}$ حيث:

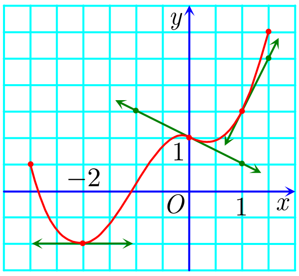
ليكن h عدداً حقيقياً غير معدوم. إنَّ معدل تغير f بين النقطتين a وَ $a+h$ هو

$$t(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\dfrac{2}{a+h}-\dfrac{2}{a}}{h}=\frac{-2h}{(a+h)ah}=\frac{-2}{(a+h)a}$$

$\lim\limits_{h\to 0}t(h)=-\dfrac{2}{a^2}\in\mathbb{R}$ ، إذن f اشتقاقي عند $a\neq 0$ و $f'(a)=-\dfrac{2}{a^2}$.

2

نجد في الشكل المجاور الخط البياني لتابع اشتقاقي f . تأمّل الشكل، واملأ الفراغات فيما يأتي:



$f'(0)=\cdots \qquad f(0)=\cdots,$

$f'(-2)=\cdots \qquad f(-2)=\cdots,$

$f'(1)=\cdots \qquad f(1)=\cdots,$

الحل

$f(0)=1, \qquad f'(0)=-\dfrac{1}{2}$

$f(-2)=-1, \qquad f'(-2)=0$

$f(1)=+\dfrac{3}{2}, \qquad f'(1)=2$

3

اكتب معادلةً لمماس الخطّ البياني للتابع المعطى f في النقطة التي فاصلتها a .

① $a=1$ $\quad f(x)=-x+4,$ $\qquad$ ② $a=4$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{x},$

③ $a=2$ $\quad f(x)=x^2-5x+3,$ $\qquad$ ④ $a=3$ $\quad f(x)=2x+p,$

⑤ $a=0$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{1-x},$ $\qquad$ ⑥ $a=2$ $\quad f(x)=x^3+4x,$

⑦ $a=1$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{x}+1,$ $\qquad$ ⑧ $a\in\mathbb{R}$ $\quad f(x)=x^2+x,$

الحل

① $f(x)=-x+4,\quad a=1$

نقطة التماس هي $A(1,3)$. التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه $f'(x)=-1$ ، ومنه $f'(1)=-1$

وبالتالي فإن ميل المماس في A هو -1 ومعادلة المماس هي $y=-x+4$

⑤ $f(x)=\dfrac{1}{1-x},\qquad a=0$

نقطة التماس هي $A(0,1)$. التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\ 1$ ومشتقه هو $f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$. ومنه

$f'(0)=1$ وبالتالي فإن ميل المماس في A هو 1 ومعادلة المماس هي

$y=f'(0)(x-0)-f(0)$ أي $y=x+1$

ينجز حل باقي التمارين بطريقة مماثلة.

4 أثبت فيما يأتي أنّ التابع المعطى f اشتقاقي على المجموعة D، واحسب تابعه المشتق.

① $D=\mathbb{R}\qquad f:x\mapsto -x+4,$

② $D=\mathbb{R}\qquad f:x\mapsto x^2+3,$

③ $D=\mathbb{R}\qquad f:x\mapsto 2x^2-x+2,$

④ $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}\qquad f:x\mapsto \dfrac{2}{x},$

الحل

④ $f:x\mapsto\dfrac{2}{x},\qquad D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

ليكن a عدداً كيفياً من $\mathbb{R}\setminus\ 0$ ، وليكن h عدداً حقيقياً غير معدوم . معدل تغير التابع f بين النقطتين a و $a+h$ هو:

$$t(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\dfrac{2}{a+h}-\dfrac{2}{a}}{h}=\frac{\dfrac{2a-2a-2h}{a(a+h)}}{h}=\frac{-2h}{ah(a+h)}=\frac{-2}{a(a+h)}$$

ومنه $\displaystyle\lim_{h\to 0}t(h)=\frac{-2}{a^2}$

ولما كان $\displaystyle\lim_{h\to 0}t(h)\in\mathbb{R}$ أياً كان $a\in\mathbb{R}\setminus\ 0$، كان التابع f اشتقاقياً على $\mathbb{R}\setminus\ 0$ وكان تابعه المشتق $f'(x)=\dfrac{-2}{x^2}$

5 احسب فيما يأتي المشتقّات $f'(x)$ أو $f'(t)$ أو $f'(u)$، مبيِّناً المجموعة التي تكون عليها حساباتك صحيحة.

① $f(x)=-5x^3+4x^2-9x-5$ ② $f(x)=\sqrt{3}x^2+\pi x$

③ $f(x)=-\sqrt{x}+\dfrac{x^2}{2}$ ④ $f(t)=\dfrac{4t^5}{5}$

⑤ $f(u)=(2u+3)(5u+1)$ ⑥ $f(u)=(\sqrt{u}+1)^2$

⑦ $f(t)=t\sin t$ ⑧ $f(x)=-2\cos x+x^2$

الحل

① عملاً بالمبرهنة (6) نجد أن f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه هو $f'(x)=-15x^2+8x-9$.

② عملاً بالمبرهنة (6) نجد أن f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه هو $f'(x)=2\sqrt{3}x+\pi$.

③ عملاً بالمبرهنة (2) نجد أن $\sqrt{x}$ اشتقاقي على $I=]0,\infty[$ وبما أن $x\mapsto\dfrac{x^2}{2}$ اشتقاقي على I ، فعملاً بالمبرهنة (4) يكون f اشتقاقياً على I ومشتقه هو $f'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+x$.

④ f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ومشتقه هو $f'(t)=4\cdot t^4$.

⑤ $u\mapsto 5u+1$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ، وكذلك $u\mapsto 2u+3$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$
وعملاً بالمبرهنة (5) يكون f اشتقاقياً على $\mathbb{R}$ ويكون:

$$f'(u)=(2u+3)'(5u+1)+(2u+3)(5u+1)'$$
$$=2(5u+1)+5(2u+3)=20u+17$$

طريقة ثانية: $f(u)=(2u+3)(5u+1)=10u^2+17u+3$
وعملاً بالمبرهنة 6 يكون f اشتقاقياً على $\mathbb{R}$ وتابعه المشتق هو $f'(u)=20u+17$

⑥ $f(u)=(\sqrt{u}+1)^2=u+2\sqrt{u}+1$
التابعان $u\to u+1$ و $u\to 2\sqrt{u}$ اشتقاقيان على المجال $]0,\infty[$
وعملاً بالمبرهنة (4) يكون f اشتقاقياً على المجال $]0,\infty[$وتابعه المشتق هو:

$$f'(u)=1+2.\frac{1}{2\sqrt{u}}+0=1+\frac{1}{\sqrt{u}}$$

⑦ $f(t)=t\sin t$
كل من التابعين $t\mapsto t$ و $t\mapsto\sin t$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$
وعملاً بالمبرهنة (5) يكون f اشتقاقياً على $\mathbb{R}$ وتابعه المشتق هو $f'(t)=\sin t+t\cos t$

⑧ عملاً بالمبرهنات (4)و (5) يكون f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ وتابعه المشتق هو $f'(x)=+2\sin x+2x$

6 ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة

$$f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 8x - 5$$

① أثبت أنّ الخطّ البياني للتابع f يقبل مماسات عند كل نقطة من نقاطه.

② أيقبل الخطّ البياني للتابع f مماسات توازي محور الفواصل؟

الحل

① f هو كثير حدود فهو اشتقاقي على $\mathbb{R}$, لذلك أياً كان $x \in \mathbb{R}$ كان العدد المشتق $f'(x)$ موجوداً وبالتالي فإن f يقبل مماسات عند كل نقطة من نقاطه.

② التابع المشتق هو $f'(x) = 9x^2 - 14x + 8$

نبحث عن مماس ميله معدوم, لذلك نحل المعادلة $f'(x) = 0$ للحصول على فاصلة نقطة التماس المحققة لذلك. المعادلة $f'(x) = 0$ تكافئ $9x^2 - 14x + 8 = 0$

$$\Delta = 196 - 288 = -92 < 0$$

فالمعادلة $f'(x) = 0$ مستحيلة الحل و بالتالي لا توجد مماسات للخط البياني للتابع f توازي المحور $x'x$.

7 احسب فيما يأتي المشتقّات $f'(x)$ ، مبيّناً المجموعة التي تكون عليها حساباتك صحيحة.

① $f(x) = -\frac{4}{x^3} + \frac{2}{5x}$ ② $f(x) = \frac{2}{3x - 5}$

③ $f(x) = \frac{1 - 2x}{x - 2}$ ④ $f(x) = \frac{4x + 7}{x^2}$

⑤ $f(x) = \frac{2 - x^2}{2 + x^2}$ ⑥ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{(2x - 1)^2}$

⑦ $f(x) = 4x - 1 + \frac{1}{4 - x}$ ⑧ $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$

الحل

⑥ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{(2x - 1)^2}$

التابع f معرف على $]0, +\infty[\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$

نضع $u(x)=\sqrt{x}$ فيكون التابع u اشتقاقياً على $]0,+\infty[$ ، فهو اشتقاقي على $]0,+\infty[\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ومشتقه هو $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

وبالتالي وحسب المبرهنة (7) يكون التابع $u_1(x)=\frac{1}{u(x)}$ اشتقاقياً على المجال $]0,+\infty[\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$

ومشتقه هو $u_1'(x)=-\frac{u'(x)}{u^2(x)}$ ومنه $u_1'(x)=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

نضع $v(x)=\frac{1}{x^2}$ فنجد أنه اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$ ، فهو اشتقاقي على $]0,+\infty[\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ومشتقه هو $v'(x)=-\frac{2}{x^3}$

وبالتالي وحسب المبرهنة (10) يكون التابع $v_1(x)=v(2x-1)$ اشتقاقياً على $]0,+\infty[\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ومشتقه هو $v_1'(x)=2v'(2x-1)$ ومنه $v_1'(x)=2\left(\frac{-2}{(2x-1)^3}\right)=\frac{-4}{(2x-1)^3}$

وبما أن $f(x)=u_1(x)+v_1(x)$ فإن f اشتقاقي على $]0,+\infty[\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ومشتقه هو

$$f'(x)=u_1'(x)+v_1'(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{4}{(2x-1)^3}$$

⑧ $f(x)=\frac{\sin x}{x^2}$ هذا التابع اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$ ومشتقه هو

$$f'(x)=\frac{x^2\cos x-2x\sin x}{x^4}=\frac{x\cos x-2\sin x}{x^3}$$

8 ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$

① أثبت أنّ f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ واحسب $f'(x)$.

② أوجد معادلة للمماس في النقطة التي فاصلتها a للخط البياني للتابع f .

الحل

① نضع $u(x)=3x$ و $v(x)=x^2+1$. نلاحظ أن التابعين u و v اشتقاقيان على $\mathbb{R}$

وبما أن المعادلة $v\ x\ =0$ مستحيلة فإن التابع $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$.

لدينا $u'(x)=3$ و $v'(x)=2x$ ومنه:

$$f'(x)=\frac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}=\frac{3(x^2+1)-2x(3x)}{(x^2+1)^2}=\frac{3-3x^2}{(x^2+1)^2}$$

② ميل المماس في النقطة التي فاصلتها a هو $m=f'(a)=\dfrac{3-3a^2}{(a^2+1)^2}$ وبما أن نقطة التماس هي $A\left(a,\dfrac{3a}{a^2+1}\right)$ فإن معادلة الماس هي

$$y=\frac{3(1-a^2)}{(a^2+1)^2}(x-a)+\frac{3a}{a^2+1}=\frac{3(1-a^2)}{(a^2+1)^2}x+\frac{6a^3}{(a^2+1)^2}$$

9 ليكن f التابع المعرّف على $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ بالعلاقة

$$f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

أثبت أنّ f اشتقاقي على I واحسب $f'(x)$. وتحقّق أنّه مهما تكن x من I يكن

$$f'(x)=1+f^2(x)$$

الحل

نضع $u(x)=\sin x$ و $v(x)=\cos x$ فنجد أن التابعان u و v اشتقاقيان على $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

والمعادلة $v(x)=0$ مستحيلة الحل في المجال $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ وبالتالي فإن التابع f اشتقاقي على I

لدينا $u'(x)=\cos x$ و $v'(x)=-\sin x$ ومنه:

$$f'(x)=\frac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1+f^2(x)=1+\tan^2 x=1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=f'(x)$$

لنتعلّم البحث معاً

تعيين تابع كثير الحدود.

10 ليكن f تابعاً كثير الحدود من الدرجة الثانية، وليكن C خطّه البياني في مَعْلَم متجانس. نفترض أنّ النقطة $A(1,6)$ تقع على C وأنّ المماس T للخط البياني C في النقطة التي فاصلتها 2 يوازي المستقيم الذي معادلته $y=10x-5$ وأخيراً أنّ $f(2)=13$.

عين التابع f في حال وجوده.

الحل

نكتب $f(x)=ax^2+bx+c$ و نبحث عن قيم المعاملات الحقيقية a,b,c .

بما أن $A(1,6)\in c$ فإن $f(1)=6$ وبالتالي $a+b+c=6........①$

وبما أن $f(2)=13$ فإن $4a+2b+c=13........②$

ميل المماس T هو 10 وبالتالي $f'(2)=10$. وبما أن f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه هو $f'(x)=2ax+b$ فإن f اشتقاقي عند (2) ومنه $4a+b=10........③$ ومنه المعادلة ③ نجد $b=10-4a........④$

بالتعويض في ① نجد $a+10-4a+c=6$ ومنه $-3a+c=-4........⑤$

وبالتعويض في ② نجد $4a+20-8a+c=13$ ومنه $-4a+c=-7........⑥$

بطرح ⑥ من ⑤ نجد $\mathrm{a}=3$ وبالتعويض في ④ نجد أن $\mathrm{b}=-2$ وبالتعويض في ⑤ نجد $\mathrm{c}=5$

إذن التابع f موجود وفق $f(x)=3x^2-2x+5$

11 وجود وحساب المشتق.

ليكن f التابع المعرّف على $[0,+\infty[$ بالعلاقة، $f(x)=2\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{x+3}$. احسب $f'(x)$ وعيِّن مجموعة قيم x التي تكون عندها الحسابات صحيحة.

الحل

نفترض $u(x)=2\sqrt{1+x}$ فيكون u اشتقاقي على $[-1,+\infty[$ وبالتالي اشتقاقياً على $[0,+\infty[$.

نفترض $v(x)=\dfrac{1}{x+3}$ فيكون v اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus -3$ وبالتالي اشتقاقياً على $[0,+\infty[$.

وبما أن $f(x)=u(x)+v(x)$ فإن التابع f معرف واشتقاقي على $[0,+\infty[$ وتابعه المشتق هو

$$f'(x)=u'(x)+v'(x)=2.\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{(x+3)^2}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{(x+3)^2}$$

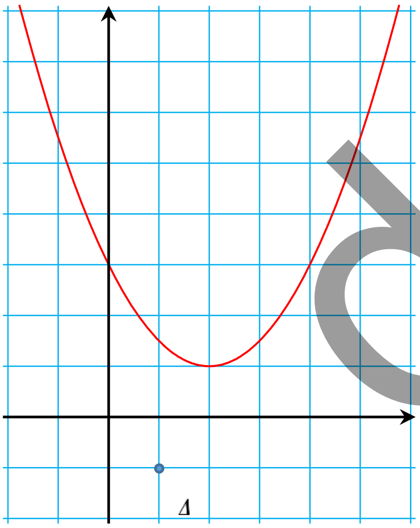
12 المماسات المارة بنقطة معطاة لخط بياني.

في مَعلَم متجانس $O,\vec{i},\vec{j}$ ، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع $f:x\mapsto \frac{x^2}{2}-2x+3$ ، و A هي نقطة إحداثيّاتها $(1,-1)$. عيِّن المماسات للخط البياني $\mathcal{C}$ التي تمر بالنقطة A في حال وجودها.

الحل

طريقةأولى:

نلاحظ من الرسم أن



نلاحظ أن النقطة $A(1,-1)$ لا تقع على C

ومن الشكل نتنبأ بوجود مماسين من النقطة A للخط البياني C

نفترض أن $M(m,f(m))$ هي نقطة من المنحني C تحقق المطلوب وبما أن التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه هو $f'(x)=x-2$ فإن ميل المماس للخط C في M هو $m-2$ ولدينا $y_N=f(m)=\frac{m^2}{2}-2m+3$

فمعادلة المماس هي

$$y-\frac{m^2}{2}+2m-3=(m-2)(x-m)$$

$$y=(m-2)x-m^2+2m+\frac{m^2}{2}-2m+3=(m-2)x-\frac{1}{2}m^2+3$$

وبما أن المماس للخط C في N يمر بالنقطة $A(1,-1)$ فإن إحداثيي A يحققان معادلته إذن:

$$-1 = m - 2 - \frac{1}{2}m^2 + 3 \text{ أو } \frac{1}{2}m^2 - m - 2 = 0 \text{ أو } m^2 - 2m - 4 = 0$$

مميز المعادلة هو $\Delta = 4 + 16 = 20$ ،

فحلا المعادلة هما $m_1 = \frac{2+2\sqrt{5}}{2} = 1+\sqrt{5}$ و $m_2 = 1-\sqrt{5}$

وبما أن $m_1 \neq m_2$ فالخط C يقبل مماسين مختلفين في A .

فاصلة نقطة التماس الأولى هي $x = 1+\sqrt{5}$ وترتيبها هو

$$y = f(1+\sqrt{5}) = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2} - 2(1+\sqrt{5}) + 3$$
$$= \frac{6+2\sqrt{5}}{2} - 2 - 2\sqrt{5} + 3 = 3 + \sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 1 = 4 - \sqrt{5}$$

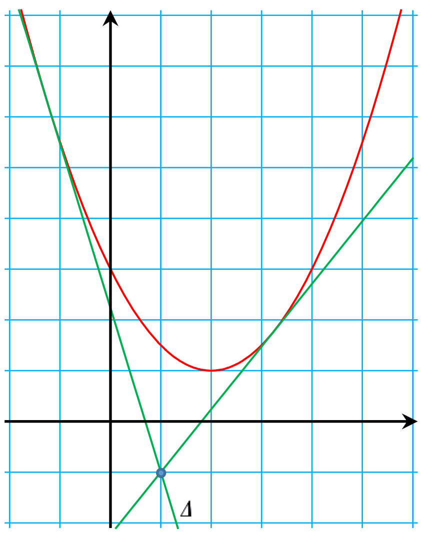
ومنه فإن نقطة التماس الأولى هي $(1+\sqrt{5}, 4-\sqrt{5})$ وميل المماس الأول هو

$$m - 2 = 1 + \sqrt{5} - 2 = \sqrt{5} - 1$$

ومعادلة المماس الأول هي $y - 4 + \sqrt{5} = (\sqrt{5}-1)(x - 1 - \sqrt{5})$ ومنه:

$y = (\sqrt{5}-1)x - 4 + 4 - \sqrt{5}$ ومنه $y = (\sqrt{5}-1)x - \sqrt{5}$

وبطريقة مماثلة نوجد نقطة التماس الثانية وميل المماس الثاني، فتكون $y = (-\sqrt{5}-1)x + \sqrt{5}$ معادلةً للمماس الثاني.



13 المماسات المشتركة لخطَّين بيانيين.

نتأمّل في مَعلَم متجانس $O,\vec{i},\vec{j}$ ، الخطّان البيانيّان C_f و C_g للتابعين

$f: x \mapsto x^2$ و $g: x \mapsto \frac{1}{x}$.

عين المماسات المشتركة لهذين الخطَّين البيانيَّيْن في حال وجودها.

الحل

نبحث عن مستقيم يمس C_f و C_g في آن معاً ولكن ليس بالضرورة أن تكون نقطتا التماس منطبقتين.

نفترض $A(a,a^2)$ نقطة كيفية من C_f .

بما أن التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه هو $f'(x)=2x$ فإنه يقبل مماساً في كل نقطة من نقاطه وبالتالي فهو يقبل مماساً Δ_a في النقطة A وميله $m_a = f'(a) = 2a$ وبالتالي فإن معادلة المماس Δ_a هي $y-a^2 = 2a(x-a)$ والتي تكافئ: $y = 2ax - a^2$

نفترض $B\left(b,\frac{1}{b}\right)$ نقطة كيفية من C_g لاحظ أن $(b \neq 0)$.

بما أن التابع g اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$ ومشتقه هو : $g'(x) = \frac{-1}{x^2}$ فإنه يقبل مماساً في كل نقطة من نقاطه وبالتالي فهو يقبل مماساً Δ_b في النقطة B وميله $m_b = f'(b) = \frac{-1}{b^2}$ وبالتالي فإن معادلة المماس Δ_b هي: $y - \frac{1}{b} = -\frac{1}{b^2}(x-b)$ والتي تكافئ: $y = -\frac{1}{b^2}x + \frac{2}{b}$

إن انطباق المماسين Δ_a و Δ_b يكافئ وجود عددين a,b بحيث:

$$\begin{cases} 2a = -\frac{1}{b^2} & ① \\ -a^2 = \frac{2}{b} & ② \end{cases}$$

من ① نجد: $a = -\frac{1}{2b^2}$ ....③

نعوض ③ في ② فنجد: $-\frac{1}{4b^4} = \frac{2}{b}$ ومنه : $-b = 8b^4$

ومنه $8b^4 + b = 0$ إذن $b(8b^3+1) = 0$

إما $b = 0$ وهي مرفوضة .

أو $(8b^3+1) = 0$ ومنه $b^3 = -\frac{1}{8}$ ومنه $b = -\frac{1}{2}$

وبالتعويض في ③ نجد: $a = -\frac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$

إذن يوجد مماس وحيد مشترك للخط C_f و C_g وهو يمس C_f في النقطة $A(-2,4)$ ويمس C_g في النقطة $B\left(-\frac{1}{2},-2\right)$ومعادلته : $y=-4x-4$

14 المماسات المتعامدة لقطع مُكافئ.

نتأمّل، في مَعلَم متجانس $O,\vec{i},\vec{j}$ ، القطع المُكافئ $\mathcal{P}$ الذي مُعادلته $y=x^2$. عين مجموعة النقاط M التي يمكن أن نُنشئ منها مماسين متعامدين للقطع $\mathcal{P}$.

الحل

نرمز بالرمز $\mathcal{E}$ إلى مجموعة النقاط التي تحقق المطلوب.

علينا إثبات :

أولاً: كل نقطة من $\mathcal{E}$ يُرسم منها مماسان متعامدان للقطع.

ثانياً: كل مماسين متعامدين للقطع يتقاطعان في نقطة من $\mathcal{E}$.

أولاً: لتكن $M_0(x_0,y_0)$ نقطة من $\mathcal{E}$، فيرسم منها مماسان متعامدان للقطع ، نرمز إليهما بالرمزين T و T' ونرمز إلى نقطتي التماس بالرمزين P و P' وإلى فاصلتيهما بالرمزين c,a بالترتيب .

فيكون $P(a,a^2)$ و $P'(c,c^2)$.

بما أن التابع $f(x)=y=x^2$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه هو $f'(x)=2x$ فهو اشتقاقي عند $x=a$ وعند $x=c$. ومنه ميل المماس T في P هو $m=2a$ ومعادلة T هي $y=2ax-a^2$ وبما أن $M_0\in T$ فإن إحداثيي M_0 يحققان معادلة T أي $y_0=2ax_0-a^2$ ومنه

$$a^2-2ax_0+y_0=0.....(1)$$

ميل المماس T' في P' هو $m'=2c$ ومعادلة T' هي $y=2cx-c^2$

وبما أن $M_0\in T'$ فإن إحداثيي M_0 يحققان معادلة T' أي $y_0=2cx_0-c^2$ ومنه

$$c^2-2cx_0+y_0=0.....(2)$$

بما أن المماسين T و T'متعامدان فإن $m_T.m_{T'}=-1$ ومنه $2a.2c=-1$ و إذن

$$4a.c=-1........(3)$$

من (3) نجد أن $c=-\frac{1}{4a}$ مع $a\neq 0$

وبالتعويض في (2) نحصل على المعادلة $\frac{1}{16a^2}-2.\left(\frac{-1}{4a}\right)x_0+y_0=0$

$$1+8ax_0+16a^2y_0=0........(4)$$

نضرب كلاً من طرفي العلاقة (1) بالعدد 4 ونجمعها مع العلاقة (4) طرفا مع طرف فنجد $(4a^2+1)(1+4y_0)=0$ ومنه $y_0=-\frac{1}{4}$

وهذا يعني أن M_0 تنتمي إلى مستقيم ثابت Δ معادلته $y=-\frac{1}{4}$

أثبتنا أنه إذا كانت M_0 نقطة يُرسم منها مماسان متعامدان للقطع $\mathcal{P}$ كان $M_0\in\Delta$

ثانياً: إثبات أنه إذا كانت M نقطة من Δ فإنه يمكننا رسم مماسين متعامدين للقطع من M .

ولهذا نفترض $M\left(a,-\frac{1}{4}\right)$ نقطة ما من Δ ونريد إنشاء مماس للقطع $\mathcal{P}$ يمر من M.

المماس للقطع $\mathcal{P}$ المار من M يملك معادلة من الشكل $y=mx-am-\frac{1}{4}$ وبحل هذه المعادلة مع معادلة القطع حلاً مشتركاً نجد $x^2=mx-am-\frac{1}{4}$ أو $x^2-mx+am+\frac{1}{4}=0$ ومميز هذه المعادلة هو $m^2-4am-1$ ولكي يتم التماس يجب أن يكون للمعادلة جذر مضاعف أي مميزها معدوم، إذن $m^2-4am-1=0$

و لهذه المعادلة جذران $m_1=2a+\sqrt{4a^2+1}$ و $m_2=2a-\sqrt{4a^2+1}$ هما ميلا المماسين المرسومين للقطع من M . نلاحظ أن $m_1\cdot m_2=-1$ فالمماسان متعامدان مهما يكن $a\in\mathbb{R}$.

فكل نقطة من Δ يُرسم منها مماسان متعامدان للقطع .

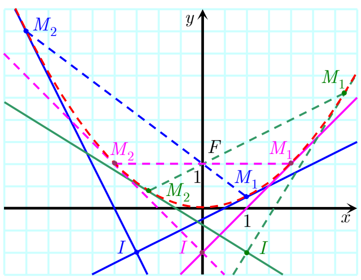
15 محلٌّ هندسي.

نتأمّل، في مَعلَم متجانس $O,\vec{i},\vec{j}$ ، الخطّ البياني $\mathcal{C}$ الذي مُعادلته $y=\frac{1}{4}x^2$. والنقطة F التي إحداثيّاتها $(0,1)$. يقطع مستقيم d مارٌّ بالنقطة F وميله m الخط البياني $\mathcal{C}$ في نقطتين M_1 و M_2.

ويتقاطع المماسان في M_1 و M_2 للمنحني $\mathcal{C}$ بالنقطة I.

عين المحلّ الهندسي $\mathcal{E}$ الذي ترسمه النقاط I عندما يتحوّل المستقيم d حول F.

الحل



المستقيم d يمر من النقطة $F(0,1)$ وميله m فمعادلته هي $y-1=m(x-0)$

أي أن معادلته: $y=mx+1$.

نفترض أن فاصلتي النقطتين M_1 و M_2 هما على الترتيب x_1 و x_2 . عندئذٍ x_1 و x_2 (إن وجدا) فهما الحل المشترك لمعادلة $\mathcal{C}$ مع معادلة d أي أنهما جذرا المعادلة :

$$f(x) = y_d$$

والتي تكافئ $\frac{1}{4}x^2 = mx + 1$

أو $x^2 - 4mx - 4 = 0$

وبما أن $\Delta = 16m^2 + 16 > 0$ فإن للمعادلة السابقة جذرين مختلفين دوماً وبالتالي فإنّ x_1 و x_2 موجودان وغير معدومين ويحققان: $x_1.x_2 = -4$......① و $x_1 + x_2 = 4m$......②

بما أن M_1 و M_2 هما نقطتان من C فإنهما يحققان معادلته ومنه: $M_1\left(x_1, \frac{1}{4}x_1^2\right)$ و $M_2\left(x_2, \frac{1}{4}x_2^2\right)$

التابع $x \to \frac{1}{4}x^2$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه هو $y' = \frac{1}{2}x$

ميل المماس للقطع في M_1 هو: $m_1 = \frac{1}{2}x_1$ فمعادلته $y - \frac{1}{4}x_1^2 = \frac{1}{2}x_1(x - x_1)$

أو $y = \frac{1}{2}x_1x - \frac{1}{4}x_1^2$.......③

ميل مماس للقطع في M_2 هو $m_2 = \frac{1}{2}x_2$ ومعادلته هي $y - \frac{1}{4}x_2^2 = \frac{1}{2}x_2(x - x_2)$

ومنه: $y = \frac{1}{2}x_2x - \frac{1}{4}x_2^2$.......④

نحصل على I بالحل المشترك للمعادلتين ③ و ④ حيث $\frac{1}{2}x_1x - \frac{1}{4}x_1^2 = \frac{1}{2}x_2x - \frac{1}{4}x_2^2$

بحل هذه المعادلة نجد $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

نعوض في ③فنجد: $y = \frac{1}{2}x_1\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - \frac{1}{4}x_1^2 = \frac{x_1^2 + x_1x_2}{4} - \frac{x_1^2}{4} = \frac{x_1x_2}{4}$

وبالتالي فإن احداثيات I هي $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1x_2}{4}\right)$ وبالاستفادة من ① و ② نجد أن:

$x_I = \frac{4m}{2} = 2m$ و $y_I = \frac{-4}{4} = -1$ أي أن : $I(2m, -1)$ وبالتالي فإن I نقطة من المستقيم Δ الذي معادلته $y = -1$.

نفترض $I(a, -1)$ هي نقطة كيفية من Δ الذي معادلته : $y = -1$

معادلة كل مستقيم مار بالنقطة I من الشكل $y + 1 = m(x - a)$ أو: $y = mx - ma - 1$.....(*)

نحل (*) مع معادلة القطع حلاً مشتركاً فنجد: $\frac{1}{4}x^2 = mx - ma - 1$

أو $x^2 - 4mx + 4ma + 4 = 0$ وهذه معادلة من الدرجة الثانية مميزها

$$\Delta = 16m^2 - 16ma - 16 = 16(m^2 - ma - 1)$$

وحتى يكون المستقيم المار بالنقطة I مماساً للقطع يجب أن يكون للمعادلة السابقة جذر مضاعف. أي

$\Delta = 0$

إذن $m^2 - ma - 1 = 0$ ومميز هذه المعادلة هو $\Delta = a^2 + 4 > 0$ وبالتالي سيكون لهذه المعادلة جذران مختلفان m_1 و m_2 .

بما أن $a \in \mathbb{R}$ إذن أياً تكن I من Δ، نرسم منها مماسان للقطع وبالتالي I نقطة من $\mathcal{E}$.

قُدُماً إلى الأمام

16 ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$$

1. أثبت أنّ الخطّ البياني $\mathcal{C}_f$ للتابع f يقبل مماسات عند كل نقطة من نقاطه.
2. حلَّ المعادلة $f'(x) = 0$، عبِّر عن النتيجة هندسيّاً.
3. عيّن فواصل نقاط المنحني $\mathcal{C}_f$ التي يساوي ميل المماس عندها 3.

الحل

1. بما أن التابع f قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإنه يقبل مماساً في كل نقطة من نقاطه
2. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

$$f'(x) = 0$$
$$3(x^2 - 2x + 1) = 0$$
$$3(x-1)^2 = 0$$

$x = 1$ هو جذر وحيد مضاعف للمعادلة $f'(x)$

أي أن الخط البياني C_f يقبل مماساً وحيداً يوازي xx' وفاصلة نقطة التماس هي (1) أما ترتيبها فهو : $y = f(1) = 5$ وبالتالي نقطة التماس هي $(1,5)$ ومعادلة المماس فيها هي $y = 5$.

3. ميل المماس يساوي 3 يعني $f'(x) = 3$

$$3x^2 - 6x + 3 = 3$$
$$3x(x-2) = 0$$

إما $x = 0$ أو $x = 2$ وبالتالي توجد نقطتان من C_f يكون ميل المماس في كل منهما هو (3) وفاصلتاهما هما: $x = 0$ و $x = 2$

17 أيمكن أن يكون المستقيم الذي معادلته $y=7x+9$ مماساً للمنحني الذي معادلته $y=x^3+4x+11$ ؟ إذا كان جوابك : «نعم» عيِّن نقاط التماس.

الحل

طريقة أولى:

التابع $y=x^3+4x+11$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه هو : $y'=3x^2+4$

حتى يكون المستقيم $y=7x+9$ مماساً لمنحني التابع يجب أن تكون المعادلة التالية قابلة للحل :

$3x^2+4=7$

وهي تكافئ: $3x^2-3=0$ وتكافئ أيضاً $x^2=1$

إما $x=1$ ومنه : $y=16$ وبالتالي المماس لمنحني التابع في النقطة $A(1,16)$ يكون ميله هو (7) وبما أن A تحقق معادلة المستقيم لأن $7(1)+9=16$ محققة . فإن هذا المستقيم يمس المنحني في A.

أو $x=-1$ ومنه : $y=6$ وبالتالي المماس لمنحني التابع في النقطة $B(-1,6)$ يكون ميله هو (7)

ولكن B لا تحقق معادلة المستقيم لأن $7(-1)+9\neq 6$. فهذا المستقيم لا يمس المنحني في B , هذا المستقيم يمس المنحني في A فقط.

$$3(-1,6)(x^2+x+1)=0$$

$x=1$ حل وحيد

$$f(1)=16$$

فالنقطة الوحيدة من المنحني التي يكون ميل المماس فيها مساوياً 7 هي $(1,16)$

بالتالي المستقيم $y=7x+9$ مماس للمنحني في النقطة $(1,16)$

طريقة ثانية

بالحل المشترك لمعادلة المنحني مع معادلة المستقيم نجد :

$$x^3+4x+11=7x+9......(*)$$

$$x^3-3x+2=0$$

$$(x-1)^2(x+2)=0$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x+2 & x-1 \\ \underline{x^3-x^2} & x^2+x-2 \\ x^2-3x+2 & \\ \underline{x^2-x} & \\ -2x+2 & \\ \underline{-2x+2} & \\ 0 & \end{array}$$

ومنه يشترك المستقيم والمنحني بالنقطتين $B(-2,5)$ ، $A(1,16)$

ولكن: $x=-2$ هي جذر بسيط (غير مضاعف) للمعادلة $(*)$

وبالتالي فإن B نقطة تقاطع بينما $x=1$ هو جذر مضاعف للمعادلة بالتالي A هي نقطة تماس (لأنها نقطة مضاعفة) إذن المستقيم يمس المنحني في النقطة A.

جذر غير مضاعف وبالتالي $(-2,5)$ هي نقطة تقاطع.

18 عيِّن المماسات التي تمر بالنقطة $A(1,2)$ للخط البياني للتابع

$$f : x \mapsto \frac{2}{3}x^2 + 3x - 1$$

الحل

نفترض M نقطة ما من C_f وفاصلتها a فيكون ترتيبها: $\frac{2}{3}a^2 + 3a - 1$ أي :

$$M\left(a, \frac{2}{3}a^2 + 3a - 1\right)$$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه $f'(x) = \frac{4}{3}x + 3$

ميل المماس للخط C_f في M هو $m = \frac{4}{3}a + 3$

معادلة المماس للخط C_f في M هي $y - \frac{2}{3}a^2 - 3a + 1 = \left(\frac{4}{3}a + 3\right)(x - a)$

وبعد الإصلاح: $y = \left(\frac{4}{3}a + 3\right)x - \frac{11}{3}a^2 + 3a - 1$

وحتى يمر المماس بالنقطة $A(1,2)$ يجب أن تحقق A معادلة المماس لنعوض إحداثيات A في المعادلة الأخيرة فنجد: $2 = \left(\frac{4}{3}a + 3\right)(1) - \frac{2}{3}a^2 - 1$ وبعد الاختزال $2a(a-2) = 0$ لها جذران $0,2$

إذن يوجد مماسان للخط C_f يمران من النقطة A الأول يوافق $a = 0$ ومعادلته $y = 3x - 1$

والثاني يوافق $a = 2$ ومعادلته : $y = \frac{17}{3}x - \frac{11}{3}$

19 ليكن d المستقيم الذي معادلته $y = x + 2$، ولتكن A النقطة من d التي فاصلتها 0. نرغب بتعيين جميع القطوع المُكافئة $\mathcal{P}$ التي معادلاتها $y = ax^2 + bx + c$ مع $a \neq 0$ والتي تمس المستقيم d في A.

1. أثبت أنّ لكلِّ واحد من هذه القطوع المكافئة معادلةً من الشكل $y = ax^2 + x + 2$، مع $a \neq 0$.

2. a. لتكن (x_0, y_0) إحداثيّات رأس القطع المُكافئ $\mathcal{P}$. أوجد علاقة تربط x_0 و y_0 ولا تحوي a.

b. أثبت أنّ رؤوس القطوع المُكافئة $\mathcal{P}$ تقع على منحن ثابت، يطلب تعيين معادلته.

الحل

.1 لدينا $A(0,2)$ وبما أن $A \in \mathcal{P}$ فإن: $y(0)=2$ ومنه : $c=2$

التابع $y=ax^2+bx+c$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه $y'=2ax+b$ وبما أن d (الذي ميله 1) يمس $\mathcal{P}$ في النقطة A فإن: $y'(0)=1$ ومنه $b=1$

وبالتالي لكل قطع من هذه القطوع المكافئة المعادلة : $a \neq 0$ ، $f(x)=ax^2+x+2$

2 لدينا : $f(x)=a\left(x^2+\frac{1}{a}x\right)+2$

$$f(x)=a\left(x^2+\frac{1}{a}x+\frac{1}{4a^2}-\frac{1}{4a^2}\right)+2$$

$$f(x)=a\left(x+\frac{1}{2a}\right)^2-\frac{1}{4a}+2$$

وبالتالي فإن رأس كل قطع مكافئ $\mathcal{P}$ من الشكل : $\left(-\frac{1}{2a},-\frac{1}{4a}+2\right)$ ومنه:

$x_0=-\frac{1}{2a}$......① $\qquad$ $y_0=-\frac{1}{4a}+2$......②

من ① نجد: $\frac{1}{a}=-2x_0$ ، نعوض في ② فنجد: $y_0=-\frac{1}{4}(-2x_0)+2$ وبالتالي : $y_0=\frac{1}{2}x_0+2$

نستنتج أن رؤوس القطوع المكافئة $\mathcal{P}$ تقع على المستقيم الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x+2$

20 عيّن الأعداد الحقيقيّة a و b ليمر بالنقطة $A(2,0)$ الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة $f(x)=ax+b-\frac{6}{x}$ ، ويقبل مُماساً في A المستقيم الذي معادلته $y-x+2=0$.

الحل

A تنتمي إلى الخط البياني ومنه : $f(2)=0$ وبالتالي :

$$0=2a+b-3 \qquad (1)$$

الخط البياني يقبل مماساً في A ميله 1 بالتالي $f'(2)=1$.

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$ ومشتقه هو : $f'(x)=a+\frac{6}{x^2}$ وبما أن : $f'(2)=1$ فإن: $1=a+\frac{6}{4}$

أي أن : $a=-\frac{1}{2}$ و بالتعويض في (1) نجد : $0=-1+b-3$ ومنه : $b=4$

21 عيّن m كي يقبل المنحني الذي معادلته $y=(m-1)x^2+(3m+2)x+4$ مماساً ميله 6 في النقطة التي فاصلتها -1.

الحل

التابع y اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه هو : $y' = 2(m-1)x + (3m+2)$

حتى يقبل المنحني مماساً في A ميله (6) يجب أن يكون : $y'(-1) = 6$ ومنه:

$2(m-1)(-1) + (3m+2) = 6$ وبالتالي $m = 2$

22 أيوجد تابع كثير الحدود من الدرجة الثالثة، يمرّ خطّه البياني بالنقطتين $A(0,0)$ و $B(1,1)$ ، ويقبل عند هاتين النقطتين مماسات توازي محور الفواصل.

الحل

نفترض $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ هو التابع المنشود .

بما أن A تنتمي إلى الخط البياني للتابع f فإن: $d = 0$ وبما أن B تنتمي إلى الخط البياني للتابع f

فإن: (1) $\quad 1 = a + b + c$ التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه هو: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

ميل المماس في A معدوم : $0 = f'(0) = c$ إذن $c = 0$ ميل المماس في B معدوم :

$0 = f'(1) = 3a + 2b$ ومنه : (2) $\quad 3a + 2b = 0$

بتعويض $c = 0$ في (1) نجد : (3) $\quad a + b = 1$

بالحل المشترك للمعادلتين (2) و (3) نجد أن: $a = -2$ و $b = 3$

إذن يوجد كثير حدود يحقق الشروط السابقة هو: $f(x) = -2x^3 + 3x^2$

23 احسب فيما يأتي المشتقّات $f'(x)$ ، مبيِّناً المجموعة التي تكون عليها حساباتك صحيحة، ثمّ عيِّن إشارة $f'(x)$ تبعاً لقيم x.

① $f(x) = x + 1 - \dfrac{2x}{x+3}$, ② $f(x) = \left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)^2$,

③ $f(x) = x^4 + x^2 + 1$, ④ $f(x) = x + \dfrac{2}{x} - 1$,

⑤ $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1}$, ⑥ $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 6}{x - 1}$,

⑦ $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$, ⑧ $f(x) = \dfrac{2x^2 - x}{(x+1)^2}$,

الحل

① التابع $f(x) = x + 1 - \dfrac{2x}{x+3}$ معرف على $\mathbb{R} \setminus \ -3$

نلاحظ أن : $f(x) = u(x) + \dfrac{v(x)}{w(x)}$ حيث: $u(x) = x + 1$ و $v \ \ x \ \ = -2x$ و $w(x) = x + 3$

وبما أن التوابع الثلاث u, v, w اشتقاقية على $\mathbb{R}$ فهي اشتقاقية على $\mathbb{R} \setminus \ -3$

وبالتالي فإن التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R} \setminus \ -3$ ومشتقه هو :

$$f'(x) = 1 + \frac{-2(x+3) - 1(-2x)}{(x+3)^2} = 1 + \frac{-6}{(x+3)^2} = \frac{(x+3)^2 - 6}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x + 3}{(x+3)^2}$$

وبما أن المقام في الكسر السابق موجب فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط ، وتتعين إشارة $f'(x)$ بالجدول :

x	$-\infty$		$-3-\sqrt{6}$		-3		$-3+\sqrt{6}$		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

② $f(x) = \left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)^2 = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 4x + 4}$

التابع f معرف على $\mathbb{R} \setminus \ 2$

نلاحظ أن : $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ حيث: $u(x) = x^2 - 6x + 9$ و $v(x) = x^2 - 4x + 4$

وبما أن التابعين اشتقاقيان على $\mathbb{R}$ فهما اشتقاقيان على $\mathbb{R} \setminus \ 2$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R} \setminus \ 2$ وتابعه المشتق هو :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-6)(x^2-4x+4) - (2x-4)(x^2-6x+9)}{(x^2-4x+4)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 8x^2 + 8x - 6x^2 + 24x - 24 - 2x^3 + 12x^2 - 18x + 4x^2 - 24x + 36}{(x^2-4x+4)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 10x + 12}{(x^2-4x+4)^2} = \frac{2(x^2-5x+6)}{(x-2)^4} = \frac{2(x-2)(x-3)}{(x-2)^4} = \frac{2(x-3)}{(x-2)^3} \end{aligned}$$

بما أن إشارة $(x-2)^3$ من إشارة $(x-2)$ فإن إشارة $f'(x)$ تتعين بالجدول :

x	$-\infty$		2		3		∞
$x-3$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$+$	

تُعالج باقي الحالات بطريقة مماثلة.

24 احسب فيما يأتي المشتقّات f' ، مبيّناً المجموعة التي تكون عليها حساباتك صحيحة،

① $f(x) = x^2 + 1 - \dfrac{2x}{x+1},$ ② $f(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{3-x},$

③ $f(x) = x\sqrt{x}$ ④ $f(x) = \sqrt{x}+1^{\;2},$

⑤ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}},$ ⑥ $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}\sqrt{x},$

الحل

① التابع f معرف على $\mathbb{R} \setminus -1$

نلاحظ أن : $f(x) = u(x) + \dfrac{v(x)}{w(x)}$ حيث: $u(x) = x^2 + 1$ و $v(x) = 2x$ و $w(x) = x + 1$

وبما أن التوابع الثلاث u, v, w اشتقاقية على $\mathbb{R}$ فهي اشتقاقية على $\mathbb{R} \setminus 1$

وبالتالي فإن التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R} \setminus 1$ ومشتقه هو :

$$f'(x) = 2x + \frac{-2(x+1) - 1(-2x)}{(x+1)^2} = 2x - \frac{2}{(x+1)^2}$$

② التابع f معرف على $[1,3]$

نلاحظ أن : $f(x) = u(x).v(x)$ حيث: $u(x) = \sqrt{x-1}$ و $v(x) = \sqrt{3-x}$

ونلاحظ أن التابع $u(x)$ اشتقاقي على $]1,+\infty[$ و التابع $v(x)$ اشتقاقي على $]-\infty,3[$

وبالتالي فإن التابع f اشتقاقي على $]1,3[$ ومشتقه هو :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.\sqrt{3-x} + \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}.\sqrt{x-1} = \frac{\sqrt{3-x}}{2\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x-1}}{2\sqrt{3-x}} = \frac{3-x-x+1}{2\sqrt{x-1}\sqrt{3-x}}$$
$$= \frac{4-2x}{2\sqrt{-x^2+4x-3}}$$

③ $x\sqrt{x}$

نلاحظ أن : $f(x) = u(x).v(x)$ حيث: $u(x) = \sqrt{x}$ و $v(x) = x$

ونلاحظ أن التابع $u(x)$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$ و التابع اشتقاقي على $\mathbb{R}$

وبالتالي فإن التابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ومشتقه هو :

$$f'(x) = 1.\sqrt{x} + x.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

أما عندما $x = 0$ لنبحث عن قابلية الاشتقاق حسب التعريف

ليكن h عدد حقيقي غير معدوم إن معدل تغير التابع f بين النقطتين 0 وَ h هو :

$$t(h)=\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h\sqrt{h}-0}{h}=\sqrt{h}$$
$$\lim_{h\to 0} t(h)=0\in\mathbb{R}$$

ولما كان $\lim_{h\to 0} t(h)\in\mathbb{R}$ فإن f اشتقاقي عند 0 و العدد المشتق عند 0 هو: $f'(0)=0$

وهكذا نستنتج أن f اشتقاقي على $[0,+\infty[$ ومشتقه هو $f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

25 في مَعْلَم متجانس، $\mathcal{P}$ هو القطع المُكافئ الذي معادلته $y=x^2$، و d هو المستقيم الذي معادلته $y=-\frac{1}{4}$، و F النقطة التي إحداثياتها $\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

1. اكتب معادلة للمماس T للقطع $\mathcal{P}$ في النقطة M التي فاصلتها t.
2. ليكن H المسقط القائم للنقطة M على d. أثبت أنّ T هو محور القطعة المستقيمة $[HF]$.

الحل

التابع $f(x)=y=x^2$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه : $f'(x)=2x$

1. ميل المماس T في النقطة $M(t,t^2)$ هو $m=+2t$ ومعادلته : $y=2tx-t^2$

2. لدينا $F\left(0,\frac{1}{4}\right)$ ، $M(t,t^2)$, $H\left(t,-\frac{1}{4}\right)$

نفترض N هي منتصف $[HF]$ فتكون: $N\left(\frac{t}{2},0\right)$ وبتعويض إحداثيات N في معادلة المماس T نجد:

$0=2t\left(\frac{t}{2}\right)-t^2$ وهي محققة . إذن $N\in T$

ولدينا : ميل (HF) هو : $m_{(HF)}=\frac{\frac{1}{2}}{-t}=-\frac{1}{2t}$

وبالتالي فإن $m_{(HF)}.m_T=-\frac{1}{2t}.2t=-1$ ومنه فإن : $(HF)\perp T$

نستنتج أن T يعامد $[HF]$ ويمر من منتصفها N . إذن T هو محور $[HF]$

26 ليكن f تابعاً كثير الحدود من الدرجة الثانية : $f(x)=ax^2+bx+c$ مع $(a\neq 0)$، وليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f في مَعْلَم متجانس. ولتكن A و B نقطتين من $\mathcal{C}$ فاصلتاهما s و t مع $s\neq t$.

① a. أثبت أنّ معادلة المماس في A للمنحني $\mathcal{C}$ هي $y=(2as+b)x-as^2+c$.

b. اكتب بأسلوب مماثل معادلة المماس في B للمنحني $\mathcal{C}$.

② أثبت أنّ المماسين السابقان يتقاطعان في نقطة فاصلتها $\frac{s+t}{2}$.

③ a. أثبت أنّ $f(t)-f(s)=(t-s)f'\left(\frac{t+s}{2}\right)$.

b. استنتج أنّ المماس للمنحني $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها $\frac{s+t}{2}$ يوازي (AB).

الحل

التابع $f(x)=ax^2+bx+c$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه: $f'(x)=2ax+b$

① a. $A(s,f(s))$ ، $B(t,f(t))$

معادلة المماس للخط (c) في A هي :

$$y=f'(s)x-f'(s)s+f(s)=(2as+b)x-(2as+b)s+as^2+bs+c$$
$$=(2as+b)x-2as^2-bs+as^2+bs+c=(2as+b)x-as^2+c$$

b. ومعادلة المماس في B هي: $y=(2at+b)x+at^2+c$

② بالحل المشترك لمعادلتي المماسين السابقين نجد:

$$(2as+b)x-as^2+c=(2at+b)x+at^2+c$$
$$2a(s-t)x=2(a^2-t^2)$$
$$x=\frac{a(s-t)(s+t)}{2a(s-t)}=\frac{s+t}{2}$$

③ a.

$$f(t)-f(s)=at^2+bt+c-as^2-bs-c=(t^2-s^2)a+(t-s)b$$
$$=(t-s)((t+s)a+b)$$

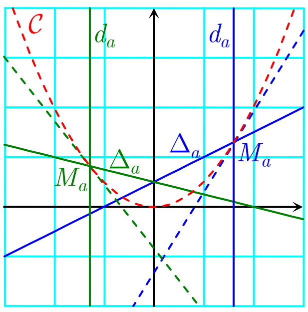
ولكن $f'\left(\frac{t+s}{2}\right)=2a\left(\frac{t+s}{2}\right)+b=(t+s)a+b$

ومنه $f(t)-f(s)=(t-s)f'\left(\frac{t+s}{2}\right)$

b. ميل معادلة المماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها $\frac{t+s}{2}$ هو: $m=f'\left(\frac{t+s}{2}\right)$

ومن العلاقة المثبتة نجد $\frac{f(t)-f(s)}{t-s}=f'\left(\frac{t+s}{2}\right)=m$ أي $m=m_{AB}$ وبالتالي فإن هذا المماس يوازي (AB)

27 نتأمّل، في مَعْلَم متجانس، القطع المُكافئ $\mathcal{P}$ الذي معادلته $y=x^2$. ليكن a عدداً حقيقيّاً و d_a المستقيم الذي معادلته $x=a$. يقطع المستقيم



d_a القطع $\mathcal{P}$ في M_a، فنرسم Δ_a نظير المستقيم d_a بالنسبة إلى المماس في M_a للقطع $\mathcal{P}$.

أثبت أنّ جميع المستقيمات Δ_a تمر بنقطة ثابتة F. (نسمّيها محرق القطع $\mathcal{P}$.)

الحل

بدايةً لدينا المعلومة ((إذا كان مستقيمان متقاطعان d_1 و d_2 متناظرين بالنسبة إلى مستقيم Δ كان Δ منصفاً داخلياً للزاوية بين d_1 و d_2 وعندها كل مستقيم يعامد Δ ولا يمر بنقطة تقاطع d_1 و d_2 سيقطعهما في نقطتين H و H' متناظرتين بالنسبة إلى Δ ، فيكون Δ هو محور $[HH']$)).

معادلة المماس للقطع $\mathcal{P}$ في النقطة $M(a,a^2)$ منه هي $y = 2ax - a^2$

وهو يتقاطع مع المحور xx' في النقطة $M'\left(\frac{a}{2},0\right)$

أولاً في حالة $a \neq 0$ إن معادلة المستقيم العمود على المماس السابق في النقطة $M'\left(\frac{a}{2},0\right)$ منه هي :

$$y = -\frac{1}{2a}\left(x - \frac{a}{2}\right) \quad \text{أو} \quad y = -\frac{1}{2a}x + \frac{1}{4}$$

نفترض H هي نقطة تقاطع هذا العمود مع المستقيم d_a فتكون : $y_H = -\frac{1}{4}$ وبالتالي فإن إحداثيي H هي $\left(a,\frac{-1}{4}\right)$

نفترض H' هي نظيرة H بالنسبة إلى المماس فتكون $H' \in \Delta_a$ ويكون المماس هو محور القطعة $[HH']$ ومنه $\frac{x_{H'} + a}{2} = \frac{a}{2}$ أي $x_{H'} = 0$

وأيضاً $\frac{y_{H'} - \frac{1}{4}}{2} = 0$ أي $y_{H'} = \frac{1}{4}$

وبالتالي المستقيم Δ_a نظير d_a بالنسبة إلى المماس يمر بالنقطة الثابتة $H'\left(0,\frac{1}{4}\right)$, سنرمز إليها بالرمز F ونسميها محرق القطع .

ثانياً في حالة $a = 0$ يكون المستقيم $x = 0$ نظيره بالنسبة للمماس $y = 0$ هو مماس القطع في O.

28 نتأمّل، في مَعْلَم متجانس، القطع المُكافئ $\mathcal{P}$ الذي معادلته $y=x^2$، و F هي النقطة التي إحداثيّاتها $\left(0,\frac{1}{4}\right)$. لتكن M نقطة من محور الفواصل، فاصلتها غير معدومة، وليكن d مستقيماً مارّاً بالنقطة M.

أثبت أنّ الخاصّتين الآتيتين متكافئتان :

① المستقيم d يمس القطع $\mathcal{P}$ في نقطة فاصلتها غير معدومة

② المستقيم d عمودي على المستقيم (FM).

الحل

نفترض $M(a,0)$ فيكون $m_{(FM)}=\dfrac{0-\frac{1}{4}}{a-0}=\dfrac{-1}{4a}$

التابع $f(x)=y=x^2$.....① اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه : $f'(x)=2x$

① نفترض أن d يمس القطع $\mathcal{P}$ في نقطة فاصلتها غير معدومة b وبما أن نقطة التماس هي نقطة من القطع $\mathcal{P}$ فإن نقطة التماس هي (b,b^2) وبالتالي يكون ميل d هو : $m_d=f'(b)=2b$

ومعادلة d هي : $y-b^2=2b(x-b)$ أو : $y=2bx-b^2$ وبما أن $M\in d$ فإن M تحقق معادلة d و منه $0=2ba-b^2$ إذن $2a=b$: وبالتالي فإن ميل d هو : $m_d=4a$

ونلاحظ أن : $m_{(FM)}.m_d=-1$ وبالتالي فإن $d\perp(FM)$

② نفترض أن d عمودي على (FM) فيكون : $m_d=\dfrac{-1}{m_{(FM)}}=4a$ وبالتالي فإن معادلة d هي :

$y=4a(x-a)$ أو $y=4ax-4a^2$........②

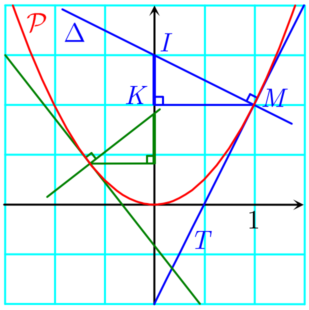
نحل ① و ② حلاً مشتركاً فنجد :

$$x^2=4ax-4a^2 \text{ أو } x^2-4ax+4a^2=0$$

$$\Delta=16a^2-16a^2=0$$

إذن يوجد جذر مضاعف لهذه المعادلة و هذا يدل على أن d يشترك مع $\mathcal{P}$ بنقطة وحيدة مضاعفة (نقطة تماس) ومنه : d يمس القطع في نقطة منه فاصلتها $x=2a\neq 0$

29 نتأمّل، في مَعْلَم متجانس، القطع المُكافئ $\mathcal{P}$ الذي معادلته $y = x^2$. لتكن M نقطة من $\mathcal{P}$ فاصلتها غير معدومة، وليكن T المماس للقطع $\mathcal{P}$ في M، و Δ المستقيم المار بالنقطة M عموديّاً على T. نعرّف النقطة I نقطة تقاطع المستقيم Δ مع محور التراتيب، والنقطة K المسقط القائم للنقطة M على المحور نفسه.



أثبت أنّ الطول IK يبقى ثابتاً عندما تتحوّل النقطة M على $\mathcal{P}$.

الحل

التابع $f(x) = y = x^2$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه $f'(x) = 2x$ ميل المماس T للقطع $\mathcal{P}$ في النقطة $M(a, a^2)$ منه هو $m = 2a$ فمعادلة المماس T هي $y = 2ax - a^2$

بما أن Δ يعامد T فإن $m_\Delta . m_T = -1$ و منه $m_\Delta = \dfrac{-1}{m_T} = -\dfrac{1}{2a}$

و بالتالي فإن معادلة Δ هي $y = -\dfrac{1}{2a}x + a^2 + \dfrac{1}{2}$

نعوض $x = 0$ في معادلة Δ فنجد $y = a^2 + \dfrac{1}{2}$ و منه $I\left(0, a^2 + \dfrac{1}{2}\right)$

للنقطتين M و K نفس الترتيب و منه $K(0, a^2)$ و بالتالي فإن $IK = \dfrac{1}{2}$ (ثابت)

إذن يبقى IK ثابتاً عندما تتحول M على القطع.

تدرّب صفحة 82

❶ عيّن القيم الحدية محلياً للتوابع الآتية على المجال المعطى.

① $I =]0,+\infty[, \quad f(x) = x^2(x-1)$

② $I =]0,+\infty[, \quad f(x) = x - 5 + \dfrac{4}{x}$

③ $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4$

④ $I = [0,3], \quad f(x) = \dfrac{x}{x^2+3x+1}$

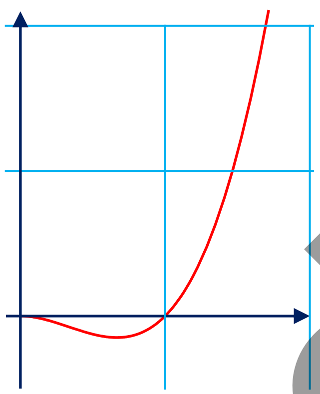
الحل

① $I = [0,+\infty[, \quad f(x) = x^2(x-1)$

التابع f تابعٌ كثير الحدود فهو اشتقاقي على $\mathbb{R}$ وبالتالي هو اشتقاقي على $I = [0,+\infty[$ وأيّاً كانت قيمة x من $I = [0,+\infty[$ كان $f'(x) = 3x^2 - 2x$ إذن ينعدم f' عند $x = 0$ و $x = \dfrac{2}{3}$.

نستنتج من ذلك إشارة التابع المشتق f' كما في الجدول الآتي

x	0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	



وهكذا يمكننا أن نستنتج ما يأتي

- $f'(x) < 0$ على المجال $]0,\frac{2}{3}[$ و $f'(0) = 0$ إذن f متناقصٌ تماماً على المجال $[0,\dfrac{2}{3}[$.
- $f'(x) > 0$ على المجال $]\dfrac{2}{3},\infty[$ و $f'\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0$ إذن f متزايدٌ تماماً على المجال $[\dfrac{2}{3},\infty[$

لنعرض إذن هذه النتائج في جدول الاطراد

x	0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f\left(\frac{2}{3}\right)$	$\nearrow$	

يبيّن الجدول السابق أنّ القيمة $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{4}{27}$ هي قيمة صغرى محلياً للتابع f يبلغها عند النقطة $\dfrac{2}{3}$

وأنّ القيمة $f(0) = 0$ هي قيمة كبرى محلياً يبلغها عند النقطة 0.

② $f(x) = x - 5 + \dfrac{4}{x}$, $\quad I = [0, +\infty[$

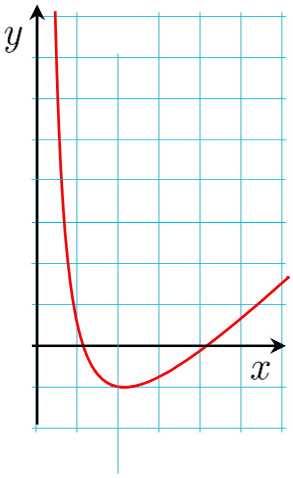
التابع f اشتقاقي على كل من المجالين $]0,\infty[$,$]-\infty,0[$. وبالتالي هو اشتقاقي على I وأيّاً كانت قيمة x من $\mathbb{R}$ كان $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$ إذن ينعدم f' ضمن المجال المعطى عند $x = 2$.

نستنتج من ذلك إشارة التابع المشتق f' كما في الجدول الآتي

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

وهكذا يمكننا أن نستنتج ما يأتي

- $f'(x) < 0$ على المجال $]0,2[$ إذن f متناقصٌ تماماً على المجال $]0,2[$.
- $f'(x) > 0$ على المجال $]2,+\infty[$ و $f'(2) = 0$ إذن f متزايدٌ تماماً على المجال $[2,+\infty[$.



لنعرض إذن هذه النتائج في جدول الاطراد

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	

يبيّن الجدول السابق أنّ القيمة $f(-2) = -9$ هي قيمة كبرى محلياً للتابع f يبلغها عند النقطة -2 وأنّ القيمة $f(2) = -1$ هي قيمة صغرى محلياً يبلغها عند النقطة -2 .

❷ ادرس اطراد التابع f المعرّف على المجال I في كلٍّ من الحالات الآتية.

① $f(x) = \sqrt{x+1}$, $\quad I = [-1, +\infty[$

② $f(x) = x\sqrt{x}$, $\quad I = [0, +\infty[$

③ $f(x) = 5x^3 - 3x^2$, $\quad I = \mathbb{R}$

④ $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $\quad I =]1, +\infty[$

الحل

① $f(x) = \sqrt{x+1}$, $\quad I = [-1, +\infty[$

التابع f تابعٌ اشتقاقي على $]-1,+\infty[$. وأيّاً كانت قيمة x من $]-1,+\infty[$ كان $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$ إذن f' لا ينعدم موجب تماماً.

نستنتج من ذلك إشارة التابع المشتق f' كما في الجدول الآتي

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	

وهكذا يمكننا أن نستنتج ما يأتي

- $f'(x) > 0$ على المجال $]-1,+\infty[$ إذن f متزايدٌ تماماً على المجال $[-1,\infty[$.

لنعرض إذن هذه النتائج في جدول الاطراد

x	-1			$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$ $+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$f(-1)$ $\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	

يبيّن الجدول السابق أنّ القيمة $f(-1)=0$ هي قيمة صغرى محلياً للتابع f يبلغها عند النقطة -1

② $\quad f(x) = x\sqrt{x}, \qquad I = [0,+\infty[$

التابع f اشتقاقي على $[0,+\infty[$. وأيّاً كانت قيمة x من $[0,+\infty[$ كان $f'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$

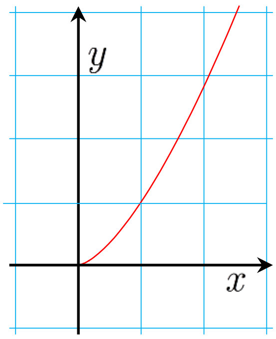
إذن ينعدم f' عند $x=0$.

نستنتج من ذلك إشارة التابع المشتق f' موجبة دوماً. كما في الجدول الآتي

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	

وهكذا يمكننا أن نستنتج ما يأتي

- $f'(x) > 0$ على المجال $]0,\infty[$ و $f'(0)=0$ إذن f متزايدٌ تماماً على المجال $[0,\infty[$.



لنعرض إذن هذه النتائج في جدول الاطراد

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$

يبيّن الجدول السابق أنّ القيمة $f(-3)=22$ هي قيمة كبرى محلياً للتابع f يبلغها عند النقطة -3 وأنّ القيمة $f(0)=0$ هي قيمة صغرى محلياً يبلغها عند النقطة 0.

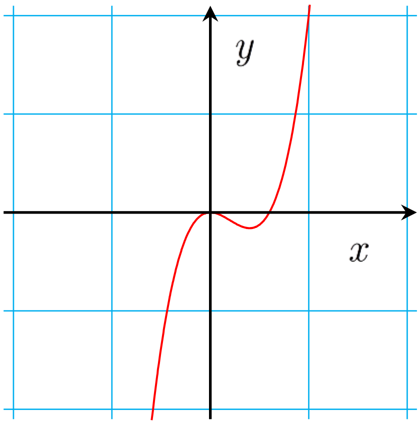
③ $\quad f(x) = 5x^3 - 3x^2, \qquad I = \mathbb{R}$

التابع f تابعٌ كثير الحدود فهو اشتقاقي على $\mathbb{R}$. وأيّاً كانت قيمة x من $\mathbb{R}$ كان $f'(x) = 15x^2 - 6x$ إذن ينعدم f' عند $x = \dfrac{2}{5}$ و $x=0$.

نستنتج من ذلك إشارة التابع المشتق f' كما في الجدول الآتي

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$f\left(\frac{2}{5}\right)$	$\nearrow$	

- $f'(x)>0$ على المجال $]-\infty,0[$ ، إذن f متزايدٌ تماماً على المجال $]-\infty,0]$.
- $f'(x)<0$ على المجال $]0,1[$ إذن f متناقصٌ تماماً على المجال $[0,1]$.
- $f'(x)>0$ على المجال $]1,+\infty[$ و $f'(1)=0$ إذن f متزايدٌ تماماً على المجال $[1,+\infty[$.



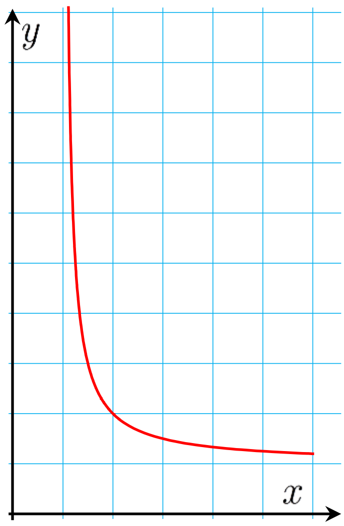
لنعرض إذن هذه النتائج في جدول الاطراد

يبيّن الجدول السابق أنّ القيمة $f(0)=0$ هي قيمة كبرى محلياً للتابع f يبلغها عند النقطة 0 وأنّ القيمة $f(1)=-1$ هي قيمة صغرى محلياً يبلغها عند النقطة 1.

④ $f(x)=\dfrac{x}{x-1}, \quad I=]1,+\infty[$

التابع f تابعٌ كسري فهو اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وبالتالي اشتقاقي على $]1,+\infty[$. وأيّاً كانت قيمة x من $\mathbb{R}$ كان $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}<0$ إذن f' لا ينعدم على $]1,+\infty[$.

نستنتج من ذلك إشارة التابع المشتق f' سالبة دوماً وهكذا يمكننا أن نستنتج ما يأتي



- $f'(x)<0$ على المجال $]1,+\infty[$ إذن f متناقصٌ تماماً على المجال $]1,+\infty[$.

لنعرض إذن هذه النتائج في جدول الاطراد

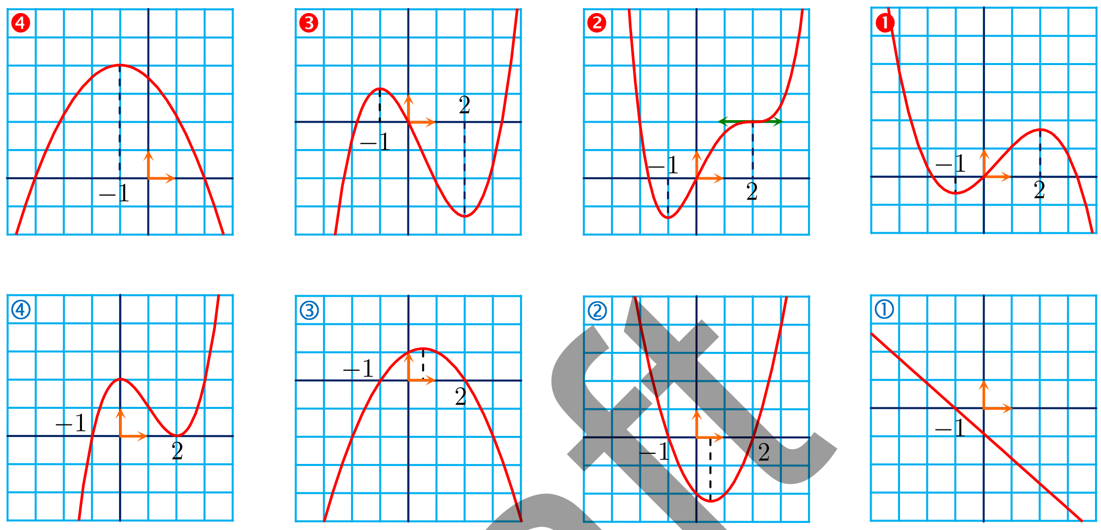
x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$	

يبيّن الجدول السابق التابع لا يملك قيم صغرى أو كبرى

❸ تمثّل الخطوط البيانيّة ❶,❷,❸,❹ أربعة توابع وتمثّل الخطوط البيانيّة ①,②,③,④ مشتقّات هذه التوابع ولكن بترتيب مختلف. اقرن الخطّ البياني لكلّ تابع بالخط البياني لمشتقّه.

الحل

❹,① ❸,② ❷,④ ❶,③



تَدرَّبْ صفحة 85

❶ ليكن f التابع المعرّف بالعلاقة $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2-1$. أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً في المجال $[2,3]$.

الحل

التابع f هو تابع كثير الحدود، فهو اشتقاقيّ على $\mathbb{R}$، ومشتقه هو $f'(x)=x(x^2-4)$. لندرس إذن إشارته ولنلخص هذه الدراسة في جدول كما يأتي :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-5	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	

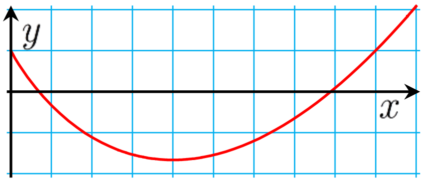
وعليه، فالتابع f متزايد تماماً في المجال $[2,3]$، والعددان $f(2)=-5<0$ و $f(3)=\frac{5}{4}>0$ متعاكسان بالإشارة، إذن، اعتماداً على المبرهنة 2، تقبل المعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً x_0 في المجال $[2,3]$.

❷ ليكن f التابع المعرّف بالعلاقة $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2x+1$. أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $[0,1]$، وحلاً وحيداً في المجال $[7,8]$.

الحل

التابع f اشتقاقيّ على $]0,\infty[$، ومشتقه هو $f'(x)=\sqrt{x}-2$. لندرس إذن إشارته ولنلخص هذه الدراسة في جدول كما يأتي :

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\nearrow$	



وعليه، فالتابع f متناقص تماماً في المجال $[0,+4]$ واشتقاقي عليه فهو متناقص تماماً في المجال $[0,+1]$، والعددان $f(0)=+1$ و $f(1)=-\frac{1}{3}$ متعاكسان بالإشارة، إذن، اعتماداً على المبرهنة 2، تقبل المعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً x_0 في المجال $[0,+1]$.

وكذلك فالتابع f متزايد تماماً في المجال $[7,8]$ واشتقاقي عليه ، والعددان $f(7)=\frac{14\sqrt{7}}{3}-13\simeq-0.65<0$ و $f(8)=\frac{32\sqrt{2}}{3}-15\simeq0.0849>0$ متعاكسان بالإشارة، إذن، اعتماداً على المبرهنة 2، تقبل المعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً x_0 في المجال $[7,8]$.

تمرينات ومسائل 92

1 ادرس جهة اطراد التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ في كلٍّ من الحالات الآتية.

① $f(x)=x^2-4x+1$ ② $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x+2$

③ $f(x)=-x^3+3x^2+9x-4$ ④ $f(x)=x^3-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$

⑤ $f(x)=-x^3+3x^2-4$ ⑥ $f(x)=-x^4-4x^2+5$

⑦ $f(x)=2x^4-3x^3+\frac{x^2}{2}+3$ ⑧ $f(x)=2x^4-27x+7$

الحل

① $f(x)=x^2-4x+1$

التابع f تابعٌ كثير الحدود فهو اشتقاقي على $\mathbb{R}$. وأيّاً كانت قيمة x من $\mathbb{R}$ كان $f'(x)=2(x-2)$

إذن ينعدم f' عند $x=2$.

نستنتج من ذلك إشارة التابع المشتق f' كما في الجدول الآتي

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-3	$\nearrow$	

نستنتج ما يأتي

- $f'(x)>0$ على المجال $]2,+\infty[$ إذن f متزايدٌ تماماً على المجال $[2,+\infty[$.
- $f'(x)<0$ على المجال $]-\infty,2[$ إذن f متناقصٌ تماماً على المجال $]-\infty,2]$.

كما يبيّن الجدول السابق أنّ القيمة $f(2)=-3$ هي قيمة صغرى محلياً للتابع بل وإنها أصغر قيم التابع f يبلغها عند النقطة 2

2 عيِّن مجموعة تعريف كلٍّ من التوابع f الآتية ثُمّ ادرس اطراد كل منها.

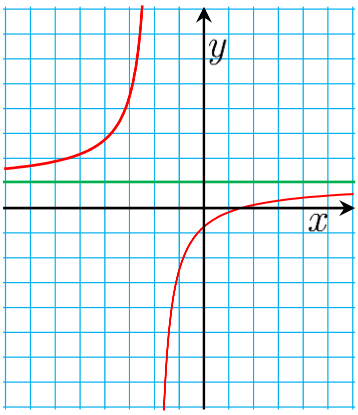
① $f(x)=\frac{2x-3}{2x+4}$ ② $f(x)=\frac{-4}{x-3}$

③ $f(x)=\frac{-3x}{1+x^2}$ ④ $f(x)=2x+1-\frac{2}{x-3}$

⑤ $f(x)=1-x-\frac{1}{x-1}$ ⑥ $f(x)=\frac{2x^2-4x+4}{x^2-2x+6}$

⑦ $f(x)=\frac{2x^2+12x}{x^2+4}$ ⑧ $f(x)=\frac{-2x^2+3x+2}{2x-1}$

الحل



① $f(x)=\dfrac{2x-3}{2x+4}$

التابع f تابعٌ كسري فهو معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. وأيّاً كانت قيمة x من $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ كان

$$f'(x)=\frac{7}{2(x+2)^2}>0$$

إذن f' لا ينعدم على $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

كما أن إشارة التابع المشتق f' موجب دوماً على $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

وهكذا يمكننا أن نستنتج أن f متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

3 ادرس جهة اطراد التابع f المعرّف على المجال I في كلٍّ من الحالات الآتية.

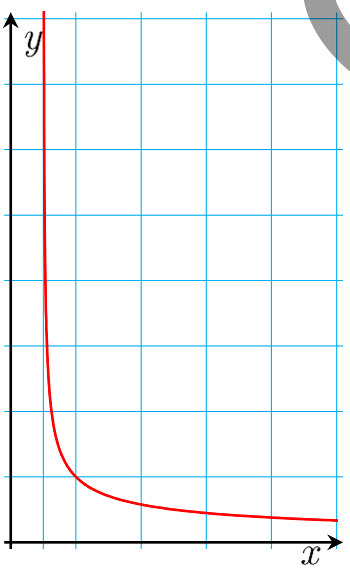
① $f(x)=\sqrt{3x+4}$, $\quad I=\left[-\frac{4}{3},+\infty\right[$

② $f(x)=4\sqrt{-3x+5}$, $\quad I=\left]-\infty,\frac{5}{3}\right[$

③ $f(x)=x\sqrt{x+3}$, $\quad I=\left[-3,+\infty\right[$

④ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$, $\quad I=\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$

الحل



④ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$

التابع f تركيب تابعيْن

$x\mapsto\sqrt{2x-3}$ ثم $x\mapsto\dfrac{1}{x}$

فهو معرف واشتقاقي على $\left]\dfrac{3}{2},+\infty\right[$. وأيّاً كانت قيمة x من $\left]\dfrac{3}{2},+\infty\right[$ كان

$$f'(x)=-\frac{1}{(2x-3)^{3/2}}<0$$

إذن f' لا ينعدم على $\left]\dfrac{3}{2},+\infty\right[$.

كما أن إشارة التابع المشتق f' سالب دوماً على $\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$ وهكذا يمكننا أن نستنتج أن f متناقص تماماً على $\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$.

4 1 تيقَّن أنّه مهما تكن x من $\mathbb{R}$ يكن

$$4x^3-28x-24= \ x+1 \ \ 4x^2-4x-24$$

.2 ادرس جهة اطراد التابع f المعرّف على   بالعلاقة الآتية.

$$f(x)=x^4-14x^2-24x+10$$

.3 أوجد القيم الحدية محليّاً للتابع f في حال وجودها.

الحل

.1 بإجراء عملية القسمة نجد:

$$(x+1)(4x^2-4x-24)$$

$$\begin{array}{r|l} & 4x^2-4x-24 \\ \hline x+1 & 4x^3-28x-24 \\ & 4x^3+4x^2 \\ \hline & 0\ -4x^2-28x-24 \\ & -4x^2-4x \\ \hline & 0\ -24x-24 \\ & -24x-24 \\ \hline & 0 \end{array}$$

.2 التابع f تابعٌ كثير الحدود فهو اشتقاقي على $\mathbb{R}$.

وأيّاً كانت قيمة x من $\mathbb{R}$ كان

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3-28x-24=(x+1)(4x^2-4x-24) \\ &= 4 \ \ x+1 \ \ \ x-3 \ \ \ x+2 \end{aligned}$$

إذن ينعدم f' عند $x=-2$ و$x=-1$ و $x=3$.

نستنتج من ذلك إشارة التابع المشتق f' كما في الجدول الآتي

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

وهكذا يمكننا أن نستنتج ما يأتي

- $f'(x)<0$ على المجال $]-\infty,-2[$ إذن f متناقصٌ تماماً على المجال $]-\infty,-2[$.
- $f'(x)>0$ على المجال $]-1,+\infty[$ و $f'(-1)=0$ إذن f متزايدٌ تماماً على المجال $[2,+\infty[$
- $f'(x)<0$ على المجال $]-1,3[$ إذن f متناقصٌ تماماً على المجال $]-1,3[$.

- $f'(x) > 0$ على المجال $]3,+\infty[$ و $f'(3)=0$ إذن f متزايدٌ تماماً على المجال $[3,+\infty[$.

لنعرض إذن هذه النتائج في جدول الاطراد

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
P'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
P		$\searrow$	18	$\nearrow$	21	$\searrow$	-107	$\nearrow$	

يبيّن الجدول السابق أنّ القيمة $f(-2)=18$ هي قيمة صغرى محلياً للتابع.
و أنّ القيمة $f(-1)=21$ هي قيمة كبرى محلياً للتابع. و القيمة $f(3)=-107$ هي قيمة صغرى محلياً للتابع. بل وإنها أصغر قيم التابع f يبلغها عند النقطة 3.

5 ليكن f التابع المعرّف بالعلاقة $f(x)=x^3-3x^2+4x-1$. أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً في المجال $0,1$.

الحل

التابع f هو تابع كثير الحدود، فهو اشتقاقيّ على $\mathbb{R}$،
ومشتقه هو $f'(x)=3x^2-6x+4$. لندرس إذن إشارة ثلاثي الحدود ولنلخص هذه الدراسة في جدول كما يأتي :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	

وعليه، فالتابع f متزايد تماماً في المجال $[0,+1]$، والعددان $f(0)=-1<0$ و $f(1)=1>0$ متعاكسان بالإشارة، إذن، اعتماداً على المبرهنة 2، تقبل المعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً x_0 في المجال $[0,+1]$.

لنتعلّم البحث معاً

6 مقارنة توابع.

التابعان f و g معرّفان على $\mathbb{R}$ بالعلاقتين
$f(x)=x^4-3x+1$ و $g(x)=2x^3-3x-1$. قارن بين التابعين f و g.

الحل

لنعرف التابع d وفق العلاقة التالية:

$$d(x)=f(x)-g(x)=x^4-3x+1-(2x^3-3x-1)=x^4-2x^3+2$$

التابع d تابعٌ كثير الحدود فهو اشتقاقي على $\mathbb{R}$. وأيّاً كانت قيمة x من $\mathbb{R}$ كان

$$d'(x)=2x^2(2x-3)$$

إذن ينعدم f' عند $x=\frac{3}{2}$ و $x=0$.

وهكذا يمكننا أن نستنتج ما يأتي

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$d'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$d(x)$		$\searrow$			$d\left(\frac{3}{2}\right)$	$\nearrow$	

- $d'(x)\le 0$ على المجال $]-\infty,\frac{3}{2}[$ إذن d متناقصٌ تماماً على المجال $]-\infty,\frac{3}{2}]$.
- $d'(x)>0$ على المجال $]\frac{3}{2},+\infty[$ و $d'\left(\frac{3}{2}\right)=0$ إذن d متزايدٌ تماماً على المجال $[\frac{3}{2},+\infty[$.

لنعرض إذن هذه النتائج في جدول الاطراد

يبيّن الجدول السابق أنّ القيمة $d\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{16}>0$ هي قيمة صغرى للتابع d يبلغها عند النقطة $\frac{3}{2}$.

ومنه نستنتج أنّ $d(x)\ge d\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{16}>0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$

وبالتالي $f(x)-g(x)>0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ أي $f(x)>g(x)$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$

7 إثبات صحّة متراجحة.

أثبت أنّه مهما يكن العددان الحقيقيّان الموجبان تماماً a و b يكن

$$\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\ge 2\sqrt{2}\ .$$

الحل

لنعرف التابع f كمايلي $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}:x\to\sqrt{a+x}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

بما أن التابع $x\to\sqrt{a+x}$ اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$ والتابع $x\to\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$ فإن التابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$ وتابعه المشتق هو:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{a+x}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)-\frac{\sqrt{a+x}}{2x\sqrt{x}}$$

المتراجحة $f'(x)\geq 0$ تكافئ: $\dfrac{\sqrt{a+x}}{2x\sqrt{x}}\geq\dfrac{1}{2\sqrt{a+x}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

وبالإصلاح نجد $x\sqrt{x}\geq a\sqrt{a}$

– لنعرف التابع h كما يلي $h:\mathbb{R}^{+}\rightarrow\mathbb{R}:x\rightarrow x\sqrt{x}$

نجد أن h اشتقاقي على المجال $[0,+\infty[$ وتابعة المشتق هو $h'(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}\geq 0$

نلاحظ أن $h'(x)>0$ عند $]0,+\infty[$ وَ وبالتالي h متزايد تماماً على $[0,+\infty[$ وبالتالي أياً كانت x,v,u من $[0,+\infty[$ فإن $u<v$ تكافئ $f(u)<f(v)$ والمعادلة $f(u)=f(v)$ تكافئ $u=v$

وبالتالي المتراجحة $x\sqrt{x}>a\sqrt{a}$ تكافئ $x>a$

والمعادلة $x\sqrt{x}=a\sqrt{a}$ تكافئ $x=a$ إذن ينعدم التابع $f'(x)$ عندما $x=a$

وبالتالي المتراجحة $f'(x)>0$ تكافئ $x>a$ ومنه فإن f متزايد تماماً على المجال $]a,+\infty[$

وبالتالي المتراجحة $f'(x)<0$ تكافئ $x<a$ ومنه فإن f متناقص تماماً على المجال $]0,a[$

لنلخص العمل السابق في الجدول التالي

x	0		a		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	

ومن الجدول نجد أن $f(x)=\sqrt{2a}\,\dfrac{1}{\sqrt{a}}=2\sqrt{2}$ قيمة محلية صغرى للتابع f بل هي أصغر قيم التابع f عندما $x=a$ وبالتالي $f(x)\geq 2\sqrt{2}$ من أجل كل $x>0$

8 الحجم الأمثل.

نذكّر أنّ طول مولّد مخروط دوراني يساوي بُعد رأسه عن أيّة نقطة من دائرة قاعدته. عيّن المخروط الدوراني الذي طول مولّده يساوي $30\,\text{cm}$ وحجمه أكبر ما يمكن.

الحل

نعلم أنّ حجم هذا المخروط يساوي $V=\dfrac{\pi}{3}r^{2}h$.

حسب مبرهنة فيثاغورث نجد $(*)$ $r^{2}+h^{2}=900$ ومنه $r^{2}=900-h^{2}$ نعوض في علاقة الحجم فنجد

أنّ عبارة V بدلالة h هي $V(h)=\dfrac{\pi}{3}(900h-h^{3})$ و h تنتمي إلى المجال $]0,30[$.

التابع V تابعٌ كثير الحدود فهو اشتقاقي على $\mathbb{R}$. وأيّاً كانت قيمة h من $\mathbb{R}$ كان

$$V'(h)=\pi(300-h^{2})$$

إذن ينعدم V' عند $h=-10\sqrt{3}$ لا ينتمي إلى مجموعة التعريف و $h=10\sqrt{3}$.

نستنتج من ذلك إشارة التابع المشتق V' كما في الجدول الآتي

h	0		$10\sqrt{3}$		30
$V'(h)$		$+$	0	$-$	

وهكذا يمكننا أن نستنتج ما يأتي

- $V'(h) > 0$ على المجال $]0,10\sqrt{3}[$ و $V'(10\sqrt{3}) = 0$ إذن f متزايدٌ تماماً على المجال $[0,10\sqrt{3}[$.
- $V'(h) < 0$ على المجال $]10\sqrt{3},30[$ إذن f متناقصٌ تماماً على المجال $]10\sqrt{3},30[$.

لنعرض إذن هذه النتائج في جدول الاطراد

x	0		$10\sqrt{3}$		30
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	$V(10\sqrt{3})$	$\searrow$	

يبيّن الجدول السابق أنّ القيمة $V(10\sqrt{3}) = 2000\sqrt{3}\pi$ هي قيمة كبرى محلياً للتابع f يبلغها عند النقطة $10\sqrt{3}$.

9 أقرب نقطة.

نتأمّل في مستوٍ منسوب إلى مَعْلَم متجانس $O,\vec{i},\vec{j}$ ، القطع المكافئ $\mathcal{P}$ الذي معادلته $y = 1 - x^2$، والنقطة A التي إحداثيّتاها $0,-2$.

عيّن النقاط M من القطع $\mathcal{P}$ الأقرب إلى A.

الحل

نفترض M نقطة ما من القطع $\mathcal{P}$ فتكون $M(x,1-x^2)$. نبحث عن النقطة M التي يكون من أجلها الطول التالي $AM = \sqrt{x^2 + (3-x^2)^2} = \sqrt{x^4 - 5x^2 + 9}$ أصغرياً . وبما أن AM هو طول فهو موجب لذلك يكون أصغرياً عندما مربعه AM^2 أصغرياً ، لذلك نعرف التابع $P : x \to x^4 - 5x^2 + 9$ حيث $D_P = \mathbb{R}$

التابع P اشتقاقي على $\mathbb{R}$ (لأنه تابع كثير حدود) ومشتقه هو $P' : x \to 4x^3 - 10x$

ينعدم التابع P' عندما $x \in \left\{-\dfrac{\sqrt{10}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{10}}{2}\right\}$ ولدينا $P\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right) = P\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right) = \dfrac{11}{4}$ كماأن $P(0) = 9$ ومنه نستنتج أن لـ P جدول الاطراد التالي :

x	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$		0		$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$		$+\infty$
P'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
P		$\searrow$	$\dfrac{11}{4}$	$\nearrow$	9	$\searrow$	$\dfrac{11}{4}$	$\nearrow$	

من الجدول نجد أن أصغر قيم التابع P هو $\frac{11}{4}$ وتوافق $x=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$ وبالتالي فإن :

$$P(x)\geq P\left(\pm\frac{\sqrt{10}}{2}\right)=\frac{11}{4}$$

وبما أن $P(x)>0$ وَ $P\left(\pm\frac{\sqrt{10}}{2}\right)>0$ فإننا نجذر الطرفين ونجد:

$\sqrt{P(x)}\geq\sqrt{P\left(\pm\frac{\sqrt{10}}{2}\right)}$ ومنه $AM\geq\sqrt{\frac{11}{4}}$ أي أن $AM\geq\frac{\sqrt{11}}{2}$ وبالتالي تكون المسافة AM

أصغر ما يمكن وقيمتها $\frac{\sqrt{11}}{2}$ عندما $x\in\left\{-\frac{\sqrt{10}}{2},+\frac{\sqrt{10}}{2}\right\}$

عندما $x=-\frac{\sqrt{10}}{2}$ نجد أن $y=1-\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2=1-\frac{10}{4}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$

و عندما $x=+\frac{\sqrt{10}}{2}$ نجد أن $y=1-\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2=-\frac{3}{2}$

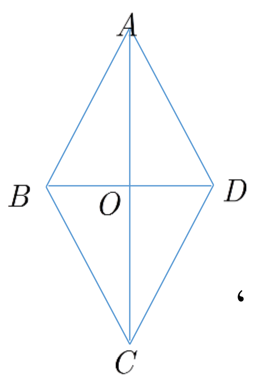
إذن النقطتان من القطع $\mathcal{P}$ الأقرب إلى $A(0,-2)$ هما $M_1\left(-\frac{\sqrt{10}}{2},-\frac{3}{2}\right)$ وَ $M_2\left(\frac{\sqrt{10}}{2},-\frac{3}{2}\right)$

10 أكبر مساحة.

أثبت أنّ المربّع الذي محيطه P، هو أكبر المعينات التي محيطها P مساحةً.

الحل

نبحث عن معين محيطه p وبحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن. نعلم أن طول ضلع هذا المعين هو $a=\frac{p}{4}$ وبما أن مساحته هي $S=\frac{AC\times BD}{2}$ لذلك فمن المناسب لنا أن نفترض $AC=x$ وَ $BD=y$ فتكون $S=\frac{1}{2}xy$.



وحسب فيثاغورث في المثلث القائم $\triangle AOB$ نجد أن $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=\frac{p^2}{16}$ ومنه

$x^2+y^2=\frac{p^2}{4}$ ومنه $x^2+y^2=4a^2$ ومنه $y=\sqrt{4a^2-x^2}$ وبالتالي

$$S(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{4a^2-x^2}\;;\quad x\in\left]0,2a\right[$$

ونعلم أن : $S>0$ وبالتالي فإن S يكون أعظمياً عندما يكون مربعه S^2 أعظمياً ،

لندرس اطراد التابع $f(x)=S^2(x)=\dfrac{x^2}{4}(4a^2-x^2)$ على $]0,2a[$

وبكتابة $f(x)$ بالشكل $f(x)=a^2x^2-\dfrac{1}{4}x^4$ نجد أن f تابع كثير حدود فهو اشتقاقي على $]0,2a[$

ومشتقه هو $f'(x)=2a^2x-x^3=x(2a^2-x^2)$

وبالتالي ينعدم $f'(x)$ في المجال $]0,2a[$ عندما $x=\sqrt{2}a$ وبما أن $f(\sqrt{2}a)=a^4$ فإن للتابع f

جدول الاطراد التالي :

x	0		$\sqrt{2}a$		$2a$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$		$\nearrow$	a^4	$\searrow$	9

نستنتج أن $f(\sqrt{2}a)=a^4$ هي أكبر قيم التابع f على $]0,2a[$ ويبلغها عند $x=\sqrt{2}a$ وبالتالي فإن أكبر قيم التابع S هي $S(\sqrt{2}a)=a^2$ ويبلغها عندما $x=\sqrt{2}a$ وعندها يكون $y=\sqrt{2}a$ وبالتالي فإن قطرا هذا المعين متساويان فهو مربع وطول ضلعه a إذن المربع الذي محيطه هو أكبر المعينات التي محيطها p مساحةً.

طريقة ثانية:

$$S=AB\cdot AD\cdot\sin(\theta)\qquad ;\ \theta\in\left]0,\pi\right[$$
$$=\frac{p}{4}\cdot\frac{p}{4}\cdot\sin(\theta)=\frac{p^2}{16}\cdot\sin(\theta)$$

يكون أعظمياً عندما $\sin(\theta)=1$ أي $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ والمعين يكون مربع.

11 اطراد تابع مثلّثي.

ليكن التابع f المعرّف على $0,\pi$ بالعلاقة $f(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. ادرس اطراد التابع f.

الحل

لدينا $f(x)=u\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ حيث $u:x\mapsto\cos x$ وبما أن التابع u اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه هو $u':x\mapsto-\sin x$ فإن التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ فهو بالتالي اشتقاقي على $[0,\pi]$ وتابعه المشتق هو $f':x\mapsto-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ لنضع $X=x+\dfrac{\pi}{4}$ ولما كان $x\in[0,\pi]$ فإن $X\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right]$ ندرس إشارة التابع $x\mapsto\sin X$ على المجال $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right]$ ولذلك نستخدم منحنى التابع $\sin$ التالي:

إذن: عندما $X \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right[$ فإن: $\sin X \in]0,1]$ أي أن : $\sin X > 0$

عندما $X = \pi$ فإن: $\sin X = \sin \pi = 0$

عندما $X \in \left]\pi, \frac{5\pi}{4}\right]$ فإن: $\sin X \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right[$ أي أن : $\sin X < 0$

نستنتج من ذلك أنه:

عندما $X \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right[$ فإن: $x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right[$ وعندها يكون $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) > 0$: وينعدم $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ عندما $x = \frac{3\pi}{4}$ لأن ذلك يوافق $X = \pi$.

و عندما $X \in \left]\pi, \frac{5\pi}{4}\right]$ فإن $x \in \left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ وعندها يكون $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) < 0$ وبما أن إشارة $f'(x)$ تعاكس إشارة $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ نستنتج جدول الاطراد التالي للتابع f

وبما أن $f(\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$, $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، فالجدول يصبح:

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

قُدُماً إلى الأمام

12 ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{10}{3}$.

1. ادرس اطراد التابع f.
2. استنتج اطراد التابع $g : x \mapsto |f(x)|$.

الحل

1. التابع f تابعٌ كثير الحدود فهو اشتقاقي على $\mathbb{R}$. وأيّاً كانت قيمة x من $\mathbb{R}$ كان

$$f'(x) = x^2 - x - 2$$

إذن ينعدم f' عند $x = 2$ و $x = -1$.

نستنتج من ذلك إشارة التابع المشتق f' كما في الجدول الآتي

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

وهكذا يمكننا أن نستنتج ما يأتي

- $f'(x)>0$ على المجال $]-\infty,-1[$ و $f'(-1)=0$ إذن f متزايدٌ تماماً على المجال $]-\infty,-1[$.
- $f'(x)<0$ على المجال $]-1,2[$ إذن f متناقصٌ تماماً على المجال $]-1,2[$.
- $f'(x)>0$ على المجال $]2,+\infty[$ و $f'(1)=0$ إذن f متزايدٌ تماماً على المجال $]2,+\infty[$.

لنعرض إذن هذه النتائج في جدول الاطراد

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	

يبيّن الجدول السابق أنّ القيمة $f(-1)=\dfrac{9}{2}$ هي قيمة كبرى محلياً للتابع f يبلغها عند النقطة -1 وأنّ القيمة $f(2)=0$ هي قيمة صغرى محلياً يبلغها عند النقطة 2.

.2 نستنتج كما علمنا سابقاً أن جذور المعادلة $f(x)=0$ هي $x=2$ و $x=\dfrac{-5}{2}$ ، والآن نعلم $g(x)=f(x)$ عندما $f(x)\geq 0$ أي $x\in[-\dfrac{5}{2},\infty[$. وبالتالي للتابعين نفس جهة الاطراد وكذلك $g(x)=-f(x)$ عندما $f(x)\leq 0$ أي $x\in[-\infty,\dfrac{5}{2}[$ وبالتالي جهة اطراد g عكس جهة اطراد f حسب المبرهنة 2 في الوحدة الأولى.

وهكذا تكون جهة الاطراد

x	$-\infty$		$-\dfrac{5}{2}$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g\left(-\dfrac{5}{2}\right)$	$\nearrow$	$g(-1)$	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$	

13 نتأمّل تابعاً f يُحقّق الخواص الآتية.

- مجموعة تعريف f هي $D=[-2,-1[\cup]-1,+\infty[$.
- f يقبل الاشتقاق على D.
- f' ينعدم في D فقط عند -2 وعند 0.
- $f'(x)>0$ على $]0,+\infty[$ و $f'(x)<0$ على $]-2,-1[\cup]-1,0[$.

1. a. ادرس اطراد التابع f.

b. قارن في حالة $-1 < a < b < 0$ بين $f(a)$ و $f(b)$.

c. بافتراض أنّ $-1 < a < b < 2$. أيمكنك المقارنة بين $f(a)$ و $f(b)$؟

d. بافتراض أنّ $a = -2$ و $b = 0$. أيمكنك المقارنة بين $f(a)$ و $f(b)$؟

2. نعلم إضافة إلى ما سبق أنّ f يُكتب بالشكل $x \mapsto \dfrac{x^2 + mx + n}{x + p}$ و m و n و p أعداد حقيقيّة و $p \neq 0$. عيّن تابعاً f يُحقّق الشروط المذكورة.

الحل

1.

a. نستنتج من الفرض أن إشارة التابع المشتق f' كما في الجدول الآتي

x	-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

وهكذا يمكننا أن نستنتج ما يأتي

- $f'(x) > 0$ على المجال $]-2,-1[$ و $f'(-2) = 0$ إذن f متناقصٌ تماماً على المجال $[-2,-1[$
- $f'(x) < 0$ على المجال $]-1,0[$ إذن f تماماً متناقصٌ على المجال $]-1,0[$.
- $f'(x) > 0$ على المجال $]0,+\infty[$ و $f'(0) = 0$ إذن f متزايدٌ تماماً على المجال $[0,+\infty[$.

لنعرض إذن هذه النتائج في جدول الاطراد

x	-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-2)$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	

يبيّن الجدول السابق أنّ القيمة $f(-2)$ هي قيمة كبرى محلياً للتابع f يبلغها عند النقطة -2 وأنّ القيمة $f(0)$ هي قيمة صغرى محلياً يبلغها عند النقطة 0.

b. بما أن f تماماً متناقصٌ على المجال $]-1,0[$ و $-1 < a < b < 0$ فإن $f(b) < f(a)$.

c. عندما $-1 < a < b < 2$. لا يمكننا المقارنة بين $f(a)$ و $f(b)$ لأنّ f غير مطرد على المجال $]-1,2[$.

d. عندما $a = -2$ و $b = 0$. لا يمكننا المقارنة بين $f(a)$ و $f(b)$ لأنّ f غير مطرد على $D_1 = [-2,-1[\cup]-1,0]$ رغم أن إشارته ثابتة عليه.

2. بما أن التابع $x \mapsto \dfrac{x^2 + mx + n}{x + p}$ معرف على $\mathbb{R} \setminus \{-p\}$ وبالتالي فإن التابع f المطلوب يوافق $-p = -1$ ومنه $p = 1$.

التابع اشتقاقي على D ومشتقه بعد الإصلاح $f'(x)=\dfrac{x^2+2x+m-n}{(x+1)^2}$

ومن الفرض $f'(0)=0$ ومنه $m=n$

وكذلك $f'(-2)=0$ ومنه $m=n$

بالتالي يمكننا اختيار أي تابع $f(x)=\dfrac{x^2+mx+n}{x+p}$ حيث $m=n$ و $p=1$.

مثل $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ أو $f(x)=\dfrac{x^2-2x-2}{x+1}$

14 ليكن b عدداً حقيقياً. والتابع f هو التابع الكسري المعطى بالعلاقة $f(x)=\dfrac{x^2+bx+1}{x^2+x+1}$. عيّن مجموعة تعريف f، ثُمّ ادرس اطراد التابع f تبعاً لقيم b.

الحل

f تابع كسري مقامه غير معدوم وبالتالي معرف على $\mathbb{R}$. وأيّاً كانت قيمة x من $\mathbb{R}$ كان $f'(x)=-\dfrac{(b-1)(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2}$ إذن ينعدم f' عند $x=1$ وعندما $x=-1$.

نستنتج من ذلك إشارة التابع المشتق f'

أولاً عندما $b<1$ نجد كما في الجدول الآتي

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

وهكذا يمكننا أن نستنتج ما يأتي

- $f'(x)>0$ على المجال $]-\infty,-1[$ و $f'(-1)=0$ إذن f متزايدٌ تماماً على المجال $]-\infty,-1[$.
- $f'(x)<0$ على المجال $]-1,1[$ إذن f متناقصٌ تماماً على المجال $]-1,1[$.
- $f'(x)>0$ على المجال $]1,\infty[$ و $f'(1)=0$ إذن f متزايدٌ تماماً على المجال $]1,\infty[$.

لنعرض إذن هذه النتائج في جدول الاطراد

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	

يبيّن الجدول السابق أنّ القيمة $f(-1)=2-b$ هي قيمة كبرى محلياً للتابع f يبلغها عند النقطة -1

وأنّ القيمة، $f(1)=\dfrac{b+2}{3}$ هي قيمة صغرى محلياً للتابع f يبلغها عند النقطة 1

ثانياً: عندما $b>1$ نجد:

كما في الجدول الآتي

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

وهكذا يمكننا أن نستنتج ما يأتي

- $f'(x)<0$ على المجال $]-\infty,-1[$ و $f'(-1)=0$ إذن f متناقص تماماً على المجال $]-\infty,-1[$.
- $f'(x)>0$ على المجال $]-1,1[$ إذن f متزايد تماماً على المجال $]-1,1[$.
- $f'(x)<0$ على المجال $]1,\infty[$ و $f'(1)=0$ إذن f متناقص تماماً على المجال $]1,\infty[$.

لنعرض إذن هذه النتائج في جدول الاطراد

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	

يبيّن الجدول السابق أنّ القيمة $f(-1)=2-b$ هي قيمة صغرى محلياً للتابع f يبلغها عند النقطة -1

وأنّ القيمة $f(1)=\frac{b+2}{3}$ هي قيمة كبرى محلياً للتابع f يبلغها عند النقطة 1

15 ليكن m عدداً حقيقياً.والتابع f هو التابع الكسري المعطى بالعلاقة $f(x)=\frac{x^2+mx-2}{x-m}$. عيّن مجموعة تعريف f، ثُمّ ادرس اطراد التابع f تبعاً لقيم m.

الحل

التابع f معرف على $D=\mathbb{R}\setminus m$

التابع f اشتقاقي على D وتابعه المشتق هو $f'(x)=\frac{x^2-2mx-m^2+2}{x-m^{\;2}}$ وبما أن المقام موجب فإن

إشارة f' من إشارة البسط.

إن المعادلة $f'(x)=0$ تقتضي أن $x^2-2mx-m^2+2=0$ ومميز هذه المعادلة هو $\Delta=8(m^2-1)$ ونلاحظ الحالات التالية:

1. عندما $m\in\left[-1,1\right]$ فإن $\Delta\le 0$ ويكون $f'(x)>0$ من أجل $x\in D$ وبالتالي فإن التابع f متزايد تماماً على D في هذه الحالة.

(لاحظ أنه عندما $m=\pm 1$ فإن $\Delta=0$ مع ذلك فإن المعادلة $f'(x)=0$ ليست قابلة للحل في D)

2. عندما $m\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ فإن $\Delta>0$ وعندها ينعدم التابع $f'(x)$ عندما

$$m\in\ m_2=m-\sqrt{2m^2-2}, m_1=m+\sqrt{2m^2-2}$$

وعندما $x \in \left]m_1, m_2\right[$ فإنه $f'(x) < 0$ وعندما $x \in]-\infty, \mathrm{m}_1[\cup]\mathrm{m}_2, +\infty[$ فإن $f'(x) > 0$
وبذلك نجد أن التابع f متزايد تماماً على كل من المجالين $]-\infty, \mathrm{m}_1]$ وَ $[\mathrm{m}_2, +\infty[$ كل على حدته
والتابع f متناقص تماماً على $[m_1, m_2]$.

16 في الحالات الآتية، ادرس اطراد التابع f على المجال المعطى.

① $I = [0, \pi],\qquad f(x) = \cos\ 2x$

② $I = \left]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right[,\qquad f(x) = \dfrac{1}{1 + 2\cos x}$

③ $I = [0, 2\pi],\qquad f(x) = \dfrac{x}{2} + \cos x$

④ $I = \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right],\qquad f(x) = \sin\left(-2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

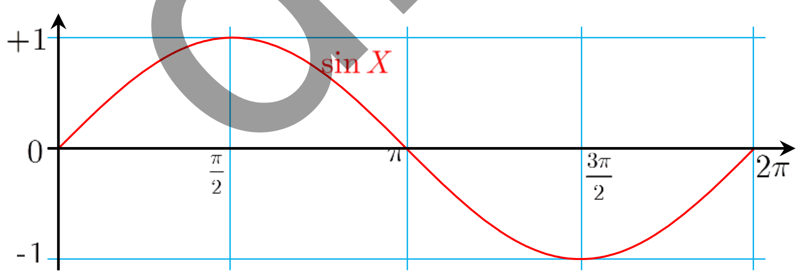
⑤ $I = [0, \pi],\qquad f(x) = \cos x + \dfrac{1}{2}\cos\ 2x$

الحل

$f : x \mapsto \cos(2x); I = [0, \pi]$

نلاحظ أن $f(x) = u(2x)$ حيث $u : x \mapsto \cos x$ وبما أن التابع u اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه هو $u' : x \mapsto -\sin x$ فإن التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ فهو بالتالي اشتقاقي على $[0, \pi]$ وتابعه المشتق هو : $f'(x) = -2\sin 2x$ ونلاحظ أن إشارة f' تعاكس إشارة $\sin 2x$.

نضع $X = 2x$ وعندها $X \in [0, 2\pi]$ فإن لذلك نستفيد من رسم خط التابع $\sin X$ التالي:



عندما $X \in]0, \pi[$ والتي تكافئ $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ فإن $\sin X > 0$ ومنه $f'(x) < 0$

عندما $X \in \ 0, \pi, 2\pi$ والتي تكافئ $x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$ فإن $\sin X = 0$ ومنه $f'(x) = 0$

عندما $X \in]\pi, 2\pi[$ والتي تكافئ $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ فإن $\sin X < 0$ ومنه $f'(x) > 0$ ومنه جدول الاطراد التالي للتابع:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

② نلاحظ أن $f(x)=u(\cos x)$ حيث: $u:x\mapsto \frac{1}{1+2x}$ وبما أن التابع u اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ ومشتقه هو $u':x\mapsto -\frac{2}{(1+2x)^2}$ فإن التابع f اشتقاقي بشرط $\cos x\neq -\frac{1}{2}$ وبالاستفادة من الخط البياني للتابع $\cos x$.

نلاحظ أن $f(x)=\frac{1}{u(x)}$ حيث $u(x)=1+2\cos x$ ونلاحظ أن التابع u اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه هو $u':x\mapsto -2\sin x$ وبالتالي فإن f اشتقاقي بشرط $u(x)\neq 0$ وهذا يكافئ $\cos x\neq -\frac{1}{2}$ وبالاستفادة من الخط البياني للتابع $\cos x$.

نجد أنه عندما $x\in\left]\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right[$ فإن $\cos x\neq -\frac{1}{2}$ إذن f اشتقاقي على $\left]\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right[$ ومشتقه هو $f'(x)=-\frac{u'(x)}{u^2(x)}=\frac{2\sin x}{(1+2\cos x)^2}$ وبما أن المقام موجب فإن إشارة f' من إشارة $\sin x$ ومن الخط البياني للتابع $\sin x$ نجد عندما $x\in\left]\frac{2\pi}{3},\pi\right[$ فإن $\sin x>0$ وَعندما $x\in\left]\pi,\frac{4\pi}{3}\right[$ فإن $\sin x<0$ وَ $\sin(\pi)=0$ ومنه جدول الاطراد التالي :

x	$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	-1	$\searrow$	

17 في الحالات الآتية، ادرس اطراد التابع f على المجال المعطى، ثمّ أوجد عددين m و M يُحقّقان $m\leq f(x)\leq M$ أيّاً كان x من I على أن يكون المجال m,M أصغر ما يمكن.

① $I=[-3,1],\quad f(x)=-x^3-2x^2+4x+3$

② $I=[0,6],\quad f(x)=2x^3-9x^2+12x+1$

③ $I=[1,4],\quad f(x)=\frac{9}{x}+x-1$

④ $I=[1,8],\quad f(x)=\frac{-x^2+3x-1}{x+1}$

⑤ $I=[-4,0],\quad f(x)=\sqrt{1-2x}$

الحل

① التابع $f : x \to -x^3 - 2x^2 + 4x + 3$ هو تابع كثير حدود فهو اشتقاقي على $\mathbb{R}$ وبالتالي يكون f اشتقاقياً على $I = [-3,1]$ وتابعه المشتق هو : $f' : x \to -3x^2 - 4x + 4$ ينعدم التابع f' عندما $x \in \left\{-2, \dfrac{2}{3}\right\}$ ولدينا $f(-3) = 0, f(-2) = -5, f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{121}{27}, f(1) = 4$ ولهذا التابع جدول الإشارة التالي للتابع f:

x	-3		-2		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$\frac{121}{27}$	$\searrow$	4

من الجدول نجد ان أكبر قيم التابع f على I هي $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{121}{27}$ وأصغر قيم التابع f على I هي $f(-2) = -5$: $f(-2) = -5$ وبالتالي فإن $-5 \leq f\ \ x\ \ \leq \dfrac{121}{27}$

⑤ التابع $f : x \mapsto \sqrt{1-2x}$ اشتقاقي على $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$ فهو اشتقاقي على $I = [-4, 0]$ وتابعه المشتق هو $f' : x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$ ونلاحظ انه أياً كان x من I فإن $f'(x) < 0$ فالتابع f متناقص تماماً على I وبالتالي يكون $f(0) = 1 \leq f(x) \leq f(-4) = 3$.

18 ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4$.

1. أثبت أنّه عندما ينتمي x إلى $\left[-1, \frac{4}{3}\right]$ ينتمي $f(x)$ إلى $4,7$.
2. هل عكس الخاصّة السابقة صحيح؟

الحل

التابع f هو تابع كثير حدود فهو اشتقاقي على $\mathbb{R}$ وتابع المشتق هو $f'(x) = -3x^2 + 4x$ ينعدم التابع f' عندما $x = 0$ وعندما $x = \dfrac{4}{3}$ ولهذا التابع جدول الإشارة التالي:

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إذن التابع f متزايد تماماً على $\left]0, \dfrac{4}{3}\right[$ وبالتالي أياً كانت x من $\left]0, \dfrac{4}{3}\right[$ فإن

$$f(0) = 4 \leq f(x) \leq f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{140}{27}$$

والتابع f متناقص تماماً $]-\infty,0]$ فهو متناقص تماماً على $[-1,0]$ وبالتالي أياً كانت x من $[-1,0]$ فإن $f(0)=4\le f(x)\le f(-1)=7$ من السابق نجد أنه أياً كانت $x\in\left[-1,\frac{4}{3}\right]$ فإن $f(x)\in[4,7]$

لكن عكس هذه الخاصة ليس صحيحاً بمعنى أنه إذا كانت $f\ \ x\ \in[4,7]$ فليس من الضروري أن يكون $x\in\left[-1,\frac{4}{3}\right]$ لأنه لدينا مثلاً $f(2)=4\in[4,7]$ بينما $2\notin\left[-1,\frac{4}{3}\right]$.

19 ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=8x^4-8x^2+1$.

أثبت أنّ $-1\le f(x)\le 1$ يُكافئ $-1\le x\le 1$.

الحل

التابع f تابعٌ كثير الحدود فهو اشتقاقي على $\mathbb{R}$. وأيّاً كانت قيمة x من $\mathbb{R}$ كان $f'(x)=16x(2x^2-1)$ إذن ينعدم f' عند $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $x=0$.

نستنتج من ذلك إشارة التابع المشتق f' كما في الجدول الآتي

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

وهكذا يمكننا أن نستنتج ما يأتي

- $f'(x)<0$ على المجال $\left]-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ إذن f متناقصٌ تماماً على المجال $\left]-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.
- $f'(x)>0$ على المجال $\left]\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right[$ و $f'\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)=0$ إذن f متزايدٌ تماماً على المجال $\left[\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right[$.
- $f'(x)<0$ على المجال $\left]0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ إذن f متناقصٌ تماماً على المجال $\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.
- $f'(x)>0$ على المجال $\left]\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right[$ و $f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$ إذن f متزايدٌ تماماً على المجال $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right[$.

لنعرض إذن هذه النتائج في جدول الاطراد

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\nearrow$	

نحل المعادلة $f(x)=1$ والتي تكافئ $8x^4-8x^2=0$ فنجد أن مجموعة حلولها هي $S=\ \ -1,0,1$ وبالتالي يصبح جدول التغيرات كمايلي :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$		$-$		$+$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\nearrow$	

ومن الجدول نجد أن :

بما أن f متزايد تماماً على $]1,+\infty[$ فأيّاً كانت $x \in]1,+\infty[$ فإن $f(x) > f(1) = 1$

بما أن f متناقص تماماً على $]-\infty,-1[$ فأياً كانت $x \in]-\infty,-1[$ فإن $f(x) > f(-1) = 1$

بما أن f متناقص تماماً على $\left[-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ فأياً كانت $x \in \left[-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ فإن

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 \le f(x) \le f(-1) = 1$$

بما أن f متزايد تماماً على $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right]$ فأياً كانت $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right]$ فإن

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 \le f(x) \le f(0) = 1$$

بما أن f متناقص تماماً على $\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ فأياً كانت $x \in \left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ فإن

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 \le f(x) \le f(0) = 1$$

بما أن f متزايد تماماً على $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$ فأياً كانت $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$ فإن $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 \le f(x) \le f(1) = 1$

ومن ذلك نجد أن $-1 \le x \le 1$ تقتضي أن $-1 \le f(x) \le 1$ وأن $-1 \le f(x) \le 1$ تقتضي أن

$$x \in \left[-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right] \cup \left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right] = [-1,1]$$

بالتالي فإن $-1 \le f(x) \le 1$ تكافئ $-1 \le x \le 1$

20 أثبت أنّ للمعادلة $\frac{x^3}{1+x} = 1$ حلاً وحيداً في المجال $1,2$.

الحل

لنعرف التابع $f(x) = \frac{x^3}{1+x} - 1$

للمعادلة $\frac{x^3}{1+x} = 1$ حل وحيد تكافئ أنه للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد ، f تابع كسري، فهو معرف واشتقاقيّ على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$، ومشتقه هو $f'(x) = \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$. لندرس إذن إشارة ثلاثي الحدود ولنلخص هذه الدراسة في جدول كما يأتي :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{23}{4}$	$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$	

وعليه، فالتابع f اشتقاقياً ومتزايد تماماً في المجال $[1,2]$، والعددان $f(2)=\frac{5}{3}>0$ و $f(1)=-\frac{1}{2}<0$ متعاكسان بالإشارة، إذن، اعتماداً على المبرهنة 2، تقبل المعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً x_0 في المجال $[1,2]$، وبالتالي للمعادلة $\frac{x^3}{1+x}=1$ حل وحيد.

21 أثبت أنّ للمعادلة $\cos x=x$ حلاً وحيداً في المجال $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$.

الحل

لنعرف التابع $f(x)=x-\cos x$

قولنا للمعادلة $\cos x=x$ حل وحيد تكافئ أنه للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد

f تابع معرف واشتقاقيّ على المجال $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$، وتابعه المشتق هو $f'(x)=1+\sin x>0$.

وعليه، فالتابع f متزايد تماماً في المجال $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$، والعددان $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}>0$ و $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}<0$ متعاكسان بالإشارة، إذن، اعتماداً على المبرهنة 2، تقبل المعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً x_0 في المجال $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$، وبالتالي للمعادلة $\cos x=x$ حل وحيد.

22 1. ادرس اطراد التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=6x^3-3x^2+\frac{x}{2}+24$.

2. أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً α في المجال $-2,-1$.

3. أثبت أنّ α هو الحلّ الوحيد في $\mathbb{R}$ للمعادلة $f(x)=0$.

4. استنتج جهة اطراد التابع $g:x\mapsto\frac{3}{2}x^4-x^3+\frac{1}{4}x^2+24x-10$.

الحل

1. بما أن f هو تابع كثير حدود فهو اشتقاقي على $\mathbb{R}$ وتابع المشتق هو

$f'(x)=18x^2-6x+\frac{1}{2}$ وبالتالي فإن f' ينعدم عندما $x=\frac{1}{6}$ فقط و أياً كانت $x\in\mathbb{R}$ فإن $f'(x)\geq 0$ ، ومنه جدول الاطراد التالي :

x	$-\infty$		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{6}\right)$	$\nearrow$	

ومن الجدول نجد أن f' متزايد تماماً على $\mathbb{R}$

2. بما أن f متزايد تماماً على $\mathbb{R}$ فهو متزايد تماماً على $[-2,-1]\subseteq\mathbb{R}$ وبما أن $f(-1)=\frac{29}{2}>0$ ، $f(-2)=-37<0$ أي أن $f(-1),f(-2)$ من إشارتين متعاكستين وبالتالي للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً α في $-2,-1$.

3. بما أن f متزايد تماماً على $\mathbb{R}$ فإنه أياً كان $x>-1$ فإن $f(x)>f(-1)>0$ وأياً كان $x>-2$ فإن $f(x)<f(-2)<0$ وبالتالي فإنه لا يوجد جذور للمعادلة $f(x)=0$ في $]-\infty,-2[\cup]-1,+\infty[$ إذن α هو الحل الوحيد في $\mathbb{R}$ للمعادلة $f(x)=0$.

التابع g هو تابع كثير حدود فهو اشتقاقي على $\mathbb{R}$ وتابعه المشتق هو

$$g'(x)=6x^3-3x^2+24$$

4. يوجد خطأ

23 متراجحة برنولي. ليكن n من $\mathbb{N}$. أثبت أنّه مهما يكن $x\geq 0$ يكن $1+x^{\ n}\geq 1+nx$.

الحل

$(1+x)^n\geq 1+nx$ حيث $x\geq 0$ و $n\in\mathbb{N}$

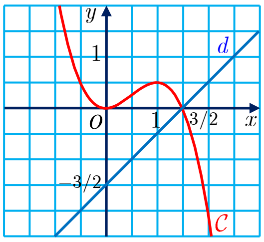
إن هذه المتراجحة تكافئ $(1+x)^n-nx-1\geq 0$ حيث $x\geq 0$ و $n\in\mathbb{N}$

ندرس اطراد التابع $f:x\to(1+x)^n-nx-1$ على $[0,+\infty[$ بغية تحديد أصغر قيمة .

نلاحظ أن f هو تابع كثير حدود فهو اشتقاقي على $\mathbb{R}$ فهو إذن اشتقاقي على $[0,+\infty[$ وتابعه المشتق هو $f':x\mapsto\frac{n[(1+x)^n-(1+x)]}{1+x}$ وبما أن $1+x\geq 1$ عندما $x\geq 0$ فإن $(1+x)^n\geq 1+x$ عندما $x\geq 0$ وَ $n\in\mathbb{N}$

وعليه يكون $f'(x)=\frac{n[(1+x)^n-(1+x)]}{1+x}\geq 0$ و نجد من ذلك أن التابع f متزايد تماماً على $[0,+\infty[$ وبالتالي فإن أصغر قيم هذا التابع على $[0,+\infty[$ هي $f(0)=0$ وبالتالي أياً كانت $x\geq 0$ فإن $f(x)\geq 0$ وتكافئ $(1+x)^n-nx-1\geq 0$ وتكافئ $(1+x)^n\geq 1+nx$ وهو المطلوب .

24 ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2$، وليكن $\mathcal{C}$ خطّه البياني. وأخيراً ليكن d المستقيم الذي معادلته $y = x - \frac{3}{2}$.



1. احسب إحداثيّات نقاط تقاطع الخط البياني $\mathcal{C}$ مع محور الفواصل.
2. استنتج أنّ الخطّ البياني $\mathcal{C}$ والمستقيم d يشتركان بنقطة على الأقلّ.
3. ادرس الوضع النسبيّ للخطّ البياني $\mathcal{C}$ والمستقيم d.

الحل

1. لإيجاد إحداثيات نقاط التقاطع C مع المحور xx' فإننا نحل المعادلة $f(x) = 0$ والتي تكافئ

$$-x^3 + \frac{3}{2}x^2 = 0 \quad \text{وتكافئ} \quad x^2\left(\frac{3}{2} - x\right) = 0$$

ولها حلان الأول مضاعف هو $x = 0$ والثاني بسيط هو $x = \frac{3}{2}$

نستنتج أن C يمس xx' بالمبدأ $O(0,0)$ ويقطعه بالنقطة $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

2. نلاحظ أن النقطة $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ تقع على C وهي وضوحاً تقع على d فهما يشتركان بهذه النقطة على الأقل.

3. ندرس إشارة التابع

$$f(x) - y_d = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x\frac{3}{2} = -x^2\left(x - \frac{3}{2}\right) - \left(x - \frac{3}{2}\right) = -\left(x - \frac{3}{2}\right)\ x^2 + 1$$

وبما أن $x^2 + 1 > 0$ فإن إشارة $f\ \ x\ - y_d$ تعاكس إشارة $x - \frac{3}{2}$ لذلك نلخص الدراسة بالجدول:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$x - \frac{3}{2}$	$-$	0	$+$
$f(x) - y_d$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	C فوق d		C تحت d

ونجد أن $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ هي النقطة المشتركة الوحيدة بين C و d.

25 ليكن x عدداً حقيقيّاً موجباً أو معدوماً.

1. أثبت على التوالي، بدراسة اطراد توابع مُختارة اختياراً جيّداً، المتراجحات الآتية.

① $\sin x \le x$ ② $1-\frac{1}{2}x^2 \le \cos x$

③ $x-\frac{1}{6}x^3 \le \sin x$ ④ $\cos x \le 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4$

.2 احصر، في حالة $x \ge 0$، كلاً من التابعين $\sin$ و $\cos$ بين كثيري حدود.

.3 استنتج مما سبق تقديراً للعددين $\sin\frac{1}{2}$ و $\cos\frac{1}{2}$.

الحل

.1 ① المتراجحة $\sin x \le x$ تكافئ $x-\sin x \ge 0$

ندرس اطراد التابع $f : x \mapsto x-\sin x$ على $[0,+\infty[$

نلاحظ أن التابع f اشتقاقي على $[0,+\infty[$ ومشتقه $f'(x)=1-\cos x$

ونلاحظ أنه أياً كانت $x \ge 0$ فإن $f'(x)=1-\cos x \ge 0$

إذن التابع f متزايد تماماً على $[0,+\infty[$ وبالتالي فإنه أياً كانت $x \ge 0$ فإن $f(x) \ge f(0)=0$ وهذا يكافئ أن $\sin x \le x$ من أجل $x \ge 0$

② $1-\dfrac{1}{2}x^2 \le \cos x$ تكافئ $\cos x+\dfrac{1}{2}x^2-1 \ge 0$

ندرس اطراد التابع $g : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2+\cos x-1$ على $[0,+\infty[$

نلاحظ أن التابع g اشتقاقي على $[0,+\infty[$ ومشتقه $g'(x)=x-\sin x$ أي أن $g'(x)=f(x)$

ونستنتج من ذلك أن $g'(x) \ge 0$ وبالتالي فإن التابع g متزايد تماماً على $[0,+\infty[$ وبالتالي فإنه أياً كانت $x \ge 0$ فإن $g(x) \ge g(0)=0$ وهذا يكافئ أن $1-\dfrac{1}{2}x^2 \le \cos x$ من أجل $x \ge 0$.

③ المتراجحة $x-\dfrac{1}{6}x^3 \le \sin x$ تكافئ $\sin x+\dfrac{1}{6}x^3-x \ge 0$

ندرس اطراد التابع $h : x \to \sin x+\dfrac{1}{6}x^3-x$ على $[0,+\infty[$

نلاحظ أن التابع h اشتقاقي على $[0,+\infty[$ ومشتقه $h'(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}x^2-1$

أي أن $h'(x)=g(x)$ ونستنتج من ذلك أن $h'(x) \ge 0$ وبالتالي فإن التابع h متزايد تماماً على $[0,+\infty[$ وبالتالي فإنه أياً كانت $x \ge 0$ فإن $h(x) \ge h(0)=0$ وهذا يكافئ أن $x-\dfrac{1}{6}x^3 \le \sin x$ من أجل $x \ge 0$.

④ المتراجحة $\cos x \le 1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{24}x^4$ تكافئ $1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{24}x^4-\cos x \ge 0$

ندرس اطراد التابع $k : x \mapsto 1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{24}x^4-\cos x$ على $[0,+\infty[$

نلاحظ أن التابع k اشتقاقي على $[0,+\infty[$ ومشتقه $k'(x)=-x+\dfrac{1}{6}x^3+\sin x$

أي أن $k'(x)=h(x)$ ونستنتج من ذلك أن $k'(x)\geq 0$ وبالتالي فإن التابع k متزايد تماماً على $[0,+\infty[$ ومنه فإنه أياً كانت $x\geq 0$ يكون $k(x)\geq k(0)=0$ وهذا يكافئ أن :
$\cos x\leq 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4$ من أجل $x\geq 0$.

.2 من أجل $x\geq 0$ فإن

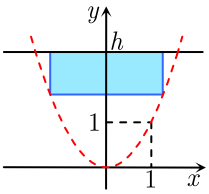
$$x-\frac{1}{6}x^3\leq \sin x\leq x$$
$$1-\frac{1}{2}x^2\leq \cos x\leq 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4$$

.3 من أجل $x=\frac{1}{2}$ نجد $\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{23}{48}\leq \sin\left(\frac{1}{2}\right)\leq\frac{1}{2}$ إذن قيمة $\sin\frac{1}{2}$ تقع في المجال $\left]\frac{1}{2},\frac{23}{48}\right[$ ويمكن تقديرها بمنتصف المجال $\sin\frac{1}{2}\approx\frac{47}{96}$

ونجد أيضاً أن $1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\leq\cos\left(\frac{1}{2}\right)\leq 1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{24}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{337}{384}$

إذن قيمة $\cos\frac{1}{2}$ تقع في المجال $\left]\frac{7}{8},\frac{337}{384}\right[$ ويمكن تقديرها بمنتصف المجال أي $\cos\frac{1}{2}\approx\frac{337}{384}$

26 ليكن h عدداً حقيقيّاً موجباً تماماً. ننسب المستوي إلى مَعْلَم متجانس. ونتأمّل جزء المستوي المحدَّد بالقطع الذي معادلته $y=x^2$ والمستقيم الذي معادلته $y=h$. نريد أن نُنشئ داخل ذلك الجزء، وكما هو مبيَّن في الشكل المجاور، مستطيلاً مساحته أكبر ما يمكن. احسب بعدي هذا المستطيل بدلالة h .



الحل

لنرمز لهذا المستطيل بالرمز $ABCD$ حيث أسأه A و B على القطع ورأساه C و D على المستقيم $y=h$ ونفرض أن $A(x,y)$ واقعة في الربع الأول من المستو .

إن المستقيم $y=h$ يقطع القطع في النقطتين $(-\sqrt{h},h)$ و $(\sqrt{h},h)$ وبالتالي فإن $x\in]0,\sqrt{h}[$ و $y\in]0,h[$ إن بعدي المستطيل $ABCD$ هما $2x$ و $h-y$ وبالتالي فإن مساحته هي $S=2x(h-y)$ ونريد حساب S كتابع لـ x فقط بما أن A نقطة من القطع فهي تحقق معادلته وبالتالي $y=x^2$ ومنه فإن $S(x)=2x(h-y)$ وبصيغة أخرى $S(x)=2xh-2x^3$

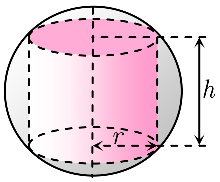
ندرس اطراد التابع S على $]0,\sqrt{h}[$ بغية الوصول إلى أكبر قيمة فنجد التابع S اشتقاقي على $]0,\sqrt{h}[$ ومشتقه هو $S'(x)=2h-6x^2$ وبالتالي ينعدم S' عندما $x=\sqrt{\frac{h}{3}}$ ومنه جدول الاطراد التالي :

x	0	$\sqrt{\frac{h}{3}}$	$\sqrt{h}$

$S'(x)$	$+$	0	$-$
$S(x)$	$\nearrow$	$S\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{h}\right)$	$\searrow$

من الجدول نجد أن $\frac{4}{9}h\sqrt{h} = S\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{h}\right)$ هي أكبر قيم التابع في المجال $]0,\sqrt{h}[$ وبالتالي تكون مساحة أكبر مستطيل هي $\frac{4}{9}h\sqrt{h}$ ويكون بعداه هما $\frac{2\sqrt{6}}{3}\sqrt{h}$ و $\frac{2}{3}h$.

27 أسطوانة ارتفاعها h ونصف قطر قاعدتها r تمسّ داخلاً كرة نصف قطرها R، وبحيث تكون قاعدتا الأسطوانة دائرتين من سطح الكرة.



① عبِّر عن r بدلالة R و h.

② احسب حجم الأسطوانة بدلالة h.

③ ما قيمة h التي تجعل حجم الأسطوانة أكبر ما يمكن؟

الحل

① نفترض O هي مركز الكرة ونفترض O' هي مركز إحدى قاعدتي الاسطوانة ونفترض A نقطة من محيط تلك القاعدة ، فيكون المثلث $AO'O$ قائم في O' ولدينا $OA = R, OO' = \frac{h}{2}, O'A = r$

وحسب فيثاغورث نجد $r = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}$

② حجم الاسطوانة هو: الارتفاع × مساحة القاعدة $= v$

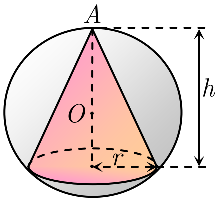
$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$ و $v = \pi r^2 \times h$ وبالتالي $v(h) = \pi\left(R^2 h - \frac{1}{4}h^3\right)$

③ نلاحظ أن h يتحول في المجال $]0,2R[$ لذلك ندرس اطراد التابع $V(h) = \pi\left(R^2 h - \frac{1}{4}h^3\right)$ في هذا المجال بغية الوصول إلى أكبر قيمة له .

التابع $V(h)$ يقبل الاشتقاق على $]0,2R[$ ومشتقه هو $V'(h) = \pi\left(R^2 - \frac{3}{4}h^2\right)$ وبالتالي V' ينعدم عندما $h = \frac{2}{\sqrt{3}}R$ ومنه جدول الاطراد التالي :

h	0		$\frac{2}{\sqrt{3}}R$		$2R$
$V'(h)$		$+$	0	$-$	
$V(h)$		$\nearrow$	$V\left(\frac{2}{\sqrt{3}}R\right)$	$\searrow$	

من الجدول نجد أن $V\left(\frac{2}{\sqrt{3}}R\right)=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$ هي أكبر قيم التابع V في المجال $]0,2R[$ وبالتالي يكون حجم الاسطوانة أكبر ما يمكن وقيمته هي $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$ عندما تكون $h=\frac{2}{\sqrt{3}}R$.



28 مخروط دوراني ارتفاعه h ونصف قطر قاعدته r يمسّ داخلاً كرة نصف قطرها R ومركزها O، وبحيث تكون قاعدته دائرة من سطح الكرة.

① أثبت أنّ r يساوي $\sqrt{h\ 2R-h}$ ثم احسب حجم المخروط بدلالة h.

② ما قيمة h التي تجعل حجم المخروط أكبر ما يمكن؟

الحل

① نفرض A هي رأس المخروط و B هي النقطة المقابلة لها قطرياً ومنه $AB=2R$. نفرض O' هي مركز قاعدة المخروط فتكون $O'\in[AB]$ ويكون $O'A=h, O'B=-2R-h$

لتكن H نقطة من محيط قاعدة المخروط فتكون الزاوية AHB قائمة لأنها محيطية تقابل القطر $[AB]$ ، فالمثلث ΔAHB قائم في H ويكون $[O'H]$ ارتفاعاً متعلقاً بالوتر $[AB]$ $\left|[AB]\right|$ ولدينا

$O'H=r$

في المثلث القائم ΔAHB لدينا $O'H^2=O'A\times O'B$

ومنه $r^2=h(2R-h)$ وهذا يقتضي أن $r=\sqrt{h(2R-h)}$

إن حجم المخروط هو ارتفاعه $\times$ مساحة القاعدة $\times\frac{1}{3}=v$

وبالتالي $v=\frac{1}{3}\times\pi r^2\times h$ $v(h)=\frac{\pi}{3}(2h^2R-h^3)$

② نلاحظ أن h يتحول في المجال $]0,2R[$ لذلك ندرس اطراد التابع $V(h)$ في هذا المجال بغية الوصول إلى أكبر قيمة له .

التابع $V(h)$ يقبل الاشتقاق على $]0,2R[$ ومشتقه هو $V'(h)=\frac{\pi}{3}(4Rh-3h^2)$ و ينعدم المشتق V' عندما $h\in\left\{0,\frac{4R}{3}\right\}$ وبما أن $h=0\notin]0,2R[$ فإن $h=\frac{4R}{3}$ هي القيمة المقبولة ومنه جدول الاطراد التالي :

h	0		$\frac{4R}{3}$		$2R$
$V'(h)$		$+$	0	$-$	
$V(h)$		$\nearrow$	$V\left(\frac{4R}{3}\right)$	$\searrow$	

من الجدول نجد أن $V\left(\frac{4R}{3}\right)=\frac{32\pi R^3}{27}$ هي أكبر قيم التابع V في المجال $]0,2R[$ وبالتالي يكون حجم المخروط أكبر ما يمكن وقيمته هي $\frac{32\pi R^3}{27}$ عندما تكون $h=\frac{4}{3}R$.

29 نتأمّل في مَعلم متجانس القطع المُكافئ $\mathcal{P}$ الذي معادلته $y=1-x^2$. $M(x_0,y_0)$ نقطة من القطع $\mathcal{P}$ تُحقّق $x_0>0$ و $y_0>0$. يقطع المماس للقطع $\mathcal{P}$ المرسوم من M محور الفواصل في A ويقطع محور التراتيب في B. عيّن موضع M الذي يجعل مساحة المثلّث OAB أصغر ما يمكن.

الحل

لنوجد أولاً معادلة المماس للقطع $\mathcal{P}$ في النقطة M.

التابع $f:x\to 1-x^2$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ وتابعه المشتق هو $f':x\mapsto -2x$

ميل المماس للقطع $\mathcal{P}$ في M هو $m=f'(x_0)=-2x_0$

فمعادلة هذا المماس هي $y=-2x_0x+2x_0^2+y_0$ وبما أن $M\in\mathcal{P}$ فإن M تحقق معادلة $\mathcal{P}$

ومنه $y_0=1-x_0^2$ فتصبح معادلة المماس في M هي $y=-2x_0x+x_0^2+1$ ، نعوض x_B في معادلة المماس السابق فنجد $y_B=x_0^2+1$ ، نعوض y_A في معادلة المماس السابق فنجد

$x_A=\frac{x_0^2+1}{2x_0}$ أي أن $B(0,x_0^2+1)$ و $A\left(\frac{x_0^2+1}{2x_0},0\right)$

نرمز لمساحة المثلث القائم $A0B$ بالرمز S فيكون $S=\frac{1}{2}.\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}$

وبالتالي فإن $S=\frac{(x_0^2+1)^2}{4x_0}$ ومنه نجد $S=\frac{1}{4}x_0^3+\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{4x_0}$

نعامل فاصلة النقطة M على أنها متغير في المجال $]0,1[$ ونرمز لها بـ x بدلاً من x_0 فيكون S تابعاً لـ x معرّفاً بالعلاقة $S(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4x}$

التابع S اشتقاقي على $]0,1[$ وتابعه المشتق هو $S'(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2}$

بعد التبسيط يصبح $S'(x)=\frac{3x^4+2x^2-1}{4x^2}$ وبالتالي ينعدم $S'(x)$ عندما $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ولدينا

$S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{9}$

ويكون للتابع $S(x)$ جدول الاطراد التالي :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1

$S'(x)$	$-$	0	$+$
$S(x)$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$ $\searrow$	$S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\nearrow$

ومن الجدول نجد أن $\frac{4\sqrt{3}}{9} = S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ هي قيمة صغرى محلية بل هي أصغر قيم التابع على $]0,1[$ ويبلغها عندما $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ وبالتالي تكون مساحة المثلث أصغر ما يمكن وقيمتها $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ عندما تكون $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ وعندما تكون $y = \frac{2}{3}$ أي عندما تكون M في الموضع $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\right)$.

تدرّب ص 106

احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$.

❶ $f(x) = x^3 - x$ ❷ $f(x) = x^4 - 1$

❸ $f(x) = \dfrac{x^3}{5} - 2x + 6$ ❺ $f(x) = \dfrac{2}{x} - 2x^2 - 100$

❺ $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + 1$ ❻ $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-1}$

❼ $f(x) = \dfrac{2x^2+2}{3x^2+3x}$ ❽ $f(x) = \dfrac{2x^3+1}{x^2+x}$

الحل

❶ $f(x) = x^3 - x$

f معرف على $]-\infty, \infty[$ ومنه f معرف في جوار ∞، في جوار ∞ لنُخرِجَ الحد المسيطر عاملاً مشتركاً $f(x) = x^3\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$. رأينا فيما سبق أن $\dfrac{1}{x^2}$ يصبح قريباً من الصفر عندما تصبح x كبيرة، وعليه يقترب المقدار $\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$ من 1. أي إن سلوك $f(x)$ في $+\infty$ يماثل سلوك x^3. إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

❼ $f(x) = \dfrac{2x^2+2}{3x^2+3x}$

لنُخرِجَ الحد x^2 عاملاً مشتركاً من البسط ومن المقام $f(x) = \dfrac{x^2(2+\frac{2}{x^2})}{x^2(3+\frac{3}{x})} = \dfrac{2+\frac{2}{x^2}}{3+\frac{3}{x}}$. رأينا فيما سبق أن $\dfrac{2}{x^2}$ يصبح قريباً من الصفر عندما تصبح x كبيرة، وعليه يقترب المقدار $2 + \dfrac{2}{x^3}$ من 2، كما أن $\dfrac{1}{x}$ يصبح قريباً من الصفر عندما تصبح x كبيرة، وعليه يقترب المقدار $3 + \dfrac{3}{x}$ من 3. إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{2}{3}$.

❽ $f(x) = \dfrac{2x^3+1}{x^2+x}$

لنُخرِجَ الحد المسيطر عاملاً مشتركاً من البسط ومن المقام

$$f(x)=\frac{2x^3\left(1+\frac{1}{2x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}=2x\frac{1+\frac{1}{2x^3}}{1+\frac{1}{x}}$$

رأينا فيما سبق أن $\frac{1}{2x^3}$ يصبح قريباً من الصفر عندما تصبح x كبيرة، وعليه يقترب المقدار $1+\frac{1}{2x^3}$ من 1، كما أن $\frac{1}{x}$ يصبح قريباً من الصفر عندما تصبح x كبيرة، وعليه يقترب المقدار $1+\frac{1}{x}$ من 1.

أي إن سلوك $f(x)$ في $+\infty$ يماثل سلوك $2x$. إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

تَدرَّبْ ص 109

عيّن نهايات التوابع الآتية عند $-\infty$.

❶ $f(x)=x^3-2x-1$ ❷ $f(x)=x^4-\frac{5}{x}$

❸ $f(x)=-2x+6x^5$ ❺ $f(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}$

❺ $f(x)=\frac{2}{x^2}+x$ ❻ $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$

❼ $f(x)=\frac{2x^2+5}{x^2-x}$ ❽ $f(x)=\frac{x^4+1}{x^2+x}$

الحل

❶ لنخرج الحد المسيطر كعامل مشترك فنجد $f(x)=x^3\left(1-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=1$ و

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ وبالتالي $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

❷ لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}x^4=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

❻

$$f(x)=\frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$

❽ $$f(x)=\frac{x^4\left(1+\dfrac{1}{x^4}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=x^2.\frac{1+\dfrac{1}{x^4}}{1+\dfrac{1}{x}}$$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^4}=0$ ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+x^4}{1+\dfrac{1}{x}}=1$

كما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

تدرّب ص 113

ادرس نهايات التوابع المبينة أدناه عند النقطة a المعطاة. قد يلزم مناقشة وجود نهاية من اليمين ومن اليسار في بعض الحالات.

① $a=0$ ، $f(x)=\dfrac{2x-5}{\sqrt{x}}$ ② $a=0$ ، $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^3}$

③ $a=-1$ ، $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+1}$ ④ $a=3$ ، $f(x)=\dfrac{2x}{x^3-9}$

الحل

① نعلم أن $\lim\limits_{x\to0^+}(2x-5)=-5$ و $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}=0$. عند قسمة أعداد قريبة من -5 على أعداد موجبة قريبة من 0 يصبح الكسر سالباً و كبيراً بالقيمة المطلقة أي $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$.

③ لدينا f معرف على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$: $f(x)=\dfrac{x+1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{x+1}$ وعليه بإجراء مناقشة مماثلة لما سبق نجد :

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-1,x>-1}f(x)=+\infty$$

إذن ليس للتابع نهاية عند النقطة $x=-1$.

تدرّب ص 116

① احسب النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f+g)(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(fg)(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

في كلٍ من الحالات الآتية.

❶ $g(x)=x$ و $f(x)=2x+6$.

❷ $g(x)=-x^2$ و $f(x)=3x^2+9$.

❸ $g(x) = -2x^3$ و $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

الحل

❶ $g(x) = x$ و $f(x) = 2x + 6$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f + g \ (x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} (fg)(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+6}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{6}{x}\right) = 2$$

وبقية التمارين تُعالج بطريقة مماثلة.

② احسب النهايات الآتية:

❶ $\lim_{x\to+\infty} (x^3 - x)$ ❷ $\lim_{x\to1^+} \dfrac{\sqrt{x} - 2x}{\sqrt{x-1}}$

❸ $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x} - x\sqrt{x})$ ❹ $\lim_{x\to0^+} \left(\dfrac{2}{x} + 1\right)$

❺ $\lim_{x\to0} \left(\dfrac{2}{x^2} + x\right)$ ❻ $\lim_{x\to1^+} \dfrac{x}{x^2 - 1}$

❼ $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{5}{x^2 - x}$ ❽ $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{-x} - x^2)$

الحل

❸ $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x} - x\sqrt{x})$ نحن أمام حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x} - x\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}(\frac{1}{x} - 1) = -\infty$$

❻ $\lim_{x\to1^+} \dfrac{x}{x^2 - 1}$ بما أن $\lim_{x\to1^+} (x) = 1$ وبما أن $\lim_{x\to1^+} (x^2 - 1) = 0^+$ فإن $\lim_{x\to1^+} \dfrac{x}{x^2 - 1} = +\infty$

❽ $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{-x} - x^2)$ نحن أمام حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{-x} - x^2) = \lim_{x\to-\infty} x^2 \left(\frac{\sqrt{-x}}{x^2} - 1\right) = \lim_{x\to-\infty} x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{-x^3}} - 1\right) = -\infty$$

تَدرَّبْ ص 123

① احسب النهايات الآتية:

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3-x)$ ❷ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2x}{x}$

❸ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-x^3}{x^2}$ ❺ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^5+3x^4-1)$

❺ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2-x}$ ❻ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^8}{x^2-1}$

❼ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x}{x^2-x}$ ❽ $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x-x^2)$

الحل

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3=+\infty$

❼ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x}=0$

وبقية التمارين تُعالج بطريقة مماثلة.

② ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ وفق $f(x)=1-x-\dfrac{1}{x}$.. وليكن $\mathbf{C}_f$ خطّه البياني في معلم متجانس.

1. أثبت أنّ $\mathbf{C}_f$ يقبل المستقيم Δ ذا المعادلة $y=1-x$ مقارباً مائلاً.
2. ادرس وضع المقارب Δ بالنسبة إلى المنحني $\mathcal{C}_f$.
3. ادرس التابع f. ارسم Δ ثم $\mathcal{C}_f$.
4. ناقش تبعاً لقيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.
5. عندما يقطع المستقيم الذي معادلته $y=m$ المنحني $\mathcal{C}_f$ في نقطتين مختلفتين M و N عيّن بدلالة m إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[MN]$.
6. لنرمز A و B إلى النقطتين من $\mathbf{C}_f$ حيث يكون المماس أفقياً. عيّن إحداثيات A و B ثم أثبت أن النقاط الثلاثة A و B و I تقع على استقامة واحدة.

الحل

1. نلاحظ أنّ $f(x)-y_\Delta=f(x)-(1-x)=1-x-\dfrac{1}{x}-(1-x)=-\dfrac{1}{x}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{x}=0$. إذن المستقيم Δ الذي معادلته $y=1-x$ مستقيم مقارب لمنحني التابع f عند $+\infty$. وكذلك $\lim\limits_{x\to-\infty}(-\dfrac{1}{x})=0$ إذن Δ هو أيضاً مستقيم مقارب لمنحني التابع f عند $-\infty$.

2. إنّ إشارة الفرق $f(x)-(1-x)=-\dfrac{1}{x}$ هي عكس إشارة المقام x ذاتها. أي إذا كان $x>0$ كان $f(x)-y_{\triangle}<0$، أي إنّ جزء الخط البياني الموافق لقيم $x>0$ يقع تحت المقارب. و إذا كان $x<0$ كان $f(x)-y_{\triangle}>0$، أي إنّ جزء الخط البياني الموافق لقيم $x<0$ يقع فوق المقارب.

3. التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. وأيّاً كانت قيمة x من $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ كان

$$f'(x)=-1+\frac{1}{x^2}=\frac{1-x^2}{x^2}$$

إذن ينعدم f' عند $x=-1$ و $x=1$.

نستنتج من ذلك إشارة التابع المشتق f' كما في الجدول الآتي

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	

وهكذا يمكننا أن نستنتج ما يأتي

- $f'(x)<0$ على المجال $]-\infty,-1[$ و $f'(-1)=0$ إذن f متناقصٌ تماماً على المجال $]-\infty,-1]$.
- $f'(x)>0$ على المجالين $]-1,0[,]0,1[$ إذن f متزايدٌ تماماً على كل مجال من المجالين $]-1,0[,]0,1[$.
- $f'(x)<0$ على المجال $]1,\infty[$ و $f'(1)=0$ إذن f متناقصٌ تماماً على المجال $[1,\infty[$.

لنعرض إذن هذه النتائج في جدول الاطراد

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$f\ -1$	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	$f\ 1$	$\searrow$	

وبحساب النهايات عند أطراف مجالات التعريف نجد:

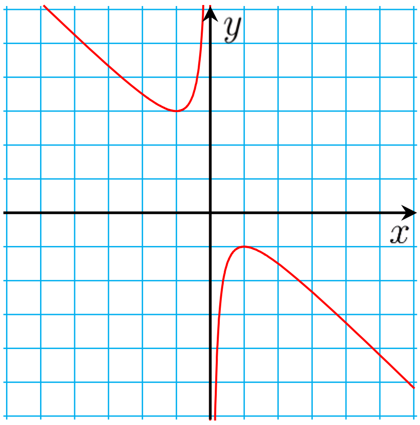
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$$

إذن للتابع f جدول التغيرات التالي :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\ -1$	$\nearrow$	$+\infty\ \|\ -\infty$	$\nearrow$	$f\ 1$	$\searrow$	$-\infty$

يبيّن الجدول السابق أنّ القيمة $f(-1)=3$ هي قيمة صغرى محلياً للتابع f يبلغها عند النقطة x^2-1 وأنّ القيمة $f(1)=-1$ هي قيمة كبرى محلياً يبلغها عند النقطة $x=1$.

4. من الجدول نجد أنَّ:



$f(]-\infty,-1]) = [3,+\infty[$

$f(]-1,0[) =]3,+\infty[$

$f(]0,1]) =]-\infty,-1]$

$f(]1,+\infty[) =]-\infty,-1[$

وبالتالي إذا كانت $m < -1$ فللمعادلة حلان أحدهما في المجال $]0,1[$ والآخر في المجال $]1,+\infty[$

إذا كانت $m = -1$ فإنّ $x = 1$ حل وحيد للمعادلة.

إذا كانت $-1 < m < 3$ فالمعادلة مستحيلة الحل.

إذا كانت $m = 3$ فإنّ $x = -1$ حل وحيد للمعادلة.

و إذا كانت $m > 3$ فللمعادلة حلان أحدهما في المجال $]-1,0[$ والآخر في المجال $]-\infty,-1[$

ملاحظة: يمكن للطالب مناقشة الحل بيانياً.

5. $f(x) = m$ تكافئ $1 - x - \frac{1}{x} = m$ وتكافئ $x - x^2 - 1 = mx$ وتكافئ $x^2 + (m-1)x + 1 = 0$ ويكون لهذه المعادلة حلان عندما $m \in]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$

وعندها نجد أنَّ جذري المعادلة هما x_M و x_N يحققان :

$x_N + x_M = -\frac{m-1}{1} = 1 - m$ ومنه $x_I = \frac{x_N + x_M}{2} = \frac{1-m}{2}$ ومنه $I\left(\frac{1-m}{2}, m\right)$

6. فاصلتي A و B هما حلول المعادلة $f'(x) = 0$ وهي $x = \pm 1$ ومنه $A(1,-1)$ و $B(-1,3)$.

$\overrightarrow{AI} = \left(\frac{-m-1}{2}, m+1\right)$ و $\overrightarrow{IB} = \left(\frac{m-3}{2}, 3-m\right)$

$$x'y - y'x = \frac{-m-1}{2}(3-m) - (m+1)\frac{m-3}{2}$$
$$= \frac{-3m + m^2 - 3 + m - m^2 + 3m - m + 3}{2} = 0$$

إذن الشعاعان $\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{IB}$ مرتبطان خطياً فالنقط A و B و I على استقامة واحدة.

تمرينات ومسائل ص 128

1 احسب النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} (f+g)(x)$ ، وذلك في كلٍ من الحالات الآتية.

① $g(x) = -x$ و $f(x) = 2x + 1$.

② $g(x) = -x^2$ و $f(x) = x^2 + 1$.

③ $g(x) = -2x$ و $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

الحل

①

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \; f+g \; (x) = \lim_{x\to+\infty} (2x+1-x) = \lim_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$$

2 احسب النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} (fg)(x)$ ، وذلك في كلٍ من الحالات الآتية.

① $g(x) = \dfrac{1}{x}$ و $f(x) = x^2$.

② $g(x) = x$ و $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

③ $g(x) = \dfrac{2}{x^3}$ و $f(x) = 5x^3 + 1$.

الحل

③ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ ولدينا

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = (5x^3+1)\left(\frac{2}{x^3}\right) = 10 + \frac{2}{x^3}$$

وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x^3}\right) = 0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} (f.g)(x) = 10$

3 احسب النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ ، وذلك في كلٍ من الحالات الآتية.

① $g(x) = \dfrac{2}{x}$ و $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

② $g(x) = -\dfrac{1}{x}$ و $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$.

③ $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ و $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

الحل

③ $\lim\limits_{x\to+\infty} g \;\; x \;\; = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f \;\; x \;\; = 0$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{x} = x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

4 ادرس نهايات التوابع المبينة أدناه عند النقطة a المعطاة. قد يلزم مناقشة وجود نهاية من اليمين ومن اليسار في بعض الحالات.

① $f(x)=\dfrac{2x-5}{x},\quad a=0$ ② $f(x)=\dfrac{3x+1}{x^2},\quad a=0$

③ $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x-6},\quad a=2$ ④ $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1},\quad a=1$

الحل

② لدينا $\lim\limits_{x\to0}(3x+1)=1$ و $\lim\limits_{x\to0}x^2=0^+$ وبالتالي $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$

③ لدينا $\lim\limits_{x\to2}(x-1)=3$ و نجد أن $\lim\limits_{x\to2^+}(x^2+x-6)=0^+$ وأن $\lim\limits_{x\to2^-}(x^2+x-6)=0^-$

وبالتالي فإن $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=-\infty$ وبالتالي ليس للتابع f نهاية عند النقطة $x=2$

5 احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

① $f(x)=3x^2+1$ ② $f(x)=x^3+x^2-1$

③ $f(x)=10^{-3}x^3-5x+10^6$ ④ $f(x)=2-x-x^2$

الحل

③ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(10^{-3}x^3)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(10^{-3}x^3)=+\infty$

6 أوجد النهاية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ لكلٍ من التوابع الكسرية.

① $f(x)=\dfrac{3x-2}{x+2}$ ② $f(x)=\dfrac{-3x+12}{x-1}$

③ $f(x)=\dfrac{x^2+12}{x^2-8}$ ④ $f(x)=\dfrac{-x^2}{x^2+5}$

⑤ $f(x)=\dfrac{10^5}{0.1\ x}$ ⑥ $f(x)=\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+7}$

⑦ $f(x)=\dfrac{x+2}{x^3}$ ⑧ $f(x)=\dfrac{x^3-x+5}{3x^2-2x+1}$

الحل

① $f(x)=\dfrac{3x-2}{x+2}$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-2}{x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x}=3$$

7 قراءة جداول التغيرات

اعتماداً على جدول التغيرات المبين أدناه، عيِّن مجموعة تعريف كل تابع، ونهاياته عند أطراف مجموعة التعريف، ومجالات التزايد والتناقص.

①

x	$-\infty$			0			$+\infty$
f'		$-$		$\Vert$		$+$	
f	2	$\searrow$	$-\infty$	$\Vert$	$-\infty$	$\nearrow$	0

②

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

③

x	$-\infty$			-1			0			1			$+\infty$
f'		$-$		$\Vert$		$+$	0	$-$		$\Vert$		$+$	
f	2	$\searrow$	$-\infty$	$\Vert$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$	$\Vert$	$-\infty$	$\nearrow$	2

④

x	$-\infty$		-2		3			4			$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	0	$-$		$\Vert$		$+$	
f	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$	$\Vert$	$-\infty$	$\nearrow$	4

الحل

① إن مجموعة تعريف التابع الأول هي $D_f=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

ونهايات التابع على أطراف مجموعة التعريف هي:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+2\ ,\ \lim_{x\to0^-}f(x)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

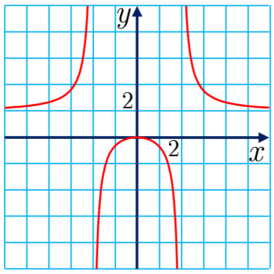
مجالات التزايد والتناقص هي:

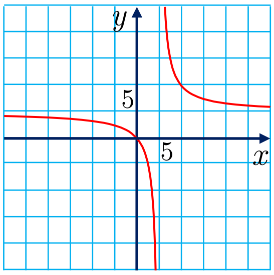
متناقص تماماً على المجال $]-\infty,0[$

متزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$

8 قراءة الرسم البياني

اعتماداً على منحني التابع المبين أدناه، اكتب جدول التغيرات. هل يمكنك توقع المقاربات من الرسم؟

① 

② 

الحل

①

x	$-\infty$		-2		0		$+2$		$+\infty$
f'		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	
f	1	$\nearrow$ $+\infty$	$\|\|$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	1

لدينا المستقيم $y = 1$ مقارب لـ C يوازي المحور $x'x$ بجوار $(-\infty)$ وبجوار $(+\infty)$ ، المستقيم $x = -2$ الموازي للمحور $y'y$ هو مقارب لـ C ويكون C على يساره من جهة oy^- ، ويكون C على يمين المقارب من جهة oy^+ ، والمستقيم $x = 2$ الموازي للمحور $y'y$ هو مقارب لـ C ويكون C على يساره من جهة oy^+ ، يكون C على يمين المقارب من جهة oy^- ، .

②

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	$\|\|$	$-$	
f	1	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	1

لدينا المستقيم $x = 1$ الموازي للمحور $y'y$ هو مقارب لـ C ويكون C على يساره من جهة oy^- ، ويكون C على يمين المقارب من جهة oy^+ ، و المستقيم $y = 1$ الموازي للمحور $x'x$ هو مقارب لـ C بجوار $(-\infty)$ ويكون C تحت المقارب وبجوار $(+\infty)$ ويكون C فوق المقارب .

9 ادرس التوابع الآتية، مبيناً محور التناظر، ثم ارسم الخطوط البيانيّة التي تمثّلها.

① $f(x) = x^2 - 5x + 6$ ② $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

③ $f(x) = 2 - x - x^2$ ④ $f(x) = 2 \ x - 1 \ \ x - 3$

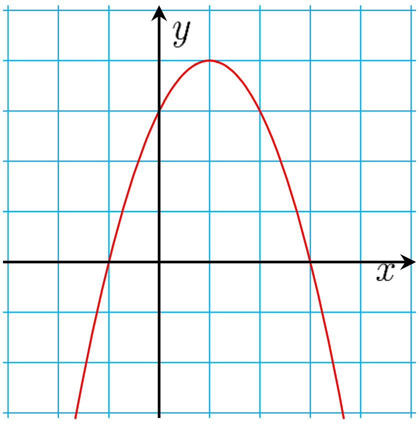
الحل

② التابع $f : x \to -x^2 + 2x + 3$ هو تابع كثير حدود فهو معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ومشتقه هو

$f'(x) = -2x + 2$ ينعدم f' عند $x = 1$ ولدينا $f(1) = 4$

ومنه الجدول التالي :



x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

نلاحظ من الجدول أن $f(1)=4$ هي قيمة كبرى محلياً للتابع ، ذروة القطع هي النقطة $v(1,4)$ ومحور تناظره هو $x=1$

10 ادرس التوابع الآتية، مبيناً أن النقطة I المعطاة هي مركز تناظر الخط البياني للتابع، ثُم ارسم هذا الخط.

① $f(x)=x^3-x+1,\qquad I(0,1)$

② $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-4x-1,\qquad I(0,-1)$

③ $f(x)=x^3+3x^2-9x-1,\qquad I(-1,10)$

④ $f(x)=-x^3-\dfrac{3}{2}x^2-1,\qquad I\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{5}{4}\right)$

الحل

④ $f(x)=-x^3-\dfrac{3}{2}x^2-1$ ، $I\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{5}{4}\right)$

التابع f كثير حدود فهو معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}=\left]-\infty,+\infty\right[$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

$f'(x)=-3x^2-3x$ ، ينعدم f' عندما $x=0$ ولدينا $f(0)=-1$

و عندما $x=-1$ ولدينا $f(-1)=-\dfrac{3}{2}$ ، ومنه جدول التغيرات التالي:

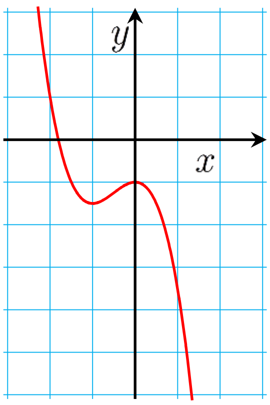
x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

ومن الجدول نجد أن : $f(0)=-1$ هي قيمة كبرى محلياً و $f(-1)=-\dfrac{3}{2}$ قيمة صغرى محلياً .

ولنثبت أن $I\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{5}{4}\right)$ هي مركز تناظر لـ C_f ، يجب إثبات أمرين.

الأول : أياً كانت $-\dfrac{1}{2}+x\in D_f$ فإن $-\dfrac{1}{2}-x\in D_f$ وبما أن $D_f=\mathbb{R}$

فهذا الشرط محقق وضوحاً .



الثاني : $f\left(-\frac{1}{2}+x\right)+f\left(-\frac{1}{2}-x\right)=2\left(-\frac{5}{4}\right)$ ، ونلاحظ أن :

$$
\begin{aligned}
l_1 &= f\left(-\frac{1}{2}+x\right)+f\left(-\frac{1}{2}-x\right)=-\left(-\frac{1}{2}+x\right)^3-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}+x\right)^2-1-\left(-\frac{1}{2}-x\right)^3-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}-x\right)^2-1\\
&=\left[-\frac{1}{8}+\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}x^2+x^3\right]-\frac{3}{2}\left[\frac{1}{4}-x+x^2\right]-\left[-\frac{1}{8}-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}x^2-x^3\right]-\frac{3}{2}\left[\frac{1}{4}+x+x^2\right]-2\\
&=\frac{1}{8}-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}x^2-x^3-\frac{3}{8}+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{8}+\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}x^2+x^3-\frac{3}{8}-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}x^2-2\\
&=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}=l_2
\end{aligned}
$$

طريقة ثانية:

$$
\begin{aligned}
f\left(-\frac{1}{2}+x\right)&=-\left(-\frac{1}{2}+x\right)^3-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}+x\right)^2-1=-\left[-\frac{1}{8}+\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}x^2+x^3\right]-\frac{3}{2}\left[\frac{1}{4}-x+x^2\right]-1\\
&=\frac{1}{8}-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}x^2-x^3-\frac{3}{8}+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}x^2-1=-x^3+\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

ومنه نجد $f\left(-\frac{1}{2}-x\right)=x^3-\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$ ، بالجمع نجد $f\left(-\frac{1}{2}+x\right)+f\left(-\frac{1}{2}-x\right)=-\frac{5}{2}$

فالشرط الثاني محقق . إذن I هي مركز تناظر لـ C_f

11 ادرس التوابع الكسرية الآتية، وحدد مراكز التناظر والمقاربات في حال وجودها. ثم ارسم خطوطها البيانيّة.

① $f(x)=\frac{2x}{x-3}$ ② $f(x)=\frac{x-10}{x-5}$

③ $f(x)=3+\frac{1}{x+2}$ ④ $f(x)=\frac{3x+1}{1-x}$

الحل

④ $f(x)=\frac{3x+1}{1-x}$

التابع f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ، لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-3$ وبالتالي فإن المستقيم $y=-3$ الموازي المحور $x'x$ هو مقارب لـ C_f ، عندما تكون x في جوار $(-\infty)$ وجوار $(+\infty)$

و لدينا $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ وبالتالي فإن المستقيم $x = 1$ الموازي المحور ، $y'y$ هو مقارب لـ C_f ، وللمنحني C_f فرعان أحدهما يقع على يسار هذا المقارب والآخر على يمينه.

$f'(x) = \dfrac{3(1-x)+3x+1}{(1-x)^2} = \dfrac{4}{(1-x)^2} > 0$ ، فالتابع متزايد تماماً على كل مجال من المجالين: $]-\infty,1[,]1,+\infty[$ ومنه جدول التغيرات التالي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-3

بما أن التابع هوموغرافي فإننا نتنبأ بأن نقطة تقاطع مقاربيه وهي $I(1,-3)$ هي مركز تناظر له.

ولنثبت ذلك : من جهة أولى إذا كان $1+x \in \mathbb{R} \setminus 1$ فإن $x \in \mathbb{R} \setminus 0$ ومنه $-x \in \mathbb{R} \setminus 0$ وبالتالي $1-x \in \mathbb{R} \setminus 1$ فالشرط الأول محقق.

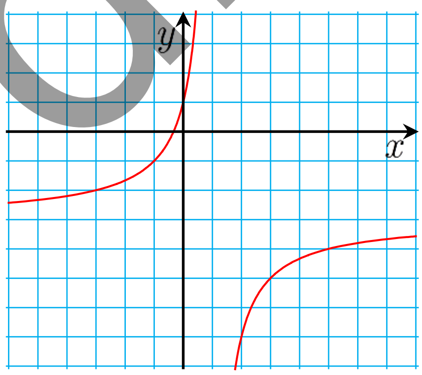
ومن جهة ثانية: $f(1+x)+f(1-x) = \dfrac{3(1+x)+1}{1-(1+x)} + \dfrac{3(1-x)+1}{1-(1-x)} = \dfrac{3x+4}{-x} + \dfrac{4-3x}{x}$

$$= \frac{-3x-4-3x+4}{x} = \frac{-6x}{x} = -6 = 2(-3)$$

فالشرط الثاني محقق. إذن $I(1,-3)$ هي مركز تناظر لـ C_f

ولرسم C_f نستفيد من النقط المساعدة التالية

x	$-\frac{1}{3}$	0	2
y	0	1	-7



12 **ادرس التابع الكسري f ، وأثبت أن المستقيم Δ المعطى هو مقارب مائل لمنحني التابع C_f ، ادرس وضع C_f بالنسبة إلى المقارب، ثمّ ارسم C_f ، في كلٍ من الحالات الآتية:**

① $\Delta : y = x - 2, \quad f(x) = x - 2 + \dfrac{3}{x}$

② $\Delta : y = \dfrac{x+1}{4}, \quad f(x) = \dfrac{x+1}{4} - \dfrac{1}{x^2}$

③ $\Delta : y = x + 5, \quad f(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 1}{x}$

④ $\Delta : y = x - 2, \quad f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 2}{3x}$

الحل

④ $\Delta : y = x - 2,$ ، $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 2}{3x}$

التابع f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}^*$

لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

نستنتج أن المستقيم $x = 0$ المنطبق على المحور $x'x$ هو مقارب لـ C_f ، والمنحني C_f مؤلف من فرعين أحدهما على يمين المقارب والآخر على يساره ، ويمكننا كتابة التابع f بالشكل $f(x) = x - 2 + \dfrac{2}{3x}$ وبالتالي $f(x) - y_\Delta = \dfrac{2}{3x}$ ومنه نجد أن

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - y_\Delta \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - y_\Delta \right] = 0$$

إذن Δمقارب مائل لـ C_f بجوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$ ، والوضع النسبي لـ C_f مع Δ يلخص بالجدول التالي

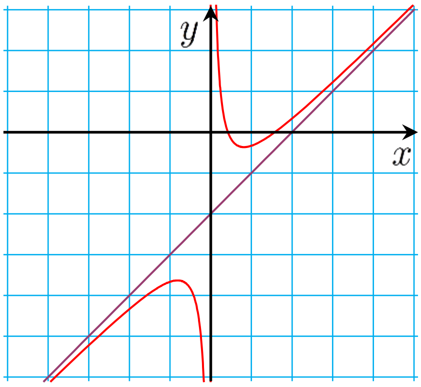
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	$-$	‖	$+$ 0
الوضع النسبي	يقع C_f تحت Δ	‖	يقع C_f فوق Δ

$f'(x) = 1 - \dfrac{2}{3x^2} = \dfrac{3x^2 - 2}{3x^2}$ ينعدم f' عندما $x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ ولدينا $f\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = \dfrac{2\sqrt{6} - 6}{3}$

و عندما $x = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ ولدينا $f\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = \dfrac{-2\sqrt{6} - 6}{3}$ ، ومنه جدول التغيرات التالي :

x	$-\infty$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$			0			$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		‖		$-$	0		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{6}-6}{3}$	$\searrow$	$-\infty$	‖	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-2\sqrt{6}-6}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\dfrac{2\sqrt{6} - 6}{3} = f\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$ هي قيمة كبرى محلياً و $\dfrac{-2\sqrt{6} - 6}{3} = f\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$ قيمة صغرى محلياً.



13 نقرن بكل عدد حقيقي b التابع كثير الحدود $f(x)=\frac{1}{3}x^3+bx+2$.

1. عين b ليكون المماس في النقطة التي فاصلتها 1 موازياً للمستقيم $y=2x$.

2. ادرس التابع f وارسم خطّه البياني C_f .

الحل

1. ميل المماس لـ C_f في النقطة التي فاصلتها 1 هو $m=2$

التابع f معرف و اشتقاقي على $\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$ ، ومشتقه $f'(x)=x^2+b$ ، ميل المماس للتابع في نقطة منه تساوي قيمة المشتق في تلك النقطة ،نعوض: $f'(1)=m$

$2=1+b$ ومنه: $b=1$

و منه $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x+2$

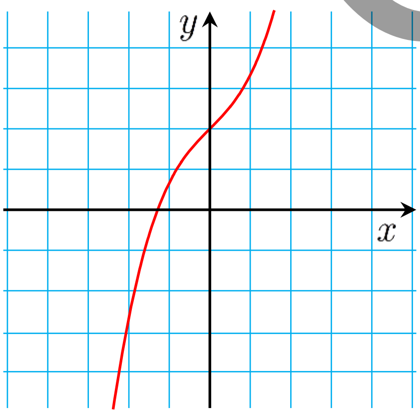
2. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty, \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$f'(x)=x^2+1>0$ ، f متزايد تماماً على $]-\infty,+\infty[$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+ + +	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

نقاط مساعدة للرسم :

x	-1	0	1
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	2	$\frac{10}{3}$



لنتعلّم البحث معاً

14 هل يوجد تابع كسري f من الشكل $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ يحقّق $f\;2\;=1**2$ ، ويقبل خطّه البياني C_f مقاربين $x=1$ و $y=1$؟

الحل

لدينا $c\neq 0$ وإلا فإن f ليس تابعاً كسرياً وبتقسيم البسط و المقام على c نجد:

$$f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{x+\delta} \quad \text{حيث} \quad \alpha=\frac{a}{c}\ ,\ \beta=\frac{b}{c}\ ,\ \delta=\frac{d}{c}$$

$$D_f=]-\infty,-\delta[\cup]-\delta,+\infty[$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\alpha,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\alpha \bmod$$

و منه المستقيم $\Delta: y=\alpha$ مقارب لـ C_f يوازي xx'

بالمقارنة مع الفرض $y=1$ مقارب لـ C_f نجد أن $\alpha=1$ و منه $a=c \ldots\ldots\ 1$

$$\lim_{x\to-\delta} f(x)=\pm\infty$$

و منه المستقيم $\Delta_1: x=-\delta$ مقارب لـ C_f يوازي yy'.

بالمقارنة مع المقارب $x=1$ نجد $-\delta=1$ ومنه $\delta=-1 \ldots\ldots\ 2$

ثم أن $f(2)=1$ نجد أن $\dfrac{2\alpha+\beta}{2+\delta}=1 \ldots\ldots\ 3$ ومنه $\dfrac{2+\beta}{1}=1$ ومنه $\beta=-1$

ومنه $f(x)=\dfrac{x-1}{x-1}$ ، أي $f(x)=1$ وهو تابع ثابت .

15 هل يوجد تابع كثير حدود f من الدرجة الثالثة، فردي، ويقبل خطّه البياني C_f مماساً أفقياً في النقطة $A\ \ 1,1$؟

الحل

$$f(x)=ax^3+bax^2+cx+d$$

التابع f فردي وكثير حدود من الدرجة الثالثة و معرف على $\mathbb{R}$ لذا نجد أن C_f يمر من $(0,0)$ ومنه:

$f(0)=0$ ، أي $d=0 \ldots\ldots\ 1$

و بما أن التابع فردي $(0,0)$ مركز تناظر لـ C_f

f معرف و اشتقاقي على $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$ ، مشتقه هو $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

و بما أن المماس في $(1,1)$ أفقي، لذا يكون ميله $m=0$ أي $f'\ \ 1\ =0$ ، وهذا يكافئ:

$3a+2b+c=0 \ldots..\ 2$

و بما أن $(0,0)$ مركز تناظر لذا نجد أن : $f(1)+f(-1)=0$

$a+b+c+d-a+b-c+d=0$ تكافئ $2b+2d=0$

و بما أن $d=0$ نجد $b=0 ...... 3$

ومنه $f(1)=1$ ، نعوض $a(1)^3+c=1$ أي : $a+c=1 ...... 4$

نعوض 3 في 2 فنجد $3a+c=0 ...... 5$

بحل 4 و 5 نجد أن $2a=-1$ ومنه $a=\frac{-1}{2}$, $c=\frac{3}{2}$ والتابع f هو $f(x)=\frac{-1}{2}x^3+\frac{3}{2}x$

16 حل المتراجحة الآتية.

$$-x^2+7x-4<\frac{x+4}{x-1}$$

الحل

المتراجحة من الشكل $f(x)<g(x)$ ، حيث $f(x)=-x^2+7x-4$ ، $g(x)=\frac{x+4}{x-1}$

لندرس كل من التابعين g,f و نرسم خطهما البيانيين

التابع f معرف و اشتقاقي على $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$f'(x)=2x+7$ ، ينعدم $f'(x)$ عند $x=\frac{7}{2}$ و $f\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{33}{4}$

فيكون للتابع f جدول التغييرات التالي :

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{33}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

نقاط مساعدة للرسم :

x	0	1	2	5	6	7
$y=f(x)$	-4	2	6	6	2	-4

أما بالنسبة للتابع $g(x)=\frac{x+4}{x-1}$ ، فإن التابع g معرف و اشتقاقي على كل من $]-\infty,1[,]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1, \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$

ومنه المستقيم $y=1$ الموازي لـ xx' هو مقارب لـ C_g بجوار $(-\infty)$ وبجوار $(+\infty)$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \xrightarrow{<} 1} g(x) = -\infty$$

و منه $x = 1$ مقارب لـ C_g يوازي yy'، ولـ C_g فرعان أحدهما على يسار المقارب والآخر على يمين المقارب .

$$g'(x) = \frac{-5}{(x-1)^2} < 0$$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$			1			$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$-$		$\|\|$		$-$	$-$
$g(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	1

نقاط مساعدة للرسم:

x	-4	0	2	6
$y = g(x)$	0	-4	6	2

فواصل النقط المشتركة بين C_g و C_f هي حلول المعادلة $f(x) = g(x)$

و بالإصلاح نجد أن هذه المعادلة تكافئ $-x^3 + 8x^2 - 12x = 0$

و تكافئ $-x(x^2 - 8x + 12) = 0$ ،إما $x = 0$ ومنه $y = -4$

أو $x = 2$ ومنه $y = 6$، أو $x = 6$ ومنه $y = 2$

فالنقاط المشتركة هي $(0,-4),(2,6),(6,2)$ ومن الرسم البياني نجد أن C_f يقع تحت C_g عندما $x \in]-\infty,0[\cup]1,2[\cup]6,+\infty[$ وهي مجموعة حلول المتراجحة .

طريقة (2) يمكن حل المتراجحة جبرياً كالأتي :

المتراجحة تكافئ $-x^2 + 7x - 4 - \dfrac{x+4}{x-1} < 0$

وتكافئ $\dfrac{-x^3 + 8x^2 - 12x}{x-1} < 0$ وتكافئ $\dfrac{-x(x^2 - 8x + 12)}{x-1} < 0$

ينعدم البسط عندما $x \in \ 0,2,6$ وينعدم المقام عندما $x = 1$

الجدول :

x	$-\infty$ 0 1 2 6 $+\infty$
$-x$	$+ \quad + \quad 0 \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$
$x^2 - 8x + 12$	$+ \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad + \quad +$
$x - 1$	$- \quad - \quad - \quad - \quad 0 \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +$
$\dfrac{-x^3 + 8x^2 - 12x}{x-1}$	$- \quad - \quad 0 \quad + \quad - \quad \Vert \quad 0 \quad + \quad 0 \quad - \quad -$
���������	محققة ▨ ‖ محققة ▨ محققة

مجموعة حلول المتراجحة هي $x \in \left]-\infty,0\right[\cup \left]1,2\right[\cup \left]6,+\infty\right[$

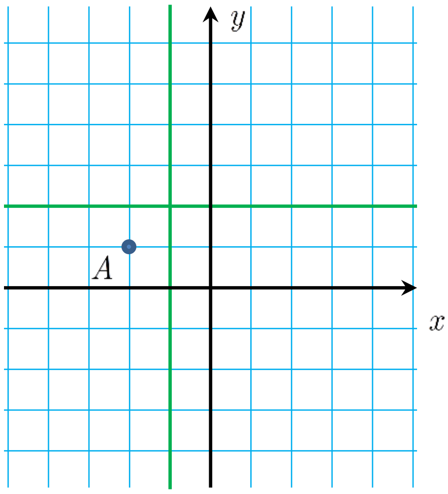
قُدُماً إلى الأمام

17 تعيين تابع

1. عيِّن النقطة $A \ -2,1$ في مَعْلَم متجانس، وارسم المستقيمين $d : x = -1$ و $\Delta : y = 2$.
2. ليكن التابع $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$. عين الأعداد a و b و c ليمر الخط البياني $\mathbf{C}_f$ للتابع بالنقطة A ويقبل d مقارباً شاقوليّاً، و Δ مقارباً أفقياً.
3. ادرس التابع f وارسم $\mathbf{C}_f$.

الحل

.1



.2 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$

التابع f معرف و اشتقاقي على كل من $]-\infty,-c[,]-c,+\infty[$

$A(-2,1)\in C_f$ ومنه $f(-2)=1$ ومنه $1=\dfrac{-2a+b}{-2+c}\ldots\ldots\ 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$

و منه المستقيم $y=a$ مقارب لـ C_f يوازي xx'

بالمقارنة مع المقارب $\Delta : y=2$ نجد أن $a=2\ldots\ldots\ 2$

$\lim\limits_{x\to-c} f(x)=\pm\infty$ نلاحظ أن نهاية f عند $-c$ تساوي $-\infty$ أو $+\infty$

و منه المستقيم $x=-c$ مقارب لـ C_f يوازي yy'

بالمقارنة مع المقارب

$d : x=1$ نجد أن $-c=1$ ومنه $c=-1\ldots\ldots\ 3$

نعوض في 1 فنجد أن $b=3$ و التابع هو $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$

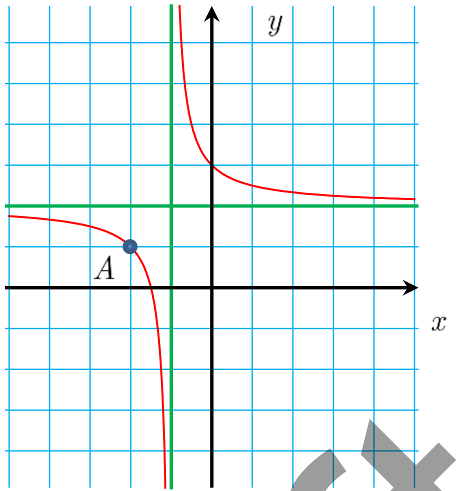
.3 $f'(x)=\dfrac{-1}{(x+1)^2}<0$

x	$-\infty$			-1			$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$-$		‖		$-$	$-$
$g(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$	‖	$+\infty$	$\searrow$	2

نقط مساعدة للرسم فواصل نقط التقاطع مع xx' هي حلول $f(x)=0$ ، وتكافئ

ومنه $2x+3=0$ ومنه $x=\frac{-3}{2}$ ، إذن xx' يقطع C_f في النقطة $\left(-\frac{3}{2},0\right)$

فاصلة نقطة تقاطع C_f مع yy' هي $x=0$ ، وترتيبها هو $y=f(0)=3$ فالنقطة هي $(0,3)$



18 لنتأمّل جماعة التوابع f_m المعرفة على الوجه الآتي : $f(x)=\frac{mx+2}{x-m}$ حيث $m\in\mathbb{R}$.

نرمز إلى الخط البياني للتابع f_m بالرمز $\mathbf{C}_m$. عيِّن الخطوط البيانيّة $\mathbf{C}_m$ التي تحقق «المماس في النقطة التي فاصلتها $x=2$ يوازي المستقيم d الذي معادلته $3x+y=0$ و ».

الحل

$$f_m(x)=\frac{mx+2}{x-m}$$

f_m معرف و اشتقاقي على $]-\infty,m[,]m,+\infty[$

ميل المستقيم $d: 3x+y=0$ هو $m=-3$ ، وبما أن المماس لـ C_m في النقطة $(2,f(2))$ يوازي d

فإن لهما نفس الميل ، وبالتالي $f'(2)=-3$ ولكن $f'(x)=\frac{-m^2-2}{(x-m)^2}$

ومنه $-3=\frac{-m^2-2}{(x-m)^2}$ بالإصلاح نجد: $m^2-6m+5=0$ و لها حلان $m=1$ أو $m=5$

من أجل $m=1$ التابع الموافق هو $f_1(x)=\frac{x+2}{x-1}$

وبما أن $f_1(2)=\frac{4}{1}=4>0$ وبالتالي C_1 خط التابع f_1 يحقق المطلوب.

ومن أجل $m=5$ التابع الموافق هو $f_5(x)=\frac{5x+2}{x-5}$

وبما أن $f_5(2)=\frac{12}{-3}=-4<0$ ، فإن f_5 لا يحقق شروط المسألة فهو مرفوض .

و منه التابع الموافق هو $f_1(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ وخطه البياني C_1 موضح في الشكل يرسم بخطوات مماثلة للتمرين السابق .

19 دراسة توابع

ادرس التوابع الآتية وارسم الخط البياني الممثل لكلٍ منها، وفي حال وجود مقارب أفقي أو مائل Δ بيِّن وضع المنحني بالنسبة لهذه المقاربات، معيِّناً نقاط التقاطع معها.

① $f(x)=\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-1)^2}$ ② $f(x)=x^3+x-2$

③ $f(x)=x-2+\dfrac{1}{x}$ ④ $f(x)=-2x^4+x^2-1$

⑤ $f(x)=2x-1+\dfrac{1}{x^2}$ ⑥ $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

⑦ $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+x+1}$ ⑧ $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x(x-3)}$

الحل

① $f(x)=\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-1)^2}$ نكتبه بالشكل $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-2x+1}$

التابع f معرف و اشتقاقي على كل من $]-\infty,1[\,,\,]1,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

و منه المستقيم $\Delta : y=1$ الموازي لـ xx' مقارب لـ C_f

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=-\infty$$

و منه المستقيم $\Delta_1 : x=1$ الموازي لـ yy' مقارب لـ C_f، ولـ C_f فرعان أحدهما على يسار المقارب والآخر على يمين القارب .

الوضع النسبي لـ C_f مع Δ: $f(x)-y_\Delta=\dfrac{x^2+x-6}{(x-1)^2}=\dfrac{3x-7}{(x-1)^2}$

ينعدم $f(x)-y_\Delta$ عند $x=\dfrac{7}{3}$ ، وبما أن $(x-1)^2>0$ فإشارة $f(x)-y_\Delta$ من إشارة $3x-7$

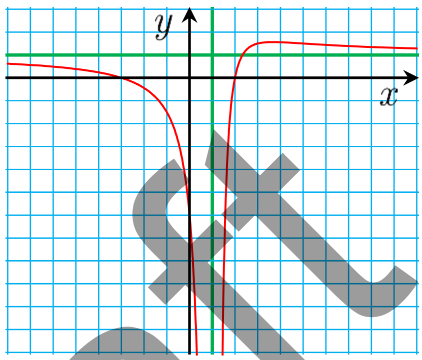
x	$-\infty$	1	$\frac{7}{3}$	$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	$-$	‖ $-$	0	$+$
الوضع النسبي	C_f يقع تحت Δ	‖ C_f يقع تحت Δ		C_f يقع فوق Δ

والنقطة $\left(\dfrac{7}{3},1\right)$ هي نقطة تقاطع المقارب Δ مع الخط C_f.

$f'(x)=\dfrac{11-3x}{(x-1)^3}$ ينعدم f' عند $x=\dfrac{11}{3}$ ، ولدينا : $\dfrac{25}{16}=f\left(\dfrac{11}{3}\right)$ ومنه جدول التغيرات التالي :

x	$-\infty$		1		$\frac{11}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$\frac{25}{16}$	$\searrow$	1

ونستنتج أن $\dfrac{25}{16}=f\left(\dfrac{11}{3}\right)$ هي قيمة كبرى محلياً للتابع .



20 لتكن b عدداً مختلفاً عن الصفر. ولنتأمّل التوابع الثلاثة الآتية.

..

1. أيٌّ هذه التوابع يقبل المستقيمات الثلاث الآتية مقاربات له، وليس له مقاربات غيرها؟

$$\Delta : y=1,\quad d_1 : x=-1,\quad d_2 : x=2$$

2. عيِّن قيم العدد b التي تجعل منحنى التابع المعين في الطلب 1. يقطع المستقيم Δ عند $x=1$.

3. عين قيم العدد b كي يكون لمنحنى التابع المعين في الطلب 1. مماساً أفقياً في المبدأ O.

الحل

1. كل تابع من التوابع معرف على $\mathbb{R}\setminus -1,2$ ،أي معرف على كل من $]-\infty,-1[\,,\,]-1,2[\,,\,]2,+\infty[$ وكل تابع معين بقاعدة ربط واحدة و بالتالي نبحث عن مقاربات الخطوط البيانية لكل منها بأنّ ننهي المتغير لأطراف مجالات التعريف المفتوحة .

• $f(x)=\dfrac{x^2+bx}{x^2-x-2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ و منه $\Delta : y=1$ مقارب لـ C_f يوازي xx'

أما عندما $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ و $b=1$ نجد حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{0}{0}$ لإزالتها:

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\frac{1}{3} \text{ ومنه } f(x)=\frac{x^2+1\cdot x}{x^2-x-2}=\frac{x\cdot(x+1)}{(x-2)(x+1)}=\frac{x}{x-2}$$

ومنه $x=-1$ في هذه الحالة ليس مقارب وبالتالي f ليس التابع المطلوب.

- $g(x)=\dfrac{2x+b}{(x+1)(x-2)}$

وبطريقة مماثلة لما سبق من أجل $b=2$ نجد أن $g(x)=\dfrac{2x+2}{(x+1)(x-2)}=\dfrac{2}{x-2}$

$$\lim_{x\to -\infty} g(x)=\lim_{x\to +\infty} g(x)=0$$

و منه $y=0$ مقارب لـ C_g منطبق على xx' و هو غير المقاربات المطلوبة

- $h(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{b}{x-2}+1$

$$\lim_{x\to -\infty} h(x)=\lim_{x\to +\infty} h(x)=1$$

و منه $y=1$ مقارب لـ C_h يوازي xx' و هو إحدى المقاربات المطلوبة

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} h(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} h(x)=-\infty$ ومنه $x=-1$ مقارب لـ C_h يوازي $y'y$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} h(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} h(x)=-\infty$ ومنه $x=2$ مقارب لـ C_g يوازي $y'y$

2. $\Delta: y=1$ يقطع C_g عند $x=1$ أي $\dfrac{1}{1+1}+\dfrac{b}{1-2}+1=0$ ومنه $b=\dfrac{3}{2}$

3. التابع h اشتقاقي على كل من المجالات $]-\infty,-1[\,,\,]-1,2[\,,\,]2,+\infty[$

و مشتقه $h'(x)=\dfrac{-1}{(x+1)^2}-\dfrac{b}{(x-2)^2}$ ، C_h يقبل مماسا أفقياً في المبدأ $O(0,0)$ لما

$h'(x)=0$ أي أي $\dfrac{-1}{(0+1)^2}-\dfrac{b}{(0-2)^2}=0$ ومنه $b=-4$.

21 ليكن التابعين f و g المعرفين على $\mathbb{R}\setminus 0$ بالعلاقتين :

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1} \text{ و } g(x)=x+1+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

أثبت أنّ للمنحنيين C_f و C_g المقاربات الشاقوليّة والمائلة نفسها. ثم عيّن نقاط تقاطع المنحنيين إن وُجدت.

الحل

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1}\ ,\ g(x)=x+1+\frac{1}{(x-1)^2}$$

كل من التابعيين g,f معرف و اشتقاقي على $]-\infty,1[\,,\,]1,+\infty[$

أولاً : $\lim\limits_{x\to+\infty} f\ x\ = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f\ x\ = -\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = +\infty$ و منه $x=1$ مقارب لـ C_f يوازي yy' .

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1}=\frac{x^2-1+1}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}$$

لنأخذ المستقيم $\Delta : y = x+1$ فنجد أن :

$$f(x)-y_\Delta=\frac{1}{x-1}$$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$

و منه $\Delta : y=x+1$ مقارب مائل لـ C_f عند $-\infty$ و عند $+\infty$

ثانياً : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

و بسهولة نجد أن $\Delta : y=x+1$ مقارب مائل لـ C_g عند $-\infty$ و عند $+\infty$

كما نجد أن $x=1$ مقارب لـ C_g يوازي yy'

لإيجاد نقط تقاطع C_f مع C_g نحل المعادلة $f(x)=g(x)$ و منه $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{(x-1)^2}$

أي $1=x-1$ و منه $x=2$ ، $g(2)=f(2)=4$ و منه $C_f \cap C_g = (2,4)$

و المستقيمات $\Delta : y=x+1$ و $d : x=1$ مقاربان لكل من C_f و C_g .

22 ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\ 1,4$ وفق $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)(x-4)}$ ، و C_f خطّه البياني.

1. ادرس التابع f ، ثم ارسم C_f .
2. بالاعتماد على الرسم، ناقش تبعاً لقيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.

الحل

1. $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)(x-4)}$ نكتب f بالشكل $f(x)=\dfrac{x}{x^2-5x+4}$

التابع f معرف و اشتقاقي على كل من $]-\infty,1[\ ,\ ]1,4[\ ,\ ]4,+\infty[$

لإيجاد النهاية ندرس إشارة المقام

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$(x-1)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

و منه $y=0$ مستقيم مقارب لـ C_f منطبق على xx'

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)=+\infty$

و منه $x=1$ مستقيم مقارب لـ C_f يوازي yy'

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 4} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \xrightarrow{<} 4} f(x) = -\infty$$

و منه $x=4$ مستقيم مقارب لـ C_f يوازي yy'

$$f'(x) = \frac{1(x^2-5x+4)-(2x-5)x}{(x^2-5x+4)^2} = \frac{-x^2+4}{(x^2-5x+4)^2}$$

ينعدم $f'(x)$ لما $-x^2+4$ ومنه $f(2)=-1 \quad x=2.$

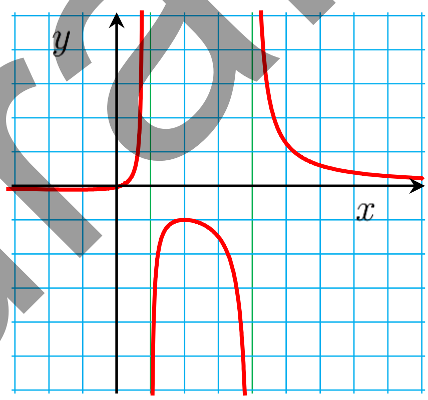
أو $f(-2) = -\frac{1}{9} \quad x=-2.$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-2		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{9}$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

قيمة كبرى محلياً $f(2)=-1$ ، قيمة صغرى محلياً $f(-2)=-\frac{1}{9}$

التقاطع مع المحاور الإحداثية $x=0, f(0)=0$ ومنه $(0,0)\in C_f$



2. حلول المعادلة $f(x)=m$. $m\in\mathbb{R}$

هي فواصل نقط تقاطع C_f مع مجموعة المستقيمات $y=m$ الموازية للمحور $x'x$

نلاحظ من الرسم أنّه عندما $m \in \left\{0. -1. -\frac{1}{9}\right\}$ فإن للمعادلة حل وحيد

عندما $m \in \left]-\infty -1\right[\cup \left]-\frac{1}{9},0\right[\cup \left]0,+\infty\right[$ فللمعادلة حلان

عندما $m \in \left]-1. -\frac{1}{9}\right[$ فالمعادلة مستحيلة الحل .

23 بيّن صحة أو خطأ كلٍّ من المقولات الآتية مُعلّلاً إجابتك. ليكن C_f و C_g الخطّان البيانيّان الممثّلان للتابعين

$$f(x)=\frac{2x^2-x-4}{x-1} \quad \text{و} \quad g(x)=2x+1+\frac{x}{(x-1)^2}$$

① للخطّين البيانيين X_f و X_g المقاربات نفسها.

② ليس للخطّين البيانيين X_f و X_g نقاط تقاطع.

③ لكلٍ من الخطّين البيانيين X_f و X_g مركز تناظر.

الحل

①نبسّط $f(x)=\frac{2x^2-x-4}{x-1}$ بأن نقسم البسط على المقام فنجد $f(x)=2x+1+\frac{-3}{x-1}$

كل من التابعين g,f معرف و اشتقاقي على $]-\infty,1[\,,\,]1,+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=-\infty$$

و منه $x=1$ مقارب لـ C_f يوازي yy'

نلاحظ أن $f(x)-y_\Delta=\frac{-3}{x-1}$ وبالتالي $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3}{x-1}\right)=0,\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-3}{x-1}\right)=0$

و منه $\Delta: y=2x+1$ مقارب مائل لـ C_f عند $-\infty$ و عند $+\infty$

نقطة تقاطع المقاربين $x=1$ و $\Delta: y=2x+1$

هي $N(1,3)$ مركز تناظر للخط البياني C_f

لأنه (1 أياً كان $1+x\in D_f$ فإن $1-x\in D_f$ أي $1+x\in D_f$ أي $1+x\in\mathbb{R}\setminus\ 1$ أي

$1+x\neq 1$ ومنه $x\neq 0$ أي $-x\neq 0$ نجمع 1

$1-x\neq 1$ أي $1-x\in\mathbb{R}\setminus\ 1$

② من جهة ثانية ، نتحقق أن $f(1+x)+f(1-x)=2b$

$$L_1=2(1+x)+1+\frac{-3}{1+x-1}+2(1-x)+1+\frac{-3}{1-x-1}=2(3):b=3$$

$$=2+1+2+1=6=2(3)=L_2$$

محقق و منه $A(1,3)$ مركز تناظر لـ C_f

③ $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}1} g(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1} g(x)=+\infty$$

و منه $x=1$ مقارب لـ C_g يوازي yy' ونلاحظ أن $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(g(x)-y_{\Delta})=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\frac{x}{(x-1)^2})=0$

و منه $\Delta: y=2x+1$ هو مقارب مائل لـ C_g عند $+\infty$ و عند $-\infty$

نقطة تقاطع مقاربي C_g هي $A(1,3)$

تحقق أياً كان $1+x\in D_g$ فإن $1-x\in D_g$ حيث $D_g=\mathbb{R}\setminus 1$ محقق .

$$g(1+x)+g(1-x)=2(1+x)+1+\frac{1+x}{(1+x-1)^2}+2(1-x)+1+\frac{1-x}{(1-x-1)^2}=6+\frac{2}{x^2}\neq 2b$$

فالنقطة $A(1,3)$ ليست مركز تناظر لـ C_g

لإيجاد فواصل نقط تقاطع C_g مع C_f لما ، نحل المعادلة $f(x)=g(x)$

والتي تكافئ $2x+1+\frac{x}{(x-1)^2}=1+2x+\frac{-3}{x-1}$، ومنه $\frac{x}{x-1}=\frac{-3}{1}$ ومنه $-3x+3=x$

ومنه $x=\frac{3}{4}$ ومنه $4x=3$

$$f\left(\frac{3}{4}\right)=2\left(\frac{3}{4}\right)+1+\frac{-3}{\frac{3}{4}-1}=\frac{3}{2}+1+\frac{-3}{-\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}+1+12=\frac{29}{2}$$

إذن $C_f\cap C_g=\left\{\left(\frac{3}{4},\frac{29}{2}\right)\right\}$

مما سبق نستنتج أن :

① للخطين البيانيين C_f و C_g المقاربات نفسها ، صحيحة .

② ليس للخطين البيانيين C_f و C_g نقاط تقاطع، خاطئة .

③ لكل من الخطين البيانيين C_f و C_g مركز تناظر ، خاطئة، لأن C_g ليس له مركز تناظر.

24 ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=-\frac{x^3}{3}+2x^2-4x+1$. وليكن X_f خطّه البياني في معلم متجانس.

1. ادرس التابع f .
2. أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $\alpha\in\mathbb{R}$. واحسب قيمة α بتقريب 10^{-2} .
3. استنتج مما سبق إشارة $f(x)$ ، ثم ارسم المنحني X_f .

الحل

1. التابع $f(x)=-\frac{x^3}{3}+2x^2-4x+1$ هو تابع كثير حدود فهو معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}=\left]-\infty,+\infty\right[$

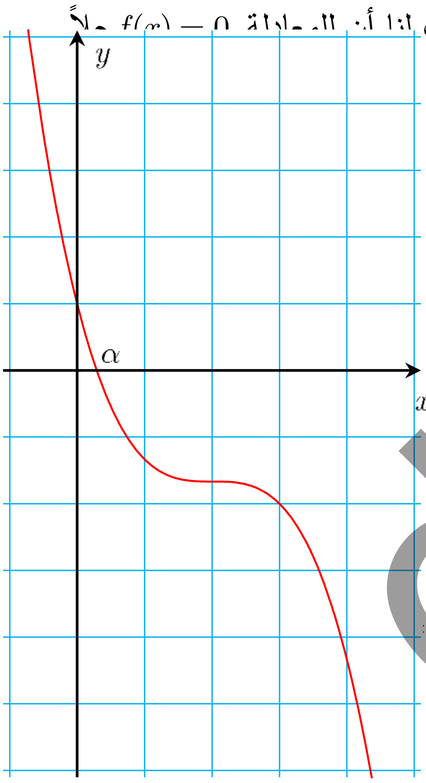
لدينا $\lim_{x\to+\infty} f\;x\; = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ومشتقه هو $f'(x) = -x^2 + 4x - 4$ ينعدم f' عند $x = 2$ ولدينا $f(2) = -\dfrac{5}{3}$ ، وأياً كانت $x \in \mathbb{R}$ فإن $f'(x) \le 0$ ،ومنه الجدول التالي :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	$-\dfrac{5}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

ليس لهذا التابع قيمة كبرى ولا صغرى محلياً، ومن الجدول نجد أنه :

التابع f متناقص تماماً (وبالتالي مطرد تماماً) على $\mathbb{R}$ ، لأن f' ذو إشارة ثابتة على $\mathbb{R}$ ماعدا نقطة واحدة هي فقط هي $x = 2$ ، (حيث: $f'(x) < 0$ عندما $x \ne 2$ و $f'(2) = 0$)

ونلاحظ أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ من إشارتين مختلفتين وهذا يثبت لنا أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في $\mathbb{R}$



ونلاحظ أن :

$f(1) = -\dfrac{3}{4} < 0$ و $f(0) = 1 > 0$ ومنه : $\alpha \in \left]0,1\right[$

كما أن $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{13}{24} < 0$ ومنه $\alpha \in \left]0,\dfrac{1}{2}\right[$

كما أن $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{10}{81} < 0$ ومنه $\alpha \in \left]0,\dfrac{1}{3}\right[$

$f\left(\dfrac{1}{4}\right) \approx 0.119791 > 0$ ومنه $\alpha \in \left]\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3}\right[$

وطول المجال $\left]\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3}\right[$ هو $\dfrac{1}{12}$ فهو أصغر من 10^{-2} وبالتالي 0.333

نستنتج إشارة من الجدول التالي

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

25 ليكن f_1 و f_2 التابعين المعرفين كما يلي: $f_1(x) = \dfrac{x-2}{1+x}$ و $f_2(x) = \dfrac{x-2}{1-x}$:

1. ادرس كلاً من التابعين f_1 و f_2 ، وارسم خطيهما البيانيين X_1 و X_2 في المعلم نفسه.
2. استنتج مما سبق الخط البياني X_f الممثل للتابع f المعرف وفق $f(x) = \dfrac{x-2}{|x|+1}$.
3. هل يقبل التابع f الاشتقاق عند $x = 0$ ؟

الحل

1. أولاً: التابع f_1 $\quad x = \dfrac{x-2}{1+x}$ f_1 معرف و اشتقاقي على $\left]-\infty,-1\right[,\left]-1,+\infty\right[$

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x)=1,\ \lim_{x\to+\infty} f_1(x)=1$$

و منه $y=1$ مستقيم مقارب لـ C_1 يوازي xx'

$$\lim_{x\xrightarrow{<}-1} f_1(x)=+\infty,\ \lim_{x\xrightarrow{>}-1} f_1(x)=-\infty$$

و منه $x=-1$ مستقيم مقارب لـ C_1 يوازي yy'

$f_1'(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0$ جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$ $+\infty$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	1

التقاطع مع المحاور : C_1يقطع $x'x$ بالنقطة $(2,0)$ ويقطع $y'y$ بالنقطة $(0,-2)$

ثانياً : التابع f_2 $\quad f_2(x)=\dfrac{x-2}{-x+1}$ معرف و اشتقاقي على $\left]-\infty,1\right[,\left]1,+\infty\right[$

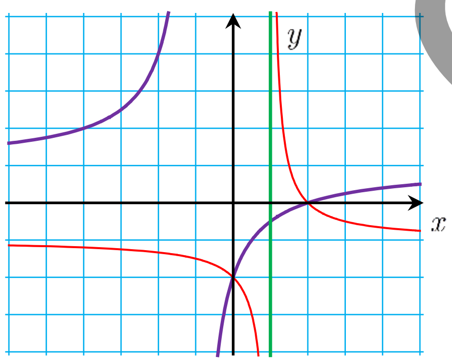
$$\lim_{x\to-\infty} f_2(x)=-1,\ \lim_{x\to+\infty} f_2(x)=-1$$

و منه $y=-1$ مستقيم مقارب لـ C_2 يوازي xx'

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1} f_2(x)=+\infty,\ \lim_{x\xrightarrow{<}1} f_2(x)=-\infty$$

و منه $x=1$ مستقيم مقارب لـ C_2 يوازي yy'

$f_2'(x)=\dfrac{-1}{(-x+1)^2}<0$ جدول التغيرات :



x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$-\infty$ $\searrow$	-1

التقاطع مع المحاور C_2 يقطع $x'x$ بالنقطة $(2,0)$

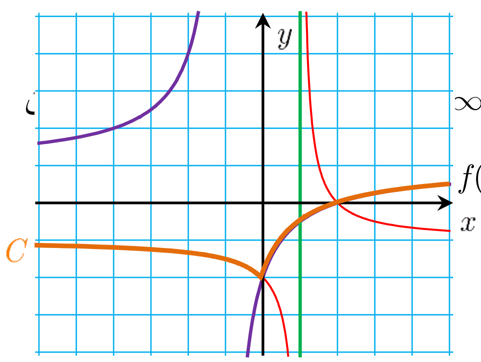
ويقطع $y'y$ بالنقطة $(0,-2)$

2. عندما $x\in\left[0,+\infty\right[$ فإن $|x|=x$ ، ومنه :

$$f(x)=f_1(x)=\frac{x-2}{x+1}$$

أي C ينطبق على C_1 عندما $\infty[$ ... ن $|x|=-x$

ومنه $f_2(x)=\dfrac{x-2}{-x+1}=f(x)$



وبالتالي C منطبق C_2 عندما $x \in]-\infty,0]$ و خطه البياني C كما في الشكل السابق.

3. قابلية اشتقاق f عند $x=0$

$$f(x)=\frac{x-2}{|x|+1}=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x+1} & : \ x \geq 0\\[2mm] \dfrac{x-2}{1-x} & : \ x \leq 0\end{cases}$$

$$t(h)=\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

عندما $x \leq 0$ نجد:

$$t(h)=\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{\dfrac{h-2}{h+1}-(-2)}{h}=\frac{\dfrac{h-2}{h+1}+2}{h}=\frac{3h}{h(h+1)}=\frac{3}{h+1}$$

وبالتالي العدد المشتق للدالة f من اليمين عند $x=0$ هو :

$$\lim_{h\to 0^+} t(h)=\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{3}{h+1}\right)=3$$

عندما $x \leq 0$ نجد

$$t(h)=\frac{\dfrac{h-2}{1-h}+2}{h}=\frac{-h}{h(1-h)}=\frac{-1}{h+1}$$

و العدد المشتق للدالة f من اليسار عند $x=0$ هو :

$$\lim_{h\to 0^-} t(h)=\lim_{h\to 0^-}\left(\frac{-1}{h+1}\right)=-1$$

نلاحظ أن : $\lim\limits_{h\to 0^+} t(h) \neq \lim\limits_{h\to 0^-} t(h)$ وبالتالي التابع f غير اشتقاقي عند $x=0$

26 ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=\frac{3}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+4$ ، وليكن X_f خطّه البياني في معلم متجانس.

1. ادرس التابع f.
2. أثبت أن النقطة $I(1,1)$ هي مركز تناظر للمنحني X_f ثم ارسم X_f.
3. ليكن التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+4$. وليكن X_g خطّه البياني. ادرس التابع g، ثم ارسم X_g في المعلم نفسه.
4. عيّن نقاط التقاطع الممكنة بين X_f و X_g.

الحل

1. التابع f معرف و اشتقاقي على $\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$

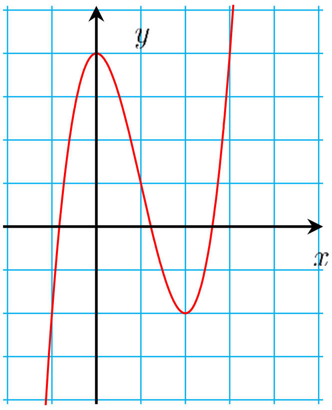
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$f'(x) = \frac{9}{2}x^2 - 9x$ ينعدم $f'(x)$ لما $\frac{9}{2}x^2 - 9x = 0$

أي $\frac{9}{2}x(x-2) = 0$ إما $x = 0$ ومنه $f(0) = 4$ ،أو $x = 2$ ومنه $f(2) = -2$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$



$f(0) = 4$ قيمة كبرى محلياً

$f(2) = -2$ قيمة صغرى محلياً

.2 $I(1,1)$ مركز تناظر للخط C

أياً كان $1 + x \in \mathbb{R}$ فإن $1 - x \in \mathbb{R}$

محققة $f(1+x) + f(1-x) = 2(1)$

$$l_1 = \frac{3}{2}(1+x)^3 - \frac{9}{2}(1+x)^2 + 4 + \frac{3}{2}(1-x)^3 - \frac{9}{2}(1-x)^2 + 4$$
$$= \frac{3}{2}(6x^2+2) - \frac{9}{2}(2x^2+2) + 8 = 9x^2 + 3 - 9x^2 - 9 + 8 = 2 = l_2$$

محققة و منه النقطة $I(1,1)$ مركز تناظر لـ C

نقاط مساعدة للرسم :

x	-1	3
y	-2	2

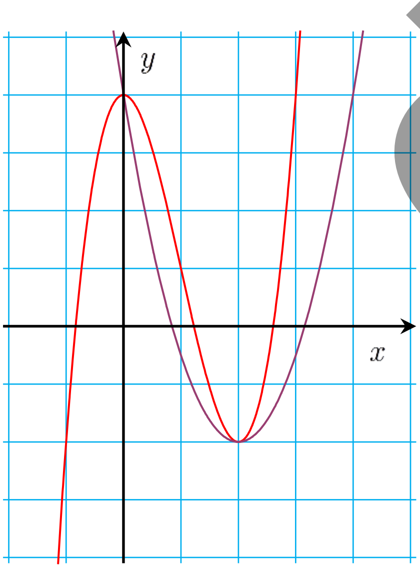
.3 التابع g معرف و اشتقاقي على $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty, \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$g'(x) = 3x - 6$ ، ينعدم $g'(x)$ لما $x = 2$ ، $g(2) = -2$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$



التقاطع مع المحاور :

مع yy'

$g(0) = 4$ ، $x = 0$ ومنه $(0,4) \in C_g$

مع xx'

$g(0)=0$ ، $\frac{3}{2}x^2-6x+4=0$ ومنه $x_1=2-\frac{3}{2}\sqrt{3}$ ، $x_2=2+\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$(x_2,0)\in C_g,(x_1,0)\in C_g$

4. لإيجاد نقطة التقاطع الممكنة بين $C_g\,,C_f$ نحل المعادلة $f(x)=g(x)$

أي $\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x^2+4=\frac{3}{2}x^2-6x+4$

و بالتالي $\frac{3}{2}x^3-6x^2+6x=0$

$$\frac{3}{2}x(x^2-4x+4)=0$$

لها حلان إما $\frac{3}{2}x=0$ و منه $x=0$ $g(0)=0$

أو $x^2-4x+4=0$ أي $(x-2)^2=0$ و منه $x=2$ $g(2)=-2$

أي النقاط المشتركة بين $C_f\,,C_g$: $(2,-2)$ ، $(0,4)$

27 هل يوجد تابع كثير حدود f من الدرجة الثالثة، ويقبل خطّه البياني X_f مماساً أفقياً في النقطة $A(0,3)$، ومتناظر بالنسبة إلى النقطة $I(1,2)$؟ في حال وجود هذا التابع ادرسه وارسم خطّه البياني.

الحل

نبحث عن تابع من الشكل: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ويحقق شروط المسألة .

$(0,3)\in C_f$ أي أن : $d=3$ ومنه: $f(0)=3$

$f'(0)=0$ ومنه $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ ومنه: $c=0$

و بما أن التابع f معرف على $\mathbb{R}$ فنجد أن C_f يمر من $I(1,2)$ مركز التناظر أي :

$f(1)=2$ وبالتالي : $2=a+b+3$ ومنه : 1 ......$b=-1-a$

و النقطة $A_1(x_1,y_1)$ نظيرة $A(0,3)$ بالنسبة لـ : $I(1,2)$

هي أيضاً تقع على C_f و بما أن I هي منتصف القطعة المستقيمة $[AA_1]$ فإن $x_I=\frac{x_A+x_{A1}}{2}$

ومنه $1=\frac{0+x_1}{2}$ أي $x_1=2$ ، و بالمثل نجد $y_1=1$

و بما أن $A_1(2,1)\in C_f$ نجد $1=8a+4b+3$

أي $4a+2b=+1$ ، وبتعويض 1 في العلاقة الأخيرة نجد أن $a=\frac{1}{2}\,,b=\frac{-3}{2}$

و التابع f هو $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+3$

التابع f معرف و اشتقاقي على $\mathbb{R} = \left]-\infty,+\infty\right[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x$ ينعدم $f'(x)$ لما $\frac{3}{2}x^2 - 3x = 0$ ، وبالتالي $\frac{3}{2}x(x-2) = 0$

إما $x = 0$ ومنه $f(0) = 3$ أو $x = 2$ ومنه $f(2) = 1$

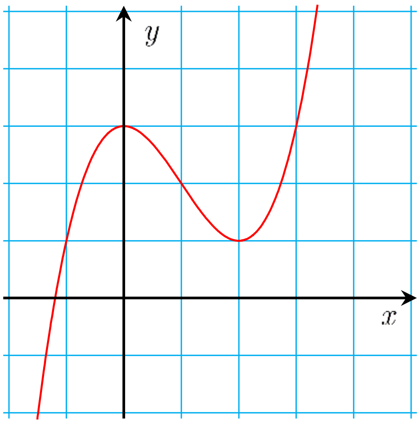
جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

من الجدول نجد أن $f(0) = 3$ هي قيمة كبرى محلياً و $f(2) = 1$

نقاط مساعدة للرسم :

x	-1	3
y	1	3



28 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ كما يلي $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 4$. وليكن X_f خطّه البياني في معلم متجانس.

1. ادرس التابع f .
2. أثبت أن النقطة $I(1,-3)$ هي مركز تناظر للمنحني X_f . ثُمّ ارسم الخط البياني X_f .
3. ليكن التابع g المعرف على $\mathbb{R} \setminus -1$ وفق $g(x) = \frac{4-x}{x+1}$. وليكن X_g خطّه البياني. ادرس هذا التابع، وعين مقارباته الأفقية والشاقولية، ثم ارسم X_g في المعلم نفسه.
4. أثبت أن الخطين البيانيين X_f و X_g يمران بالنقطة $A(0,4)$. ثم عين جميع نقاط تقاطع X_f و X_g .
5. أثبت أن اثنتين من هذه النقاط متناظرتين بالنسبة إلى النقطة I .
6. أثبت أن للخطين البيانيين X_f و X_g مماس مشترك في النقطة A . عين معادلته.

الحل

1. التابع f معرف و اشتقاقي على $\mathbb{R} = \left]-\infty,+\infty\right[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 5$ ينعدم $f'(x)$ لما : $3x^2 - 6x - 5 = 0$

وبالتالي ينعدم f' عند النقطتين : $x_1 = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{6} \approx 2.6$ و $x_2 = 1 - \frac{2}{3}\sqrt{6} \approx -0.6$

$f(x_2) = 5.7 \qquad f(x_1) = -11.7$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-0.6		2.6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5.7	$\searrow$	-11.7	$\nearrow$	$+\infty$

من الجدول نجد أن : $f(-0.6) = 5.7$ هي قيمة كبرى محلياً ، و $f(2.6) = -11.7$ هي قيمة صغرى محلياً .

2. $I(1,-3)$ مركز تناظر لـ C_f لأن :

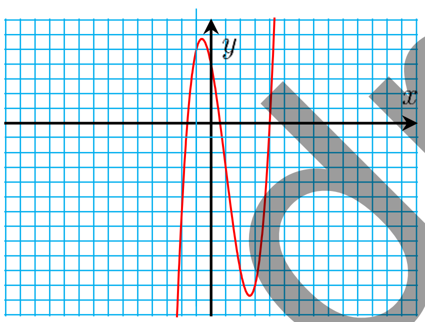
أياً كان $1+x \in \mathbb{R}$ فإن $1-x \in \mathbb{R}$ محققة، والعلاقة: $f(1+x)+f(1-x) = 2(-3)$ محققة لأن :

$$\begin{aligned} l_1 &= f(1+x)+f(1-x) \\ &= (1+x)^3 - 3(1+x)^2 - 5(1+x) + 4 + (1-x)^3 - 3(1-x)^2 - 5(1-x) + 4 \\ &= 2 + 6x^2 - 6 - 6x^2 - 10 + 8 = -6 = l_2 \end{aligned}$$

و منه النقطة $I(1,-3)$ مركز تناظر لـ C_f

نقاط مساعدة للرسم :

x	-1	3
$y = f(x)$	-5	3



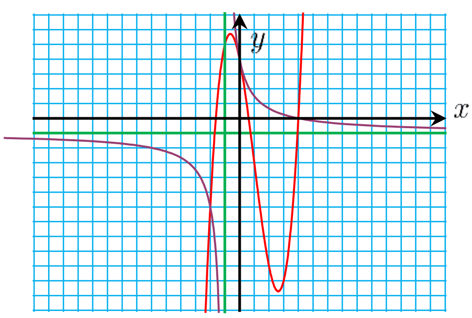
3. التابع g : معرف و اشتقاقي على كل من $\left]-\infty,-1\right[, \left]-1,+\infty\right[$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1, \ \lim_{x\to+\infty} g(x) = -1$$

و منه $y=-1$ مستقيم مقارب لـ C_g يوازي ox

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} g(x) = +\infty, \ \lim_{x \xrightarrow{<} -1} g(x) = -\infty$$

و منه $x=-1$ مستقيم مقارب لـ C_g يوازي yy'



$(0,4) \in C_g$ و $(4,0) \in C_g$ ، $g'(x) = \dfrac{-5}{(x+1)^2} < 0$

.4 $f(0) = g(0) = 4$ و منه النقطة $A\ 0,4$ مشتركة بين C_f و C_g

فواصل النقط المشتركة بين C_f و C_g هي حلول المعادلة $f(x) = g(x)$ والتي تكافئ :

$$x^3 - 3x^2 - 5x + 4 = \frac{4-x}{x+1}$$

ومنه : $x^4 - 2x^3 - 8x^2 = 0$ تكافئ : $x^2(x^2 - 2x - 8) = 0$

إما $x^2 = 0$ و منه $x = 0$, $f(0) = 4$

أو $(x^2 - 2x - 8) = 0$ ومنه : إما: $x_1 = 4$ ومنه : $f(4) = 0$ ، أو: $x_2 = -2$ ومنه: $f(-2) = -6$

و بالتالي $A(0,4), B(4,0), D(-2,-6)$ نقط مشتركة بين C_f و C_g

.5 B, D نقطتان متناظرتان بالنسبة للنقطة $I(1,-3)$

لأن I منتصف $[BD]$ حيث : $\dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{4-2}{2} = 1 = x_I$ ، $\dfrac{y_B + y_D}{2} = \dfrac{0-6}{2} = -3 = y_I$

.6 $g'(0) = -5$, $f'(0) = -5$ و منه لـ C_f و C_g مماس مشترك في النقطة $A(0,4)$

ميله $m = -5$.

و معادلة المماس المشترك : $y - y_A = m(x - x_A)$

و $y - 4 = -5(x - 0)$ ومنه : $y = -5x + 4$

29 ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus -1,1$ وفق $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$. وليكن X_f خطّه البياني في معلم متجانس.

1. ادرس نهايات f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.
2. عين الأعداد a, b, c, d, e التي تُحقِّق :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus -1,1 \ , \quad f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{dx+e}{x^2-1}$$

3. لنعرف التابع g وفق $g(x) = x^2 + 1$ وليكن X_g خطّه البياني. أثبت أن نهاية التابع $(f-g)$ عند $+\infty$ هي الصفر وكذلك عند $-\infty$. (أي إن المنحني X_f يقترب من القطع المكافئ X_g عندما يكون المتحول x كبيراً بقيمته المطلقة. نقول في هذه الحالة إن X_g هو قطع مكافئ مقارب للمنحني X_f).
4. ادرس وضع المنحني X_g بالنسبة لـ X_f . (أي إشارة الفرق $(f-g)$)

5. أثبت أن X_f يقبل مستقيمين مقاربين أوجدهما.

6. ادرس كلّاً من التابعين f و g ثم ارسم X_f و X_g .

الحل

1. التابع f معرف و اشتقاقي على كل من $]-\infty,-1[\,,\,]-1,1[\,,\,]1,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$f(x)=\frac{x^4}{x^2-1}=\frac{x^4-1+1}{x^2-1}=\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-1}$$

$$f(x)=x^2+1+\frac{1}{x^2-1}$$

وهي من الشكل : $f(x)=ax^2+bx+c+\dfrac{dx+e}{x^2-1}$

حيث : $d=b=0$ و $a=c=e=1$

2. ونلاحظ أن : $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-g(x))=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$ ، وبالتالي: القطع المكافئ C_g هو مقارب للمنحني C_f عندما يكون x كبيراً جداً بقيمته المطلقة .

3. دراسة الوضع النسبي لـ C_f بالنسبة إلى C_g

تتم بدراسة إشارة الفرق :

$(f-g)(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ وبما أن البسط موجب فالإشارة من إشارة المقام .

x	$-\infty$ $\quad$ -1	-1 $\quad$ 1	1 $\quad$ $+\infty$
$(f-g)(x)$	$+$	$-$	$+$
الوضع النسبي	C_f يقع فوق C_g	C_f C_f يقع تحت C_g	C_f C_f يقع فوق C_g

4. $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=-\infty$

و منه $x=-1$ مستقيم مقارب لـ C_f يوازي yy'

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty, \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$$

و منه $x = 1$ مستقيم مقارب لـ C_f يوازي yy'

5. تتمة دراسة التابع f : $f'(x) = \dfrac{4x^3(x^2-1) - 2x x^4}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2x^5 - 4x^3}{(x^2-1)^2}$

ينعدم $f'(x)$ لما : $2x^5 - 4x^3 = 0$ يكافئ: $2x^3(x^2-2) = 0$

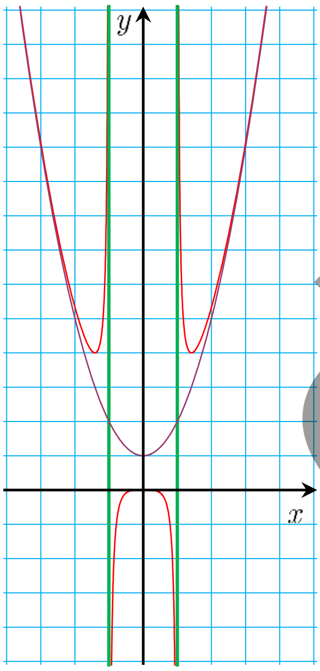
إما : $2x^3 = 0$ ومنه $x = 0$ و $f(0) = 0$ هي قيمة كبرى محلياً

او : $x^2 = 2$ ومنه : إما : $x = \sqrt{2}$ و $f(\sqrt{2}) = 4$ قيمة صغرى محلياً

أو : $x = -\sqrt{2}$ و $f(-\sqrt{2}) = 4$ قيمة صغرى محلياً

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$



6. دراسة التابع g :

g معرف و اشتقاقي على $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

$g'(x) = 2x$ ، ينعدم $g'(x)$ لما $2x = 0$

ومنه $x = 0$ ، $f(0) = 1$ قيمة صغرى محلياً

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

نقاط مساعدة للرسم :

x	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$y = g(x)$	3	3

30 ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R} \setminus 2$ وفق $f(x) = \dfrac{2x^3 - 7x^2 + 3x - 3}{(x-2)^2}$. وليكن X_f خطّه البياني في معلم متجانس.

1. ادرس التابع f .

2. أثبت وجود الأعداد a, b, c, d بحيث أياً كان x من $\mathbb{R} \setminus 2$ لدينا:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}+\frac{d}{(x-2)^2}$$

3. استنتج وجود مقارب مائل Δ وحدد وضعه بالنسبة للمنحني X_f.

4. ارسم X_f و Δ.

5. بالاعتماد على الرسم، ناقش تبعاً لقيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة

$$2x^3-(7+m)x^2+(3+4m)x-4m=0$$

الحل

1. التابع f معرف و اشتقاقي على كل من $]-\infty,2[\,,\,]2,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}2}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\xrightarrow{>}2}f(x)=-\infty$$

و منه $x=2$ مستقيم مقارب لـ C يوازي yy'

$$f'(x)=\frac{(6x^2-14x+3)(x-2)^2-2(x-2)(2x^3-7x^2+3x-3)}{(x-2)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(x-2)(2x^3-12x^2+25x)}{(x-2)^4}$$

ينعدم $f'\ x$ لما $x(x-2)(2x^2-12x+25)=0$

ومنه $x=0$ ، $f(0)=\dfrac{-3}{4}$ قيمة كبرى محلياً

أو $x=2$ مرفوض، أو $2x^2-12x+25=0$ مستحيلة لأن $\Delta=144-200=-56<0$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-3}{4}$	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. نقسم البسط على المقام وفق القسمة الإقليدية (المطولة) فنجد $f(x)=2x+1+\dfrac{-x-7}{(x-2)^2}$

ثم نكتب : 1 $\qquad \dfrac{-x-7}{(x-2)^2}=\dfrac{c}{x-2}+\dfrac{d}{(x-2)^2}$

نضرب طرفي 1 بـ $(x-2)^2$ فنجد: $-x-7=c(x-2)+d$

ثم نجعل x تسعى إلى 2 فنجد: $d=-9$ ، وبتعويض $x=0$ في 1 نجد: $\dfrac{-7}{4}=\dfrac{c}{-2}+\dfrac{d}{4}$

وبالضرب بـ 4 مع تعويض قيمة $d=-9$ نجد: $-7=-2c-9$ ومنه : $c=-1$

3. لنأخذ المستقيم $\Delta: y=2x+1$ فنجد أن : $f(x)-y_\Delta=\dfrac{-x-7}{(x-2)^2}$

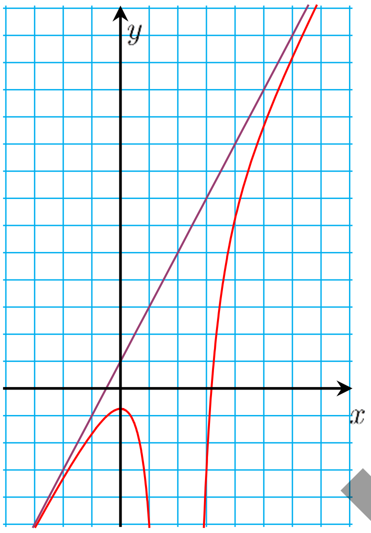
وبالتالي : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y_{\Delta})=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y_{\Delta})=0$

و منه: $\Delta : y=2x+1$ مقارب مائل لـ C_f عند $+\infty$ و عند $-\infty$

الوضع النسبي لـ C_f مع Δ:

x	$-\infty$		-7		2		$+\infty$
$f(x)-y_{\Delta}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
الوضع النسبي		C_f يقع فوق Δ		C_f يقع تحت Δ	$\Vert$	C_f يقع فوق Δ	

ونلاحظ أن Δ يقطع C_f في النقطة $(-7,-13)$



4. نرسم Δ : $y=2x+1$ ، نستفيد من النقط :

x	0	$\frac{-1}{2}$
y_{Δ}	1	0

5. المعادلة الوسيطية :

$$2x^3-(7+m)x^2+(3+4m)x-4m=0$$

أي $2x^3-7x^2+3x-3=m(x-2)^2$ وبما أنّ $x=2$ ليس حلاً للمعادلة فإننا نقسم طرفي المعادلة على $(x-2)^2$ فتصبح المعادلة تكافئ: $f(x)=m$

و حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط التقاطع بين C_f مع مجموعة المستقيمات $y=m$ يوازي xx'

و من الرسم نجد :

عندما : $m\in\left]-\infty,\frac{-3}{4}\right[$ فإن للمعادلة ثلاثة حلول ، حلان موجبان وحل سالب

عندما : $m=\frac{-3}{4}$ فللمعادلة حلان أحدهما $x=0$ والآخر موجب .

عندما : $m\in\left]\frac{-3}{4},+\infty\right[$ فإن للمعادلة حل وحيد موجب .

31 ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق $f(x)=1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$. وليكن X_f خطّه البياني في معلم متجانس.

1. بملاحظة أن $f(x)=1-\frac{x+2}{x^2}$ أوجد النهاية من اليمين ومن اليسار عند الصفر.

2. ادرس نهايتيّ f في $+\infty$ وفي $-\infty$.
3. أثبت أن X_f يقطع محور الفواصل في نقطتين A و B يطلب تعيين إحداثياتهما.
4. احسب المشتق f' . وادرس التابع f واكتب جدولاً بها، ثم ارسم المنحني X_f .
5. في المعلم نفسه، ارسم الخط البياني H للتابع $h(x)=1-\dfrac{1}{2x}$ المعرف على $\mathbb{R}^*$.
6. ناقش تبعاً لقيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $f\ \ x\ = m$.
7. عندما يقطع المستقيم $y=m$ المنحني X_f في نقطتين مختلفتين M و N عين بدلالة m إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[M,N]$.
8. أثبت أن النقطة I تقع على المنحني H .

الحل

التابع f معرف و اشتقاقي على كل من $]-\infty,0[\,,\,]0,+\infty[$

.1 $f(x)=1-\dfrac{x+2}{x^2}$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=-\infty,\ \lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)=-\infty$$

و منه $x=0$ مستقيم مقارب لـ C_f منطبق على yy'

.2 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

و منه $\Delta : y=1$ مستقيم مقارب لـ C_f يوازي xx'

دراسة الوضع النسبي لـ Δ و C_f: $f(x)-y_\Delta=-\dfrac{x+2}{x^2}$

ينعدم : $f(x)-y_\Delta$ لما $x=-2$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
الوضع النسبي		C_f يقع تحت Δ		C_f يقع تحت Δ	‖	C_f يقع فوق Δ	

كما أن النقطة $(-2,1)$ هي نقطة مشتركة بين C_f و Δ .

3. التقاطع مع محور الفواصل :

نحل المعادلة : $f(x)=0$ أي : $\dfrac{x^2-x-2}{x^2}=0$ ومنه $x^2-x-2=0$

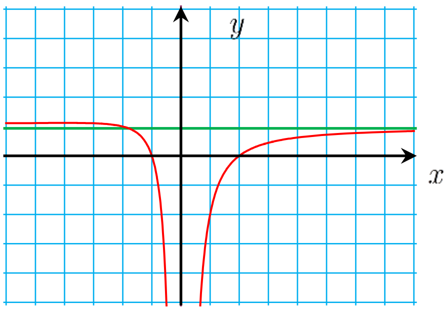
لها حلان : $x=-1$ و $x=2$ ، ومنه : $A(-1,0)$, $B(2,0)$ وهما نقطتا التقاطع مع xx'

4. $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}=\dfrac{x+3}{x^3}$ ، ينعدم $f'(x)$ لما $x=-4$ ، $f(-4)=\dfrac{9}{8}$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{9}{8}$	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$-\infty$ $\nearrow$	1

$f(-4)=\frac{9}{8}$ هي قيمة كبرى محلياً



5. التابع $h(x)=1-\frac{1}{2x}$ معرف و اشتقاقي على $]-\infty,0[\,,\,]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=1,\ \lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=1$ و منه $\Delta: y=1$ مستقيم مقارب لـ C_h $//\ xx'$

$\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}h(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}h(x)=-\infty,$

ومنه $x=0$ مستقيم مقارب لـ C_h منطبق على yy' ، $h'(x)=\frac{1}{2x^2}>0$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$ $+\infty$	$\|\|$	$-\infty$ $\nearrow$	1

$x=\frac{1}{2}$ ومنه: $h(x)=0$ وبالتالي : $\left(\frac{1}{2},0\right)\in \mathrm{H}$

يتقاطع C_f مع H لما : $1-\frac{1}{2x}=1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$ ،وبالحل نجد أن : $y=\frac{9}{8}\quad,\ x=-4$

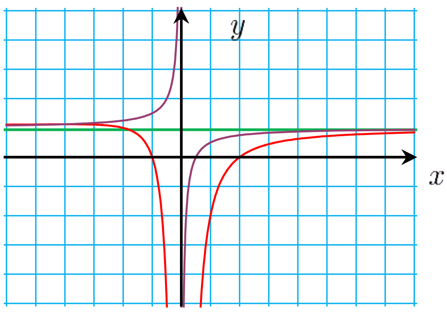
$\left(-4,\frac{9}{8}\right)$ نقطة تقاطع C_f مع H .

6. حل المعادلة $f(x)=m$ هي فواصل نقط تقاطع C_f مع مجموعة المستقيمات $y=m$ الموازية لـ xx'،

من الرسم نلاحظ :

عندما : $m\in\left]\frac{9}{8},+\infty\right[$ فإن المعادلة مستحيلة الحل.

عندما : $m\in\left\{1,\frac{9}{8}\right\}$ فإن للمعادلة حل وحيد .



عندما : $m \in]-\infty,1[\cup]1,\frac{9}{8}[$ فإن للمعادلة حلان .

7. فواصل نقط تقاطع $y=m$ مع C_f هي حلول : $f(x)=m$ وتكافئ : $1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}=m$

وتكافئ : $x^2-x-2=mx^2$ ومنه : $(1-m)x^2-x-2=0$ *

وحتى يكون للمعادلة * حلان يجب أن يكون $m \in \left]-\infty.\frac{9}{8}\right[\setminus 1$ وعندها تكون المعادلة * من

الدرجة الثانية ، وبفرض أن جذراها هما x_1,x_2 : فيكون : $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ ، ومنه: $x_1+x_2=\frac{1}{1-m}$

ولتكن $I(x,y)$ منتصف $[MN]$ عندئذ: $x_I=\frac{x_1+x_2}{2}$ ومنه: $x_I=\frac{1}{2-2m}$

وبما أن : $y_M=y_{N=m}$ فإن : $y_I=m$ ، وبالتالي فإن : $I\left(\frac{1}{2-2m},\mathrm{m}\right)$

8. ونلاحظ أن $h(x_I)=h\left(\frac{1}{2-2m}\right)=1-\frac{1}{2.\left(\frac{1}{2-2m}\right)}=1-\frac{1}{\frac{1}{1-m}}=1-(1-m)=m=y_I$

و بالتالي: $I \in H$

تحليل المحتوى للوحدة الخامسة

المتتالية ونهاياتها

الهدف العام: تعرّف أهمية المتتاليات في مواضيع رياضياتية مختلفة كالتوابع ودورها في حساب قيم تقريبية لأعداد حقيقية غير عادية كالعدد π والعدد $\sqrt{2}$ و ....

المقدمة

الهدف	تعرّف البدايات التاريخية للبحث عن قيمة العدد π وإظهار دور الكاشي واستعماله المتتاليات في حساب قيمة تقريبية للعدد π.
دور المدرس ودور الطالب	حث الطلاب على قراءة المقدمة ومتابعة الجدول وصولاً إلى مفهوم العدد π قراءة المقدمة والحوار مع زملائه للإجابة على اسئلة المدرس.

آلية التنفيذ

7د

يطلب المدرس قراءة المقدمة ويمكن أن يسأل

1. هل كان لدى الكاشي آلة حاسبة لحساب قيمة العددπ؟ كيف حسب الكاشي قيمة العدد π؟

ويوضح المدرس كيف حصل الكاشي على قيمة تقريبية للعدد π اعتماداً على وضع قائمة من الأعداد الطبيعية وحساب قيم محيط المضلع المنتظم المرسوم في دائرة، وقيم محيط المضلع المنتظم المماس للدائرة، وإثبات العلاقة: $n.P_n < 2\pi < nT_n$

ملاحظة: لتوضيح كيف حسب الكاشي قيمة العدد π استعمل الجدول الآتي:

$$P_{2n} = \frac{P_n}{\sqrt{2+\sqrt{4-P_n^2}}} \quad , \quad T_{2n} = \frac{T_n}{2+\sqrt{4+T_n^2}}$$

وحيث: $n.P_n < 2\pi < nT_n$

n	$n.P_n$	2π	nT_n	π
3	$3\sqrt{3}$		$6\sqrt{3}$	
6				
12				

السطر الأول في الجدول يعتد على حساب ارتفاع مثلث متساوي الأضلاع ، حيث:

$$2\pi = \frac{n.P_n + nT_n}{2}$$

<table>
<tr><td rowspan="3">انطلاقة نشطة</td><td>الهدف</td><td>أمثلة واقعية لحفيز الطلاب للدرس واظهار مدى ارتباط المفهوم بالواقع واستعمالاته.</td></tr>
<tr><td>دور المدرس
ودور الطالب</td><td>تشجيع الحوار والربط بين الأسئلة ليقدم لمفهوم المتتالية
الإجابة عن أسئلة النشاط</td></tr>
<tr><td>آلية التنفيذ
8د</td><td>حوار بين المدرس والطلاب حول المثالين الواردين و توجيه الطلاب إلى ملاحظة العلاقة النسبية بين متغيرين يوضح المدرس أن المتتالية هي قائمة من الأعداد.
ملاحظة: لا تصحح إجابات الانطلاقة النشطة تترك للطالب ليتوصل إلى الإجابة الصحيحة في نهاية الدرس</td></tr>
<tr><td rowspan="3">المتتاليات المتزايدة، والمتتاليات المتناقصة</td><td>الهدف</td><td>1. تعريف اطراد متتالية
2. طرائق دراسة إطراد متتالية.
3. توظيف المبرهنة 1 لاكتشاف طريقة ثالثة لدراسة إطراد متتالية.</td></tr>
<tr><td>دور المدرس
ودور الطالب</td><td>1. طرح الأسئلة وتوجيه الطلاب لاستنتاج تعريف إطراد متتالية، الإجابة عن الأسئلة لاستنتاج تعريف إطراد متتالية.
2. توجيه الطلاب لاستنتاج طرائق دراسة إطراد متتالية، استنتاج طرائق دراسة إطراد متتالية
3. شرح ومناقشة المبرهنة 1، استعمال المبرهنة في دراسة إطراد متتالية.</td></tr>
<tr><td>آلية التنفيذ
25د</td><td>يسأل المدرس:
• ما معنى إطراد تابع؟
• ما تعريف التابع المتزايد؟
• هل المتتالية تابع؟
• كيف يمكن صياغة تعريف تزايد متتالية؟
وبأسلوب مشابه نعرض تعريف المتتالية المتزايدة تماماً، والمتتالية المتناقصة، والمتتالية المتناقص تماماً. يوضح المدرس: اعتماداً على تعريف المتتالية المتزايدة تماماً يكون: $u_n < u_{n+1}$ وحسب خواص التراجح نجد:
$$u_{n+1} - u_n > 0 \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$
ويعرض المدرس أمثلة صفحة 144 لدراسة إطراد متتالية. يعرض المدرس المبرهنة 1 ويناقشها مع الطلاب..</td></tr>
</table>

المتتاليات الحسابية	الهدف	تعرّف المتتالية الحسابية ضمن شرطيها تعرّف خاصة المتوسط الحسابي لثلاث حدود متوالية من متتالية حسابية
	دور المدرس ودور الطالب	عرض الأمثلة ومناقشة الطلاب، الإجابة عن الأسئلة. عرض تعريف المتتالية الحسابية مع الأمثلة ، صياغة تعريف المتتالية الحسابية. عرض خاصة المتوسط الحسابي لثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية ، استنتاج الخاصة.
	آلية التنفيذ 10 دقيقة	يكتب المدرس أمثلة عن حدود متتاليات (بعضها حسابية والأخرى ليست حسابية) مثلاً: 1,2,3,5,8,13,......... 1,4,7,10 ,13,......... 5,10,15,20,25 ,......... 3,9,27,81,243 ,......... أياً من الأمثلة ينتج كل حد عن الحد الذي يسبقه بإضافة عدد ثابت. ثم يعرض المدرس تعريف المتتالية الحسابية مع الأمثلة. يعرض المدرس على السبورة عدة أمثلة عن متتالية حسابية ويسأل: 1. عين ثلاثة حدود متوالية من المتتالية. 2. ما العلاقة بين هذه الحدود؟ ثم يعرض المدرس خاصة المتوسط الحسابي لثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية.
تكريساً للفهم	الهدف	تقويمي لقياس مدى قدرة الطالب على اثبات أن اطراد المتتالية لا يساعد في دراسة اطراد التابع تقويمي لقياس مدى قدرة الطالب على تحديد طرائق دراسة اطراد متتالية
	دور المدرس ودور الطالب	عرض المثال وطرح الأسئلة وتوجيه الطلاب لاستنتاج أن عكس المبرهنة1 غير صحيح ، الإجابة عن الأسئلة لاستنتاج أن عكس المبرهنة1 غير صحيح. طرح السؤال على الطلاب ثم عرض الأمثلة ، الإجابة عن السؤال
	آلية التنفيذ	يطرح المدرس السؤال:

	20 دقيقة	إذا كان لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ مطردة حيث $u_n=f(n)$ • هل يعني أن التابع f مطرد؟ ثم يناقش مثال صفحة 145 مع الطلاب ويسأل: • هل التابع f مطرد؟ • هل حدود متتالية مطردة؟ • هل عكس المبرهنة1 صحيح؟ يطرح المدرس السؤال: • كيف ندرس إطراد متتالية؟ ثم يناقش المثالين صفحة 145 وصفحة 146 مع الطلاب.
تدرب صفحة 146	الهدف	تقويمي لقياس قدرة الطالب على دراسة إطراد متتالية.
	دور المدرس ودور الطالب	تغذية راجعة حل المشكلات
	آلية التنفيذ	يطلب المدرس من الطلاب حل تدرب صفحة 146
مبرهنة2 + نتيجة3	الهدف	• توظيف الاستقراء الرياضي في إثبات المبرهنة2. إيجاد حد من حدود متتالية حسابية باستعمال الحد الأول وأساس المتتالية. • إيجاد حد من حدود متتالية حسابية باستعمال أحد الحدود وأساس المتتالية. حساب أساس متتالية حسابية إذا عُلِمَ حدين منها.
	دور المدرس ودور الطالب	• مناقشة المبرهنة2 وإثباتها مع الطلاب ، الإجابة عن الأسئلة التي يطرحها المدرس عند إثبات المبرهنة2 • توجيه الطلاب في استنتاج النتيجة3. ، الإجابة عن أسئلة المدرس.
	آلية التنفيذ 10د	• يعرض المدرس المبرهنة ويتناقش مع الطلاب في إثباتها ويوضح أن طريقة الاثبات تسمى طريقة الإثبات بالتدريج أو بالاستقراء الرياضي. ويسأل الطلاب: ما هي خطوات الإثبات بطريقة الاستقراء الرياضي؟ ثم يطلب المدرس من الطلاب إثبات قضية بسيطة بالاعتماد على الاستقراء الرياضي. • يطلب المدرس من أحد الطلاب كتابة الحدين u_n, u_m من متتالية حسابية اعتماداً على المبرهنة ثم حساب ناتج u_n-u_m للوصول إلى النتيجة.

المتتاليات الهندسية	الهدف	تعرّف المتتالية الهندسية ضمن شرطيهاتعرّف خاصة المتوسط الهندسي لثلاث حدود متوالية من متتالية هندسية
	دور المدرس ودور الطالب	عرض الأمثلة ومناقشة الطلاب. الإجابة عن الأسئلة عرض تعريف المتتالية الهندسية مع الأمثلة. صياغة تعريف المتتالية الهندسيةعرض خاصة المتوسط الهندسي لثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية. استنتاج الخاصة
	آلية التنفيذ 10د	يكتب المدرس أمثلة عن حدود متتاليات (بعضها هندسية والأخرى ليست هندسية) مثلاً: 1,2,3,5,8,13,......... 1,4,7,10 ,13,......... 5,10,20,40,80 ,......... 3,9,27,81,243 ,......... أياً من الأمثلة ينتج كل حد عن الحد الذي يسبقه بضربه بعدد ثابت. ثم يعرض المدرس تعريف المتتالية الهندسية مع الأمثلة. يعرض المدرس على السبورة عدة أمثلة عن متتالية هندسية ويسأل: 1. عين ثلاثة حدود متوالية من المتتالية. 2. ما العلاقة بين هذه الحدود؟ ثم يعرض المدرس خاصة المتوسط للهندسي لثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية.
	الهدف	توضيح أهمية النتيجة 3 في حل المسائل. قياس مدى قدرة الطالب على: -تحديد أهمية النتيجة. -إثبات أن متتالية هي متتالية حسابية. -توظيف الاستقراء الرياضي لإثبات علاقة.
	دور المدرس ودور الطالب	تغذية راجعة وتوجيه الطلاب إلى الإجابة الإجابة عن أسئلة تكريساً للفهم.

	آلية التنفيذ 15د	يسأل المدرس: ما أهمية العلاقة $u_n - u_m = (n-m)r$ ؟ ثم يوضح أهمية هذه العلاقة. ثم يطرح المدرس السؤال: • كيف نثبت أن متتالية هي متتالية حسابية؟ ثمّ يعرض مثال صفحة 149. ويسأل المدرس السؤال: ما أهمية الإثبات بالتدريج؟ ثمّ يعرض مثال صفحة 149.
مبرهنة4	الهدف	توظيف الاستقراء الرياضي في إثبات المبرهنة4. إيجاد حد من حدود متتالية هندسية باستعمال الحد الأول وأساس المتتالية
	دور المدرس ودور الطالب	مناقشة المبرهنة4 وإثباتها مع الطلاب الإجابة عن الأسئلة التي يطرحها المدرس عند إثبات المبرهنة4
	آلية التنفيذ 10 د	يعرض المدرس المبرهنة ويتناقش مع الطلاب في إثباتها بالاستقراء الرياضي. ثم يعرض المثال المحلول.
نتيجة5	الهدف	إيجاد حد من حدود متتالية هندسية باستعمال أحد الحدود وأساس المتتالية. حساب أساس متتالية هندسية إذا عُلِمَ حدين منها.
	دور المدرس ودور الطالب	توجيه الطلاب في استنتاج النتيجة5 الإجابة عن أسئلة المدرس.
	آلية التنفيذ	يطلب المدرس من أحد الطلاب كتابة الحدين u_n, u_m من متتالية هندسية اعتماداً على المبرهنة ثم حساب ناتج $\frac{u_n}{u_m}$ للوصول إلى النتيجة.
مجموع حدود متوالية لمتتالية	الهدف	استنتاج دستور مجموع n حد من متتالية حسابية. استنتاج دستور مجموع n حد من متتالية هندسية.
	دور المدرس ودور الطالب	عرض الحالة الخاصة والحالة العامة لمجموع n متوالية متتالية حسابية ومناقشة الطلاب. الإجابة عن الأسئلة. عرض الحالة الخاصة والحالة العامة لمجموع n متوالية لمتتالية هندسية ومناقشة الطلاب. الإجابة عن الأسئلة.

	آلية التنفيذ 35د	يطلب المدرس من الطلاب حساب مجموع 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10. ثم يعرض الحالة الخاصة لحساب مجموع أول n عدداً طبيعياً غير معدوم، ثم يوجه المدرس الطلاب إلى تعميم الحالة الخاصة لاستنتاج المبرهنة 6. يعرض المدرس الحالة الخاصة لحساب مجموع أول n حداً من متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها q، ثم يوجه المدرس الطلاب إلى تعميم الحالة الخاصة لاستنتاج المبرهنة 7، ثم يعرض المدرس أمثلة تكريساً للفهم.
تدرب صفحة 156	الهدف	قياس مدى قدرة الطالب على استعمال دساتير مجموع n حد من متتالية حسابية أو مجموع n حد من متتالية هندسية في حل المسائل.
	دور المدرس ودور الطالب	تغذية راجعة حل المشكلات
	آلية التنفيذ 10د	يتعاون المدرس مع الطلاب حل تمارين تدرب صفحة 156 أثناء الحصة وما يتبقى من تمارين تؤخذ كواجب بيتي، تصحح في الحصة التالية
تكريساً للفهم	الهدف	تعرّف آلية تمثيل حدود متتالي هندسية على محور الفواصل باستعمال منصف الربع الأول. قياس مدى قدرة الطالب على إثبات أن متتالية هي متتالية هندسية.
	دور المدرس ودور الطالب	عرض الرسوم وتوضيح كيفية تمثيل الحدود الأولى لمتتالية. الإجابة عن الأسئلة التي يطرحها المدرس عرض الأسئلة وتوجيه الطلاب إلى الإجابة. الإجابة عن الأسئلة التي يطرحها المدرس
	آلية التنفيذ 25د	يطرح المدرس السؤال: كيف يمكننا تمثيل الحدود الأولى لمتتالية هندسية؟ ثم يعرض رسومات صفحة 145، ويوضح أن التمثيل البياني للتابع الممثل لمتتالية هندسية هو مستقيم مار من المبدأ. ويوضح آلية إرجاع حدود متتالية من محور التراتيب إلى محور الفواصل باستعمال منصف الربع الأول. ويوضح بيانياً آلية الحصول على الحد اللاحق اعتماداً على الحد السابق، ثم يعطي مثال على متتالية هندسية بصيغة تدريجية ونطلب من الطلاب تمثيلها. يطرح المدرس السؤال: كيف نثبت أن متتالية هي متتالية هندسية؟ ملاحظة: لم يعرض تمثيل الحدود الأولى لمتتالية حسابية لأنها تمثل فوراً على محور

		أفقي. عرض التمثيل البياني لمتتالية هندسية ليتحقق الشرط $x, f(x)$ ينتميان إلى مجال واحد.
تدرب صفحة 153	**الهدف**	تقويمي لقياس قدرة الطالب على توظيف خواص المتتالية الهندسية في حل المسائل
	دور المدرس ودور الطالب	تغذية راجعة حل المشكلات
	آلية التنفيذ	يطلب المدرس من الطلاب حل تمارين تدرب صفحة 153 بالكامل كواجب بيتي، تصحح في الحصة التالية.
تقارب متتالية	**الهدف**	تعرّف مفهوم نهاية متتالية.
	دور المدرس ودور الطالب	عرض الأمثلة ومناقشة وتوجيه الطلاب
	آلية التنفيذ	يعرض المدرس مثال صفحة 157 حيث يوضح كيف تتجمع حدود متتالية عند الصفر. ثم يعرض المدرس فقرة: **كيف نعبر عن فكرة تجمع حدود المتتالية عند قيمة؟** ثم يقدم تعريف نهاية متتالية.
مبرهنة 8	**الهدف**	توظيف نهاية تابع في حساب نهاية متتالية.
	دور المدرس ودور الطالب	مناقشة الطلاب
	آلية التنفيذ	يذكر المدرس الطلاب بنهاية تابع، يعرض المدرس مبرهنة 8 مع الرسم الموضح صفحة 158. ثم يسأل: احسب نهاية التابع $f(x)=\frac{1}{x+1}$ ، ما هي نهاية المتتالية التي حدها ذي الدليل n هو $u_n=\frac{1}{n+1}$

التقارب والعمليات الجبرية	الهدف	توظيف العمليات الجبرية على المتتاليات في حساب نهاية متتالية.
	دور المدرس ودور الطالب	مناقشة الطلاب
	آلية التنفيذ	يعرض المدرس كيفية الاستفادة من العمليات الجبرية على المتتاليات في حساب نهاية متتالية، ثم يناقش الطلاب بالأمثلة
مبرهنة المتتاليات الثلاث	الهدف	توظيف مبرهنة المتتاليات الثلاث في حساب نهاية متتالية.
	دور المدرس ودور الطالب	مناقشة الطلاب
	آلية التنفيذ	يعرض المدرس المبرهنة ويناقش الطلاب في إثباتها، ثم يعرض أمثلة كيف نستفيد من مبرهنة المتتاليات الثلاث صفحة 164 ملاحظة: نستعمل مبرهنة المتتاليات الثلاث عندما لا نستطيع كتابة المتتالية كتابع مرجعي مثال: $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$
نهاية متتالية هندسية	الهدف	تعرّف مفهوم النهاية اللانهائية لمتتالية. إيجاد نهاية متتالية هندسية.
	دور المدرس ودور الطالب	عرض مفهوم النهاية اللانهائية ومناقشته مع الطلاب. الإجابة عن الأسئلةعرض دراسة نهاية متتالية هندسية ومناقشة الطلاب. الإجابة عن الأسئلة
	آلية التنفيذ 15د	يسأل المدرس: 1. ما هي نهاية المتتالية $u_n = (5)^n$ ؟ ويناقش المدرس الطلاب في نهايتها، ويعرض مفهوم النهاية اللانهائية وتعريف6، ويناقش الأمثلة. يوضح المدرس إذا كانت $(V_n)_{n\ge 0}$ متتالية هندسية عندئذٍ $v_n = v_0 \times q^n$ حيث v_0 أساس المتتالية وهو عدد ثابت وحسب العمليات على نهاية متتاليات يكفي دراسة نهاية q^n ، ثم يعرض المدرس المبرهنة11 والأمثلة
تكريساً للفهم	الهدف	إثبات أنه لا يمكن أن يكون لمتتالية نهايتين. توضيح أنه يمكن لمتتالية أن لا يكون لها نهاية. توضيح الفائدة من المبرهنات على النهايات.

	دور المدرس ودور الطالب	تغذية راجعة / الإجابة عن الأسئلة	
	آلية التنفيذ 30د	يطرح المدرس أسئلة تكريساً للفهم ويناقش الإجابات مع الطلاب ويعرض الأمثلة الموضحة	
تدرب صفحة 164	الهدف	قياس مدى قدرة الطالب على دراسة تقارب متتالية وحساب نهايتها	
	دور المدرس ودور الطالب	تغذية راجعة \ الإجابة عن الأسئلة	
	آلية التنفيذ	يطلب المدرس من الطلاب حل تمارين تدرب صفحة 164 كواجب بيتي، تصحح في الحصة التالية.	
الأنشطة	الهدف	نشاط1 ونشاط2 فائدة التمثيل البياني في التنبؤ بجهة إطراد متتالية ونهايتها. نشاط3 دراسة اطراد متتالية تكتب كتابع تآلفي	
	دور المدرس ودور الطالب	ميسر وموجه. تغذية راجعة حل الأنشطة	
	آلية التنفيذ حصة	يعرض المدرس نشاط 1و 2 ويطلب من الطلاب حلها، ويناقش الطلاب بالحل يعرض المدرس نشاط 3 ويطلب من الطلاب حلها.	
التمرينات والمسائل	الهدف	دراسة إطراد متتالية	1،2،3 صفحة 169 +17 صفحة173 + 26،27 صفحة 176
		حساب الحدود الأولى، وإثبات أن المتتالية حسابية	5،4 صفحة 169 + 12 صفحة 170 + 22 صفحة 175

		حساب الحدود الأولى، وإثبات أن المتتالية هندسية	6 صفحة 169 + 7 صفحة 170
		الاستفادة من مجموع n حداً أو إيجاد n حدا	8، 9، 10، 11 صفحة 170 + 32، 33 صفحة 177
		حل معادلات باستخدام خواص المتتاليات	13 صفحة 171 + 19، 20 صفحة 175 + 23، 25 صفحة 176
		تداخل شكلين هندسيين ودراسة متتالية ناتجة	16، 24 صفحة 173
		ربط الشكل الهندسي للمضلعات مع المتتاليات	15 صفحة 172 + 18 صفحة 174+ 34 صفحة 178 + 31 صفحة 177
		حساب عدد العناصر خارج مجال معطى	28 صفحة 176 + 35 صفحة 178
		تطبيق مبرهنة المتتاليات الثلاث	29، 30 صفحة 177
		توظيف المتتاليات في حل المشكلات ومسائل حياتية.	14 صفحة 171
لنتعلم البحث معاً		تزويد الطالب بمنهجية التفكير الاستقصائي	
	دور المدرس ودور الطالب	ميسر وموجه. تغذية راجعة حل المشكلات	
	آلية التنفيذ ثلاث حصص	يعرض المدرس مسائل لنتعلم البحث معاً ويناقشهم في الحل ويطلب من الطلاب حلها وفق الآلية المعروضة في الكتاب، ثم صياغة الحل وكتابته بلغة سليمة.	

<table dir="rtl">
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">**قدماً إلى الأمام**</td><td>**الهدف**</td><td>تعزيز مهارات حل المسائل والتفكير الناقد.</td></tr>
<tr><td>**دور المدرس ودور الطالب**</td><td>تغذية راجعة حل مسائل وتمارين قدماً إلى الأمام.</td></tr>
<tr><td>**آلية التنفيذ ثلاث حصص**</td><td>يطلب المدرس من الطلاب حل تمارين ومسائل قدماً إلى الأمام</td></tr>
</table>

تَدرَّبْ ص 143

① عيّن فيما يأتي التابع f الذي يُحقّق أيّاً كان n العلاقة $u_n = f(n)$ واحسب الحدود u_0، ...، u_5.

❶ $u_n = 2n+5$ ❷ $u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)$ ❸ $u_n = n^2 - \sqrt{n} + 1$

❹ $u_n = \frac{n^2-1}{n+2}$ ❺ $u_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}}$ ❻ $u_n = \sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)$

الحل

❶
$$u_n = 2n+5$$
$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x+5$$
$$u_0 = 5 \;,\; u_1 = 7 \;,\; u_2 = 9 \;,\; u_3 = 11 \;,\; u_4 = 13 \;,\; u_5 = 15$$

❸ $u_n = n^2 - \sqrt{n} + 1$

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - \sqrt{x} + 1$$
$$u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 5 - \sqrt{2} \;,\; u_3 = 10 - \sqrt{3} \;, u_4 = 15 \;,\; u_5 = 26 - \sqrt{5}$$

❺ $u_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}}$

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$
$$u_0 = 0, u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, u_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}, u_3 = \frac{3}{2} , u_4 = \frac{4}{\sqrt{5}} \;,\; u_5 = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

② المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة بقيمة u_0 وبعلاقة تدريجيّة. عيّن فيما يأتي التابع f الذي يُحقّق أيّاً كان n العلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ واحسب الحدود u_1، ...، u_5.

❶ $\begin{cases} u_0 = -1, \\ u_{n+1} = (u_n+1)^2 \end{cases}$ ❷ $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n+1} \end{cases}$

❸ $\begin{cases} u_0 = 5, \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+1} \end{cases}$ ❹ $\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = \frac{u_n-1}{u_n} \end{cases}$

الحل

❶ $\begin{cases} u_0 = -1, \\ u_{n+1} = (u_n+1)^2 \end{cases}$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x+1)^2$$
$$u_1 = 0 \;,\; u_2 = 1 \;,\; u_2 = 4 \;,\; u_3 = 25 \;,\; u_4 = 676 \;,\; u_5 = 456976$$

$$\begin{cases} u_0 = 5, \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 1} \end{cases} \quad ❸$$

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2x}{x+1}$$

$$u_1 = 5,\ u_2 = 5/3\ , u_2 = 5/4,\ u_3 = 10/9\ ,\ \ u_4 = 20/19\ \ , u_5 = 40/39$$

③ فيما يأتي، المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة بصيغة مباشرة للحدّ u_n بدلالة n. عبّر بدلالة n عن كلٍّ من u_{n+1}و u_{n-1} و u_{2n} و u_{2n+3} و $u_n + 1$ في الحالات الآتية:

❶ $u_n = 3n^2 - 1$ ❷ $u_n = \dfrac{n^2 + n + 1}{2n + 1}$

❸ $u_n = \dfrac{2n - 1}{n + 1}$ ❹ $u_{n+1} = 1 - 2^{n-1}$

الحل

❶ $u_n = 3n^2 - 1$

$$u_{n+1} = 3(n+1)^2 - 1 = 3n^2 + 6n + 2$$
$$u_{n-1} = 3(n-1)^2 - 1 = 3n^2 - 6n + 2$$
$$u_{2n} = 3(2n)^2 - 1 = 12n^2 - 1$$
$$u_{2n+3} = 3(2n+3)^2 - 1 = 12n^2 + 36n + 26$$
$$u_n + 1 = 3n^2$$

❸ $u_n = \dfrac{2n - 1}{n + 1}$

$$u_{n+1} = \frac{2n+1}{n+2}\ ,\ u_{n-1} = \frac{2n-3}{n}\ ,\ u_{2n} = \frac{4n-1}{2n+1}\ ,\ u_{2n+3} = \frac{4n+5}{2n+4}$$
$$u_n + 1 = \frac{3n}{n+1}$$

تدرّب ص146

① ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ في الحالات الآتية.

❶ $u_n = \dfrac{3n - 2}{n + 1}$ ❷ $u_n = (n - 5)^2$

❸ $u_n = \dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}$ ❹ $u_n = \dfrac{n^2 + 1}{2n}, n \geq 1$

الحل

❶ $u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3n+3-2}{n+2} - \frac{3n-2}{n+1} = \frac{5}{n^2+3n+2} > 0$$

والمتتالية متزايدة

❷ $u_n = (n-5)^2$

$$u_{n+1} - u_n = (n-4)^2 - (n-5)^2 = 2n-9$$

متزايدة ابتداءً من $n = 5$

❸ $u_n = \dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{3n+3}}{3^{2n+2}} \cdot \frac{3^{2n}}{2^{3n}} = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9} < 1$$

والمتتالية متناقصة.

② لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = n^2 - 10n + 26$. احسب $u_{n+1} - u_n$ ، وبرهن أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تصبح متزايدة بدءاً من الدليل $n = 5$.

الحل

طريقة1

$u_{n+1} - u_n = 2n - 9$ ومنه يكون $u_{n+1} - u_n > 0$ عندما $n > \dfrac{9}{2}$ وبالتالي المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تصبح متزايدة بدءاً من الدليل $n = 5$.

تدريب ص150

① بيّن أيُّ المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ الآتية حسابية.

❶ $u_n = 2n + 3$ ❷ $u_n = \dfrac{3n+1}{2}$

❸ $u_n = n^2 - n$ ❹ $u_0 = 2,\ u_{n+1} = -2 + u_n$

الحل

❶ $u_n = 2n + 3$

$$u_{n+1} - u_n = (2n+5) - (2n+3) = 2$$

ناتج الطرح عدد ثابت ليس له علاقة بـ n وبالتالي حسابية .

❸ $u_n = n^2 - n$

$$u_{n+1} - u_n = ((n+1)^2 - (n+1)) - (n^2 - n) = 2n$$

ناتج الطرح غير ثابت أي له علاقة بـ nوبالتالي غير حسابية.

② فيما يأتي المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية، أساسها r.

❶ $u_0 = 1$ و $u_{10} = 31$. احسب r و u_{2004}.

❷ $u_0 = 5$ و $u_{100} = -45$. احسب r و u_{20}.

❸ $u_{17} = 34$ و $u_{40} = 70$. احسب r و u_0.

❹ $u_{10\,000} = 1$ و $u_{2\,000} = -79$. احسب r و $u_{3\,857}$.

الحل

❶ $u_0 = 1$ و $u_{10} = 31$. احسب r و u_{2004}.

$u_{10} = u_0 + 10r$ ومنه $r = \dfrac{u_{10} - u_0}{10} = \dfrac{31-1}{10} = 3$

$$u_{2004} = u_0 + 2004r = 1 + 2004(3) = 6013$$

③ أثبت بالتدريج أنّ $2^n \geq n^2$ أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 4$.

الحل

من أجل $n = 4$ نجد :

$$\left.\begin{aligned} l &= 2^4 = 16 \\ R &= 4^2 = 16 \end{aligned}\right\} l \geq R$$

أي أن العلاقة صحيحة

والآن نفترض أن العلاقة صحيحة من أجل $n = k$ أي أنَّ $2^k \geq k^2$

والآن لنحاول أن نثبت صحتها من أجل $k+1$ كالتالي

$$l = 2^{k+1} = 2^k \times 2 \geq 2 \cdot k^2 > (k+1)^2 = R$$

والآن لإثبات أن $2k^2 > (k+1)^2$ يكفي أن نثبت أن $2k^2-(k+1)^2 > 0$ أي $k^2-2k-1>0$

وهكذا لنأخذ التابع $f:\left[0,+\infty\right[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^2-2x-1$

تكافئ إثبات أن $f(x)>0$ على مجال تعريفه .

$$f'(x)=2x-2$$

نلاحظ أن $f(x)>0$ حيث $k>0$ ومنه التابع متزايد على المجال $[1,+\infty[$ ، وبما أن $f(4)=7>0$ فإن $f(x)>0$ أياً كانت $x\geq 4$ وبالتالي $2k^2-(k+1)^2>0$

④لتكن المتتالية المعرّفة في المثال السابق أثبت بالتدريج أنّ $2-u_n \leq \dfrac{1}{3^n}$ أيّاً كان العدد الطبيعي n .

الحل

المتراجحة $2-u_n \leq \dfrac{1}{3^n}$ تكافئ المتراجحة $2 \leq \dfrac{1}{3^n}+u_n$.

من أجل قيمة ابتدائية $n=0$ نجد أنّ $2 \leq \dfrac{1}{3^0}+u_0 = 1+1=2$ محققة.

من أجل $n=1$ نجد أنّ $R=\dfrac{1}{3}+\sqrt{2+u_0} = \dfrac{1}{3}+\sqrt{3} > 0.33+1{,}7 = 2{,}3 > 2$ محققة.

لنفترض أنَّ العلاقة صحيحة من أجل $n=k$ أي $2 \leq \dfrac{1}{3^k}+u_k$ وهي تكافئ $(*)$ $2-\dfrac{1}{3^k} \leq u_k$

ونرغب بمقارنة $\dfrac{1}{3^{k+1}}+u_{k+1}$ و 2، ولكنهما مقادير موجبة لذلك يكفي أن نقارن بين مربعيهما لنجد:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{3^{k+1}}+u_{k+1}\right)^2 &= \left(\sqrt{2+u_k}\right)^2+2\cdot\frac{1}{3^{k+1}}\cdot u_{k+1}+\frac{1}{3^{2k+2}} \\
&\geq 2+u_k+2\cdot\frac{1}{3^{k+1}}\cdot u_k+\frac{1}{3^{2k+2}} \\
&\geq 2+2-\frac{1}{3^k}+2\cdot\frac{1}{3^{k+1}}\cdot\left(2-\frac{1}{3^k}\right)+\frac{1}{3^{2k+2}} \\
&= 4-\frac{1}{3^k}+\frac{4}{3^{k+1}}-\frac{2}{3^{2k+1}}+\frac{1}{3^{2k+2}} \\
&= 4-\frac{3}{3^{k+1}}+\frac{4}{3^{k+1}}-\frac{6}{3^{2k+2}}+\frac{1}{3^{2k+2}} \\
&= 4+\frac{1}{3^{k+1}}-\frac{5}{3^{2k+2}} \\
&\geq 4
\end{aligned}$$

حيث $\dfrac{1}{3^{k+1}}-\dfrac{5}{3^{2k+2}} = \dfrac{3^{k+1}-5}{3^{2k+2}} > 0$ عندما $k \geq 1$

تدرّب ص153

① بيِّن أيُّ المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ الآتية هندسيّة.

❶ $u_n = 3^n + 3n$ ❷ $u_n = 5^{n+3}$ ❸ $u_0 = 2, u_{n+1} = 4u_n$

❹ $u_n = \dfrac{2}{5^{n+1}}$ ❺ $u_n = \dfrac{2n+5}{3}$ ❻ $u_0 = -1,5u_{n+1} - 2u_n = 1$

الحل

❶ $u_n = 3^n + 3n$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1} + 3n + 3}{3^n + 3n} = \frac{3 \cdot 3^n + 3n + 6n - 6n + 3}{3^n + 3n}$$

$$= \frac{3 \cdot 3^n + 9n}{3^n + 3n} + \frac{3 - 6n}{3^n + 3n} = 3 \cdot \frac{3^n + 3n}{3^n + 3n} + \frac{3 - 6n}{3^n + 3n}$$

$$= 3 + \frac{1 - 2n}{3^{n-1} + n}$$

لا يمكن اختزاله فهو غير ثابت والناتج قيمة متعلقة بـ n فالمتتالية غير هندسية

❷ $u_n = 5^{n+3}$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{5^{n+1+3}}{5^{n+3}} = 5^{n+3+1-n-3} = 5$ بما أن الناتج عدد ثابت ليس له علاقة بـ n فالمتتالية هندسية.

② فيما يأتي المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة، أساسها q.

❶ $u_0 = 4$ و $q = 5$. اكتب u_n بدلالة n.

❷ $u_4 = 8$ و $q = 2$. احسب u_2 و u_6.

❸ $u_5 = 64$ و $u_7 = 256$. احسب u_{10} (هناك جوابان).

الحل

❶ بالتعويض بالصيغة العامة نجد $u_n = u_0 q^n = 4 \times 5^n$

❷ $u_2 = \dfrac{u_4}{q \times q} = \dfrac{8}{2^2} = 2$ وَ $u_6 = q^2 u_4 = 4 \times 8 = 32$

❸ $\dfrac{256}{64} = 4$ $q^2 = \dfrac{u_7}{u_5} = $ نجذر الطرفين $\sqrt{4} =| q |$ وبالتالي $q = \pm 2$

إمّا $q = 2$ وبالتالي $u_{10} = u_7 \times q^3 = 256 \times 2^3 = 2048$.

أو $q = -2$ وبالتالي $u_{10} = u_7 \times q^3 = 256 \times (-2)^3 = -2048$.

③ إذا كان r عدداً حقيقيا موجباً تماماً و n عدداً طبيعياً.

❶ أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $v_n = 1 + rn$ حسابية.

❷ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = (1+r)^n$ هندسيّة.

❸ أثبت أنّ $(1+r)^n \geq 1 + rn$.

الحل

❶ $v_{n+1} - v_n = 1 + r(\text{n}+1) - (1+rn) = r$ ثابت وبالتالي المتتالية حسابية .

❷ $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(1+\text{r})^{n+1}}{(1+\text{r})^n} = \frac{(1+\text{r})^n \times (1+\text{r})}{(1+\text{r})^n} = 1 + r$$

ثابت وبالتالي المتتالية هندسية .

❸ نتحقق من صحتها من أجل $n = 0$ كمايلي:

$$l = (1+r)^0 = 1$$
$$R = 1 + r \times 0 = 1$$

محققة

نفترض صحتها من أجل $n = k$ أي أن العلاقة التالية محققة: $(1+r)^k \geq 1 + rk$

لنحاول أن نثبت صحتها من أجل $n = k+1$ كالتالي:

$$l = (1+r)^{k+1} = (1+r)^k \cdot (1+r)^1 \geq (1+rk)(1+r)$$
$$= 1 + r + rk + r^2k > 1 + r + rk = 1 + r(1+k) = R$$

حيث $1 + r + rk + r^2k > 1 + r + rk$ لأنَّ r^2k عدد حقيقي موجب تماماً

وهكذا نكون قد أثبتنا بالتدريج أنّ $(1+r)^n \geq 1 + rn$ أياً كان العدد n وهو المطلوب.

تَدرِّيبُ ص 156

① المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابيّة فيها $u_{10} = -12$ و $u_{20} = -32$.

1. احسب u_0 و r .
2. احسب المجموع $S = u_{10} + u_{20} + u_{30} + \cdots + u_{100}$.

الحل

1. بما أن المتتالية حسابية وَ $u_n = u_0 + nr$ فإن $u_{20} - u_{10} = 10r$

ومنه $r = \dfrac{u_{20} - u_{10}}{10} = \dfrac{-32 - (-12)}{10} = \dfrac{-20}{10} = -2$

$$u_0 = u_{10} - 10r = -12 + 20 = 8$$

2. طريقة (1)

الحدود التالية $u_{10}, u_{20}, u_{30}, \cdots, u_{100}$ هي حدود لمتتالية حسابية $v_k = u_{10(k+1)}$ أساسها $10 \times (-2) = -20$ وحدها الأول $v_0 = u_{10} = -12$ فيكون المجموع:

$$\begin{aligned} S &= u_{10} + u_{20} + u_{30} + \cdots + u_{100} \\ &= v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_9 = 10\frac{-12-192}{2} = -1020 \end{aligned}$$

طريقة (2)

$$\begin{aligned} S &= u_{10} + u_{20} + u_{30} + \cdots + u_{100} = 10u_0 + 10(1+2+\cdots+10)r \\ &= 10u_0 + 550r = 80 + 550(-2) = -1020 \end{aligned}$$

② المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة، فيها $q = 3$ و $u_4 = 12$. احسب المجموع الآتي $u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9$.

الحل

طريقة (1)

$$u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 = S_9 - S_3 = \frac{4}{27} \times \frac{1-3^{10}}{1-3} - \frac{4}{27} \times \frac{1-3^4}{1-3} = 4368$$

طريقة (2)

العمل مع الطالب على استنتاج الصيغة الموجودة في الصفحة 163 والتعويض

$$S = u_n \times \frac{1-q^{m-n+1}}{1-q} = u_4 \times \frac{1-3^{9-4+1}}{1-3} = 4368$$

③ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابيّة. نعرّف $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$. احسب u_1 و S_n إذا علمتَ أنّ $u_n = 105$ و $n = 17$ و $r = -2$.

الحل

$$\begin{aligned} &u_n = u_1 + (n-1)r \\ &105 = u_1 + 16(-2) \\ &u_1 = 105 + 32 = 137 \\ &S_{17} = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{17}{2}(137 + 105) = 2057 \end{aligned}$$

$$u_n = u_0 + nr$$
$$105 = u_0 + 17(-2)$$
$$u_0 = 105 + 34 = 139$$
$$u_1 = u_0 + r = 137$$
$$S_{17} = \frac{n}{2}(u_0 + u_n) = \frac{18}{2}(139 + 105) = 2196$$

تدريب ص164

① أوجد، عند التقارب، نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ في الحالات الآتية مبرِّراً الإجابة.

① $u_n = \dfrac{5}{n^4}$ ② $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n^2} + 3$ ③ $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$

الحل

① $u_n = \dfrac{5}{n^4}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{n^4} = 0$ إذا المتتالية متقاربة نحو الصفر (0) .

② $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n^2} + 3$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} + \lim_{n\to\infty} 3 = 0 - 0 + 3 = 3$$

إذن المتتالية متقاربة من 3.

② أوجد، عند التقارب، نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ في الحالات الآتية.

① $u_n = \dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2}$ ② $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3}$ ③ $u_n = \dfrac{n + \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2n+5}$

الحل

① $u_n = \dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2}$

$$\frac{-1}{n^2} \leq \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n^2}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$$

وبما أنَّ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ و $\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n^2}=0$

فإنه حسب مبرهنة المتتاليات الثلاث $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2}=0$

③ $u_n=\dfrac{n+\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2n+5}$

$$\frac{n-1}{2n+5}\leq\frac{n+\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2n+5}\leq\frac{n+1}{2n+5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+5}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{n+\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2n+5}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+5}$$

وبما أنَّ $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+5}=\frac{1}{2}$ و $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+5}=\frac{1}{2}$

فإنه حسب مبرهنة المتتاليات الثلاث $\lim_{n\to\infty}\frac{n+\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2n+5}=\frac{1}{2}$

③ ادرس تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ في الحالات الآتية.

① $u_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ② $u_n=\frac{1}{2^n}+\frac{n}{n^2+1}$

③ $u_n=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ ④ $u_n=\frac{n+1}{5n-1}$

الحل

① $u_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$

متتالية هندسية أساسها $-1<\frac{1}{3}<1$ فيكون $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

② $u_n=\frac{1}{2^n}+\frac{n}{n^2+1}$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} + \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{n}}$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$ و $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = 0$ فإنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

③ بنفس طريقة الأول.

المتتاليات المعرّفة بالتدريج

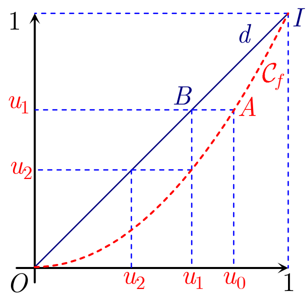
نشاط 1 حالة التابع $x \mapsto x^2$

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرّفة كما يأتي :

$u_0 = \frac{3}{4}$، وأيّاً كان n، كان $u_{n+1} = u_n^2$.

① أثبت أنّه أيّاً كان x من المجال $]0,1[$ كان $0 < x^2 < x < 1$.

② ارسم في مستوٍ مزوّدٍ بمعلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ (خذ 10 cm واحدة الطول) الخط البياني C_f للتابع $f : x \mapsto x^2$، ثُمّ ارسم المستقيم d الذي معادلته $y = x$. يقطع المستقيم d المنحني C_f في النقطتين O و I. أوجد إحداثيي النقطة I.



③ ❶ عيّن النقطة A من C_f التي فاصلتها u_0. يقطع المستقيمُ المار بالنقطة A موازياً محور الفواصل المستقيمَ d بنقطة B. لماذا تكون u_1 فاصلةَ B؟

❷ عيّن النقطة من C_f التي فاصلتها u_2، ثُمّ كرّر الإنشاء لتجد الحدود الأولى من المتتالية.

④ أيُفيدك هذا التمثيل البياني في التنبّؤ بجهة اطراد المتتالية؟ وبنهايتها المحتملة؟

⑤ نقبل أنّ هذه المتتالية تتقارب من 0. بالاستفادة من السؤال ① أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً. قارن جهة اطراد التابع f وجهة اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

الحل

$$u_0 = \frac{3}{4} \qquad , u_{n+1} = {u_n}^2$$

① بما أن $x \in]0,1[$ فإن: $x > 0$ كما أن : $x^2 > 0$

لنأخذ التابع : $f : x \to x^2 - x$, لهذا التابع جدول الإشارة التالي:

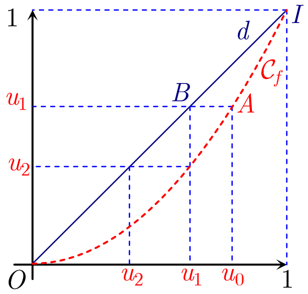
x	0 $\qquad\qquad$ 1
$f(x) = x^2 - x$	0 $\quad -\quad$ 0

إذاً عندما $x \in]0,1[$ فإن: $x^2 - x < 0$ وهذا يكافئ $0 < x^2 < x < 1$

إذاً عندما $x \in]0,1[$ فإن $x - 1 < 0$ وهذا يكافئ $x < 1$

نستنتج أنه من أجل $x \in]0,1[$ فإن $0 < x^2 < x < 1$

② بالحل المشترك لمعادلتيهما نجد:



$f(y) = y_d$ تكافئ: $x^2 = x$ وتكافئ $x^2 - x = 0$ و تكافئ $x(x-1) = 0$

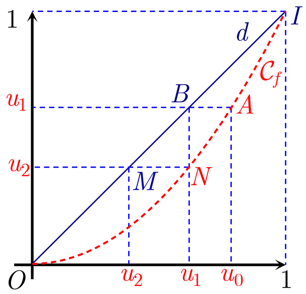
$y = 1$ ومنه $x = 1$ أو: $y = 0$ ومنه $x = 0$ إما :

إذن d يقطع C_f في النقطتين $O(0,0)$ و$I(1,1)$.

❶ ③ لدينا $u_1 = {u_0}^2 = \dfrac{9}{16}$

B نقطة من d لها نفس ترتيب A , وبما أن : $y_A = f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{9}{16}$ فإن : $y_B = \dfrac{9}{16}$

وبما أن : $B \in d$ فهي تحقق معادلته $y = x$ ومنه : $x_B = \dfrac{9}{16}$ إذن $x_B = u_1$.



❷ نفترض N هي النقطة من C_f التي فاصلتها هي $x_N = u_1 = \dfrac{9}{16}$ وبما أنَّ

$N \in C_f$ فإنَّ $y_N = u_1 = \dfrac{81}{256}$ ولنفترض أنَّ M هي نقطة من d لها نفس

ترتيب N أي $y_M = \dfrac{81}{256}$

وبما أن $M \in d$ فإنَّ $x_M = y_M = u_2 = \dfrac{81}{256}$

④ نعم نجد أن : $u_0 > u_1 > u_2 > u_3 > ......$

وبما أن النقط المحددة على C_f تقترب من المبدأ فإننا نتنبأ بأن المتتالية (u_n) متناقصة ومتقاربة من الصفر .

⑤ $u_{n+1} = {u_n}^2$

وبما أن $u_n \in]0,1[$ وذلك أياً كانت $n \in \mathbb{N}$ فإنه حسب ① : $0 < {u_n}^2 < u_n < 1$ وبالتالي :

$u_{n+1} < u_n$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً ونحن نعلم أن التابع $f : x \to x^2$ متزايد تماماً على المجال $[0,+\infty[$. إذن جهة اطراد f تعاكس جهة اطراد (u_n).

بوجه عام، لتمثيل الحدود الأولى لمتتالية تدريجيّة $u_{n+1} = f(u_n)$ نرسم المنحني البياني C_f والمستقيم الذي معادلته $y = x$، ثُمّ نعيّن u_0 على محور الفواصل، ونتابع الإنشاء كما سبق.

نشاط2 حالة التابع التآلفي $x \mapsto ax + b$

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرّفة بالشرط $u_0 = 1$، وأيّاً كان n، كان $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 3$.

① احسب u_1، u_2، u_3، u_4، u_5، u_6.

② ما هو التابع f الذي يُحقّق $u_{n+1} = f(u_n)$ أيّاً كانت قيمة n.

③ اتبع طريقة الفقرة السابقة لتمثيل الحدود الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$. أيفيدك هذا التمثيل في التنبّؤ بجهة اطراد المتتالية؟ وبنهايتها المحتملة؟

④ ❶ أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $v_n = u_n - 2$ متتالية هندسيّة.

❷ عبّر عن v_n بدلالة n. ثُمّ استنتج نهاية $(v_n)_{n\geq 0}$ ونهاية $(u_n)_{n\geq 0}$.

الحل

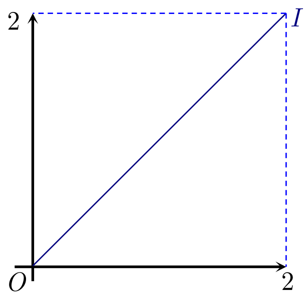
① $u_0 = 1, u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 3$

$$\begin{aligned}
u_1 &= -\frac{1}{2}u_0 + 3 = \frac{5}{2} = 2.5\\
u_2 &= -\frac{1}{2}u_1 + 3 = -\frac{5}{4} + 3 = \frac{7}{4} = 1.75\\
u_3 &= -\frac{1}{2}u_2 + 3 = -\frac{7}{8} + 3 = \frac{17}{8} = 2.125\\
u_4 &= -\frac{1}{2}u_3 + 3 = -\frac{17}{16} + 3 = \frac{31}{16} = 1.937\\
u_5 &= -\frac{1}{2}u_4 + 3 = -\frac{31}{32} + 3 = \frac{65}{32} \approx 2.03\\
u_6 &= -\frac{1}{2}u_5 + 3 = -\frac{65}{64} + 3 = \frac{127}{64} \approx 1.98
\end{aligned}$$

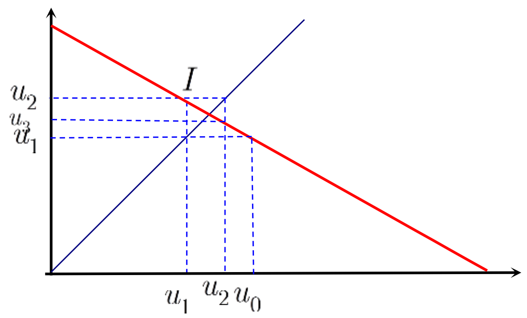
② $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :\ x \mapsto -\dfrac{1}{2}x + 3$

③

نوجد النقطة المشتركة بين C_f والمستقيم d الذي معادلته $y = x$ بحل المعادلة :



$-\frac{1}{2}x+3=x$ أو $\frac{3}{2}x=3$ أي $x=2$



إذن يقطع d الخط C_f بالنقطة $I(2,2)$

نتنبأ بأن المتتالية ليست مطردة تماماً.

ونهايتها المحتملة هي: 2

④ ❶

$$v_n=u_n-2$$

$$v_{n+1}=u_{n+1}-2=-\frac{1}{2}u_n+3-2=-\frac{1}{2}u_n+1$$

لكن: $u_n=v_n+2$ ومنه: $v_{n+1}=-\frac{1}{2}v_n-1+1$

$$v_{n+1}=-\frac{1}{2}v_n$$

إذن: ثابت $\frac{v_{n+1}}{v_n}=-\frac{1}{2}(const)$

إذن: $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها هو $q=-\frac{1}{2}$

❷ $v_0=u_0-2=1-2=-1$ ومنه $v_n=v_0q^n=-\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

وهي متتالية هندسية أساسها $-\frac{1}{2}$ متقاربة من الصفر.

وبما أن: $u_n=v_n+2$ فإن: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}v_n+2=0+2=2$

نشاط3 الحالة العامّة للتابع التآلفي $x\mapsto ax+b$

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرّفة كما يأتي : $u_0=c$ ، و $u_{n+1}=au_n+b$ أيّاً كان n . مع $a\neq 1$.

① أثبت أنّ للمعادلة $x=ax+b$ حلٌّ وحيد نرمز إليه بالرمز λ ، احسبه بدلالة a و b.

② نعرّف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $v_n=u_n-\lambda$.

❶ أثبت أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة.

❷ احسب v_n بدلالة n.

❸ أثبت تقارب المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ في حالة $-1 < a < 1$، ما نهايتها في هذه الحالة.

③ نفترض أنّ $-1 < a < 1$. أثبت تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$، واحسب نهايتها بدلالة a و b و c.

④ احسب u_n بدلالة a و b و c و n.

الحل

$a \neq 1$: $\quad u_{n+1} = a.u_n + b, \quad u_0 = c$

① $x = ax + b$ تكافئ: $x(1-a) = b$

ومنه: $x = \dfrac{b}{1-a}$ حل وحيد، إذن: $\lambda = \dfrac{b}{1-a}$

❶ ② $v_n = u_n - \lambda$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \lambda = a.u_n + b - \lambda$$

ولكن : $u_n = v_n + \lambda$ ومنه :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= av_n + a\lambda + b - \lambda \\ &= av_n + a\left(\frac{b}{1-a}\right) + b - \frac{b}{1-a} \\ &= av_n + \frac{ab + b(1-a) - b}{1-a} \\ &= av_n + \frac{ab + b - ab - b}{1-a} = av_n \end{aligned}$$

وبالتالي: $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = a$ ثابت

إذن v_n متتالية هندسية أساسها $q = a$

❷ $u_0 = c$ ومنه $v_0 = u_0 - \lambda = c - \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{c(1-a) - b}{1-a}$

$$v_0 = \frac{c - ac - b}{1-a}$$

$$v_n = v_0.q^n = \frac{c - ac - b}{1-a}.a^n$$

❸ وفي حالة : $-1 < a < 1$ فلدينا حسب المبرهنة (11) أن : $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$

وبالتالي : $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ ، إذن $(v_n)_{n\geq 0}$ متقاربة في حالة $-1 < a < 1$ ونهايتها الصفر .

③ لدينا $u_n = v_n + \lambda$ وبالتالي: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0 + \lambda = \lambda$ ، إذن $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة ونهايتها λ

④ طريقة (1)

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + \lambda = v_0.q^n + \lambda = \frac{c - ac - b}{1-a}.a^n + \frac{b}{1-a} \\ &= \frac{c(1-a)}{1-a}.a^n - \frac{b}{1-a}.a^n + \frac{b}{1-a} \\ &= c.a^n + b\frac{1-a^n}{1-a} \end{aligned}$$

طريقة (2):

يمكننا استقراء الناتج كالتالي:

$$\begin{aligned} u_1 &= a.u_0 + b = ac + b \\ u_2 &= a.u_1 + b = a(ac+b) + b = a^2c + ab + b = a^2c + b(a+1) \\ u_3 &= a.u_2 + b = a^3c + a^2b + ab + b = a^3c + b(a^2 + a + 1) \\ u_4 &= a.u_3 + b = a^4c + a^3b + a^2b + ab + b = a^4c + b(a^3 + a^2 + a + 1) \\ u_5 &= a.u_4 + b = a^5c + a^4b + a^3b + a^2b + ab + b \\ &= a^5c + b(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) \end{aligned}$$

$$u_n = a^nc + b(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a + 1)$$

أو : $u_n = a^nc + b.\sum_{K=0}^{K=n-1} a^K$ ابحث عن تطابق نتيجة الطريقتين.

تمرينات ومسائل

1 ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ في الحالات الآتية.

① $u_n = \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$ ② $u_0 = 2, \quad u_{n+1} = u_n - n$

③ $u_n = n + (-1)^n$ ④ $u_n = \dfrac{2^n}{n}, \quad n \geq 1$

الحل

① $u_n = \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$ غير مطردة

② $u_0 = 2, \quad u_{n+1} = u_n - n$

$u_{n+1} - u_n = -n < 0$ ومنه المتتالية متناقصة تماماً

③ $u_n = n + (-1)^n$

$$u_{n+1} - u_n = n + 1 + (-1)^{n+1} - (n + (-1)^n) = 1 + (-1)^n(-1 - 1) = 1 - 2(-1)^n$$

المتتالية غير مطردة.

④ $u_n = \dfrac{2^n}{n}, \quad n \geq 1$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+1}}{n+1} \times \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{2n}{n+1} \geq 1$ متزايدة.

2 لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = 2n^3 - 30n^2 + 54n$.

1. ادرس اطراد التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 - 30x^2 + 54x$.
2. استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة بدءاً من الدليل $n = 9$.

الحل

1. التابع f تابعٌ كثير الحدود فهو اشتقاقي على $\mathbb{R}$. وأيّاً كانت قيمة x من $\mathbb{R}$ كان

$$f'(x) = 6x^2 - 60x + 54$$

إذن ينعدم f' عند $x = 9$ و $x = 1$.

نستنتج من ذلك إشارة التابع المشتق f' كما في الجدول الآتي

x	$-\infty$		1		9		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

وهكذا يمكننا أن نستنتج ما يأتي

- $f'(x) > 0$ على المجال $]-\infty, 1[$ و $f'(-1) = 0$ إذن f متزايدٌ تماماً على المجال $]-\infty, 1[$.

- $f'(x) < 0$ على المجال $]1,9[$ إذن f متناقصٌ تماماً على المجال $]1,9[$.
- $f'(x) > 0$ على المجال $]9,+\infty[$ و $f'(9) = 0$ إذن f متزايدٌ تماماً على المجال $[9,+\infty[$.

لنعرض إذن هذه النتائج في جدول الاطراد

x	$-\infty$		1		9		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(9)$	$\nearrow$	

2. بما أنَّ f متزايداً تماماً كانت على المجال $]9,+\infty[$ كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً بدءاً من الدليل $n = 9$.

3 لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابيّة أساسها r . عيّن جهة اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بدلالة إشارة r .

الحل

$$u_{n+1} - u_n = (u_0 + (n+1)r) - (u_0 + nr) = r$$

أولاً: عندما $r > 0$ نجد أنَّ $u_{n+1} - u_n > 0$ والمتتالية متزايدة.

ثانياً: عندما $r < 0$ نجد أنَّ $u_{n+1} - u_n > 0$ والمتتالية متناقصة.

ثالثاً: عندما $r = 0$ نجد أنَّ $u_{n+1} - u_n > 0$ والمتتالية ثابتة.

4 لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالشرطين $u_0 = 1$ وأيّاً كان n كان $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$.

1. احسب الحدود u_1 ، u_2 ، .... ، u_5 .
2. في حالة $u_n \neq 0$ نعرّف $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. احسب الحدود v_0 ، v_1 ، .... ، v_5 .
3. أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابيّة، ثُمّ عبّر عن u_n بدلالة n .

الحل

1. بالتعويض بالعلاقة $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$ نجد

$$u_1 = \frac{1}{2}\ ,\ u_2 = \frac{1}{3}\ ,\ u_3 = \frac{1}{4}\ ,\ u_4 = \frac{1}{5}\ ,\ u_5 = \frac{1}{6}$$

2. بالتعويض بالعلاقة $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ نجد

$v_0 = 1, v_1 = 2, v_2 = 3, v_3 = 4 , v_4 = 5 , v_5 = 6$

.3 $$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{u_n}{u_n + 1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n}{u_n} = 1$$

ثابت وبالتالي v_n متتالية حسابية أساسها 1 وحدها الأوّل 1، ومنه $v_n = 1 + n$

ومنه $u_n = \frac{1}{n+1}$.

5 أعد السؤال السابق في حالة المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة كما يأتي.

$u_0 = \frac{1}{5}$ وأيّاً كان n كان $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 - 2u_n}$.

الحل

.1 بالتعويض بالعلاقة $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$ نجد

$u_1 = \frac{1}{3} , u_2 = 1 , u_3 = -1 , u_4 = -\frac{1}{3} , u_5 = -\frac{1}{5}$

.2 بالتعويض بالعلاقة $v_n = \frac{1}{u_n}$ نجد

$v_0 = 5, v_1 = 3, v_2 = 1, v_3 = -1 , v_4 = -3 , v_5 = -5$

.3 $$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{u_n}{1 - 2u_n}} - \frac{1}{u_n} = \frac{-2u_n}{u_n} = -2$$

ثابت وبالتالي v_n متتالية حسابية أساسها -2 وحدها الأوّل 5، ومنه $v_n = 5 - 2n$

ومنه $u_n = \frac{1}{5 - 2n}$.

6 لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالشرطين:

$u_0 = 2$ وأيّاً كان n كان $u_{n+1} = 2u_n + 5$.

1. احسب الحدود u_1 ، u_2 ،....، u_5 .
2. نعرّف $v_n = u_n + 5$. احسب الحدود v_0 ، v_1 ،....، v_5 .
3. أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة، ثُمّ عبّر عن u_n بدلالة n .

الحل

.1

$$u_1 = 2u_0 + 5 = 9$$
$$u_2 = 2u_1 + 5 = 23$$
$$u_3 = 2u_2 + 5 = 51$$
$$u_4 = 2u_3 + 5 = 107$$
$$u_5 = 2u_4 + 5 = 219$$

.2

$v_n = u_n + 5$ و $v_0 = u_0 + 5 = 7$ ، $v_1 = 14$ ، $v_2 = 28$ ، $v_3 = 56$ ، $v_4 = 112$ ، $v_5 = 224$

3. ثابت $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1}+5}{u_n+5} = \dfrac{2u_n+10}{u_n+5} = 2$

وبالتالي v_n هندسية أساسها 2 $v_n = 7\cdot 2^n$ ومنه : $u_n = 7\cdot 2^n - 5$

7 أعد السؤال السابق في حالة المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة كما يأتي:

$u_0 = 3$ وأيّاً كان n كان $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 1$ ، و $v_n = 3u_n - 2$.

الحل

.1

$$u_1 = -\frac{1}{2}u_0 + 1 = -\frac{1}{2}$$
$$u_2 = -\frac{1}{2}u_1 + 1 = \frac{5}{4}$$
$$u_3 = -\frac{1}{2}u_2 + 1 = \frac{3}{8}$$
$$u_4 = -\frac{1}{2}u_3 + 1 = \frac{13}{16}$$
$$u_5 = -\frac{1}{2}u_4 + 1 = \frac{19}{32}$$

.2

$$
\begin{aligned}
v_n &= 3u_n - 2\\
v_0 &= 3u_0 - 2 = 7\\
v_1 &= 3u_1 - 2 = \frac{-7}{2}\\
v_2 &= 3u_2 - 2 = \frac{7}{4}\\
v_3 &= 3u_3 - 2 = \frac{-7}{8}\\
v_4 &= 3u_4 - 2 = \frac{7}{16}\\
v_5 &= 3u_5 - 2 = \frac{-7}{32}
\end{aligned}
$$

.3 $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3u_{n+1} - 2}{3u_n - 2} = \frac{\frac{-3}{2}u_n + 1}{3u_n - 2} = \frac{-1}{2}$ ثابت

وبالتالي v_n هندسية أساسها $\frac{-1}{2}$. ومنه $v_n = 7 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n$: $u_n = \frac{1}{3}\left(2 + 7 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)$

8 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابيّة فيها

$u_1 + u_2 + u_3 = 9$ و $u_{10} + u_{11} = 40$.

.1 احسب u_0 و r .

.2 احسب المجموع $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{30}$.

الحل

.1 نعوّض $u_n = u_0 + n\,r$ فنجد

$$
\begin{aligned}
&u_0 + r + u_0 + 2r + u_0 + 3r = 9\\
&u_0 + 10r + u_0 + 11r = 40\\
&3u_0 + 6r = 9\\
&2u_0 + 21r = 40
\end{aligned}
$$

ومنه
$$
\begin{aligned}
u_0 + 2r &= 3\\
u_0 &= 3 - 2r
\end{aligned}
$$

نعوّض في المعادلة الثانية

$$
\begin{aligned}
&2(3 - 2\mathrm{r}) + 21\mathrm{r} = 40\\
&6 - 4r + 21r = 40\\
&17r = 34\\
&r = 2\\
&u_0 = 3 - 4 = -1
\end{aligned}
$$

.2

$$S=\frac{n}{2}(2u_0+(n)r)=\frac{31}{2}(2(-1)+30\times 2)=899$$

9 أثبت أنّ المجموع $1+3+5+\cdots+97+99$ هو مربّع عدد طبيعي. بوجه عام، احسب بدلالة n، مجموع أول n عدد طبيعي فردي

$S=1+3+5+\cdots+(2n-1)$

الحل

$$1+3+5+\cdots+97+99$$

نلاحظ أن المقدار السابق هو مجموع متتالية حسابية أساسها 2 و حدها الأول 1 ومنه

$$S_n=\frac{n(a_1+a_2)}{2}$$

$$1+3+5+\cdots+97+99=\frac{99+1}{2}\times 50=50^2$$

بوجه عام $S=1+3+5+\cdots+(2n-1)$

مجموع متتالية حسابية حدها الأول 1 و أساسها 2 ومنه نجد عدد الحدود n

$$S=\frac{n}{2}(2n-1+1)=n^2$$

10 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابيّة. نعرّف $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$.

1. احسب u_1 و u_n إذا علمتَ أنّ $r=-7$ و $n=33$ و $S_n=0$.
2. احسب u_1 و n إذا علمتَ أنّ $u_n=14$ و $r=7$ و $S_n=-1176$.

الحل

.1

$$S_n=\frac{n}{2}(2u_1+(n-1)r)$$
$$0=\frac{33}{2}(2u_1+32\times -7)$$
$$2u_1=32\times 7$$
$$u_1=16\times 7=112$$
$$u_n=112+(n-1)(-7)=112-7n+7=119-7n$$

.2

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$
$$14 = u_1 + 7(n-1)$$
$$14 = u_1 + 7n - 7$$
$$21 + u_1 + 7n$$
$$u_1 = 21 - 7n$$

$$S_n = \frac{n}{2}(u_n + u_1)$$
$$-1176 = \frac{n}{2}(14 + u_1)$$
$$-2352 = n(14 + u_1)$$
$$-2352 = n(14 + 21 - 7n)$$
$$-2352 = 35n - 7n^2$$
$$7n^2 - 35n - 2352 = 0$$
$$n^2 - 5n - 336 = 0$$
$$(n-21)(n+16) = 0$$

$n = 21$ مقبول

$n = -16$ مرفوض

$$u_1 = 21 - 7 \times 21 = -6 \times 21 = -126$$

11 احسب المجاميع الآتية.

$$S_a = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{1048\,576}$$
$$S_b = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \cdots - \frac{1}{6\,561}$$
$$S_c = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^7}$$

الحل

$$S_a = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots + \frac{1}{1048576}$$

نلاحظ أن المتتالية u_n التي حدودها :

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\ldots\ldots$$

هي متتالية هندسية حدها الأول : $u_0 = \frac{1}{4}$ وأساسها $q = \frac{1}{2}$

ولإيجاد رتبة الحد $\frac{1}{1048576}$ نكتب :

$$
\begin{aligned}
u_n &= u_0\, q^n \\
u_0\, q^n &= \frac{1}{1048576} \\
\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n &= \frac{1}{1048576} \\
\left(\frac{1}{2}\right)^n &= \frac{4}{1048576} \\
\frac{1}{2^n} &= \frac{1}{262144} \\
2^n &= 262144 \\
2^n &= 2^{18} \\
n &= 18
\end{aligned}
$$

إذن S_b هو مجموع أول 19 حدّ من متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0 = \frac{1}{4}$

$$S_a = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$S_a = S_{18} = \frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{19}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times (1-\left(\frac{1}{2}\right)^{19}) = \frac{524287}{1048576}$$

$$S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \ldots\ldots\ldots - \frac{1}{6561}$$

إن: $\frac{1}{3}\ ,\ -\frac{1}{9}\ ,\ \frac{1}{27}\ ,\ \ldots\ldots\ldots$

تشكل متتالية هندسية حدها الأول $a = \frac{1}{3}$ وأساسها: $q = -\frac{1}{3}$ ولإيجاد مرتبة الحدّ $-\frac{1}{6561}$ نجد:

$$-\frac{1}{6561} = a.q^n$$
$$-\frac{1}{6561} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$
$$(-1)^n.\left(-\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{3}{6561}$$
$$\frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{-1}{2187}$$
$$3^n = 2187$$
$$3^n = 3^7$$
$$n = 7$$

إذن S_n هو مجموع أول 8 حدود من متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{3}$ و حدها الأول $a = \frac{1}{3}$ ومنه :

$$S_b = a.\frac{1-q^n}{1-q}$$
$$S_b = S_7 = \frac{1}{3}.\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^8}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\times\frac{1-\frac{1}{3^8}}{\frac{4}{3}} = \frac{1640}{6561}$$

S_c هو مجموع أول 8 حدّ من متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{10}$ و حدها الأول $u_0 = 1$ نعوض ونجد الناتج

12 لنتأمّل متتاليتين حسابيّتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$، وعددين حقيقيين b و a . نعرّف

$$t_n = au_n + bv_n$$

أثبت أنّ المتتالية $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابيّة.

الحل

طريقة(1)

نفترض أن أساس المتتالية u_n هو d_1

وأن أساس المتتالية v_n هو d_2

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= (a.u_{n+1} + b.v_{n+1}) - (a.u_n + b.v_n) \\ &= a\,u_{n+1} - a\,u_n + b\,v_{n+1} - b\,v_n \\ &= a(u_{n+1} - u_n) + b(v_{n+1} - v_n) \\ &= a\,d_1 + b\,d_2 \end{aligned}$$

ثابت إذن t_n هي متتالية حسابية أساسها : $d = a\,d_1 + b\,d_2$

طريقة(2):

نفترض أساس u_n هو d_1 فيكون : $u_n = u_0 + (\mathrm{n}-1)\mathrm{d}_1$

نفترض أساس v_n هو d_2 فيكون: $v_n = v_0 + (\mathrm{n}-1)\mathrm{d}_2$ وحسب تعريف t_n نجد:

$$t_n = a \cdot u_0 + a \cdot (\mathrm{n}-1)\mathrm{d}_1 + b \cdot v_0 + b(n-1)d_2 = (\mathrm{a\,u}_0 + \mathrm{b}\,v_0) + (\mathrm{n}-1)(\mathrm{a\,d}_1 + \mathrm{b\ d}_2)$$

إذن t_n متتالية حسابية حدها الأول $t_0 = a\,u_0 + b\,v_0$ وأساسها : $d = a\,d_1 + b\ d_2$

لنتعلّم البحث معاً

13 متتالية حسابيّة

تكوّن الأعداد a و b و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابيّة. نفترض أنّ مجموع هذه الأعداد يساوي 21 وأنّ مجموع مربّعاتها يساوي 197. عيّن هذه الأعداد.

الحل

$a + b + c = 21$ ①

$a^2 + b^2 + c^2 = 147$ ②

طريقةأولى: كل حد في متتالية حسابية وسط حسابي بين مجاوريه $b = \dfrac{a+c}{2}$ لنعوضها في ① فنجد

$b + 2b = 21$ ومنه $b = 7$

أصبح $a + c = 14$ومنه ③ $c = 14 - a$

بالإفادة من ② :

$$\begin{aligned} &a^2 + 49 + (14-a)^2 = 197 \\ &a^2 + 49 + 196 - 28a + a^2 - 197 = 0 \\ &a^2 - 14a + 24 = 0 \\ &(a-12)(a-2) = 0 \end{aligned}$$

إما: $a = 12, c = 2, b = 7$

أو : $a=2, c=12, b=7$

طريقة ثانية:

نفترض أن أساس المتتالية r فتكون الحدود الثلاثة : $b-r, b, b+r$

حسب نص المسألة : $b-r+b+b+r=12$

$b=7$

وأيضاً : $(7-r)^2+7^2+(7+r)^2=147$

$49-14r+r^2+449+14r+r^2=147$

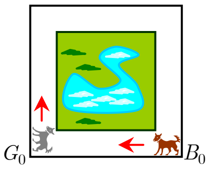
$r^2=25$

إما : $r=5$ والحدود هي : $a=2, c=12, b=7$

أو : $r=-5$والحدود هي : $a=12, c=2, b=7$

14 الملاحظة

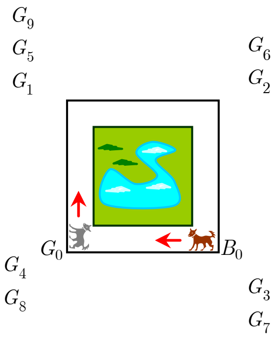
يلعب كلبان في طريق يحيط بحديقة مربّعة طول ضلعها $250\,\mathrm{m}$. انطلق الكلب الرمادي من النقطة G_0 راكضاً بسرعة ثابتة وقاطعاً ضلع المربّع بدقيقة واحدة. رآه الكلب البنّي الذي كان عند النقطة B_0 وأراد اللحاق به فركض ورائه بسرعة أكبر وبحيث تُقسم المسافة بينهما على 2 في كلِّ دقيقة.



1. عيّن موضعَي الكلبين على الشكل في الدقائق الأربعة المتتابعة.
2. نُقرُّ أنّ الكلب البنّي قد لحق بالرماديّ إذا صارت المسافة بينهما أقلّ من $20\,\mathrm{cm}$. بعد كم دقيقة يلحق الكلبُ البنيّ الكلبَ الرمادي؟ وما المسافة التي يكون قد قطعها حينئذ؟

الحل

1. نضع $d_0=250\,\mathrm{m}$ وهي تمثّل المسافة بين الكلبين عند البداية، فتكون مثلاً .. المسافة بينهما بعد خمس دقائق



$$d_0 = 250$$
$$d_1 = 250 \times \frac{1}{2} = 125$$
$$d_2 = 250\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 62.5$$
$$d_3 = 250\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 31.25$$
$$d_4 = 250\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 15.625$$

2. بعد 9 دقائق يكون الرمادي في النقطة G_9 المنطبقة على G_5 و G_1، يلحق الكلب البني بالكلب الرمادي بعد 4 دقائق

المسافة التي قطعها الكلب البني بعد 4 دقائق هي : $1250 - 15.625 = 1234.375m$

15 صح أو خطأ

هل يوجد مثلّث قائم الزاوية تقع أطوال أضلاعه في متتالية هندسيّة.

الحل

لنفترض وجود المثلث القائم المطلوب ، ولنرمّز أطوال أضلاع هذا المثلث بالرموز a,b,c ولنفترض أنها ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية نرمز إلى أساسها بالرمز q فيكون $0 < q$ لأن أطوال أضلاع المثلث موجبة تماماً .

عندئذٍ $b = aq$ و $c = bq = aq^2$

إن تساوي أي ضلعين في هذا المثلث يؤدي إلى أن $q = 1$ فيكون $a = b = c$ وهذا مستحيل لأنَّ المثلث يصبح متساوي الأضلاع وليس قائماً ومنه:

إما : $q > 1$ وهنا تكون $a < b < c$ ويكون c هو الوتر .

في حالة $q > 1$ حسب مبرهنة فيثاغورث:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$q^4a^2 = a^2 + q^2a^2$$
$$q^4 - q^2 - 1 = 0$$ نضع $q^2 = x$:

$$x^2 - x - 1 = 0$$
$$\Delta = 1 + 4 = 5$$
$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$$ مرفوض

ومنه $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ وبالتالي $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

إذن يوجد مثلث قائم تقع أطول أضلاعه في متتالية هندسية وهي a, aq, aq^2 حيث $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

ملاحظة: كان بالإمكان مناقشة حالة $0 < q < 1$ وهنا تكون : $a > b > c$ ويكون a هو الوتر

وفي حالة $0 < q < 1$ نجد حسب فيثاغورث :

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = a^2q^2 + a^2q^4$$
$$q^4 + q^2 - 1 = 0$$

نفترض $q^2 = x$ فنجد:

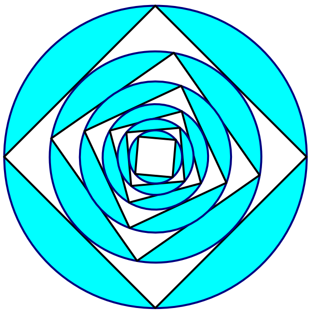
$$x^2 + x - 1 = 0$$
$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ومنه : $q^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ومنه : $q = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

$x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ مرفوض

إذا يوجد مثلث قائم تقع أطول أضلاعه في متتالية هندسية وهي a, aq, aq^2 حيث $a > 0$ وَ $q = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

16 دوائر ومربّعات متداخلة



نعطى دائرة نصف قطرها $2\,\mathrm{cm}$، وننشئ داخلها مربّعاً، ثُمّ ننشئ الدائرة الماسّة لأضلاع المربّع. نفترض أنّه بالإمكان متابعة هذا الإنشاء إلى ما لا نهاية. ادرس متتالية مساحات الدوائر، ومتتالية مساحات المربّعات. وحدّد مرحلة الإنشاء التي تصبح بدءاً منها مساحة المربّع أصغر من $1\mathrm{mm}^2$.

الحل

نصف قطر الدائرة الأولى $r_0 = 2$ ،مساحتها $d_0 = \pi r_0^2 = 4\pi$

طول ضلع المربع الأول : $l_0 = A_0B_0 = \sqrt{OA_0^2 + OB_0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

مساحة المربع الأول $C_0 = l_0^2 = 8$

قطر الدائرة الثانية هو طول ضلع المربع الأول ، أي : $2r_1 = 2\sqrt{2}$ ومنه $r_1 = \sqrt{2}$

مساحة الدائرة الثانية $d_1 = 2\pi$

طول ضلع المربع الثاني $l_1 = \sqrt{2+2} = 2$

نرمّز مساحات لدوائر المتتالية بـ $d_0, d_1, d_1, d_2, \ldots, d_n$ فيكون:

$$
\begin{aligned}
d_0 &= 4\pi \\
d_1 &= 2\pi = 4\pi\left(\frac{1}{2}\right) \\
d_2 &= 4\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&\vdots \\
d_n &= 4\pi\left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}
$$

ونلاحظ أن $\frac{1}{2} = \dfrac{4\pi\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{4\pi\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \dfrac{d_{n+1}}{d_n}$ ثابت ، ومنه : متتالية مساحات الدوائر $(d_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $d_n = 4\pi\left(\frac{1}{2}\right)^n$ هي متتالية هندسية حدها الأول $d_0 = 4\pi$ وأساسها $0 < q = \frac{1}{2} < 1$ فهي متتالية ذات حدود موجبة ، متناقصة تماماً ومتقاربة من (0)

نرمّز مساحات المربعات المتتابعة بـ $c_0, c_1, c_2, ..., c_n$ فيكون:

$$c_0 = 8$$
$$c_1 = 4 = 8\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$c_2 = 8\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\vdots$$
$$c_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ونلاحظ أن $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{8\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2}$ ثابت ، ومنه : متتالية مساحات المربعات $(c_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق

$c_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ هي متتالية هندسية حدها الأول $c_0 = 8$ وأساسها $0 < q = \frac{1}{2} < 1$ فهي متتالية ذات حدود موجبة ، متناقصة تماماً ومتقاربة من (0)

كل مربع مساحته أصغر تماماً من $1.mm^2$ يوافق :

$$8\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{100}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{100}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} < \frac{1}{100}$$
$$\frac{1}{2^{n-3}} < \frac{1}{100}$$
$$2^{n-3} > 100$$
$$2^{n-3} \geq 2^7$$
$$n \geq 10$$

مرحلة الإنشاء المطلوبة هي بدءاً من $n = 10$ وما يليها .

17 جذور تربيعيّة

المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية معرّفة أيّاً كانت قيمة n بالعلاقة $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$. ادرس المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$، من جهة الاطراد والنهاية إن وُجدت.

الحل

لدينا $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ أياً كانت $n\in\mathbb{N}$

باستعمال آلة حاسبة نجد:

$$u_0=1,\ u_1\simeq 0.41\ ,\ u_2\simeq 0.31\ ,\ u_3\simeq 0.28\ ,\ u_4\simeq 0.22\ ,\ u_5\simeq 0.21\ ,\ u_6\simeq 0.14$$

نلاحظ أن : $u_0>u_1>u_2>u_3>u_4>u_5>u_6$ يمكننا التنبؤ أن المتتالية متناقصة

كما أن $u_{100}=0.049875,\ u_{10000}\simeq 0.00499\ ,\ u_{100000}\simeq .001581$

هذا يوحي لنا أن نحاول إثبات أن المتتالية متناقصة تماماً نحو الصفر، أي يجب أن نثبت أن $u_{n+1}<u_n$ أياً كانت $n\in\mathbb{N}$

أي: $\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ وهذا يكافئ ① $\sqrt{n+2}+\sqrt{n}<2\sqrt{n+1}$

وبما أن طرفي المتراجحة ①موجبان فهي تكافئ المتراجحة الآتية :

$$(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})^2<(2\sqrt{n+1})^2$$

وبالإصلاح نجد : $n+2+n+2\sqrt{n}\sqrt{n+2}<4(n+1)$

$$2(n+1)+2\sqrt{n(n+2)}<4(n+1)$$

أي المتراجحة ①

$$\sqrt{n(n+2)}<n+1 \quad ②$$

والمتراجحة ② ذات الطرفين الموجبين تكافئ : $n(n+2)<(n+1)^2$

أي $n^2+2n<n^2+2n+1$ وهي محققة وضوحاً

ومنه المتراجحة ① صحيحة وبالتالي $u_{n+1}<u_n$ أياً كان $n\in\mathbb{N}$ والمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

لإيجاد النهاية نضرب بالمرافق $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ ونقسم عليه :

$$u_n=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

من أجل $1\leq n$ نجد :

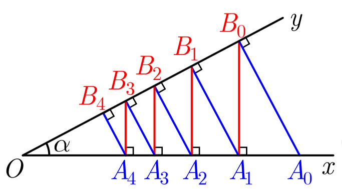
$u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}$ (البسط =1 ثابت ، إذا صَغُرَ المقام يكبر الكسر الموجب)

أي : $0\leq u_n\leq\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{n}}=0$ فإنه بحسب مبرهنة المتتاليات الثلاث نجد : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=0$

يمكن حساب $u_1,\ldots,u_{100}$: $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

18 خطٌّ مضلّعي منكسر



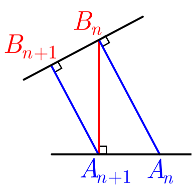
نتأمّل نصفي مستقيمين $[Ox$ و $[Oy$ يصنعان زاوية هندسيّة حادّة α. A_0 نقطة من $[Ox$ تُحقّق $OA_0=10\,\text{cm}$. المسقط القائم للنقطة A_0 على $[Oy$ هي B_0. وكذلك المسقط القائم للنقطة B_0 على $[Ox$ هي A_1. وهكذا دواليك....

احسب، إن وُجِدَت، نهاية المقدار

$\ell_n=A_0B_0+A_1B_1+\cdots+A_nB_n$.

الحل

من الشكل نلاحظ أن: $A_nOB_n=A_nB_nA_{n+1}=\alpha$ لتعامد الأضلاع وأيضاً $B_n\hat{A}_{n+1}B_{n+1}=\alpha$ لتعامد الأضلاع (او للتبادل الداخلي)



في المثلث القائم A_0B_0O : $\sin\alpha=\dfrac{A_0B_0}{OA_0}$ أي $\sin\alpha=\dfrac{A_0B_0}{10}$ ومنه :

$A_0B_0=10\sin\alpha$

في المثلث القائم $A_0A_1B_0$ نجد أن $A_0\hat{B}_0A_1 = \alpha$ ومنه :

$$\begin{aligned} A_1B_0 &= A_0B_0.\cos\alpha \\ &= 10\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned}$$

في المثلث القائم $A_1B_1B_0$ نجد أن $B_1\hat{A}_1B_0 = \alpha$ ومنه :

$$\begin{aligned} A_1B_1 &= A_1B_0.\cos\alpha \\ &= 10\sin\alpha.\cos\alpha.\cos\alpha \\ A_1B_1 &= 10\sin\alpha.\cos^2\alpha \end{aligned}$$

وحسب الشكل نجد:

$$\begin{aligned} A_{n+1}B_{n+1} &= A_{n+1}B_n.\cos\alpha \\ &= \left[A_nB_n.\cos\alpha\right]\cos\alpha \\ &= A_nB_n\cos^2\alpha \end{aligned}$$

وبذلك نحصل على المتتالية الهندسية $n \in \mathbb{N}$ (u_n) حيث $A_nB_n = u_n = 10\sin\alpha(\cos^2\alpha)^n$

حدها الأول : $u_0 = A_0B_0 = 10\sin\alpha$

أساسها: $q = \cos^2\alpha \in \left]0,1\right[$

$\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

عندئذٍ يكون :

$$\begin{aligned} l_n &= A_0B_0 + A_1B_1 + \ldots + A_nB_n \\ &= u_o + u_1 + \ldots + u_n \\ &= u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ &= 10\sin\alpha.\frac{1-(\cos^2\alpha)^{n+1}}{1-\cos^2\alpha} \\ &= 10\sin\alpha.\frac{1-(\cos^2\alpha)^{n+1}}{\sin^2\alpha} \\ &= \frac{10}{\sin\alpha}(1-(\cos^2\alpha)^{n+1}) \end{aligned}$$

فالمتتالية $(l_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $l_n = \dfrac{10}{\sin\alpha}(1-(\cos^2\alpha)^{n+1})$ نهايتها :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(l_n) = \dfrac{10}{\sin\alpha}(1-0) = \dfrac{10}{\sin\alpha}$ لأنه : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\cos^2\alpha)^{n+1} = 0$

19 خمسة أعداد a ، b ، c ، d ، e تكوّن حدوداً متوالية من متتالية حسابيّة. مجموع هذه الأعداد يساوي 55 ومجموع مربّعاتها يساوي 665. عيّن هذه الأعداد.

الحل

نفترض أن أساس المتتالية r

لدينا $a+b+c+d+e=55$ وحسب تعريف المتتالية الحسابية :

$$a+a+r+a+2r+a+3r+a+4r=55$$
$$5a+10r=55$$
$$a+2r=11$$
$$a=11-2r \quad ①$$

ولدينا فرضاً : $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=665$ ، وبالإفادة من ① نكتب :

$$(11-2r)^2+(11-r)^2+(11)^2+(11+r)^2+(11+2r)^2=665$$
$$121-44r+4r^2+121-22r+r^2+121+121+22r+r^2+121+44r+4r^2=665$$
$$10r^2+605=665$$
$$10r^2=60$$

ومنه $r^2=6$

إما: $r=\sqrt{6}$ ومنه: $a=11-2\sqrt{6}\ ,\ b=11-\sqrt{6}\ ,\ c=11\ ,\ d=11+\sqrt{6}\ ,\ e=11+2\sqrt{6}$

أو: $r=-\sqrt{6}$ ومنه: $a=11+2\sqrt{6}\ ,\ b=11+\sqrt{6}\ ,\ c=11\ ,\ d=11-\sqrt{6}\ ,\ e=11-2\sqrt{6}$

ملاحظة: يمكن حل المسألة باعتبار $a=c-2r,\ b=c-r,\ d=c+r,\ e=c+2r$ ثم نوجد c و بعدها r كما في المسألة 13.

20 أوجد جميع المتتاليات الحسابيّة التي أساسها عددٌ طبيعي أكبر تماماً من 5، وأوّل حدٍّ من حدودها ينتمي إلى المجال $[-15,2]$، وتضمّ بين حدودها الأعداد 22 و 37 و 82.

الحل

نلاحظ أنَّ الفرق بين الحدين 22 و 37 و بين الحدين 37 و 82. هما بالترتيب 15 و 45، وبالتالي فإن أساس المتتالية هو قاسم مشترك للعددين 15 و 45،فقيمته إما 1 أو 3أو 5أو 15، وبما أنَّ أساسها عددٌ

طبيعي أكبر تماماً من 5، فإنه 15 ونجد الحدود السابقة لـ22 هي 7 و -8 وبما أنّ -8 ينتمي إلى المجال $[-15,2]$، فهو الحد الأول.

المتتالية هي $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $u_n = -8+15n$

21 لتكن $u_n \;{}_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرّفة كما يأتي

$u_0 = \frac{1}{2}$، وأيّاً كان n من $\mathbb{N}$ كان $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$.

نعرّف المتتالية $v_n \;{}_{n\in\mathbb{N}}$ بالعلاقة $v_n = \frac{1}{u_n}+1$.

1. بالاستفادة من رسم بياني، تنبّأ بسلوك المتتالية $u_n \;{}_{n\in\mathbb{N}}$.
2. أثبت أنّ $v_n \;{}_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابيّة، عيّن أوّل حدودها وأساسها.
3. عبّر عن v_n، بدلالة n. ثُمّ استنتج u_n بدلالة n.
4. استنتج تقارب ونهاية المتتالية $u_n \;{}_{n\in\mathbb{N}}$.

الحل

1.

$$u_0 = \frac{1}{2} \ , \ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$$

$$u_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1+1} = \frac{1}{4} \ , \ u_2 = \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \ , \ u_3 = \frac{\frac{1}{6}}{1+\frac{2}{6}} = \frac{1}{8}$$

$$u_o > u_1 > u_2 > u_3$$

نتوقع المتتالية متناقصة تماماً لنثبت ذلك

أياً كانت n نلاحظ أنه $u_n > 0$ ومنه $2u_n > 0$

وبالتالي : $1+2u_n > 1$ وهذا يكافئ $\frac{1}{1+2u_n} < 1$ ويكافئ أيضاً $\frac{u_n}{1+2u_n} < u_n$ وتكافئ $u_{n+1} < u_n$

والمتتالية متناقصة تماماً.

2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $v_n = \frac{1}{u_n}+1$

أياً كانت n فإنه : ثابت $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}}+1-\left(\frac{1}{u_n}+1\right)=\frac{1+2u_n}{u_n}+1-\frac{1}{u_n}-1=2$ ثابت

ومنه : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية حدها الأول $v_o=3$ وأساسها $r=2$ وبالتالي $v_n=2n+3$

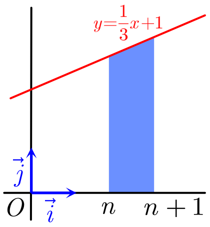
3. $v_n=3+2n$, $v_n=\frac{1}{u_n}+1$ ومنه : $u_n=\frac{1}{v_n-1}=\frac{1}{2n+2}$

أي المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة بالعلاقة $u_n=\frac{1}{2n+2}$

4. المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $u_n=\frac{1}{2n+2}$ وهي من النمط $u_n=f(n)$ و f هو التابع الكسري المعرف بالصيغة $x:\to\frac{1}{2x+2}$ ونعلم أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ ومنه : $\lim_{u\to+\infty}(u_n)=0$

أي المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة من الصفر .

22 يرمز المقداران a_n و p_n إلى مساحة ومحيط المضلّع الملوّن في الشكل المجاور المرسوم في مستوٍ منسوب إلى معلم متجانس.



1. احسب a_n و p_n بدلالة n.
2. أثبت أنّ المتتاليتين $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حسابيّتان.

الحل

1. الشكل $ABCD$ شبه منحرف قائم قاعدتاه $[AD],[BC]$ وارتفاعه $AB=1$ حيث:

$$A(n,0)$$
$$B(n+1,0)$$
$$C\left(n+1,\frac{1}{3}n+\frac{4}{3}\right)$$
$$D\left(n,\frac{1}{3}n+1\right)$$

طول الضلع المائلة $DC=\sqrt{(1)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{3}$

مساحة شبه المنحرف تساوي نصف ارتفاعه مضروباً بمجموع قاعدتيه

$$a_n=\frac{1}{2}AB(AD+BC)=\frac{1}{2}(1)(y_D+y_c)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}n+1+\frac{1}{3}n+\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{3}n+\frac{7}{6}$$

محيط شبه المنحرف يساوي مجموع أطوال أضلاعه

$$p_n = AB + BC + CD + DA = 1 + \frac{1}{3}n + \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{10} + \frac{1}{3}n + 1 = \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}(10 + \sqrt{10})$$

.2

المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة وفق $a_n = \frac{1}{3}n + \frac{7}{6}$ من الصيغة $a_n = nr + a_o$ فهي متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $a_o = \frac{7}{6}$

المتتالية $p_{n\ n\in\mathbb{N}}$ المعرفة وفق $p_n = \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}(10 + \sqrt{10})$ من الصيغة $a_n = nr + a_o$ فهي متتالية حسابية أساسها $r = \frac{2}{3}$ و حدها الأول $p_o = \frac{1}{3}(10 + \sqrt{10})$

23 لتكن a و b و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسيّة. نفترض أنّ :

$a + b + c = 21$ و $2a + b - c = 27$.

احسب a و b و c.

الحل

نفترض أن أساس المتتالية $q \neq 0$ فتكون الحدود الثلاثة a, aq, aq^2

لدينا $a + b + c = 21$ ومنه : $a + aq + aq^2 = 21$

أي : ① $a(1 + q + q^2) = 21$

بما أن : $2a + b - c = 27$ ومنه : $2a + aq - aq^2 = 27$

أي : ② $a(2 + q - q^2) = 27$

نقسم العلاقتين ① و ② طرفاً على طرف فنجد: $\frac{1 + q + q^2}{2 + q - q^2} = \frac{7}{9}$

بالإصلاح نحصل على المعادلة : $16q^2 + 2q - 5 = 0$

$(8q + 5)(2q - 1) = 0$

إما : $q = \frac{1}{2}$ أو : $q = -\frac{5}{8}$

من أجل $q=\frac{1}{2}$ نجد : $a=\frac{21}{1+q+q^2}=\frac{21}{\frac{7}{4}}=12$

$b=aq=\frac{42}{7}=6$

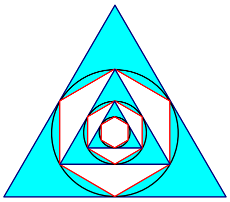
$c=aq^2=\frac{21}{7}=3$

من أجل $q=\frac{-5}{8}$ نجد : $a=\frac{21}{1-\frac{5}{8}+\frac{25}{64}}=\frac{192}{7}$

$b=aq=-\frac{120}{7}$

$c=aq^2=\frac{75}{7}$

24 في الشكل المجاور، جميع المضلّعات المرسومة منتظمة. ونفترض أنّ الإنشاء يُتابع إلى ما لا نهاية.



1. أثبت أنّ كلاً من متتالية مساحات المثلّثات $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ومتتالية مساحات المسدسات $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية هندسيّة.
2. أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة، أيّاً كانت قيمة n، كما يأتي: $u_{2n}=t_n$ و $u_{2n+1}=h_n$ هي أيضاً متتالية هندسيّة.
3. احسب نسبة مساحة السطح الأزرق إلى مساحة السطح الأبيض داخل المثلّث الأكبر.

الحل

1. نفترض ان طول ضلع المثلث المنتظم (متساوي الأضلاع) الكبير هو l، فتكون مساحته : $t_o=l^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ ، المثلث الذي بداخله ويليه (أصغر منه مباشرة) طول ضلعه $\frac{l}{2}$ (خاصة القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث) ، ومساحته $t_1=\left(\frac{l}{2}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{l^2\sqrt{3}}{16}$

وهكذا تكون مساحة كل مثلث تنتج عن ضرب مساحة سابقه بـ $\frac{1}{4}$

فتكون متتالية مساحات المثلثات $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة وفق $t_n=t_oq^n=l^2\frac{\sqrt{3}}{4}.\left(\frac{1}{4}\right)^n$

هي متتالية هندسية حدها الأول t_o وأساسها $q=\frac{1}{4}$

طول ضلع المسدس المسوم داخل الدائرة المماسة لأضلاع المثلث الكبير يساوي r نصف قطر هذه الدائرة ويساوي $\frac{1}{3}h$ حيث $h = l\frac{\sqrt{3}}{2}$ ارتفاع المثلث الكبير أي : $r = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{6}$

وهنا المسدس عبارة عن ست مثلثات مساوي الأضلاع وطبوقة، طول ضلع كل منها $r = \frac{l\sqrt{3}}{6}$

وبالتالي مساحة المسدس الكبير $h_o = 6\left(\frac{l\sqrt{3}}{6}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{l^2\sqrt{3}}{8}$

ونجد أن مساحة كل مسدس آخر تنتج عن مساحة المسدس السابق بضربها بـ $\frac{1}{4}$

فتكون متتالية مساحات المسدسات $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة وفق $h_n = l^2\frac{\sqrt{3}}{8}.\left(\frac{1}{4}\right)^n$

هي متتالية هندسية حدها الأول h_o وأساسها $q = \frac{1}{4}$

.2 $\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \frac{h_n}{t_n} = \frac{l^2\frac{\sqrt{3}}{8}.\left(\frac{1}{4}\right)^n}{l^2\frac{\sqrt{3}}{4}.\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{1}{2}$ ثابت ، ومنه $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية

.3 نرمّز مجموع مساحات الأجزاء ذات اللون الأزرق بـ S_b

نرمّز مجموع مساحات الأجزاء ذات اللون الأبيض بـ S_w

تنويه للمدرس:

يرجى توضيح معنى الرمز $\sum$ للطلاب قبل حل هذا التمرين بالشكل المعروض في الجزء الثاني حيث ورد بالصيغة التالية:

إذا كانت $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ تمثّل عيّنة مكوّنة من n قراءة لمقدار إحصائي. نعرّف **المتوسط الحسابي** لهذه العينة بأنه المقدار $\bar{x}$ المعرّف بالصيغة

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

الرمز Σ (يُقرأ «مجموع» أو «سيغما»)

لكتابة قائمة من n عدداً، جرى العرف على تسميتها a_1 ، a_2 ،...، a_n . حيث يُقرأ الرمز a_i " a دليل i ". نحتاج أحياناً لكتابة مجموع هذه الأعداد، مجموع الحدود الخمسة الأولى مثلاً

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 .$$

لتبسيط هكذا كتابة، يمكننا ترميزها على الوجه الآتي $S_5 = \sum_{i=1}^{5} a_i$. يعني الرمز $\sum_{i=1}^{n} a_i$ أنّنا نجمع الأعداد a_i عندما يتحوّل الدليل i من 1 إلى n. أي $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

ومن خواصّ جمع وضرب الأعداد الحقيقيّة نرى بسهولة صحّة ما يأتي:

إذا كانت $\alpha, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ أعداداً حقيقيّة فإنّ :

$$① \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad ② \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad ③ \sum_{i=1}^{n} \alpha = n\alpha$$

لنتابع الحل

النسبة هي:

$$\frac{S_b}{S_w} = \frac{\sum t_n - \sum h_n}{\sum h_n - \sum t_{n+1}} = \frac{l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - l^2 \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}}}{l^2 \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - l^2 \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}}} = \frac{l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{3} - l^2 \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{4}{3}}{l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{3} - l^2 \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{8}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{16}}$$

$$= \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{16}} = 2$$

25 لتكن a و b و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابيّة غير ثابتة. نفترض أنّ الأعداد b و c و a بهذا الترتيب تكوّن أيضاً ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسيّة. فإذا علمتَ أنّ $a + b + c = 18$، احسب a و b و c.

الحل

بما ان الاعداد a, b, c ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية فيكون: ① $2b = a + c$

والأعداد b, c, a ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية ، فيكون : ② $c^2 = a.b$

ولدينا فرضاً ③ $a + b + c = 18$

من ①و ③ نجد: $3b=18$ ومنه: ④ $b=6$

فيكون $a+c=12$ وبالتالي ⑤ $a=12-c$

نعوض ④ و ⑤ في العلاقة ② فنجد:

$$\begin{aligned}&c^2=6(12-c)\\&c^2+6c-72=0\\&(c+12)(c-6)=0\end{aligned}$$

حلولها $c=-12$ فيكون $a=24,b=6$ و $c=6$ فيكون $a=6,b=6$ وهذا الحل مرفوض لأن المتتالية المفروضة غير ثابتة.

26 لنتأمّل متتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. نفترض أنّ المتتاليتين متزايدتان، ونعرّف $w_n=u_n+v_n$. أثبت أنّ $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة. وأنّها متزايدة تماماً إذا كانت إحدى المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماماً.
2. ادرس جهة اطراد المتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالعلاقة $w_n=2^n+3n-1$.

الحل

1. لإثبات أن المتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة ، نشكل الفرق :

$$w_{n+1}-w_n=u_{n+1}+v_{n+1}-(u_n+v_n)=u_{n+1}-u_n+v_{n+1}-v_n\geq 0$$

حيث : $u_{n+1}-u_n\geq 0$ لأن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة

و $v_{n+1}-v_n\geq 0$ لأن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة

ومنه المتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة .

نفترض أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماماً ، أي تحقق : $u_{n+1}-u_n>0$

وأن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة ، أي تحقق : $v_{n+1}-v_n\geq 0$

عندئذ نجد:

$$w_{n+1}-w_n=(u_{n+1}+v_{n+1})-(u_n+v_n)=u_{n+1}-u_n+v_{n+1}-v_n>0$$

ومنه المتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماماً.

2. لدراسة اطراد المتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بالعلاقة $w_n = 2^n + 3n - 1$ نعتبر $w_n = u_n + v_n$ حيث المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بالعلاقة $u_n = 2^n$ متزايدة تماماً ، لأنه : أياً كانت n فإن :

$$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n > 0$$

والمتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بالعلاقة $w_n = 3n - 1$ متزايدة تماماً، لأنه: أياً كانت n فإن :

$$v_{n+1} - v_n = 3(n+1) - 1 - (3n-1) = 3 > 0$$

وبالتالي المتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماماً .

27 لنتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = \dfrac{(\sqrt{2})^n}{(n+1)^2}$.

1. احسب، مستعملاً آلة حاسبة، u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5 . ماذا تتنبأ بشأن جهة اطراد هذه المتتالية.
2. احسب u_6 . ماذا تستنتج؟
3. ادرس جهة اطراد المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

الحل

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $u_n = \dfrac{(\sqrt{2})^n}{(1+n)^2}$

$$u_o = 1\ ,\ u_1 \simeq 0.35,\ u_2 \simeq 0.22,\ u_3 \simeq 0.17,\ u_4 \simeq 0.16,\ u_5 \simeq 0.15$$

يمكن التنبؤ أن تكون متناقصة تماماً

2. $u_6 \simeq 0.16 > u_5$ نلاحظ أن المتتالية غير مطردة .
3. نلاحظ أن المتتالية متناقصة من أجل $6 > n \geq 0$

وأن: $(u_n)_{n\geq 6}$: $u_n = \dfrac{(\sqrt{2})^n}{(1+n)^2}$ متزايدة تماماً لأنها تحقق :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{(\sqrt{2})^{n+1}}{(n+2)^2}}{\dfrac{(\sqrt{2})^n}{(1+n)^2}} = \frac{\sqrt{2}(1+n)^2}{(n+2)^2} = \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^2$$

باستخدام الآلة الحاسبة وعندما $n=6$ نجد أنَّ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \simeq 1.08 > 1$ وكلما زادت قيمة n ازدادت قيمة المقدار $\left(1-\frac{1}{n+2}\right)$ وبالتالي ازدادت قيمة المقدار $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ومنه $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ اعتباراً من $n \geq 6$

28 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ في الحالات الآتية تتقارب من 0. عيّن دليلاً m يحقّق ما يأتي

- u_n تنتمي إلى المجال $I = \left]-10^{-5}, 10^{-5}\right[$ في حالة $m < n$.
- u_n تنتمي إلى المجال $I = \left]-10^{-10}, 10^{-10}\right[$ في حالة $m < n$.

① $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}},\ n > 0$ ② $u_n = \frac{2}{n^2},\ n > 0$ ③ $u_n = \frac{1}{n+5}$ ④ $u_n = \frac{-5}{2n+1}$

الحل

①

- $\frac{1}{\sqrt{n}} \in \left]-10^{-5}, 10^{-5}\right[$ يكافئ $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| < 10^{-5}$ ومنه $\sqrt{n} > 10^{5}$

بالتربيع $n > 10^{10} = m$

- $\frac{1}{\sqrt{n}} \in \left]-10^{-10}, 10^{-10}\right[$ يكافئ $\frac{1}{\sqrt{n}} < 10^{-10}$ ومنه $\sqrt{n} > 10^{10}$

بالتربيع $n > 10^{20} = m$

②

- $\frac{2}{n^2} \in \left]-10^{-5}, 10^{-5}\right[$ يكافئ $\frac{2}{n^2} < 10^{-5}$ أي $\frac{2}{n^2} < \frac{1}{10^5}$ ومنه $\frac{n^2}{2} > 10^5$

يكافئ :

$$n^2 > 2(10^5)$$
$$n^2 > 2(10)(10^4)$$
$$n > \sqrt{2}\sqrt{10}(100)$$
$$n > 2\sqrt{5}(100)$$
$$n > 2(2.236)(100) = (4.472)(100)447,2$$
$$n > 447 = m$$

- $\frac{2}{n^2} \in \left]-10^{-10}, 10^{-10}\right[$ يكافئ $\frac{2}{n^2} < 10^{-10}$ أي $\frac{2}{n^2} < \frac{1}{10^{10}}$ ومنه $\frac{n^2}{2} > 10^{10}$

يكافئ :

$$n^2 > 2(10^{10})$$
$$n > 10^5(1.41421)$$
$$n > 141421 = m$$

③

- $\frac{1}{n+5} \in \left]-10^{-5}, 10^{-5}\right[$ يكافئ $\frac{1}{n+5} < 10^{-5}$

يكافئ :

$$n+5 > 10^5$$
$$n > 100000 - 5$$
$$n > 99995 = m$$

- $\frac{1}{n+5} \in \left]-10^{-10}, 10^{-10}\right[$ يكافئ $\frac{1}{n+5} < 10^{-10}$

يكافئ :

$$n+5 > 10^{10}$$
$$n > 10^{10} - 5 = m$$

④

- $\frac{-5}{2n+1} \in \left]-10^{-5}, 10^{-5}\right[$ يكافئ $\left|\frac{-5}{2n+1}\right| < 10^{-5}$ يكافئ $\frac{5}{2n+1} < \frac{1}{10^5}$

يكافئ

$$\frac{2n+1}{5} < 10^5$$
$$2n+1 > 5(10)^5$$
$$2n > 500000 - 1$$
$$2n > 499999$$
$$n > 249999.5$$
$$n \geq 250000 = m$$

- $\frac{-5}{2n+1} \in \left]-10^{-10}, 10^{-10}\right[$ يكافئ $\left|\frac{-5}{2n+1}\right| < 10^{-10}$ يكافئ $\frac{5}{2n+1} < \frac{1}{10^{10}}$ يكافئ:

$$\frac{2n+1}{5} < 10^{10}$$
$$2n+1 > 5(10)^5$$
$$2n > 5(10)^{10} - 1$$
$$2n > 50(10)^9 - 1$$
$$n > 25(10)^9 - \frac{1}{2}$$
$$n \geq 25(10)^9 = m$$

29 لنتأمّل المتتالية $u_n \quad {}_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = \dfrac{2n^2 - 3\sin n}{n^2+1}$.

1. أثبت أنّه، مهما تكن n ، فلدينا $\dfrac{2n^2-3}{n^2+1} \leq u_n \leq \dfrac{2n^2+3}{n^2+1}$.

2. استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

الحل

.1

أياً كان n : $-1 \leq \sin n \leq 1$ نضرب بـ-3 و نغير جهة المتراجحة

$+3 \geq -3\sin n \geq -3$ نضيف $2n^2$

$2n^2 - 3 \leq 2n^2 - 3\sin n \leq 2n^2 + 3$ نقسم على $n^2 + 1 > 0$

$$\frac{2n^2-3}{n^2+1} \leq \frac{2n - 3\sin n}{n^2+1} \leq \frac{2n^2+3}{n^2+1}$$

أي $\dfrac{2n^2-3}{n^2+1} \leq u_n \leq \dfrac{2n^2+3}{n^2+1}$

2. نلاحظ أن:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2-3}{n^2+1}\right) = 2 \qquad ①$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2+3}{n^2+1}\right) = 2 \qquad ②$$

من ①و ② وحسب مبرهنة المتتاليات الثلاثة نجد: $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = 2$

30 لنتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة، في حالة $1 \leq n$ ، بالعلاقة

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

1. احسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 .

2. يساوي u_n مجموعَ n حدّاً. عيّن أكبرها وأصغرها.

3. استنتج أنّه، مهما تكن n ، فلدينا $\frac{n^2}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+n}$ وعين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

الحل

.1

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\ u_2 &= \frac{2}{5} + \frac{2}{6} = \frac{11}{15} \\ u_3 &= \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12} = \frac{181}{220} \\ u_4 &= \frac{4}{17} + \frac{4}{18} + \frac{4}{19} + \frac{4}{20} = \frac{1402}{1615} \end{aligned}$$

.2 $u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$ أكبر هذه الحدود التي عددها n هو $\frac{n}{n^2+1}$ وأصغرها $\frac{n}{n^2+n}$

.3

$$\begin{aligned} \frac{n}{n^2+n} &\leq \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1} \\ \frac{n}{n^2+n} &\leq \frac{n}{n^2+2} \leq \frac{n}{n^2+1} \\ &\vdots \\ \frac{n}{n^2+n} &\leq \frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+1} \end{aligned}$$

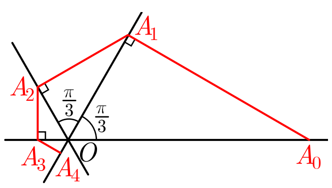
بالجمع عمودياً طرفاً مع طرف نجد: $n.\frac{n}{n^2+n} \leq u_n \leq n.\frac{n}{n^2+1}$

$\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$ وبما أن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)$

يكون حسب مبرهنة المتتاليات الثلاث $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = 1$

31 نفترض أنّ الإنشاء المبيّن في الشكل المجاور يُتابَعُ إلى ما لا نهاية، وأنّ $OA_0 = 4\,\text{cm}$. أوجد نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة بالعلاقة

$$u_n = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n$$



الحل

في المثلث القائم OA_1A_0 : $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{A_0A_1}{4}$

ومنه : $A_0A_1=4\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$

وبالمثل نجد: $A_1A_2=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}$

$$A_2A_3=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2\sqrt{3}$$

.

.

$$A_{n-1}A_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot 2\sqrt{3}$$

ومنه: $u_n=A_0A_1+A_1A_2+A_2A_3+\ldots+A_{n-1}A_n$

$$u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot 2\sqrt{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot 2\sqrt{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2\sqrt{3}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot 2\sqrt{3}$$

وهو مجموع n حداً في متتالية هندسية حدها الأول $u_1=2\sqrt{3}$ وأساسها $0<q=\frac{1}{2}<1$

ومنه $u_n=u_1\frac{1-q^n}{1-q}$ وبالتالي: $u_n=2\sqrt{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=4\sqrt{3}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

بما أن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=4\sqrt{3}$.

32 ليكن f التابع $x\mapsto(x+1)^3-x^3$. نعرّف المجموعين:

$S=1+2+\cdots+n$ و $P=1^2+2^2+\cdots+n^2$

① تحقّق أنّ $f(x)=3x^2+3x+1$.

② عوّض على التوالي x بالأعداد 1 ، 2 ، ...، n واستنتج

$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=3P+3S+n$.

③ استنتج قيمة $S+P$ بدلالة n، ثُمّ احسب المجموع P بدلالة n.

$$
\begin{aligned}
p+\frac{1}{2}n(n+1) &= \frac{1}{3}(n^3+3n^2+2n) \\
p &= \frac{1}{3}(n^3+3n^2+2n)-\frac{1}{2}(n^2+n) \\
&= \frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n) \\
&= \frac{1}{6}n(2n^2+3n+1) \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
p = 1^2+2^2+\ldots+n^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}
$$

الحل

①

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)^3-x^3 \\
&= x^3+3x^2+3x+1-x^3 \\
&= 3x^2+3x+1
\end{aligned}
$$

②

$$
\begin{aligned}
&f(1)=3(1)^2+3(1)+1 \\
&f(2)=3(2)^2+3(2)+1 \\
&\vdots \\
&f(n)=3(n)^2+3(n)+1 \\
&f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+3(1+2+\ldots+n)+n \\
&f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=3p+3s+n \qquad ①
\end{aligned}
$$

③ من جهة أخرى:

$$
\begin{aligned}
&f(1)=2^3-1^3 \\
&f(2)=3^3-2^3 \\
&f(3)=4^3-3^3 \\
&\vdots \\
&f(n-1)=n^3-(n-1)^3 \\
&f(n)=(n+1)^3-n^3
\end{aligned}
$$

بالجمع نجد :

$$
\begin{aligned}
&f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=(n+1)^3-(1)^3 \\
&f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=n^3+3n^2+3n+1-1 \\
&f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=n^3+3n^2+3n \qquad ②
\end{aligned}
$$

نعوض ② في ①:

$$n^3+3n^2+3n=3p+3s+n$$

$$p+s=\frac{1}{3}(n^3+3n^2+2n) \quad ③$$

لكن ④ $s=1+2+...+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ (مجموع حدود متوالية لمتتالية حسابية أساسها 1 وحدها الأول 1)

نعوض ④ في ③ :

$$\begin{aligned}
p+\frac{1}{2}n(n+1) &= \frac{1}{3}(n^3+3n^2+2n)\\
p &= \frac{1}{3}(n^3+3n^2+2n)-\frac{1}{2}(n^2+n)\\
&= \frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)\\
&= \frac{1}{6}n(2n^2+3n+1)\\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\
p=1^2+2^2+...+n^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}$$

33

حلّ المعادلات الآتية :

① $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^7}=0$.

② $1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{8x^3}+\frac{1}{16x^4}-\frac{1}{32x^5}=0$.

③ $27x^7+9x^5+3x^3+x=0$.

الحل

① $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^7}=0$.

أولاً : (نلاحظ أن $x=1$ ليس حل للمعادلة $7\neq 0$)

ثانياً : $x\neq 1$

الطرف الأيسر للمعادلة هو مجموع سبعة حدود متوالية لمتتالية هندسية حدها الأول $a=\frac{1}{x}$ وأساسها

$q=\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$ شرط $x\neq 0$

وإذا كان $\frac{1}{x}\neq 1$ أي $x\neq 1$ فإن مجموع هذه الحدود هو : $s=a.\frac{1-q^n}{1-q}$ ومنه المعادلة :

$$\frac{1}{x}.\frac{1-\left(\frac{1}{x}\right)^7}{1-\frac{1}{x}}=0$$

$$\frac{1-\left(\frac{1}{x}\right)^7}{x-1}=0$$

$$1-\left(\frac{1}{x}\right)^7=0$$

$\left(\frac{1}{x}\right)^7=1$ أي $\frac{1}{x}=1$

وهذا تناقض وبالتالي المعادلة مستحيلة .

② $1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{8x^3}+\frac{1}{16x^4}-\frac{1}{32x^5}=0$.

الطرف الأيسر للمعادلة هو مجموع ستة حدود متوالية لمتتالية هندسية حدها الأول $a=1$ وأساسها

$q=-\frac{1}{2x}$، إذا كان الأساس $q=1$ فالمعادلة تصبح $6=0$ وهي مستحيلة.

وإذا كان $q\neq 1$ أي $-\frac{1}{2x}\neq 1$ أي $x\neq -\frac{1}{2}$ فإن مجموع هذه الحدود هو :

$$1.\frac{1-\left(-\frac{1}{2x}\right)^6}{1+\frac{1}{2x}}=0$$

$$1-\left(-\frac{1}{2x}\right)^6=0$$

$$1-\frac{1}{64x^6}=0$$

ومنه : $64x^6 = 1$ أي $x^6 = \frac{1}{64}$

إما : $x = -\frac{1}{2}$ مرفوض

أو : $x = \frac{1}{2}$ مقبول

③ $27x^7 + 9x^5 + 3x^3 + x = 0$.

المعادلة تكافئ: $x(27x^6 + 9x^4 + 3x^2 + 1) = 0$

إما $x = 0$

أو $72x^6 + 9x^4 + 3x^2 + 1 = 0$ مستحيلة لأن طرفها الأيسر $27x^6 + 9x^4 + 3x^2 + 1 \geq 1$ (مقادير موجبة $+ 1$)أياً كانت $x \in \mathbb{R}$

أي جذر المعادلة هو : $x = 0$

34 نتأمّل في مستو مزوّد بمعلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ النقطتين $A_0(1,1)$ و $A_1(2,2)$. ونتأمّل الخطّ المضلّع المنكسر $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ الذي يُحقّق في حالة كلِّ عدد طبيعي n ما يأتي

- فاصلة النقطة A_n هي $n+1$.
- إذا رمزنا بالرمز u_n إلى ميل المستقيم $(A_n A_{n+1})$ كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابيّة أساسها $\frac{1}{2}$.

① عيّن في المستوي النقاط A_0 ، A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 ، A_5 .

② نفترض أنّ إحداثيي النقطة A_n هما (x_n, y_n). أثبت أنه مهما تكن $0 < n$ يكن
$y_n - y_{n-1} = \frac{n+1}{2}$

③ استنتج أنّ $y_n = \frac{n^2 + 3n + 4}{4}$.

④ أثبت أنّ جميع النقاط A_n تقع على قطع مُكافئ $\mathcal{P}$ ، ارسمه على الشكل نفسه مع النقاط A_0 ، A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 ، A_5 .

الحل

① $u_0 = m_{A_0A_1} = \frac{y_{A_1}-y_{A_0}}{x_{A_1}-x_{A_0}} = \frac{2-1}{2-1} = 1$

$u_1 = u_0 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ولكن $u_1 = m_{A_1A_2} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ وبالتالي

$\frac{3}{2} = \frac{y_2-2}{3-2}$ وبالتالي $y_2 - 2 = \frac{3}{2}$ أي $y_2 = \frac{7}{2}$ ومنه $A_2\left(3,\frac{7}{2}\right)$

$u_2 = u_1 + \frac{1}{2} = 2$ ومنه $u_2 = m_{A_2A_3} = y_3 - y_2$ ومنه $y_3 - \frac{7}{2} = +2$

وبالتالي $y_3 = \frac{11}{2}$ أي $A_3\left(4,\frac{11}{2}\right)$

$u_3 = u_2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ ومنه $u_3 = m_{A_3A_4} = \frac{y_4-y_3}{1}$ أي $\frac{5}{2} = y_4 - \frac{11}{2}$ ومنه $y_4 = 8$ أي $A_4(5,8)$

$u_4 = u_3 + \frac{1}{2} = 3$ ومنه $u_4 = m_{A_4A_5} = \frac{y_4-y_3}{1}$ أي $3 = y_5 - 8$ ومنه $y_5 = 11$ أي $A_5(6,11)$

② $A_n(x_n, y_n)$ حيث $n > 0$ طريقة ثانية على الورق

لنبرهن أن $y_n - y_{n-1} = \frac{n+1}{2}$ بالاستقراء الرياضي $n = 1$ نجد:

$y_1 - y_0 = \frac{1+1}{2}$

$2 - 1 = 1$ محققة

ونفترض صحة القضية من أجل $n = k$ أي $y_k - y_{k-1} = \frac{k+1}{2}$

نبرهن صحتها من أجل $n = k+1$ أي الطلب : $y_{k+1} - y_k = \frac{k+2}{2}$

الحقيقة أن: $y_k - y_{k-1} = \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = m_{A_kA_{k-1}} = \frac{k+1}{2}$

لكن $l_1 = y_{k+1} - y_k = \frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k} = m_{A_{k+1}A_k} = m_{A_kA_{-1}} + \frac{1}{2} = \frac{k+1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{k+2}{2}$

فالقضية صحيحة من أجل $n = k+1$ فهي صحيحة $1 < n$

③ $y_n - y_{n-1} = \dfrac{n+1}{2}$

إن $v_n = y_n - y_{n-1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}n$ هو حد عام لمتتالية حسابية $(v_n)_{n\geq 1}$ حدها الأول $v_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$ وأساسها $\dfrac{1}{2}$

مجموع n حد فيها هو ①: $S_n = \dfrac{n}{2}\left(1 + \dfrac{n+1}{2}\right)$

لكن $S_n = (y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \ldots + (y_1 - y_0)$

بالإصلاح نجد أن ②: $S_n = y_n - 1$

من ① و ②: $y_n - 1 = \dfrac{n}{2}\left(1 + \dfrac{n+1}{2}\right)$

$$y_n = 1 + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{4} + \frac{n}{4}$$

$$y_n = \frac{4 + 2n + n^2 + n}{4}$$

$$y_n = \frac{n^2 + 3n + 4}{4} \quad ③$$

④ $A_n(x_n, y_n)$ حيث $x_n = 1 + \text{n}$ ومنه $\text{n} = x_n - 1$ نعوض في ③:

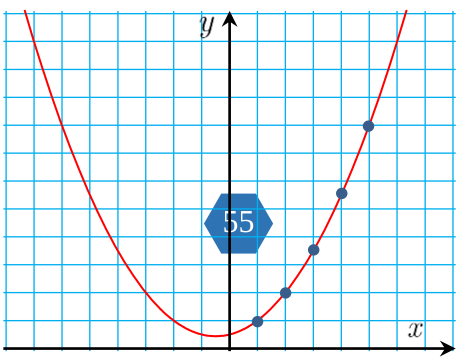
$$y_n = \frac{(x_n - 1)^2 + 3(x_n - 1) + 4}{4}$$

بالإصلاح $y_n = \dfrac{1}{4}(x_n{}^2 + x_n + 2)$ ومنه $y_n = \dfrac{1}{4}x_n{}^2 + \dfrac{1}{4}x_n + \dfrac{1}{2}$

وهي معادلة قطع مكافئ من الشكل $y = ax^2 + bx + c$ ذروته $v(x_v, y_v)$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{\frac{-1}{4}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \qquad \text{و} \qquad y_v = \frac{7}{16}$$

$v\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{16}\right)$ وفتحته نحو الأعلى كما في الشكل:



35 لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرّفة تدريجيّاً بالعلاقات

$u_0 = 1, u_2 = 2$ وأياً كان $0 \leq n$، $u_{n+2} = \dfrac{3u_{n+1} - u_n}{2}$

① نعرّف $v_n = u_{n+1} - u_n$. أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة.

② عبّر عن v_n بدلالة n،

③ استنتج عبارة u_n بدلالة n.

④ ما نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$؟

⑤ عيّن عدداً طبيعياً m يجعل $|u_n - 3| < 10^{-5}$ أياً كانت قيمة $m \leq n$.

الحل

①نلاحظ أنَّ:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n} = \frac{\frac{3u_{n+1} - u_n}{2} - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n} = \frac{\frac{1}{2}\,u_{n+1} - u_n}{u_{n+1} - u_n} = \frac{1}{2} = q$$

$v_0 = u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$ ومنه المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q = -\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = 1$

② المتتالية الهندسية $(v_n)_{n\geq 0}$ حدها الأول $v_0 = 1$ وأساسها $q = \frac{1}{2}$ فيكون: $v_n = u_0.q^n$ أي

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

③ $u_{n+1} = u_n + v_n$

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = u_0 + v_0 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$u_2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1$$

$$u_3 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$u_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$u_n = 1 + 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$u_n = 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad : n \in \mathbb{N}$$

④

$\lim_{n\to\infty} u_n = 3$ لأنه : $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

⑤

$$\left|u_n - 3\right| < 10^{-5}$$

$$\left|-2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right| < \frac{1}{10^5}$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{10^5}$$

$$2^{n-1} > 10^5$$

$$2^{n-1} > 2^{16}$$

$$n - 1 > 16$$

$$n > 17$$

$$n \geq 18$$

أي $n = 18$