وزارة التربية

الرياضيات

الصف العاشر
الفصل الدراسي الثاني

كتاب المعلّم

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. إبراهيم حسين القطان (رئيسًا)

أ. حصة يونس محمد علي

أ. فتحية محمود أبو زور

الطبعة الثانية

١٤٣٥ - ١٤٣٦ هـ

٢٠١٤ - ٢٠١٥ م

فريق عمل دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف العاشر

أ. رضيّة ناصر القطان (رئيسًا)

أ. السعيد فوزي إبراهيم | **أ. نجوى محمد وسيم**

أ. مجدي محمد الكواوي | **أ. منيرة علي العدواني**

دار التَّربَويّون House of Education ش.م.م. وبيرسون إديوكيشن ٢٠١٢

الطبعة الأولى ٢٠١٢ م

الطبعة الثانية ٢٠١٤ م

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح
أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

مقدّمة من كتاب المعلِّم

توجيهات عامّة للمعلِّم

هذه السلسلة تعمل على تنمية أساليب التفكير، وذلك بتركيزها على بناء المفاهيم الرياضيّة وربطها بالواقع الحياتيّ من خلال:

١ - الأنشطة العمليّة في استكشاف المفاهيم ودعم إحساس الطالب بهذه المفاهيم، وذلك باستخدام عدّة طرائق مختلِفة:

العمل في فريق.

عمل مجلّات رياضيّة.

إِستخدام المحسوسات وشبه المحسوسات.

التعبير الشفهيّ (التواصل) - التفكير الناقد.

٢ - الاعتماد على المصوَّرات، وذلك من خلال التمثيل البيانيّ للمعلومات وقراءة البيانات الممثَّلة بيانيًّا.

٣ - الاعتماد على المواقف والقصص الحياتيّة وربطها بالموضوعات، وكذلك توظيف الموضوعات الرياضيّة في حلّ المسائل الحياتيّة.

٤ - التأكيد على فهم المفاهيم واستيعابها، والربط بين الرياضيّات وباقي الموادّ.

تطبيق السلسلة

لتطبيق السلسلة، يجب مراعاة ما يلي:

وجود ملفّين لكلّ تلميذ بحيث يُخصَّص أحدهما للأنشطة الصفّيّة واللاصفّيّة، أمّا الآخر فيُخصَّص للاختبارات والملحوظات الميدانيّة على أداء الطالب، ويُدوِّنها المعلِّم، وهذا أوّل ما يقوم به، مقرونةً بتواريخ المتابعة.

يُنوِّع المعلِّم في طرائق التدريس، وخاصّةً التي تشمل الاستكشاف وحلّ المشكلات.

نماذج المعلِّم لتقييم الطلاب تشمل:

- تقييم الأداء في حلّ المسائل.
- التقييم المستمرّ في حلّ المسائل والملاحظة والتعليم التعاونيّ.
- التقييم الفرديّ في الملاحظة والمراقبة.
- التقييم العامّ للطالب.

تقييم الأداء في حلّ المسائل

الِاسم .... التّاريخ ....

تقييم الأداء في حلّ المسائل

❶ ضع إشارة ✓ قرب العبارة التي تصف بدقّة أداء الطالب.

اِفهَمْ

- يقرأ المسألة بتأنٍّ.
- يقرأ أيّ جدوَل أو أيّ تمثيل بياني.
- يستطيع أن يصوغ المسألة من جديد وبطريقته وعباراته الخاصّة.
- يستطيع فهم وإدراك المعلومات المعطاة.
- يستطيع فهم وإدراك السؤال الذي يجب الإجابة عليه.

خَطِّطْ

- يختار الخطّة الأنسب لحلّ المسألة.
- يقدِّر الإجابة الصحيحة.

حُلَّ

- يعمل وفقًا لمنهجية معيّنة.
- يعرض الحلّ بطريقة منظَّمة وسليمة.
- يحسب بطريقة صحيحة.
- يعطي الإجابة بجملة كاملة صحيحة، مراعيًا الوحدات.

راجِعْ ولاحِظْ

- يُلاحِظُ معقولية الإجابة.
- يجرِّب طرقًا أخرى لحلّ المسألة.

❷ اِتبعِ المواصفات التالية لتقييم أداء الطالب:

مستوى ٤ (يتقن الطالب ١١–١٣ من المهمات السابق ذكرها). يُظهر الطالب فهمًا عميقًا للمسألة ويفسِّرها بشكل موجز وواضح ويكون قادرًا على ربط المسألة بعمل سبق أن أنجزه.

مستوى ٣ (يتقن الطالب ٨–١٠ من المهمات السابق ذكرها). يفهم الطالب المسألة ويعرض الحلّ الصحيح بطريقة منظَّمة وواضحة.

مستوى ٢ (يتقن الطالب ٤–٧ من المهمات السابق ذكرها). يُظهر الطالب فهمًا إجماليًّا للمسألة غير أنّه قد يرتكب بعض الأخطاء في تفاصيل معيّنة.

مستوى ١ (يتقن الطالب ٠–٣ فقط من المهمات السابق ذكرها). لا يُظهر الطالب إلّا فهمًا سطحيًّا أو جزئيًّا للمسألة وهو ليس قادرًا على إتمام العمل المطلوب أو حتى اعتماد المنهجية الصحيحة، كما أنّه لا يعطي إجابة صحيحة أو تكون خطّته غير مناسبة، وفي أغلب الأحيان لا نجد حلًّا ولا تجاوبًا مناسبًا أو إجابة صحيحة مرفقةً بجهد ما.

التقييم المستمرّ: حلّ المسائل

التّاريخ ....

قدّر كلّ بند بـ:
+ إذا كان ممتازًا
✓ إذا كان مقبولًا
– بحاجة للتطوير
غ.**ت** غير قابل للتطبيق

	يقرأ المسألة بتأنٍّ	يدرس الصوَر والجداول والتمثيلات البيانية	يستطيع إعادة صياغة المسألة بأسلوبه الخاصّ	يستطيع تحديد المعلومات	يستطيع تحديد الأسئلة التي تطلّب الإجابة عليها	يختار الخطّة المناسبة	يقدّر ما ستكون عليه الإجابة	يعمل بانتظام	يكتب الحلّ بطريقة منظّمة	يُجري العمليات الحسابية بدقّة	يكتب الإجابة في جملة كاملة مع ذكر الوحدات الصحيحة	يلاحظ صحّة الإجابة ومعقوليتها	يجرّب طرقًا أخرى للحلّ
١.													
٢.													
٣.													
٤.													
٥.													
٦.													
٧.													
٨.													
٩.													
١٠.													
١١.													
١٢.													
١٣.													
١٤.													
١٥.													
١٦.													
١٧.													
١٨.													
١٩.													
٢٠.													
٢١.													
٢٢.													
٢٣.													
٢٤.													
٢٥.													
٢٦.													
٢٧.													
٢٨.													

التقييم المستمرّ: الملاحظة

التّاريخ ....

قدّر كلّ بند بـ:
+ إذا كان ممتازًا
✓ إذا كان مقبولًا
− بحاجة للتطوير
غ.ت غير قابل للتطبيق

	يُظهر معرفة بالمهارات	يدرك المفاهيم	يعمل بترتيب وانتظام	يعمل بنجاح مع الآخرين	يُظهر مواقف إيجابية	يحترم أفكار الغير ويستخدمها	يُظهر صبرًا ومثابرة	يطلب المساعدة عند الحاجة	يستخدم الوقت بإنتاجية	يجرِّب طرقًا أخرى			
١.													
٢.													
٣.													
٤.													
٥.													
٦.													
٧.													
٨.													
٩.													
١٠.													
١١.													
١٢.													
١٣.													
١٤.													
١٥.													
١٦.													
١٧.													
١٨.													
١٩.													
٢٠.													
٢١.													
٢٢.													
٢٣.													
٢٤.													
٢٥.													
٢٦.													
٢٧.													
٢٨.													

التقييم المستمرّ: التعلُّم التعاوني

التّاريخ ....

قدّر كلّ بند بـ:
+ إذا كان ممتازًا
✓ إذا كان مقبولًا
– بحاجة للتطوير
غ.ت غير قابل للتطبيق

	يُظهر قدرة على حلّ المسائل	يعمل بانتظام	يعمل مع آخرين في الفريق	يوجّه ويساعد الآخرين	يحترم آراء الآخرين ويستخدمها	يتكلّم بهدوء	يُثير أسئلة	يظهر ميولًا إيجابية	يُظهر صبرًا ومثابرة	يُظهر عدم موافقة دون اشمئزاز			
١.													
٢.													
٣.													
٤.													
٥.													
٦.													
٧.													
٨.													
٩.													
١٠.													
١١.													
١٢.													
١٣.													
١٤.													
١٥.													
١٦.													
١٧.													
١٨.													
١٩.													
٢٠.													
٢١.													
٢٢.													
٢٣.													
٢٤.													
٢٥.													
٢٦.													
٢٧.													
٢٨.													

المحتويات

الوحدة السادسة: هندسة الدائرة

Geometry of a Circle

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

٦ – ١(أ): الدائرة، ٦ – ١(ب): مماس الدائرة

جزء ١: العلاقة بين المماس ونصف قطر الدائرة.

جزء ٢: العلاقة بين مماسين من نقطة واحدة خارج الدائرة.

٦ – ٢: الأوتار والأقواس

جزء ١: العلاقة بين الأوتار المتطابقة والأقواس المقابلة لها والزاوايا المركزية.

جزء ٢: خصائص الخطوط المستقيمة التي تمر في مركز الدائرة.

٦ – ٣: الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

جزء ١: الزوايا المركزية – الزوايا المحيطية – الزوايا المماسية على الدائرة.

جزء ٢: العلاقة بين قياس الزاوية المركزية والزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.

جزء ٣: العلاقة بين قياس الزاوية المماسية وقياس القوس المحصور بين ضلعيها.

٦ – ٤: الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس

جزء ١: الأوتار المتقاطعة.

جزء ٢: المماس.

جزء ٣: العلاقة بين وترين متقاطعين في الدائرة .

جزء ٤: العلاقة بين طول القطعة المماسية المحصورة بين نقطة خارج الدائرة ونقطة المماس والقاطع على الدائرة.

مقدمة الوحدة

تعتبر الدائرة واحدة من أهم الأشكال الهندسية التي أعطاها علماء الرياضيات اهتمامًا خاصًّا، وبنوا عليها مسائل مهمة، وتوسعوا كثيرًا في خصائصها ومميزاتها. ثم أكمل المهندسون المعماريون والفنانون وأخصائيو التصاميم العمل مع الدائرة، فجاءت إبداعاتهم قببًا نصف كروية تعلو سطوح القصور الكبيرة، وأقواسًا تعلو الشبابيك والأبواب، وسطوحًا دائرية تعلو أيضًا الشبابيك والأبواب وأبراج القلاع إلى جانب ما نراه في تصاميم الزينة والرسوم والفنون كلها. والأهم من ذلك هو ما شغل علماء الرياضيات في العلاقة بين المضلعات والدائرة، فكانت الدائرة المحاطة بالمضلع والدائرة المحيطة بمضلع. فمثلًا، يوجد رباعي دائري ورباعي غير دائري، خماسي دائري وخماسي غير دائري، سداسي دائري وسداسي غير دائري …

الوحدة السادسة

هندسة الدائرة

Geometry of a Circle

مشروع الوحدة: أهمية الدائرة في تصميم الزينة والزخارف الهندسية

١ مقدمة المشروع: منذ قرون عديدة، استخدم الفنانون بساطة الدائرة ورونقها في التزيين. بعضهم صنع أنماطًا في الدائرة مستفيدًا من عدم وجود بداية لها أو نهاية. وبعضهم الآخر استفاد من كثرة خطوط التناظر فيها لينتج خدعًا بصرية.

٢ الهدف: ابحث عن بعض التقنيات المستخدمة خلال العصور الماضية لإنتاج الفن الدائري عندما استخدم الفنانون الدائرة كأفضل طريقة لبلوغ أهدافهم في التزيين.

٣ اللوازم: أوراق رسم، شبكة مربعات، أقلام تلوين، قلم، فرجار.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ عيّن نقطة الأصل على شبكة مربعات (دون رسم المحاور).

ب ارسم ٤ دوائر مراكزها (٠، ٥)، (٥، ٠)، (–٥، ٠)، (٠، –٥) بنصف قطر يساوي ٥$\sqrt{٢}$. مستخدمًا المراكز نفسها، ارسم ٤ دوائر بنصف قطر يساوي ٤$\sqrt{٢}$.

صل بين المراكز الأربعة لتشكل مربعًا ولوّنه بالأحمر.

صل بين نقاط تقاطع الدوائر الكبرى والدوائر الصغرى ولوّن الشكل بالأخضر. امح الأقواس، ولوّن تصميمك.

جـ اتبع الخطوات التالية لتصميم نمط من الفن الإسلامي من القرن الرابع عشر.

الخطوة ١: ارسم دائرة ومربعًا رؤوسه على الدائرة، ثم ارسم قطريه. ارسم الشكل الناتج عن دوران المربع بزاوية ٤٥° حول مركز الدائرة.

الخطوة ٢: ارسم دائرة داخلية محاطة بالمربعين.

الخطوة ٣: ارسم في كل مربع جميع الأقطار.

الخطوة ٤: ارسم منصفات الزوايا المركزية، ثم عين نقاط التقاطع الثماني لهذه المنصفات مع الدائرة الداخلية.

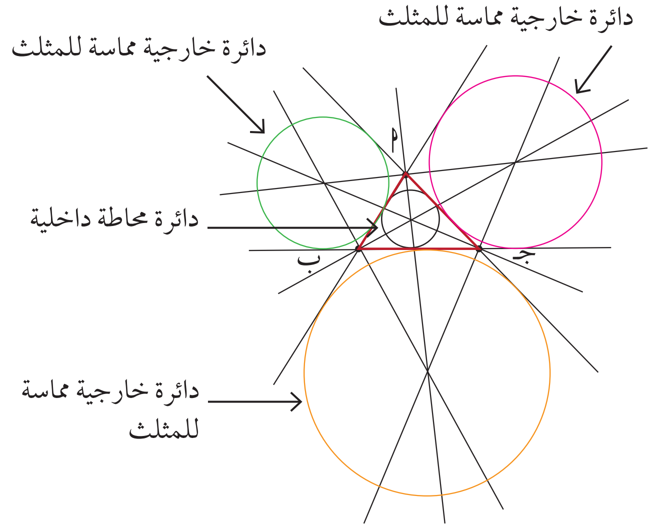
الخطوة ٥: اجمع هذه النقاط لتحصل على مربعين محاطين بالدائرة الصغرى كما يبين الرسم، ثم لون لتحصل على التصميم المطلوب.

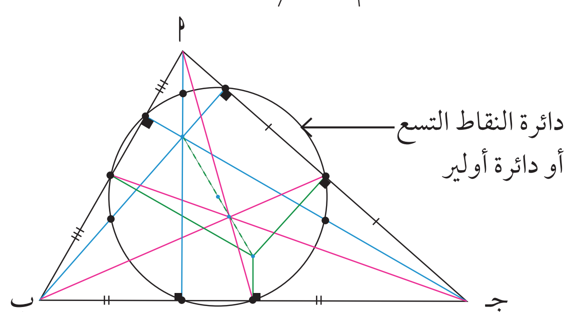
٥ التقرير: ضع تقريرًا مفصلًا حول تنفيذ المشروع مستفيدًا من دروس الوحدة، واعرض التصاميم التي حصلت عليها.

دروس الوحدة

الدائرة	مماس الدائرة	الأوتار والأقواس	الزوايا المركزية والزوايا المحيطية	الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس
٦–١(أ)	٦–١(ب)	٦–٢	٦–٣	٦–٤

١٠





الدائرة الداخلية والدوائر الخارجية لمثلث.

(أ) الدائرة الداخلية لمثلث أو الدائرة المحاطة بمثلث:

Inscribed Circle of a triangle

هي أكبر دائرة تمس أضلاع المثلث من داخله، ويكون مركزها نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث.

(ب) الدائرة الخارجية المماسة لمثلث:

Escribed Circle of a triangle

هي دائرة تمس أحد أضلاع المثلث من الخارج وتمس امتداد الضلعين الآخرين لهذا المثلث، ويكون مركزها نقطة تلاقي منصف زاوية داخلية بمنصفي الزاويتين الخارجيتين الأخريين في المثلث.

ملاحظة: لكل مثلث ثلاث دوائر خارجية مماسة.

دائرة النقاط التسع أو دائرة أولير: Euler’s Circle

هي دائرة مميزة في المثلث تعود إلى عالم الرياضيات أولير (Euler) حيث إنها تمر من خلال تسع نقاط مميزة في المثلث، تقع ست نقاط منها على المثلث (إذا لم يكن منفرج الزاوية) والنقاط التسع موزعة كما يلي:

– ثلاث نقاط، كل منها منتصف ضلع من أضلاع المثلث.

– ثلاث نقاط، كل منها نقطة التقاء الارتفاع المرسوم من رأس المثلث بالضلع المقابل.

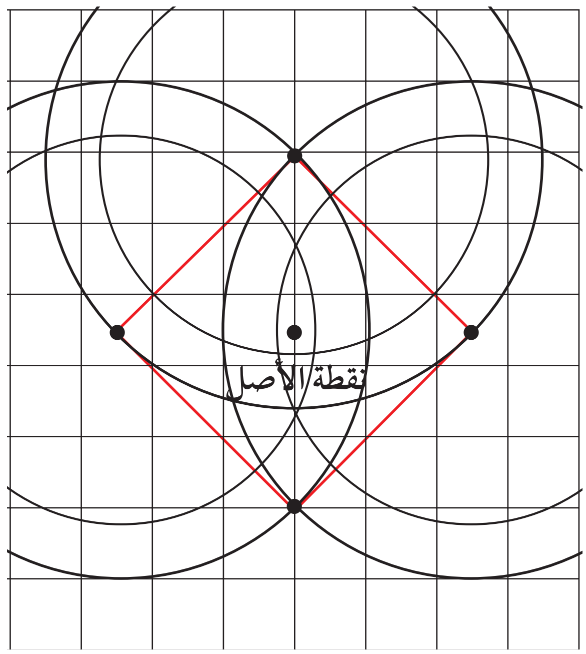
– ثلاث نقاط، كل منها منتصف القطعة المستقيمة التي تصل رأس المثلث بنقطة تقاطع ارتفاعات المثلث.

مشروع الوحدة

أسئلةٌ حول التطبيق:

شجع الطلاب على إجراء أبحاث تتناول الرسوم وتصاميم الزينة والهندسة المعمارية (أبراج وقصور وجوامع وكنائس ...)، وعرض هذه الابحاث، ثم التركيز على دور الدوائر وأنصاف الدوائر والأقواس من الدوائر.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»



تحقق من عمل الطلاب

سلّم التقييم	
٤.	الرسوم دقيقة. الألوان معبرة ومتناسقة. القياسات صحيحة. التقرير واضح.
٣.	معظم الرسوم دقيقة. الألوان معبرة ومتناسقة إلى حد ما. أخطاء قليلة في القياسات. التقرير مقبول.
٢.	بعض الرسوم دقيقة. الألون باهتة ومتناسقة إلى حد ما. أخطاء عديدة في القياسات. التقرير بحاجة إلى تعديلات.
١.	معظم عناصر المشروع ناقصة وبحاجة إلى إعادة.

الوحدة السادسة

اين انت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت إيجاد محيط دائرة ومساحتها.
- تعلمت إثبات تطابق المثلثات وخصائص العناصر المتناظرة وتشابه المثلثات وبعض القطع المميزة في المثلث.
- تعلمت خصائص المثلث قائم الزاوية، ومنها نظرية فيثاغورث.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تستخدم العلاقة بين المماس ونصف قطر الدائرة المار بنقطة التماس لحل المسائل.
- سوف تستخدم العلاقة بين مماسين من نقطة واحدة في حل مسائل حياتية.
- سوف تستخدم الأوتار المتطابقة والأقواس والزوايا المركزية لحل مسائل في الدائرة.
- سوف تتعرف خصائص المستقيمات والقطع المستقيمة التي تمر بمركز الدائرة والتي لا تمر بمركز الدائرة.
- سوف تتعرف العلاقة بين الزاوية المركزية والزاوية المحيطية المشتركة في القوس نفسه.
- سوف تتعرف العلاقة بين الزاوية المماسية والقوس المحصور بين ضلعيها.
- سوف تتعرف العلاقة ما بين الزاوية المماسية والزاوية المحيطية والقوس المشترك بينهما.
- سوف تتعرف العلاقة بين وترين متقاطعين في الدائرة والعلاقة بين طول المماس وطول القطع.
- سوف تتعرف خصائص الشكل الرباعي الدائري.

أضف إلى معلوماتك

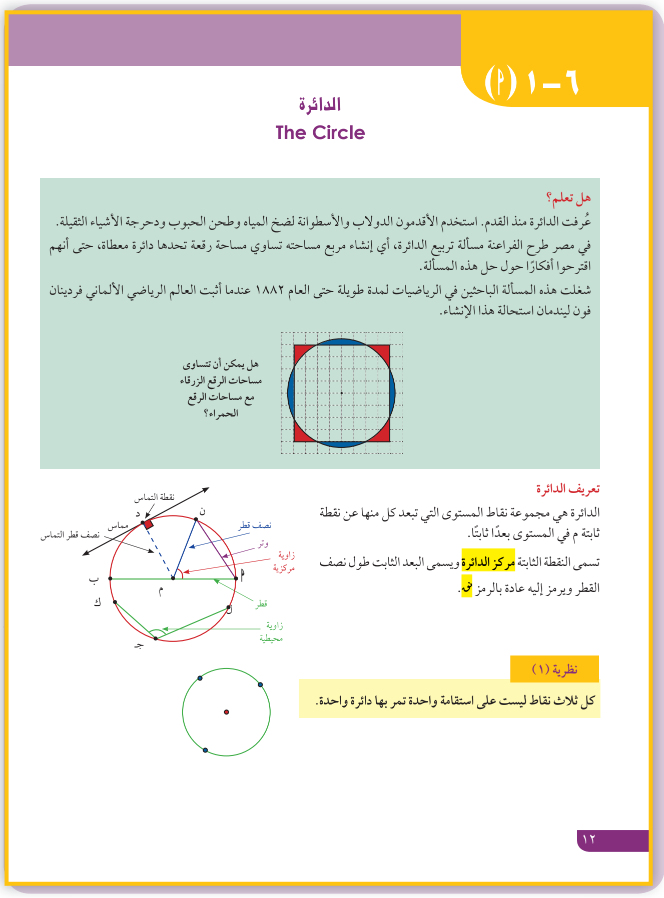
تتميز الأوتار المتقاطعة عند نقطة داخل الدائرة أو خارج الدائرة بعلاقات محددة تربط بين أطوال أجزائها. يمكنك إيجاد هذه العلاقات باستخدام ما تعلمته سابقًا عن المثلثات المتطابقة والمثلثات المتشابهة. المعارف التي سوف تكتسبها من هذه الوحدة لها تطبيقات عديدة في التصوير، والهندسة المعمارية، والهندسة المدنية، والصور المتحركة.

المصطلحات الأساسية

مماس الدائرة - أوتار - أقواس - زاوية مركزية - زاوية محيطية - أوتار متقاطعة - القاطع - رباعي دائري - زاويتان متقابلتان - زاويتان متكاملتان.

١١

٦-١: [أ] الدائرة
[ب] مماس الدائرة



١ الأهداف

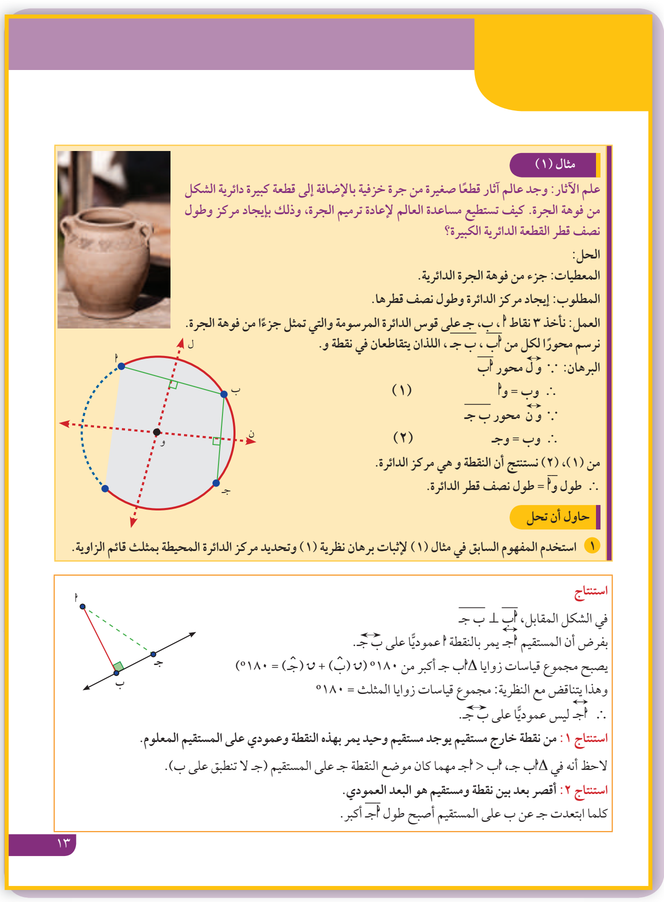
- يرسم مماسًّا من نقطة موجودة على الدائرة.
- يوجد العلاقة بين المماس ونصف قطر الدائرة المار بنقطة التماس ويستخدمها في حل المسائل.
- يوجد العلاقة بين مماسين من نقطة خارج الدائرة ويستخدمها في حل المسائل.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

مماس للدائرة – شعاع مماس – قطعة مماسية – نقطة التماس – نصف قطر التماس.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة – فرجار – منقلة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).



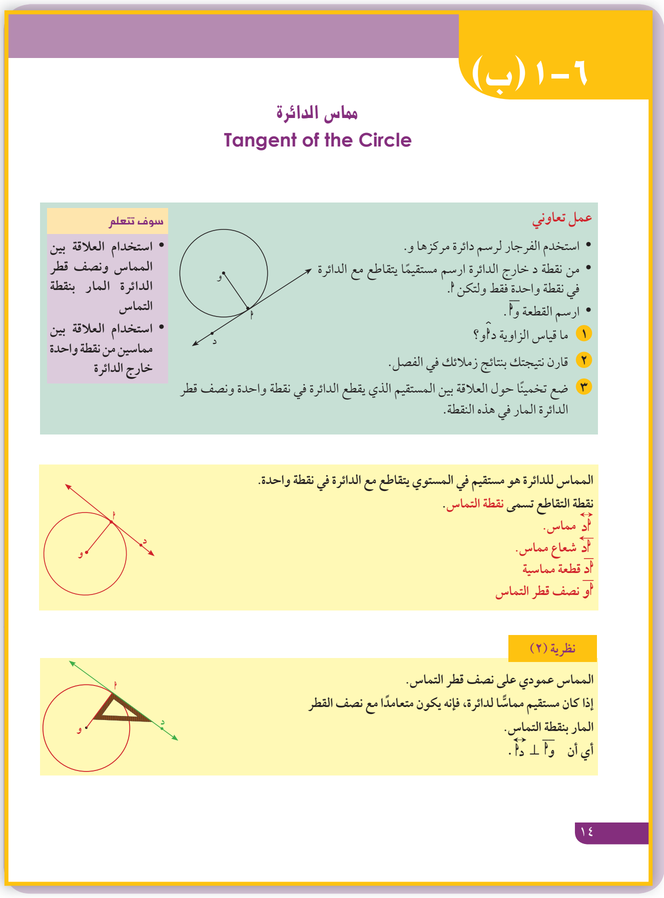
٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

- كيف تُعرَّف الدائرة؟ قطرها؟ نصف قطرها؟
- هل المثلث ﺃ ب جـ، حيث ﺃ ب = ٢٤ سم
  ب جـ = ٧ سم، ﺃ جـ = ٢٥ سم هو قائم الزاوية؟
- ما مجموع قياس الزوايا في الشكل الرباعي؟
- ما منصف الزاوية؟
- ما خاصية نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية في المثلث؟

٥ التدريس

وضّح للطلاب من خلال عملية الانسحاب مستخدمًا مثلثًا خشبيًّا (أو بلاستيكيًّا) قائم الزاوية كيف أن نصف قطر الدائرة يكون متعامدًا مع المستقيم الذي هو مماس عند نقطة موجودة على الدائرة (نظرية ٢).
أخبرهم أن هذا ليس برهانًا علميًّا ولكن يعطي فكرة عن هذه العلاقة بين المماس ونصف القطر في نقطة تقاطعهما على الدائرة. أكّد لهم أن البرهان في النظرية (٢) يعتمد على افتراض معكوس ما هو مطلوب إيجاده «البرهان غير المباشر» (Indirect Proof). وهو كما يلي:



٦-١ (ب)

مماس الدائرة
Tangent of the Circle

عمل تعاوني

- استخدم الفرجار لرسم دائرة مركزها و.
- من نقطة د خارج الدائرة ارسم مستقيمًا يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة فقط ولتكن ﺃ.
- ارسم القطعة وﺃ.

١ ما قياس الزاوية دﺃو؟

٢ قارن نتيجتك بنتائج زملائك في الفصل.

٣ ضع تخمينًا حول العلاقة بين المستقيم الذي يقطع الدائرة في نقطة واحدة ونصف قطر الدائرة المار في هذه النقطة.

سوف تتعلم

- استخدام العلاقة بين المماس ونصف قطر الدائرة المار بنقطة التماس
- استخدام العلاقة بين مماسين من نقطة واحدة خارج الدائرة

المماس للدائرة هو مستقيم في المستوي يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة.

نقطة التقاطع تسمى نقطة التماس.

ﺃد مماس.

ﺃد شعاع مماس.

ﺃد قطعة مماسية

ﺃو نصف قطر التماس

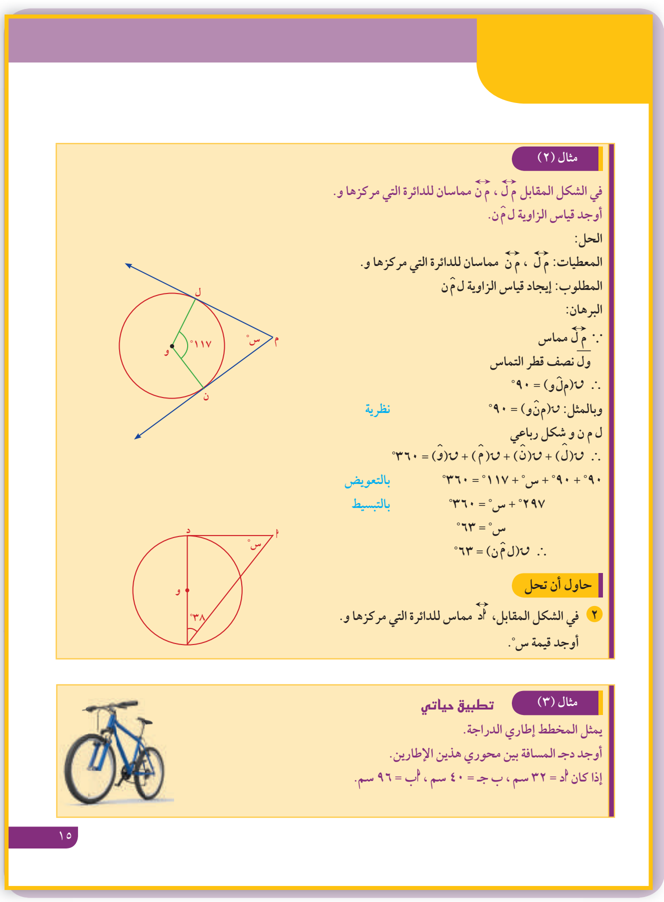
نظرية (٢)

المماس عمودي على نصف قطر التماس.

إذا كان مستقيم مماسًّا لدائرة، فإنه يكون متعامدًا مع نصف القطر المار بنقطة التماس.

أي أن وﺃ ⊥ دﺃ.

١٤



مثال (٢)

في الشكل المقابل م ل ، م ن مماسان للدائرة التي مركزها و.

أوجد قياس الزاوية ل م ن.

الحل:

المعطيات: م ل ، م ن مماسان للدائرة التي مركزها و.

المطلوب: إيجاد قياس الزاوية ل م ن

البرهان:

∵ م ل مماس

و ل نصف قطر التماس

∴ ق(م ل و) = ٩٠°

وبالمثل: ق(م ن و) = ٩٠° نظرية

ل م ن و شكل رباعي

∴ ق(ل) + ق(ن) + ق(م) + ق(و) = ٣٦٠°

٩٠° + ٩٠° + س° + ١١٧° = ٣٦٠° بالتعويض

٢٩٧° + س° = ٣٦٠° بالتبسيط

س° = ٦٣°

∴ ق(ل م ن) = ٦٣°

حاول أن تحل

٢ في الشكل المقابل، ﺃد مماس للدائرة التي مركزها و.

أوجد قيمة س°.

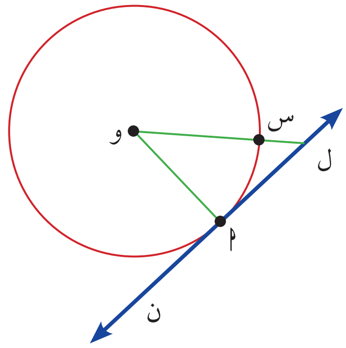
مثال (٣) **تطبيق حياتي**

يمثل المخطط إطاري الدراجة.

أوجد دجـ المسافة بين محوري هذين الإطارين.

إذا كان ﺃد = ٣٢ سم ، ب جـ = ٤٠ سم ، ﺃب = ٩٦ سم.

١٥



المعطى: دائرة مركزها و، المستقيم ن مماس للدائرة في ﺃ، وﺃ نصف قطر التماس.

المطلوب: إثبات أن المستقيم ن ⊥ وﺃ

البرهان:

الخطوة ١: لنفرض العكس، أي أن المستقيم ن ليس متعامدًا مع وﺃ.

سوف نثبت أن هذا الافتراض يوصلنا إلى تناقض.

الخطوة ٢: إذا لم تكن وﺃ متعامدة مع المستقيم ن، فإنه توجد قطعة مستقيمة أخرى متعامدة مع المستقيم ن.

ولتكن ول، تقطع الدائرة في س، أي أن ق(ول ﺃ) = ٩٠°

∴ ول = وس + س ل = وﺃ + س ل

∴ ول > وﺃ

ولكن وﺃ وتر للمثلث ول ﺃ قائم الزاوية ل وهذا يناقض الفرض.

الخطوة ٣: الافتراض أن المستقيم ن ليس متعامدًا مع وﺃ هو افتراض خطأ. وبالتالي فإن المستقيم ن ⊥ وﺃ صحيح.

في المثال (٢)، إذا تحركت م في المستوي بحيث م و = ثابت، فإن قياس الزاوية م ثابت لا يتغير.

في المثال (٣)، ساعد الطلاب على فهم الخطوط المستقيمة الإضافية في الرسم، والتي استخدمت لإيجاد الحل.

ﺃب مماس مشترك للدائرتين، د ﺃ ب هـ هو مستطيل.

شجع الطلاب على التعامل دائمًا بموضوعية مع الإنشاءات الهندسية باستخدام المسطرة والفرجار لما لها من أهمية في دقة أعمالهم مستقبلًا.

اسأل الطلاب: ما عدد المماسات على دائرة ما والتي تمر في نقطة معينة؟

ساعدهم على الوصول إلى فكرة أن عدد المماسات مرتبط بموقع النقطة بالنسبة إلى الدائرة.

إذا كانت النقطة داخل الدائرة فلا مماسات ممكنة، بينما إذا كانت النقطة على الدائرة فهناك مماس واحد، ولكن يمكن رسم مماسين للدائرة من نقطة خارج الدائرة. دعّم ذلك برسوم على السبورة.

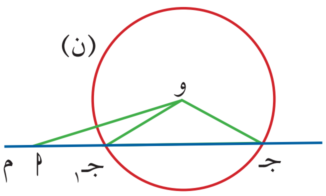
قبل البدء بالمثال (٤) ناقش مع الطلاب طريقة الحل في النظرية (٣) حيث تعتمد على افتراض أنه يوجد زاويتان قائمتان في مثلث واحد وهذا خطأ.

لإثبات النظرية (٣) سنفرض وجود نقطتي تقاطع بين المستقيم م والدائرة التي مركزها و ثم نبرهن أن النقطتين منطبقتان.

المعطى: المستقيم م متعامد مع وجـ، النقطة جـ تنتمي إلى الدائرة.

المطلوب: إثبات أن المستقيم م مماس للدائرة.

البرهان: لنفرض وجود نقطتي تقاطع جـ، جـ$_1$ بين المستقيم والدائرة (أ نقطة على المستقيم).

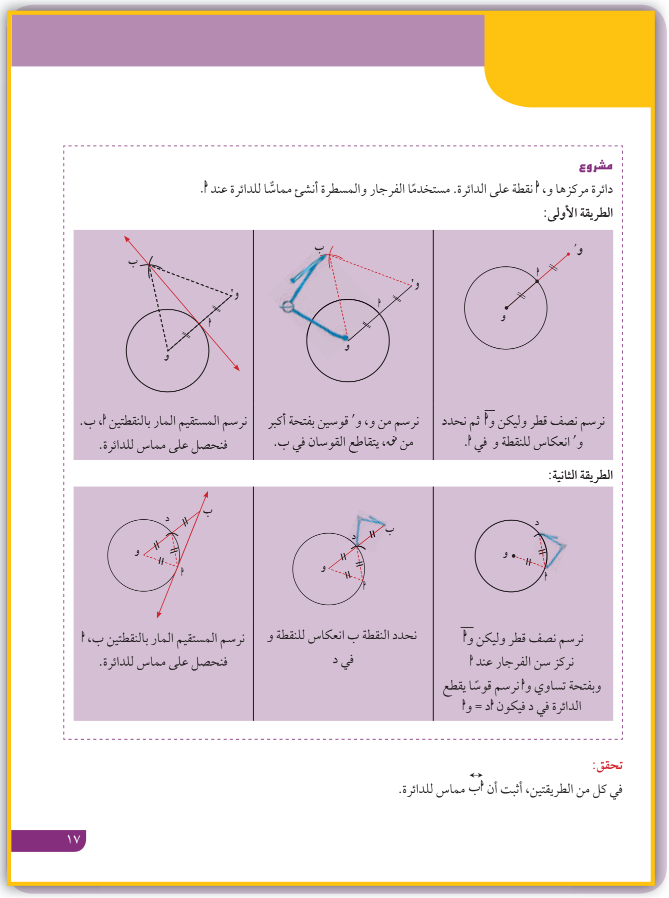


المثلثان وجـأ، وجـ$_1$أ قائما الزاوية في جـ، جـ$_1$.

Δو جـ جـ$_1$ فيه زاويتان قائمتان، هذا لا يمكن إلا إذا انطبقت جـ$_1$ على جـ ومنه المستقيم م يقطع الدائرة في نقطة واحدة.

$\therefore$ المستقيم م مماس للدائرة.

في المثال (٤)، قد يطرح بعض الطلاب فكرة استخدام مثلث خشبي (قائم الزاوية) للتحقق من أن $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة. أشر إلى أن هذه الطريقة غير مناسبة إذا كان قياس الزاوية قريبًا من ٩٠°.



مشروع

دائرة مركزها و، أ نقطة على الدائرة. مستخدمًا الفرجار والمسطرة أنشئ مماسًّا للدائرة عند أ.

الطريقة الأولى:

نرسم نصف قطر وليكن $\overline{\text{و أ}}$ ثم نحدد و′ انعكاس للنقطة و في أ.

نرسم من و، و′ قوسين بفتحة أكبر من $\frac{1}{2}$ ق يتقاطع القوسان في ب.

نرسم المستقيم المار بالنقطتين أ، ب. فنحصل على مماس للدائرة.

الطريقة الثانية:

نرسم نصف قطر وليكن $\overline{\text{و أ}}$ نركز سن الفرجار عند أ وبفتحة تساوي و أ نرسم قوسًا يقطع الدائرة في د فيكون د أ = و أ

نحدد النقطة ب انعكاس للنقطة و في د

نرسم المستقيم المار بالنقطتين أ، ب فنحصل على مماس للدائرة.

تحقق:

في كل من الطريقتين، أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة.

١٧

الحل:

المعطيات:

دائرة مركزها جـ، نق = ٤٠ سم

دائرة مركزها د، نق = ٣٢ سم

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرتين، أ ب = ٩٦ سم

المطلوب: إيجاد المسافة د جـ بين محوري الإطارين.

العمل: نرسم $\overline{\text{د هـ}} \perp \overline{\text{جـ ب}}$.

البرهان: $\overline{\text{د أ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{جـ ب}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ لماذا؟

$\therefore$ الشكل د أ ب هـ مستطيل.

المثلث د هـ جـ قائم الزاوية في هـ

بتطبيق نظرية فيثاغورث:

$(\text{د جـ})^2 = (\text{د هـ})^2 + (\text{هـ جـ})^2$

$(\text{د جـ})^2 = (96)^2 + (8)^2 = 9280$

د جـ $\simeq$ ٩٦,٣٣ باستخدام الآلة الحاسبة

المسافة بين محوري الإطارين تساوي ٩٦,٣ سم تقريبًا.

معلومة: محور الإطار هو المحور الذي يدور حوله الإطار.

حاول أن تحل

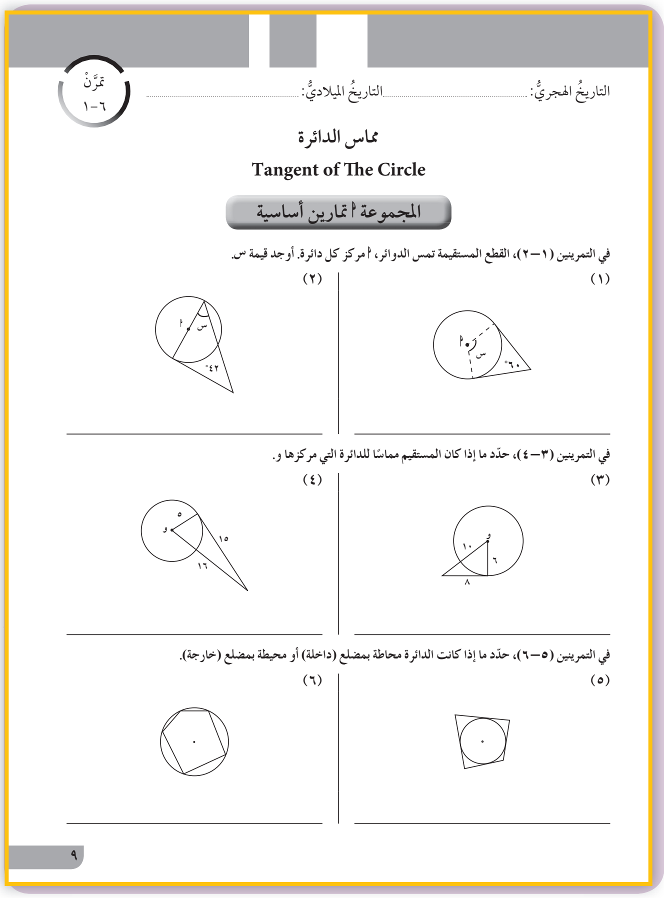
٣ يمثل الشكل المقابل مقطعًا لأسطوانتين في معمل الورق. أوجد طول ب جـ إذا كانت الدائرتان متماستين وطول نصف قطريهما ٥٠ سم، ٤٠ سم على الترتيب.

نظرية (٣)

المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماسًا لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

$\overleftrightarrow{\text{م}}$ مماس للدائرة عند جـ

١٦



التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: .... تمرَّن ٦-١

مماس الدائرة

Tangent of The Circle

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمرين (١-٢)، القطع المستقيمة تمس الدوائر، أ مركز كل دائرة، أوجد قيمة س.

(١) (٢)

في التمرين (٣-٤)، حدّد ما إذا كان المستقيم مماسًا للدائرة التي مركزها و.

(٣) (٤)

في التمرين (٥-٦)، حدّد ما إذا كانت الدائرة محاطة بمضلع (داخلة) أو محيطة بمضلع (خارجة).

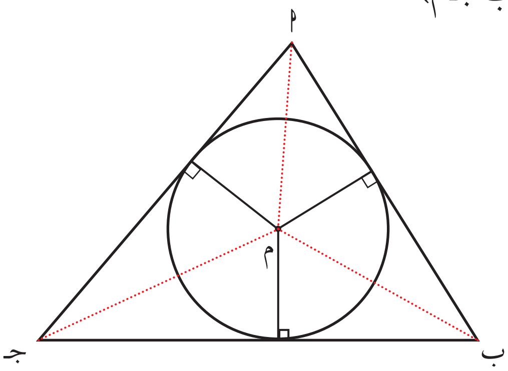
(٥) (٦)

٩

في المثال (٦)، اطلب إليهم إيجاد العلاقة بين نصف قطر الدائرة وطول ضلع المثلث في حالة مثلث متطابق الأضلاع.

مثلًا:

مساحة المثلث أ ب جـ = مساحة (أ ب م) + مساحة (م أ جـ) + مساحة (ب جـ م)



مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ أ ب $\times$ نق $+ \frac{1}{2} \times$ ب جـ $\times$ نق $+ \frac{1}{2} \times$ أ جـ $\times$ نق

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ نق $\times$ محيط أ ب جـ

وفي حالة المثلث المتطابق الأضلاع الذي طول ضلعه ل

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ ل^{2} $\times$ جا ٦٠ $= \frac{1}{2} \times$ ل^{2} $\times \frac{\sqrt{3}}{2}$

أيضًا مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ نق $\times$ ٣ ل ومنه نق $= \frac{\text{ل}\sqrt{3}}{6}$

مثال (٤)

في الشكل المقابل، ن ل = ٧ سم، ل م = ٢٤ سم، ن م = ٢٥ سم.
أثبت أن م ل مماس للدائرة التي مركزها ن.

الحل:

المعطيات: ن ل = ٧ سم، ن م = ٢٥ سم، م ل = ٢٤ سم

المطلوب: إثبات أن م ل مماسًا للدائرة التي مركزها ن

البرهان: باستخدام عكس نظرية فيثاغورث

(ن ل)^{2} + (ل م)^{2} $\overset{?}{=}$ (ن م)^{2}

(٧)^{2} + (٢٤)^{2} $\overset{?}{=}$ (٢٥)^{2} بالتعويض

٦٢٥ = ٦٢٥ بالتبسيط

نستنتج أن المثلث م ل ن قائم في ل.

∴ م ل ⊥ ن ل

∴ م ل مماس للدائرة في النقطة ل. نظرية

حاول أن تحل

٤ في الشكل المقابل، إذا كان ن ل = ٤، ل م = ٧، ن م = ٨،
فهل م ل مماس للدائرة؟ فسِّر إجابتك.

مثال (٥)

في الشكل المقابل د$_1$، د$_2$، د$_3$، د$_4$ أنصاف دوائر أقطارها على الترتيب أ ب، ب جـ، جـ هـ، هـ أ.
حدّد المماسات لأنصاف الدوائر، وفسِّر إجابتك

الحل:

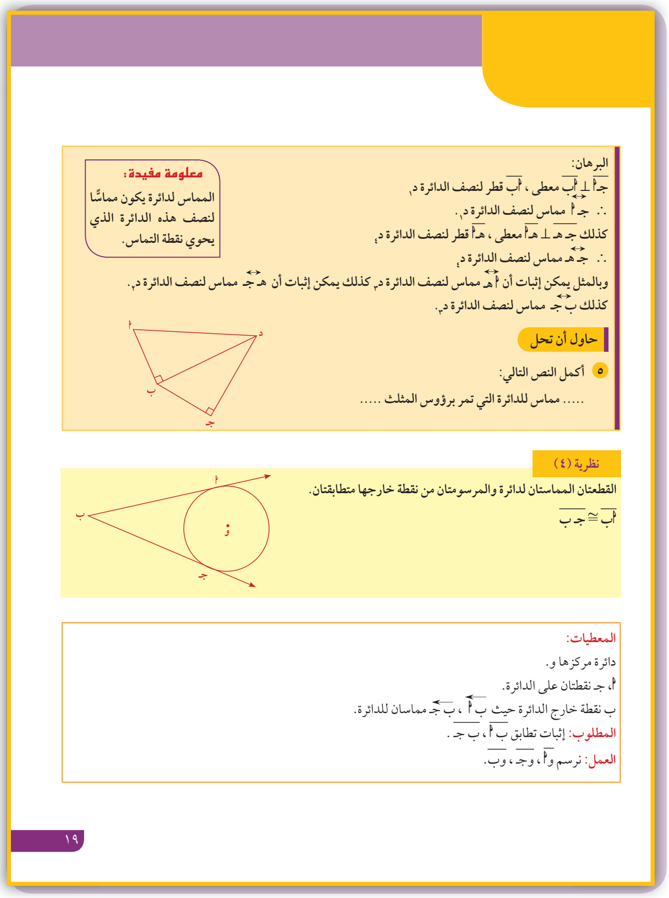
المعطيات:

د$_1$، د$_2$، د$_3$، د$_4$ أنصاف دوائر أقطارها على الترتيب أ ب، ب جـ، جـ هـ، هـ أ.

المطلوب:

تحديد المماسات لأنصاف الدوائر مع تفسير الإجابة.

١٨



البرهان:

جـ أ ⊥ أ ب معطى، أ ب قطر لنصف الدائرة د$_1$

∴ جـ أ مماس لنصف الدائرة د$_1$.

كذلك جـ هـ ⊥ هـ أ معطى، هـ أ قطر لنصف الدائرة د$_4$

∴ جـ هـ مماس لنصف الدائرة د$_4$

وبالمثل يمكن إثبات أن أ هـ مماس لنصف الدائرة د$_3$ كذلك يمكن إثبات أن هـ جـ مماس لنصف الدائرة د$_2$.

كذلك ب جـ مماس لنصف الدائرة د$_3$.

معلومة مفيدة:
المماس لدائرة يكون مماسًا لنصف هذه الدائرة الذي يحوي نقطة التماس.

حاول أن تحل

٥ أكمل النص التالي:
..... مماس للدائرة التي تمر برؤوس المثلث .....

نظرية (٤)

القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

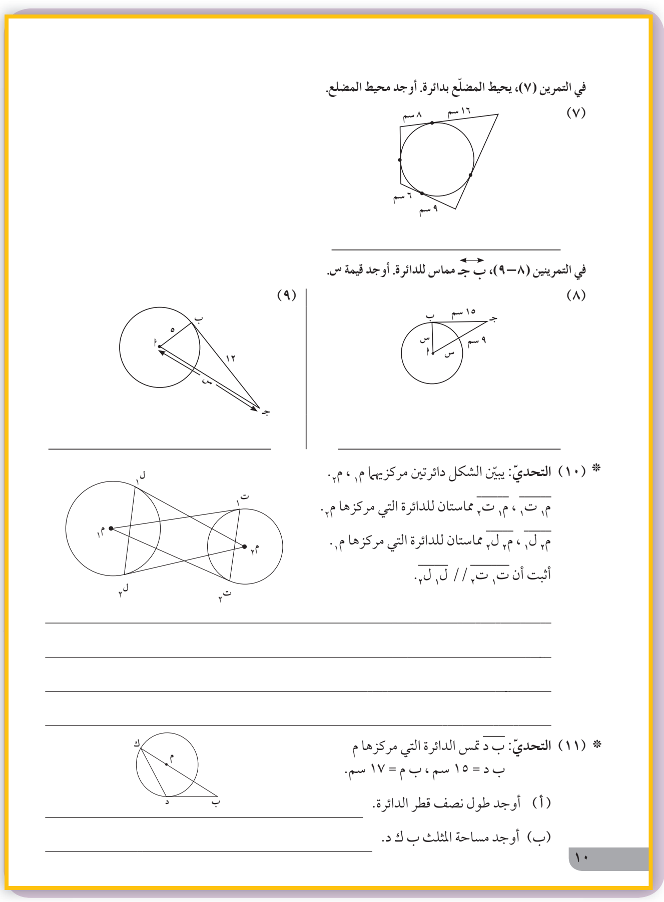
أ ب ≅ جـ ب

المعطيات:
دائرة مركزها و.
أ، جـ نقطتان على الدائرة.
ب نقطة خارج الدائرة حيث ب أ، ب جـ مماسان للدائرة.

المطلوب: إثبات تطابق ب أ، ب جـ.

العمل: نرسم و أ، و جـ، و ب.

١٩



في التمرين (٧)، يحيط المضلّع بدائرة. أوجد محيط المضلع.

(٧) ٨ سم، ١٦ سم، ٦ سم، ٩ سم

في التمرينين (٨–٩)، ب جـ مماس للدائرة. أوجد قيمة س.

(٨) ١٥ سم، ٩ سم، س

(٩) ٥، ١٢، س

* (١٠) التحديّ: يبيّن الشكل دائرتين مركزيهما م$_1$، م$_2$.
م$_1$ ت$_1$، م$_1$ ت$_2$ مماستان للدائرة التي مركزها م$_2$.
م$_2$ ل$_1$، م$_2$ ل$_2$ مماستان للدائرة التي مركزها م$_1$.
أثبت أن ت$_1$ ت$_2$ // ل$_1$ ل$_2$.

* (١١) التحديّ: ب د تمس الدائرة التي مركزها م
ب د = ١٥ سم، ب م = ١٧ سم.
(أ) أوجد طول نصف قطر الدائرة.
(ب) أوجد مساحة المثلث ب ك د.

١٠

٦ الربط

انظر المثالين (٣) ، (٨) فهما يؤكدان العلاقة والربط بين الدوائر وعجلات الدراجة.

في المثالين أعلاه، لا تتقاطع الدائرتان بينهما في حالات أخرى تتقاطع الدائرتان (مثل التروس) وفي هذه الحالة تكون المسافة بين مركزي الدائرتين أصغر من مجموع طولي نصفي القطر.

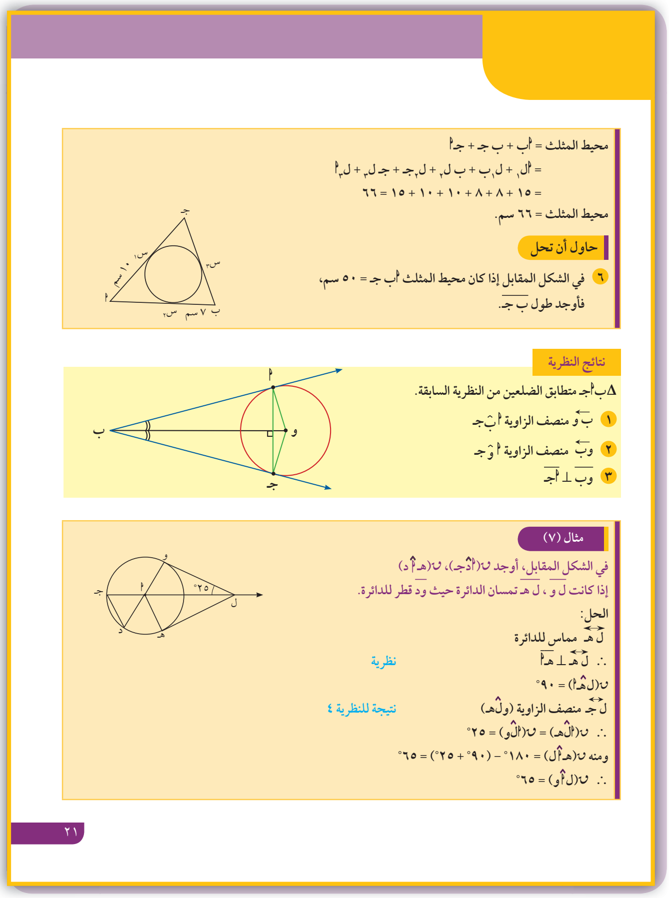
٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يعتقد بعض الطلاب بأنه يمكن إيجاد أكثر من مماس من نقطة على الدائرة.

اشرح لهم أن من نقطة على مستقيم يوجد مستقيم عمودي واحد فقط على هذا المستقيم. وبالتالي لا يوجد إلا مماس واحد من نقطة موجودة على الدائرة.

٨ التقييم

(أ) تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» كونها تعطيك فكرة واضحة عن مدى استيعابهم المفاهيم والمهارات في هذا الدرس.



محيط المثلث = أب + ب جـ + جـ أ

= أل + ل ب + ب ل + ل جـ + جـ ل + ل أ

= ١٥ + ٨ + ٨ + ١٠ + ١٠ + ١٥ = ٦٦

محيط المثلث = ٦٦ سم.

حاول أن تحل

٦ في الشكل المقابل إذا كان محيط المثلث أ ب جـ = ٥٠ سم، فأوجد طول ب جـ

نتائج النظرية

Δب أ جـ متطابق الضلعين من النظرية السابقة.

١ ب و منصف الزاوية أ ب جـ

٢ و ب منصف الزاوية أ و جـ

٣ و ب ⊥ أ جـ

مثال (٧)

في الشكل المقابل، أوجد ق(أ د جـ)، ق(هـ أ د)

إذا كانت ل و، ل هـ تمسان الدائرة حيث و د قطر للدائرة.

الحل:

ل هـ مماس للدائرة

∴ ل هـ ⊥ هـ أ — نظرية

ق(ل هـ أ) = ٩٠°

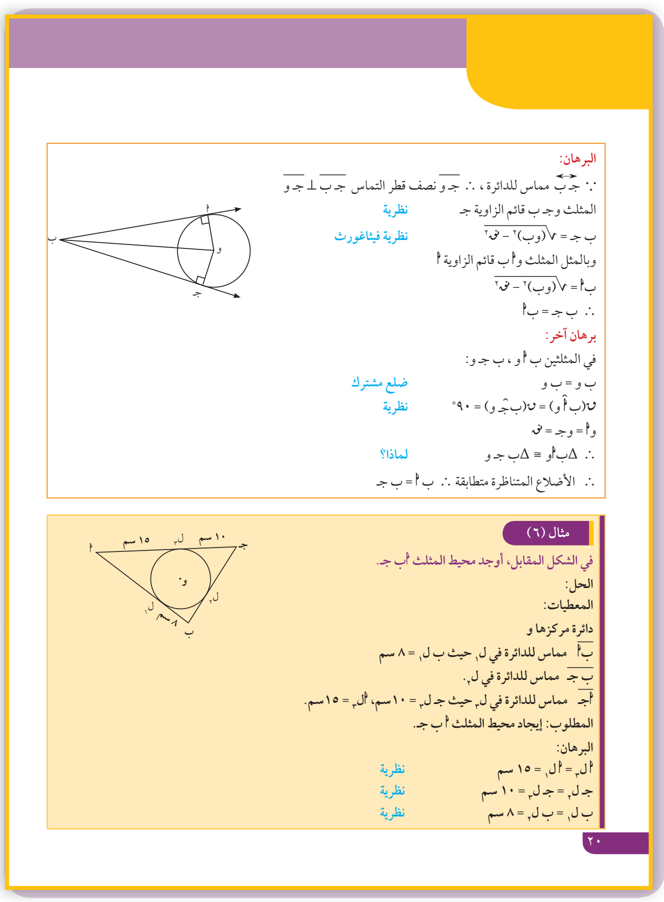
ل جـ منصف الزاوية (و ل هـ) — نتيجة للنظرية ٤

∴ ق(هـ ل أ) = ق(أ ل و) = ٢٥°

ومنه ق(هـ أ ل) = ١٨٠° − (٩٠° + ٢٥°) = ٦٥°

∴ ق(د أ و) = ٦٥°

٢١



البرهان:

∵ جـ ب مماس للدائرة، ∴ جـ و نصف قطر التماس جـ ب ⊥ جـ و

المثلث و جـ ب قائم الزاوية جـ — نظرية

ب جـ = $\sqrt{(وب)^2 - نق^2}$ — نظرية فيثاغورث

وبالمثل المثلث و أ ب قائم الزاوية أ

ب أ = $\sqrt{(وب)^2 - نق^2}$

∴ ب جـ = ب أ

برهان آخر:

في المثلثين ب أ و ، ب جـ و:

ب و = ب و — ضلع مشترك

ق(ب أ و) = ق(ب جـ و) = ٩٠° — نظرية

و أ = و جـ = نق

∴ Δب أ و ≅ Δب جـ و — لماذا؟

∴ الأضلاع المتناظرة متطابقة ∴ ب أ = ب جـ

مثال (٦)

في الشكل المقابل، أوجد محيط المثلث أ ب جـ.

الحل:

المعطيات:

دائرة مركزها و

ب أ مماس للدائرة في ل، حيث ب ل = ٨ سم

ب جـ مماس للدائرة في ل

أ جـ مماس للدائرة في ل، حيث جـ ل = ١٠ سم، أ ل = ١٥ سم.

المطلوب: إيجاد محيط المثلث أ ب جـ.

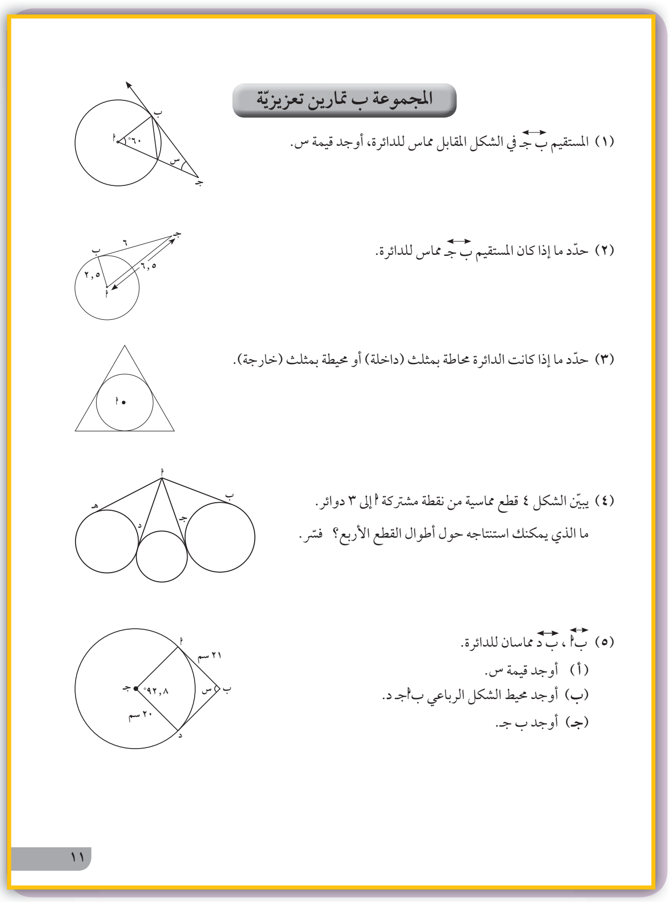
البرهان:

أ ل = أ ل = ١٥ سم — نظرية

جـ ل = جـ ل = ١٠ سم — نظرية

ب ل = ب ل = ٨ سم — نظرية

٢٠



المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) المستقيم ب جـ في الشكل المقابل مماس للدائرة، أوجد قيمة س.

(٢) حدّد ما إذا كان المستقيم ب جـ مماس للدائرة.

(٣) حدّد ما إذا كانت الدائرة محاطة بمثلث (داخلة) أو محيطة بمثلث (خارجة).

(٤) بيّن الشكل ٤ قطع مماسية من نقطة مشتركة أ إلى ٣ دوائر.

ما الذي يمكنك استنتاجه حول أطوال القطع الأربع؟ فسّر.

(٥) ب أ ، ب د مماسان للدائرة.

(أ) أوجد قيمة س.

(ب) أوجد محيط الشكل الرباعي ب أ جـ د.

(جـ) أوجد ب جـ.

١١

اختبار سريع

❶ من نقطة أ خارج دائرة رسم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة. إذا كان أب = ١٢ سم، نق = ٥ سم فأوجد البعد بين أ ومركز الدائرة. ١٣ سم

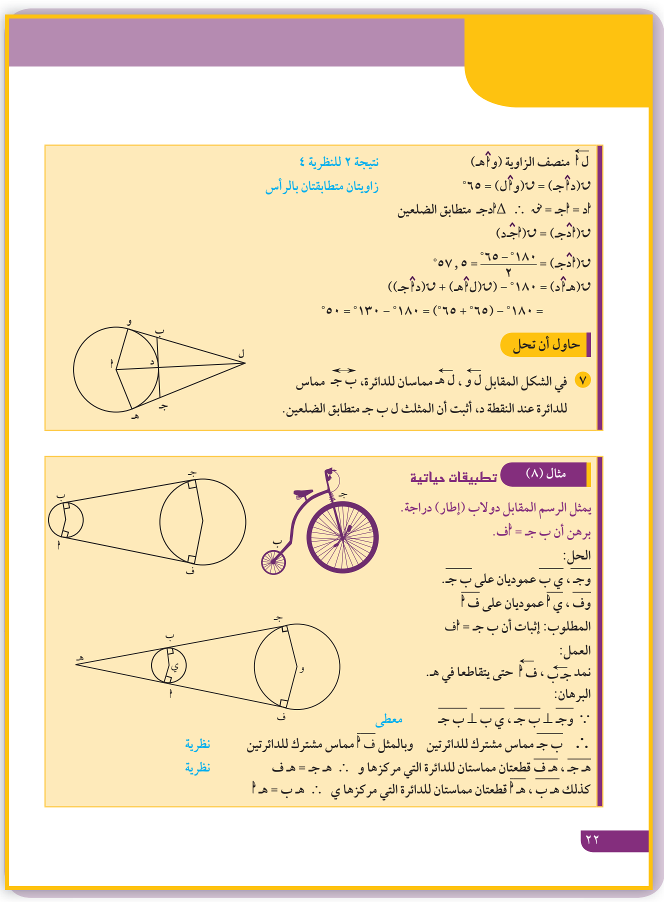
❷ ارسم دائرة ثم ارسم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس لها. ارسم $\overleftrightarrow{\text{جـد}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ بحيث تكون $\overleftrightarrow{\text{جـد}}$ مماس للدائرة أيضًا. بيّن خطوات عملك.

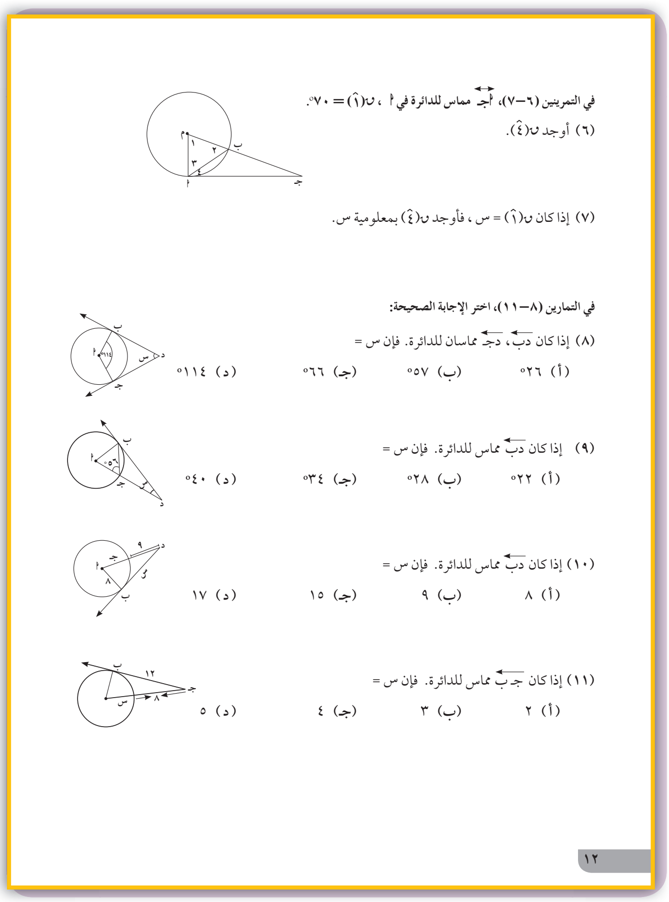
من مركز الدائرة نرسم مستقيمًا عموديًا على $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يقطع الدائرة في هـ. من هـ نرسم مستقيمًا يوازي $\overleftrightarrow{\text{أب}}$.

❾ إجابات وحلول

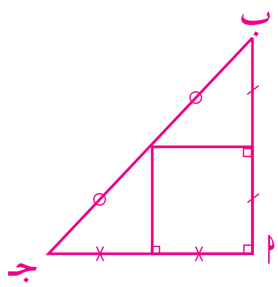
«عمل تعاوني»

❶ ، ❷ ، ❸ قد تختلف الإجابات.





«حاول أن تحل»



١ في المثلث أ ب جـ القائم الزاوية أ المنصف العمودي للضلع أ ب يمر بمنتصف ب جـ ، والمنصف العمودي للضلع أ جـ يمر بمنتصف ب جـ فيكون منتصف ب جـ هو مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث أ ب جـ.

٢ س° = ٩٠° − ٣٨°، س° = ٥٢°.

٣ ن أ = نو$_{١}$ + نو$_{٢}$ = ٥٠ + ٤٠ = ٩٠

ب جـ = ن هـ = $\sqrt{}$(٩٠)^{٢} − (٥٠ − ٤٠)^{٢} = $\sqrt{}$٨٠٠٠

≃ ٨٩,٤٤ سم.

٤ (ن م)^{٢} = ٨^{٢} = ٦٤

(ن ل)^{٢} + (ل م)^{٢} = ٤^{٢} + ٧^{٢} = ٦٥

(ن م)^{٢} ≠ (ن ل)^{٢} + (ل م)^{٢}، لذا المثلث م ن ل ليس قائمًا في ل. ومنه م ل ليس مماسًّا للدائرة في ل.

٥ أ ب مماس للدائرة التي تمر برؤوس المثلث ب جـ د.

٦ أ س$_{١}$ = أ س$_{٢}$ = ١٠ سم

ب س$_{٣}$ = ب س$_{٢}$ = ٧ سم

٥٠ = ١٤ + ٢٠ + ٢ جـ س$_{٣}$

٢ جـ س$_{٣}$ = ١٦ أي جـ س$_{٣}$ = ٨ سم

فيكون طول جـ ب = ٧ + ٨ = ١٥

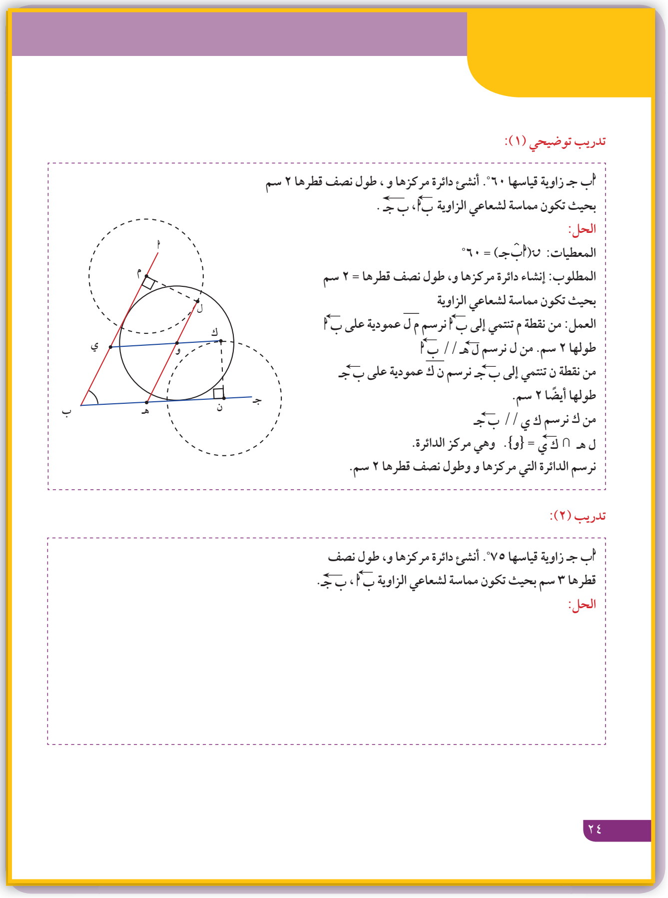
جـ ب = ١٥ سم.

٧ في المثلث ل ب جـ

ل أ ⊥ ب جـ ∴ ل د ⊥ ب جـ

ل أ منصف الزاوية ب ل جـ

∴ المثلث ل ب جـ متطابق الضلعين (ل ب = ل جـ)



تدريب توضيحي (١):

أب جـ زاوية قياسها ٦٠°. أنشئ دائرة مركزها و ، طول نصف قطرها ٢ سم بحيث تكون مماسة لشعاعي الزاوية ب أ، ب جـ .

الحل:

المعطيات: ق(أ ب̂ جـ) = ٦٠°

المطلوب: إنشاء دائرة مركزها و، طول نصف قطرها = ٢ سم بحيث تكون مماسة لشعاعي الزاوية

العمل: من نقطة م تنتمي إلى ب أ نرسم م ل عمودية على ب أ طولها ٢ سم. من ل نرسم ل هـ // ب أ

من نقطة ن تنتمي إلى ب جـ نرسم ن ك عمودية على ب جـ طولها أيضًا ٢ سم.

من ك نرسم ك ي // ب جـ

ل هـ ∩ ك ي = {و}. وهي مركز الدائرة.

نرسم الدائرة التي مركزها و وطول نصف قطرها ٢ سم.

تدريب (٢):

أب جـ زاوية قياسها ٧٥°. أنشئ دائرة مركزها و، طول نصف قطرها ٣ سم بحيث تكون مماسة لشعاعي الزاوية ب أ ، ب جـ.

الحل:

٢٤

٨ في حالة عدم تقاطع جـ ب ، أ ف الشكل أ ب جـ ف له خط تماثل وهو المستقيم الذي يمر بمركزي الدائرتين.

تماثل أ هو ب، تماثل ف هو جـ.

∴ ب جـ = أ ف

«تدريب ٢»

يكرّر العمل في تدريب توضيحي مع فارق أن م ل = ٣ سم، ن ك = ٣ سم وقياس الزاوية أ ب جـ هو ٧٥°.

٦-٢: الأوتار والأقواس

١ الأهداف

- يربط بين الأوتار المتطابقة والأقواس والزوايا المركزية على دائرة أو على دوائر متطابقة.
- يتعرف خصائص الخطوط المستقيمة التي تمر في مركز الدائرة.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

قوس – وتر – قطر – نصف قطر – زاوية مركزية – منصف عمودي – منصف زاوية – قطعة متوسطة.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة – فرجار – منقلة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

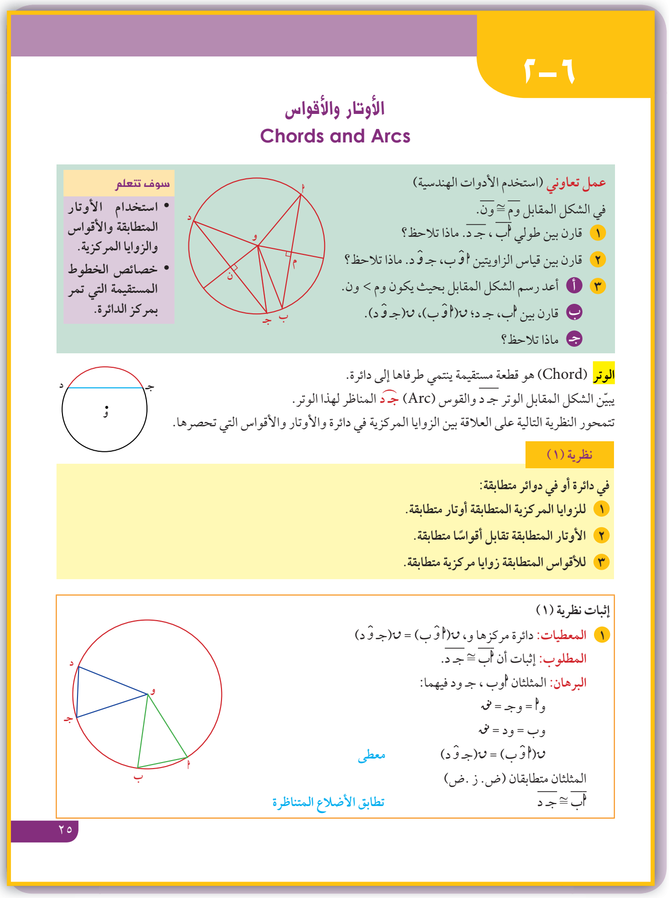
- ما هي حالات تطابق مثلثين؟
- ما هو منصف الزاوية؟ ما هو العمود المرسوم من رأس المثلث إلى الضلع المقابل؟ ما هو المنصف العمودي لقطعة مستقيمة؟ ما هي القطعة المتوسطة في المثلث؟
- ما طول قوس على الدائرة بدلالة نصف قطرها وقياس زاويته المركزية بالراديان؟

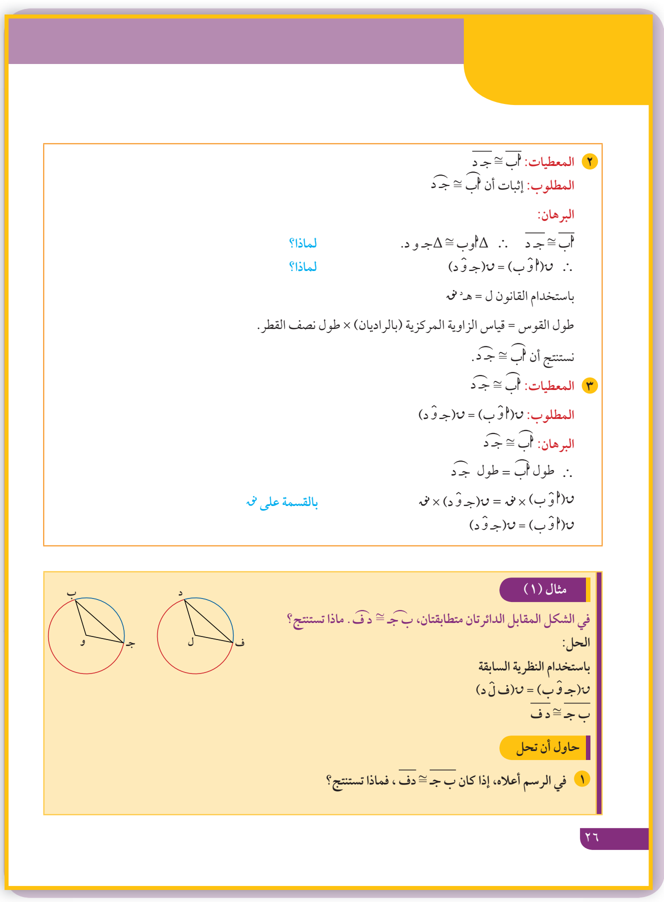
٥ التدريس

اطلب إلى الطلاب أن يستخدموا المسطرة والفرجار والمنقلة ليرسموا نماذج متعددة من الدوائر ويرسموا في كل دائرة زاويتين مركزيتين متساويتي القياس، ثم يقارنوا أطوال الأوتار المقابلة، وباستخدام القاعدة ل = هـ نق يوجدوا أطوال الأقواس المقابلة. يمكنهم أيضًا استخدام الأوتار متساوية الطول، ثم بواسطة المنقلة يقيسون الزوايا المركزية المقابلة. سوف يساعدهم ذلك على فهم نظرية (١).

من المهم جدًّا أن يتعمق الطلاب في فهم النظريتين (٢)، (٣) اللتين تحددان العلاقة بين بعد الأوتار عن مركز الدائرة وعلاقة قطر الدائرة العمودي على أي وتر في الدائرة.

اسأل الطلاب : كيف يمكن معرفة مركز الدائرة باستخدام الأوتار؟ نرسم المنصف العمودي لوترين غير متوازيين. نقطة تقاطع المنصفين هي مركز الدائرة.


٦-٢
الأوتار والأقواس
Chords and Arcs
الوتر (Chord) هو قطعة مستقيمة ينتمي طرفاها إلى دائرة.
نظرية (١)
في دائرة أو في دوائر متطابقة:
١ للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.
٢ الأوتار المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة.
٣ للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة.
٢٥


مثال (١)
حاول أن تحل
٢٦

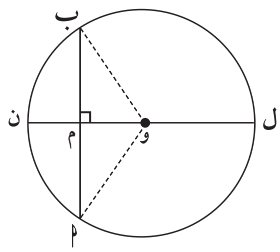
أشر إلى أن كل مستقيم مار في مركز الدائرة يشكل خط تناظر لها. قد تساعد هذه الخاصية في إثبات بعض النظريات والتطبيقات.

- في المثال (١)، يمكن أن يكون القوسان ب⌒جـ ، ف⌒د على دائرة واحدة وتبقى النتيجة ذاتها.
- في المثال (٢)، إذا عرف البعد بين مركز الدائرة والوتر بمعلومية نحو، نستطيع معرفة طول الوتر والعكس صحيح.

ناقش مع الطلاب الحلول الموجودة لإثبات النظرية (٣) وذلك في الحالات الثلاث:

النظرية (٣):

١- **المعطيات:** دائرة مركزها و، ل‾ن قطر، ل‾ن ⊥ ‾أب حيث ‾أب وتر في الدائرة.



المطلوب: إثبات أن ‾أم ≅ ‾م ب.

أ⌒ن = ن⌒ب

العمل: نصل ‾وأ ، ‾وب

البرهان: Δوأب متطابق الضلعين

‾وم ⊥ ‾أب

∴ ‾وم المنصف العمودي لِـ ‾أب

∴ ‾أم ≅ ‾م ب.


مثال (٢)

في الشكل المقابل ليكن م مركز الدائرة. م ب = م هـ ، أوجد طول ‾جـ د. فسّر.

الحل:

المعطيات:

‾جـ د ، ‾جـ أ وتران في الدائرة.

ب منتصف ‾جـ أ . ب أ = ١٢,٥.

هـ ∈ ‾جـ د حيث ‾م هـ ⊥ ‾جـ د ، م هـ = م ب.

المطلوب: إيجاد طول ‾جـ د.

البرهان:

أب = ب جـ = ١٢,٥	معطى
أب + ب جـ = أجـ	
٢٥ = أجـ	بالتعويض
∵ م هـ = م ب	معطى
∴ جـ د = أجـ	نظرية
جـ د = ٢٥	بالتعويض

حاول أن تحل

٢ دائرة مركزها و.

أوجد قيمة س في الشكل المقابل، وفسّر إجابتك.

في الدائرة، للمنصف العمودي على الوتر خواص هندسية مهمة.

نظرية (٣)

١ القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلًّا من قوسيه.

٢ القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) في دائرة يكون عموديًّا على هذا الوتر.

٣ العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة.

٢٨


تبيّن النظرية التالية العلاقة بين وترين وبُعد كل منهما عن مركز الدائرة.

نظرية (٢)

١ الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.

٢ الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.

إثبات نظرية (٢)

١ المعطيات: ‾أب ≅ ‾جـ د.

المطلوب: ‾ون ≅ ‾وم.

البرهان:

وأ = وجـ = وب = ود = نق	
أب = جـ د	معطى
∴ Δوأب ≅ Δوجـ د	(ض. ض. ض)

مساحة المثلث وأب = مساحة المثلث وجـ د.

∴ $\frac{\text{ون} \times \text{أب}}{٢} = \frac{\text{وم} \times \text{جـ د}}{٢}$

∵ أب = جـ د

∴ ون = وم

٢ المعطيات: ‾ون ≅ ‾وم.

المطلوب: ‾أب ≅ ‾جـ د.

البرهان:

Δونأ ≅ Δوم د	بضلع ووتر
∴ Δ وأب ≅ Δوجـ د	لماذا؟

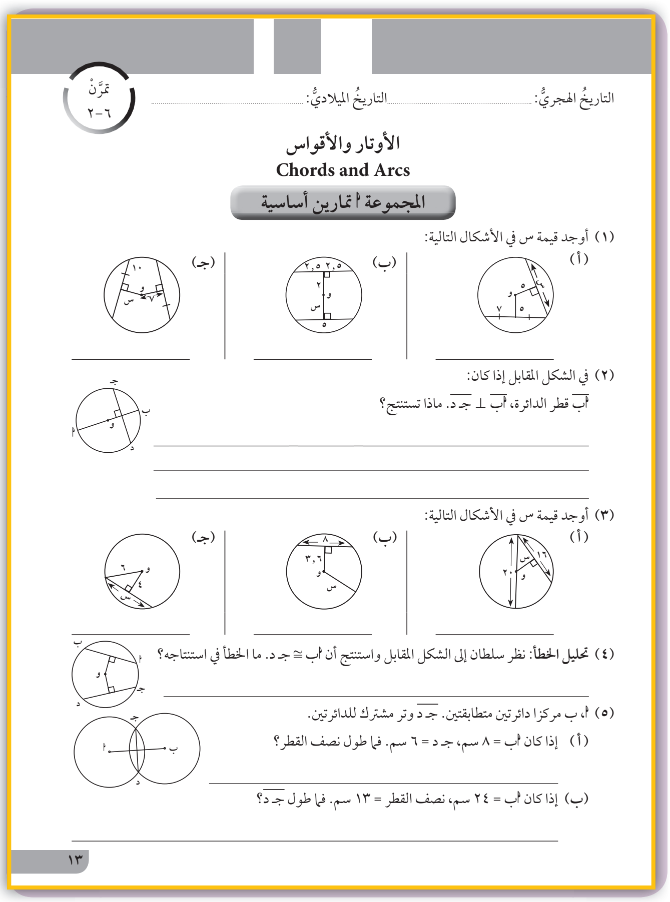
من التطابق ينتج أن:

أب = جـ د

معلومة علمية:

إذا تطابق مثلثان فإن الأعمدة المرسومة من الرأس إلى القاعدة المناظرة تكون متطابقة.

٢٧


التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٦-٢

الأوتار والأقواس

Chords and Arcs

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أوجد قيمة س في الأشكال التالية:

(أ) (ب) (جـ)

(٢) في الشكل المقابل إذا كان:

‾أب قطر الدائرة، ‾أب ⊥ ‾جـ د. ماذا تستنتج؟

(٣) أوجد قيمة س في الأشكال التالية:

(أ) (ب) (جـ)

(٤) **تحليل الخطأ:** نظر سلطان إلى الشكل المقابل واستنتج أن أب ≅ جـ د. ما الخطأ في استنتاجه؟

(٥) أ، ب مركزا دائرتين متطابقتين. ‾جـ د وتر مشترك للدائرتين.

(أ) إذا كان أب = ٨ سم، جـ د = ٦ سم. فما طول نصف القطر؟

(ب) إذا كان أب = ٢٤ سم، نصف القطر = ١٣ سم. فما طول ‾جـ د؟

١٣

وم المنصف العمودي لِـ أب

∴ وم منصف الزاوية أوب

ق(أون) = ق(نوب)

∴ أن ≅ نب

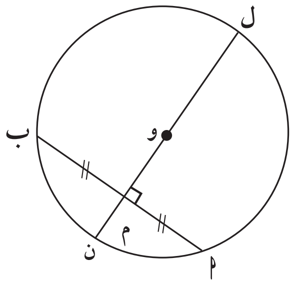
٢- **المعطيات:** ل ن قطر ينصف أب

المطلوب: إثبات ل ن ⊥ أب

البرهان: المثلث أوب متطابق الضلعين.

القطعة المتوسطة وم هي المنصف العمودي لِـ أب

وبالتالي ل ن ⊥ أب



٣- **المعطيات:** ل ن منصف أب، ل ن ⊥ أب

المطلوب: إثبات أن ل ن تمر بمركز الدائرة.

البرهان: ل ن ⊥ أب ، ل ن منصف أب

ل ن المنصف العمودي لِـ أب

∵ و أ = و ب = نق

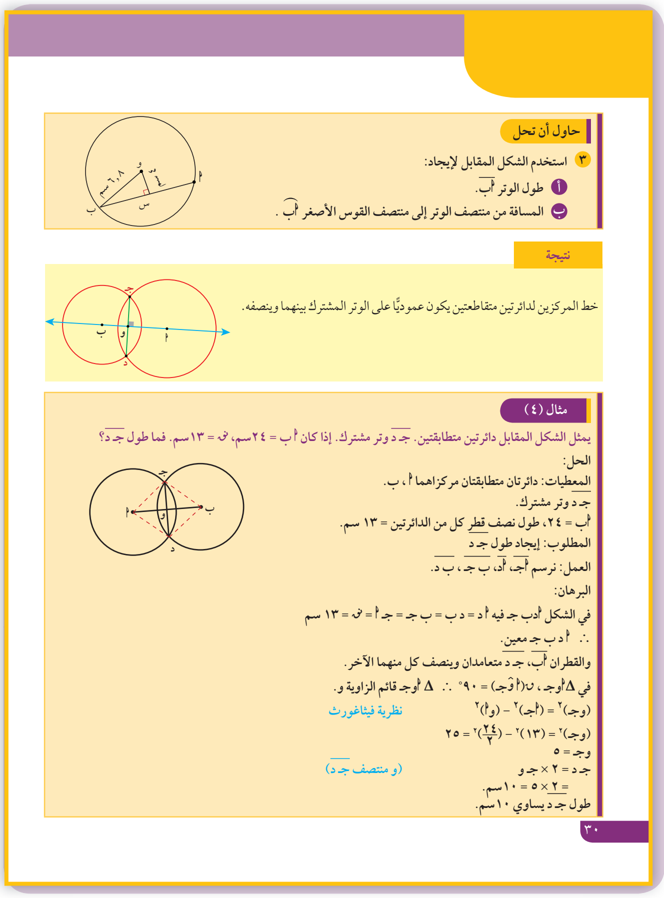
∴ و تنتمي إلى المنصف العمودي للقطعة أب.

ومنه ل ن تمر بالمركز و.

في المثال (٣)

تطبيق مباشر على النظرية (٣).

لدينا وجـ ⊥ أب لذا النقطة جـ منتصف الوتر أب.



حاول أن تحل

٣ استخدم الشكل المقابل لإيجاد:

أ طول الوتر أب.

ب المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر أب .

نتيجة

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًّا على الوتر المشترك بينهما وينصفه.

مثال (٤)

يمثل الشكل المقابل دائرتين متطابقتين. جـ د وتر مشترك. إذا كان أ ب = ٢٤ سم، نق = ١٣ سم. فما طول جـ د؟

الحل:

المعطيات: دائرتان متطابقتان مركزاهما أ ، ب.

جـ د وتر مشترك.

أب = ٢٤، طول نصف قطر كل من الدائرتين = ١٣ سم.

المطلوب: إيجاد طول جـ د

العمل: نرسم أجـ، أد، ب جـ ، ب د.

البرهان:

في الشكل أدب جـ فيه أ د = د ب = ب جـ = جـ أ = نق = ١٣ سم

∴ أ د ب جـ معين.

والقطران أب، جـ د متعامدان وينصف كل منهما الآخر.

في Δ أوجـ، ق(أوجـ) = ٩٠° ∴ Δ أوجـ قائم الزاوية و.

(وجـ)^{٢} = (أجـ)^{٢} − (أو)^{٢} نظرية فيثاغورث

(وجـ)^{٢} = (١٣)^{٢} − ($\frac{٢٤}{٢}$)^{٢} = ٢٥

وجـ = ٥

جـ د = ٢ × جـ و (و منتصف جـ د)

= ٢ × ٥ = ١٠ سم.

طول جـ د يساوي ١٠ سم.

٣٠

مثال (٣)

أ في الشكل المقابل، أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و.

الحل:

المعطيات:

أب وتر في دائرة مركزها و. أب = ١٤ سم. وجـ ⊥ أب. وجـ = ٣ سم

المطلوب: إيجاد طول نصف قطر الدائرة

العمل: نرسم و ب

البرهان:

ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أب = $\frac{١}{٢}$ (١٤) = ٧ سم القطر العمودي على وتر ينصفه

(وب)^{٢} = (وجـ)^{٢} + (جـ ب)^{٢} = (٣)^{٢} + (٧)^{٢} = ٥٨ نظرية فيثاغورث

وب = $\sqrt{٥٨}$ ≈ ٧,٦ سم الجذر التربيعي لكلا الطرفين

طول نصف قطر الدائرة يساوي حوالى ٧,٦ سم.

ب في الشكل المقابل أوجد البعد بين مركز الدائرة والوتر.

الحل:

المعطيات: و مركز الدائرة.

وأ نصف قطر الدائرة، وأ = ١٥ سم. أجـ وتر في الدائرة.

ب ∈ أجـ، ب أ = ب جـ = ١١ سم.

المطلوب: إيجاد البعد بين مركز الدائرة و والوتر أجـ.

البرهان:

وب ⊥ أب القطر الذي ينصف الوتر (ليس القطر) هو عمودي على الوتر

(وب)^{٢} + (١١)^{٢} = (١٥)^{٢} نظرية فيثاغورث في Δوبأ

(وب)^{٢} = ١٠٤

وب ≃ ١٠,٢ سم الجذر التربيعي لكلا الطرفين

البعد بين مركز الدائرة والوتر ≃ ١٠,٢ سم.

٢٩

(٦) **تفكير ناقد:** طول قطر دائرة يساوي ٢٠ سم، وطولا وترين موازيين لهذا القطر ٦ سم و١٦ سم.

أوجد المسافة بين الوترين لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر.

(أ) إذا كان الوتران في جهة واحدة من المركز.

(ب) إذا كان الوتران في جهتين مختلفين من المركز.

(٧) البعد بين مركز الدائرة ووتر طوله ٩ سم يساوي ١١ سم تقريبًا.

أوجد طول نصف قطر الدائرة لأقرب عدد كلي.

(٨) دائرتان مركزاهما على الترتيب أ، ب تتقاطعان بالنقطتين جـ ، د.

وطول نصف قطر كل دائرة ٦ سم.

أوجد طول جـ د إذا كان طول أب يساوي ٨ سم.

في التمرينين (٩–١٠)، اختر الإجابة الصحيحة:

(٩) إذا كان طول قطر دائرة يساوي ٢٥ سم وطول أحد أوتارها ١٦ سم فإن البعد بين مركز الدائرة والوتر هو تقريبًا:

(أ) ٩ سم (ب) ٩,٦ سم (جـ) ١٨ سم (د) ١٩,٢ سم

(١٠) في الشكل المقابل العبارة الخاطئة فيما يلي هي:

(أ) جـ = د (ب) أ = ب

(جـ) جـ^{٢} + هـ^{٢} = ب^{٢} (د) هـ = د

١٤

في المثال (٤)

$\overline{\text{جـ د}}$ وتر مشترك في الدائرتين، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يمر بالنقطة أ مركز دائرة ويمر بالنقطة ب مركز دائرة أيضًا وهو عمودي على $\overline{\text{جـ د}}$ وبالتالي تطبيقًا للنظرية (٣) تكون و منتصف جـ د.

٦ الربط

يؤكد المثال (٥) على العلاقة بين مماس الدائرة الذي يشكل مع القطر في نقطة المماس زاوية قائمة وهي القاعدة التي تحدد ما إذا كان مستقيم ما يشكل مماسًا لدائرة معينة.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

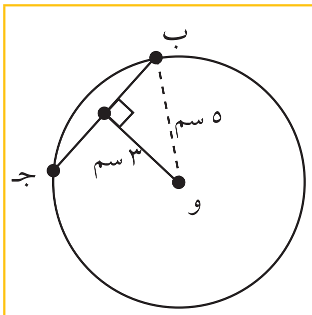
يعتقد الطلاب أن الوتر المتعامد مع وتر آخر في الدائرة نفسها يمر في منتصف هذا الوتر.
وضّح هذه الفكرة لدى الطلاب مؤكدًا لهم أن القطر إذا ما كان متعامدًا مع أي وتر ليس قطرًا في الدائرة فإنه يمر في منتصفه.

٨ التقييم

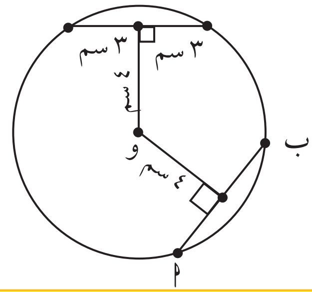
راقب الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من أنهم قد توصلوا إلى فهم كيفية إيجادهم الحلول.

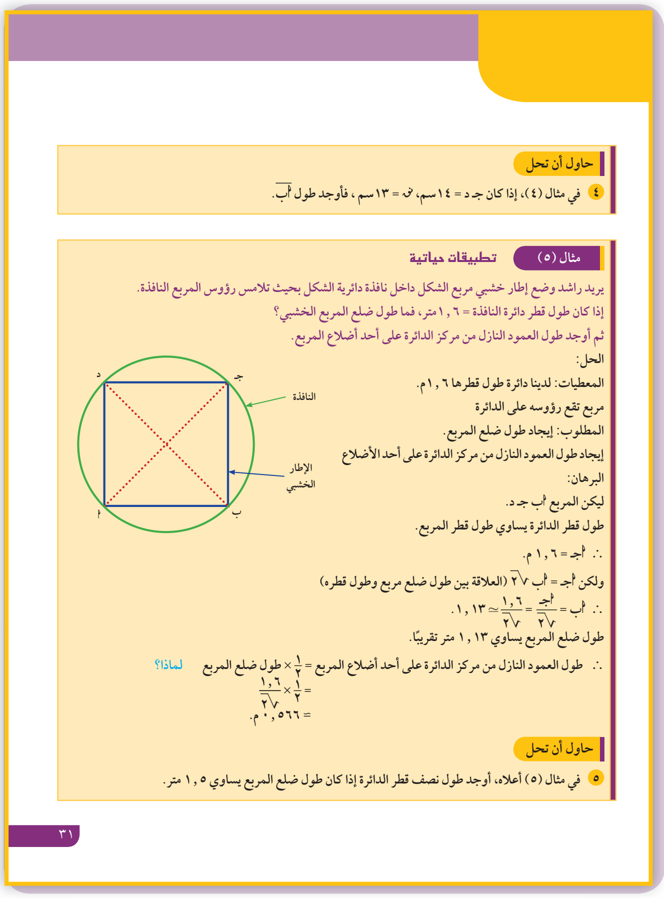
اختبار سريع

١ في الشكل المقابل أوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$ **٨ سم**



٢ في الشكل المقابل أوجد طول $\overline{\text{أب}}$ **٦ سم**




حاول أن تحل

٤ في مثال (٤)، إذا كان جـ د = ١٤ سم، نه = ١٣ سم ، فأوجد طول $\overline{\text{أب}}$.

مثال (٥) تطبيقات حياتية

يريد راشد وضع إطار خشبي مربع الشكل داخل نافذة دائرية الشكل بحيث تلامس رؤوس المربع النافذة.
إذا كان طول قطر دائرة النافذة = ١,٦ متر، فما طول ضلع المربع الخشبي؟
ثم أوجد طول العمود النازل من مركز الدائرة على أحد أضلاع المربع.

الحل:

المعطيات: لديبا دائرة طول قطرها ١,٦ م.
مربع تقع رؤوسه على الدائرة
المطلوب: إيجاد طول ضلع المربع.
إيجاد طول العمود النازل من مركز الدائرة على أحد الأضلاع
البرهان:
ليكن المربع أب جـ د.
طول قطر الدائرة يساوي طول قطر المربع.
∴ أجـ = ١,٦ م.
ولكن أجـ = أب $\sqrt{٢}$ (العلاقة بين طول ضلع مربع وطول قطره)
∴ أب = $\frac{\text{أجـ}}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{١,٦}{\sqrt{٢}}$ ≃ ١,١٣.
طول ضلع المربع يساوي ١,١٣ متر تقريبًا.
∴ طول العمود النازل من مركز الدائرة على أحد أضلاع المربع = $\frac{١}{٢}$ × طول ضلع المربع لماذا؟
= $\frac{١}{٢} \times \frac{١,٦}{\sqrt{٢}}$
= ٠,٥٦٦ م.

حاول أن تحل

٥ في مثال (٥) أعلاه، أوجد طول نصف قطر الدائرة إذا كان طول ضلع المربع يساوي ١,٥ متر.

٣١

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

١ ، ٢ ، ٣ تحقق من عمل الطلاب.

«حاول أن تحل»

١ المثلثان متطابقان (ض.ض.ض)،

لذا ق (ف لَ د) = ق (جـ وَب)،

وبالتالي $\overset{\frown}{ف د} \cong \overset{\frown}{جـ ب}$.

٢ الوتران متساويا الطول (٣٦) لذا: س = ١٦ .

٣ (أ) (س ب)^{٢} = (٦,٨)^{٢} − ٤^{٢} = ٣٠,٢٤

س ب ≃ ٥,٥ سم

أب ≃ ٥,٥ × ٢ = ١١ سم.

(ب) المسافة: ٦,٨ − ٤ = ٢,٨ سم.

٤ وجـ = ٧ سم، (وب)^{٢} = (١٣)^{٢} − (٧)^{٢}، ∴ وب = $\sqrt{١٢٠}$

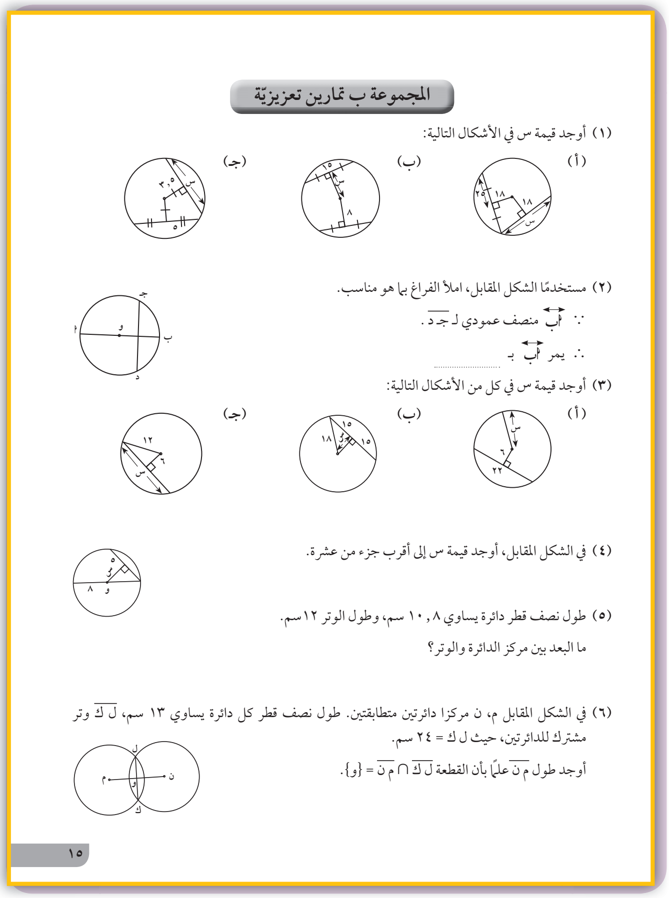
وب = ٢$\sqrt{٣٠}$ ≃ ١١ سم، أب = ٤$\sqrt{٣٠}$

≃ ٢٢ سم.

٥ طول القطر = ١,٥$\sqrt{٢}$ متر

نق = $\frac{١,٥\sqrt{٢}}{٢}$ متر

∴ نق = $\frac{٣\sqrt{٢}}{٤}$ متر ≃ ١,٠٦ متر


المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

(١) أوجد قيمة س في الأشكال التالية:

(أ) (ب) (جـ)

(٢) مستخدمًا الشكل المقابل، املأ الفراغ بما هو مناسب.

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ منصف عمودي لـ $\overline{جـ د}$.

∴ يمر $\overleftrightarrow{أب}$ بـ ....

(٣) أوجد قيمة س في كل من الأشكال التالية:

(أ) (ب) (جـ)

(٤) في الشكل المقابل، أوجد قيمة س إلى أقرب جزء من عشرة.

(٥) طول نصف قطر دائرة يساوي ١٠,٨ سم، وطول الوتر ١٢ سم.

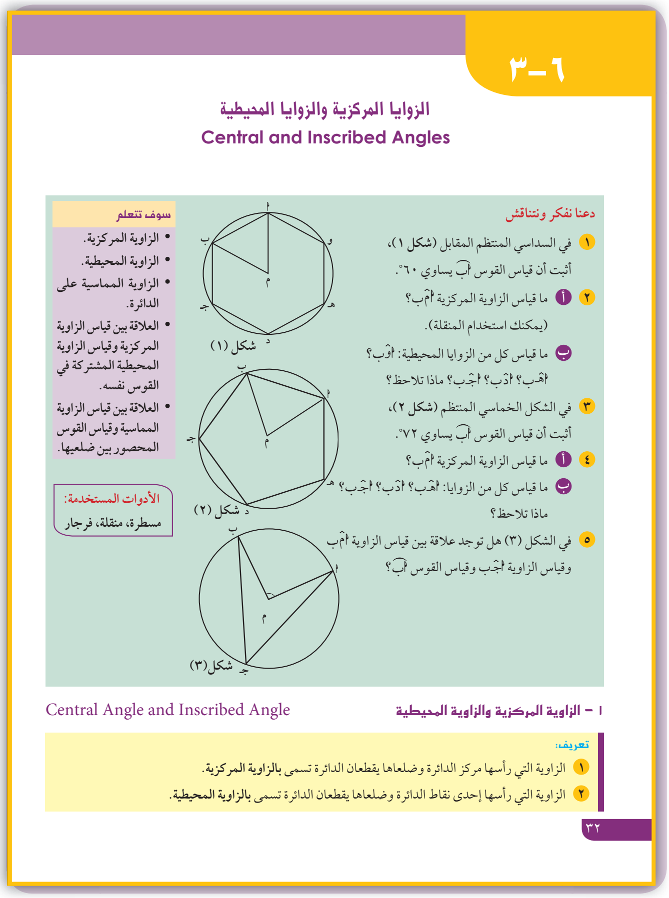
ما البعد بين مركز الدائرة والوتر؟

(٦) في الشكل المقابل م، ن مركزا دائرتين متطابقتين. طول نصف قطر كل دائرة يساوي ١٣ سم، $\overline{ل ك}$ وتر مشترك للدائرتين، حيث ل ك = ٢٤ سم.

أوجد طول $\overline{م ن}$ علمًا بأن القطعة $\overline{ل ك} \cap \overline{م ن}$ = {و}.

١٥

٦_٣: الزوايا المركزية والزوايا المحيطية



٦_٣

الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

Central and Inscribed Angles

دعنا نفكر ونتناقش

١ في السداسي المنتظم المقابل (**شكل ١**)، أثبت أن قياس القوس أ⌒ب يساوي ٦٠°.

٢ أ ما قياس الزاوية المركزية أمب؟ (يمكنك استخدام المنقلة).

ب ما قياس كل من الزوايا المحيطية: أوب؟ أهـب؟ أدب؟ أجب؟ ماذا تلاحظ؟

٣ في الشكل الخماسي المنتظم (**شكل ٢**)، أثبت أن قياس القوس أ⌒ب يساوي ٧٢°.

٤ أ ما قياس الزاوية المركزية أمب؟

ب ما قياس كل من الزوايا: أهـب؟ أدب؟ أجب؟ ماذا تلاحظ؟

٥ في الشكل (٣) هل توجد علاقة بين قياس الزاوية أمب وقياس الزاوية أجب وقياس القوس أ⌒ب؟

شكل (١)

شكل (٢)

شكل(٣)

سوف تتعلم

- الزاوية المركزية.
- الزاوية المحيطية.
- الزاوية المماسية على الدائرة.
- العلاقة بين قياس الزاوية المركزية وقياس الزاوية المحيطية المشتركة في القوس نفسه.
- العلاقة بين قياس الزاوية المماسية وقياس القوس المحصور بين ضلعيها.

الأدوات المستخدمة:

مسطرة، منقلة، فرجار

ا – الزاوية المركزية والزاوية المحيطية Central Angle and Inscribed Angle

تعريف:

١ الزاوية التي رأسها مركز الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى **بالزاوية المركزية**.

٢ الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى **بالزاوية المحيطية**.

٣٢

١ الأهداف

- يربط بين قياس الزاوية المركزية وقياس القوس الذي تحصره بين ضلعيها.
- يربط بين قياس الزاوية المحيطية وقياس القوس الذي تحصره بين ضلعيها.
- يتعرف العلاقة بين قياس الزاوية المركزية وقياس الزاوية المحيطية المشتركة في القوس نفسه.
- يربط بين قياس الزاوية المماسية للدائرة وقياس القوس المحصور بين ضلعيها.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

زاوية مركزية – زاوية محيطية – زاوية مماسية – زاوية داخلية – زاوية خارجية.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة – فرجار – منقلة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

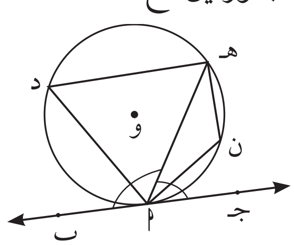
اسأل الطلاب:

(أ) زاوية مركزية في دائرة قياسها ٤٠°. ما قياس القوس المقابل لها على الدائرة نفسها؟

(ب) إذا أخذنا منصفًا داخليًّا لهذه الزاوية، فما قياس كل زاوية؟

(جـ) إذا ضاعفنا قياس هذه الزاوية، فما قياس الزاوية المضاعفة؟

(د) ما قياس زاوية خارجية في المثلث مقارنة بمجموع قياس الزاويتين الداخليتين في المثلث غير المتجاورتين مع هذه الزاوية؟

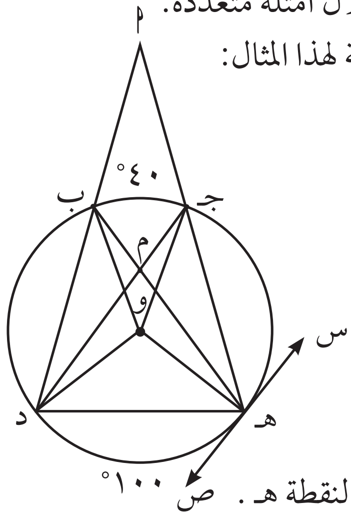


إذا رسمنا مماسًا $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ للدائرة التي مركزها و عند النقطة أ ورسمنا الوتر $\overline{\text{أهـ}}$ والزاوية المحيطية هـ د̂ أ والزاوية المحيطية أ ن̂ هـ كما بالشكل فإن هـ أ̂ جـ تسمى زاوية مماسية وهـ أ̂ ب تسمى أيضًا زاوية مماسية أخرى وسنكتفي في مناقشتنا مع الزاوية ذات القياس

الأصغر هـ $\hat{أ}$ جـ وعلاقتها بالزاوية هـ $\hat{د}$ أ التي تقابل الوتر $\overline{أهـ}$ والجهة الأخرى كما بالشكل وتظل النظرية صحيحة بالنسبة إلى الزاوية المماسية الأخرى هـ $\hat{أ}$ ب وعلاقتها بالزاوية المحيطية هـ $\hat{ن}$ أ

٥ التدريس

رسّخ لدى الطلاب فكرة العلاقة بين قياس الزاوية المركزية وقياس الزاوية المحيطية وقياس القوس المقابل لهما على الدائرة. توسع في هذه العلاقة مع الزاوية المماسية والزاوية الداخلية والزاوية الخارجية وذلك من خلال أمثلة متعددة.



اعرض على السبورة أمثلة مشابهة لهذا المثال:

ق $(\overset{\frown}{جـ ب})$ = ٤٠°

ق $(\overset{\frown}{هـ د})$ = ١٠٠°

و = مركز الدائرة

أوجد:

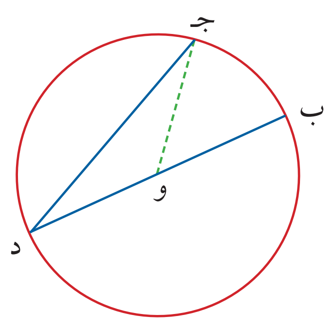
(أ) ق (ب $\hat{أ}$ هـ)، ق (د $\hat{م}$ هـ)، ق (ب $\hat{د}$ جـ)، ق (د $\hat{ب}$ هـ)، ق (جـ $\hat{و}$ ب)، ق (د $\hat{و}$ هـ).

(ب) $\overleftrightarrow{س ص}$ مماس للدائرة عند النقطة هـ . أوجد ق (د $\hat{هـ}$ ص).

- أشر إلى أنه كلما ابتعدت النقطة خارج الدائرة صغر قياس الزاوية.
- اسأل الطلاب: $\overline{أب}$ ثابتة، م نقطة تتحرك في المستوي بحيث ق (أ $\hat{م}$ ب) = ٩٠° ثابتة. أين تتحرك النقطة م؟
- ناقش مع الطلاب المثال (٤) لأهميته في ربط المفاهيم الهندسية.

في النظرية (٢) ركّز لدى الطلاب الربط بين الحالات الثلاث لوضعية الزاوية المحيطية بالنسبة لمركز الدائرة وقياس هذه الزاوية بالمقارنة مع الزاوية المركزية المناظرة لنفس القوس.

إثبات نظرية (٢)



الحالة ١ : المعطيات:

(ب $\hat{و}$ جـ) = زاوية محيطية.

«و» مركز الدائرة ينتمي إلى ب د.

المطلوب: ق(ب $\hat{د}$ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق$(\overset{\frown}{ب جـ})$

العمل: نصل $\overline{وجـ}$

البرهان: ق(ب $\hat{و}$ جـ) = ق $(\overset{\frown}{ب جـ})$

ق(ب $\hat{و}$ جـ) = ق (و $\hat{جـ}$ د) + ق (و $\hat{د}$ جـ)

$\because$ ق (و $\hat{جـ}$ د) = ق (و $\hat{د}$ جـ)

$\therefore$ ق(ب $\hat{و}$ جـ) = ٢ق(ب $\hat{د}$ جـ) أي ق (ب $\hat{د}$ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق$(\overset{\frown}{ب جـ})$

نظرية (١)

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة.

مثال (١)

في الشكل المقابل دائرة مركزها و. إذا كان ق$(\overset{\frown}{أب})$ = ٩٠°.
فأوجد ق(أ $\hat{و}$ ب).

الحل:

المعطيات: دائرة مركزها و

ق$(\overset{\frown}{أب})$ = ٩٠°

المطلوب: إيجاد ق(أ $\hat{و}$ ب).

البرهان:

و مركز الدائرة

(أ $\hat{و}$ ب) زاوية مركزية تقابل $(\overset{\frown}{أب})$

$\therefore$ ق$(\overset{\frown}{أب})$ = ق (أ $\hat{و}$ ب)

$\therefore$ ق(أ $\hat{و}$ ب) = ٩٠°

حاول أن تحل

١ إذا كان قياس زاوية مركزية ٣٥°، فأوجد قياس القوس على الدائرة المحصور بين ضلعيها.

نظرية (٢)

في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

ق(أ $\hat{جـ}$ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(أ $\hat{و}$ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق$(\overset{\frown}{أب})$

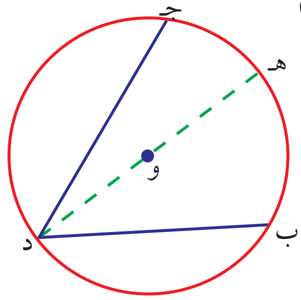
قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.

٣٣

الحالة ٢: المعطيات:

(ب د̂ ج) زاوية محيطية. «و» مركز الدائرة داخل الزاوية.

المطلوب: ق(ب د̂ ج) = $\frac{١}{٢}$ ق(ب⌒ج)



العمل: نرسم القطر الذي يمر بالنقطتين د، و، يقطع الدائرة في هـ.

البرهان: ق(ب د̂ ج) =

ق(ب د̂ هـ) + ق(هـ د̂ ج)

ق(ب د̂ ج) =

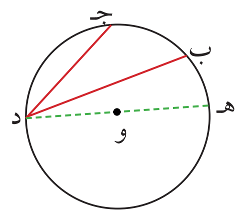
$\frac{١}{٢}$ ق(ب⌒هـ) + $\frac{١}{٢}$ ق(هـ⌒ج)

= $\frac{١}{٢}$ ق(ب⌒ج)

الحالة ٣: المعطيات:

ب د̂ ج) زاوية محيطية. «و» مركز الدائرة خارج الزاوية.

المطلوب: ق(ب د̂ ج) = $\frac{١}{٢}$ ق(ب⌒ج)



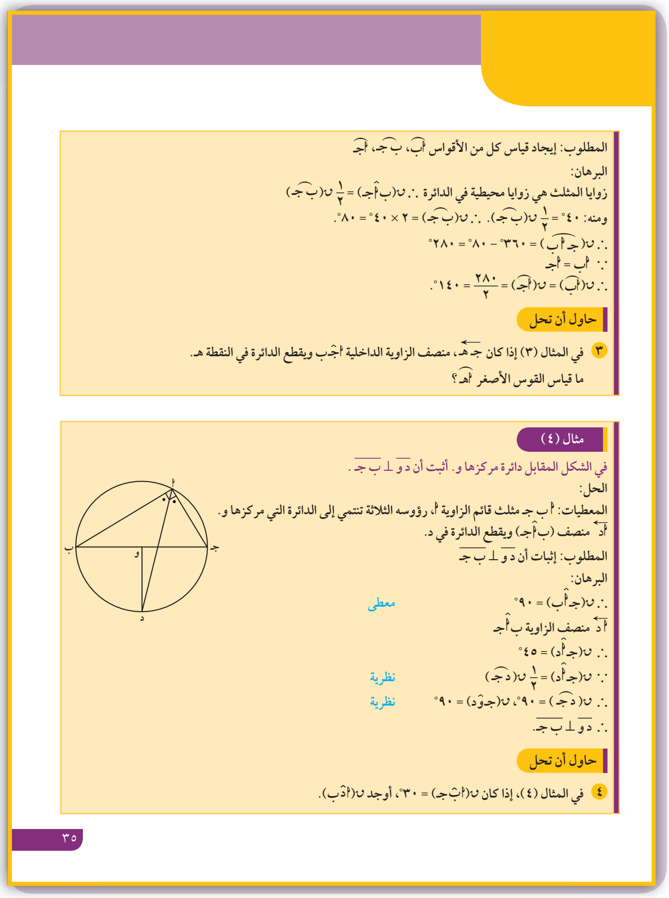
العمل: نرسم القطر هـ د

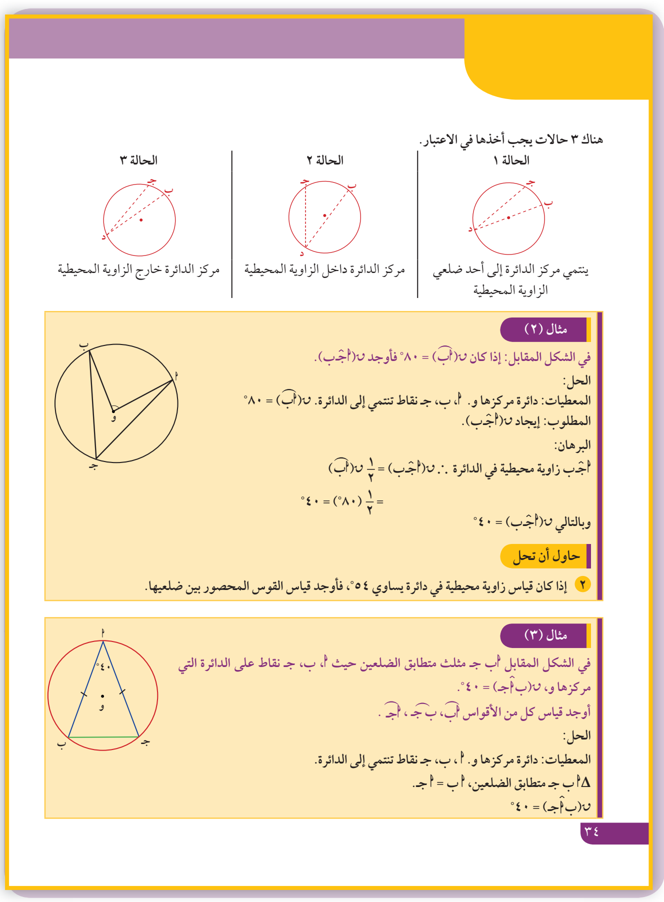
البرهان: ق(ب د̂ ج) =

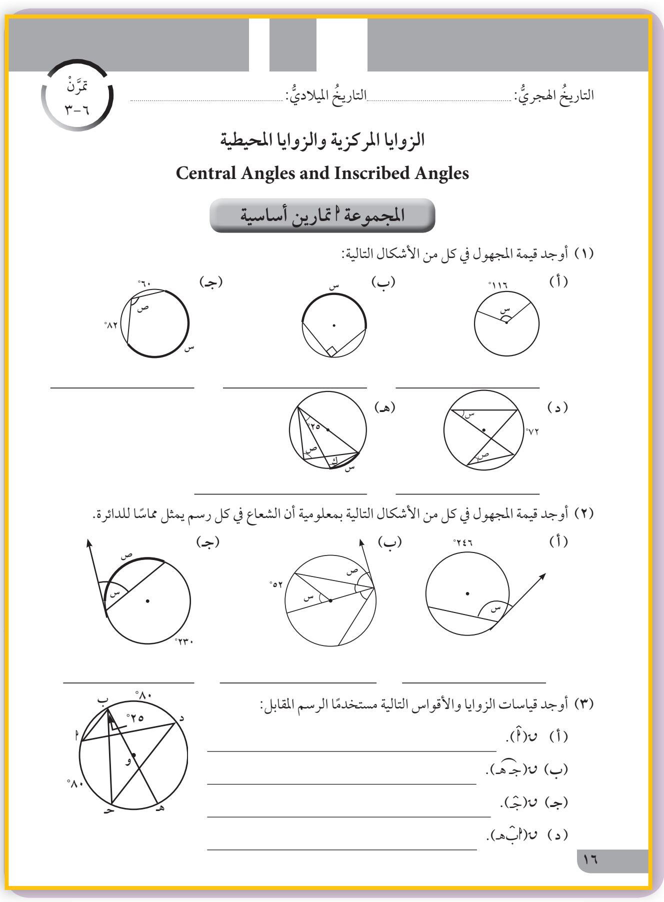
ق(هـ د̂ ج) − ق(هـ د̂ ب)

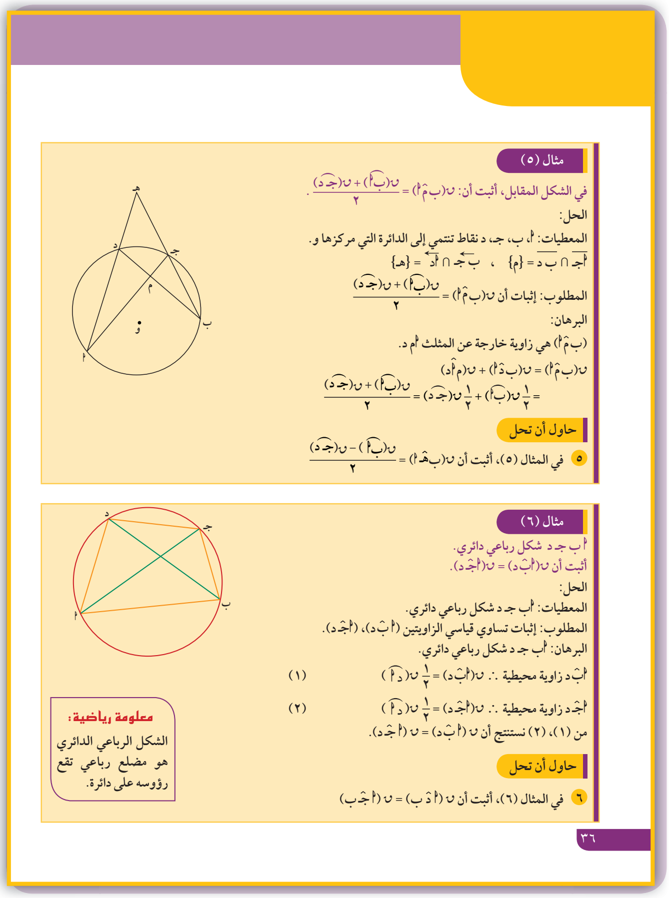
= $\frac{١}{٢}$ ق(هـ⌒ج) − $\frac{١}{٢}$ ق(هـ⌒ب)

= $\frac{١}{٢}$ ق(ب⌒ج)


المطلوب: إيجاد قياس كل من الأقواس أ⌒ب، ب⌒ج، أ⌒ج
البرهان:
زوايا المثلث هي زوايا محيطية في الدائرة ∴ ق(ب أ̂ ج) = ½ ق(ب⌒ج)
ومنه: ٤٠° = ½ ق(ب⌒ج) ∴ ق(ب⌒ج) = ٢ × ٤٠° = ٨٠°
∴ ق(ب⌒أ⌒ج) = ٣٦٠° − ٨٠° = ٢٨٠°
∵ أب = أج
∴ ق(أ⌒ب) = ق(أ⌒ج) = ٢٨٠ ÷ ٢ = ١٤٠°
حاول أن تحل
٣ في المثال (٣) إذا كان جـهـ منصف الزاوية الداخلية أجب ويقطع الدائرة في النقطة هـ.
ما قياس القوس الأصغر أ⌒هـ؟
مثال (٤)
في الشكل المقابل دائرة مركزها و. أثبت أن د و ⊥ ب ج.
الحل:
المعطيات: أ ب ج مثلث قائم الزاوية أ، رؤوسه الثلاثة تنتمي إلى الدائرة التي مركزها و.
أد منصف (ب أ̂ ج) ويقطع الدائرة في د.
المطلوب: إثبات أن د و ⊥ ب ج
البرهان:
∵ ق(ج أ̂ ب) = ٩٠° — معطى
أد منصف الزاوية ب أ ج
∴ ق(ج أ̂ د) = ٤٥°
∵ ق(ج أ̂ د) = ½ ق(ج⌒د) — نظرية
∴ ق(ج⌒د) = ٩٠°، ق(ج و̂ د) = ٩٠° — نظرية
∴ د و ⊥ ب ج.
حاول أن تحل
٤ في المثال (٤)، إذا كان ق(أ ب̂ ج) = ٣٠°، أوجد ق(أ د̂ ب).
٣٥


هناك ٣ حالات يجب أخذها في الاعتبار.
الحالة ١ — ينتمي مركز الدائرة إلى أحد ضلعي الزاوية المحيطية
الحالة ٢ — مركز الدائرة داخل الزاوية المحيطية
الحالة ٣ — مركز الدائرة خارج الزاوية المحيطية
مثال (٢)
في الشكل المقابل: إذا كان ق(أ⌒ب) = ٨٠° فأوجد ق(أ ج̂ ب).
الحل:
المعطيات: دائرة مركزها و. أ، ب، جـ نقاط تنتمي إلى الدائرة. ق(أ⌒ب) = ٨٠°
المطلوب: إيجاد ق(أ ج̂ ب).
البرهان:
أ ج ب زاوية محيطية في الدائرة ∴ ق(أ ج̂ ب) = ½ ق(أ⌒ب)
= ½ (٨٠°) = ٤٠°
وبالتالي ق(أ ج̂ ب) = ٤٠°
حاول أن تحل
٢ إذا كان قياس زاوية محيطية في دائرة يساوي ٥٤°، فأوجد قياس القوس المحصور بين ضلعيها.
مثال (٣)
في الشكل المقابل أ ب ج مثلث متطابق الضلعين حيث أ، ب، جـ نقاط على الدائرة التي مركزها و، ق(ب أ̂ ج) = ٤٠°.
أوجد قياس كل من الأقواس أ⌒ب، ب⌒ج، أ⌒ج.
الحل:
المعطيات: دائرة مركزها و. أ، ب، جـ نقاط تنتمي إلى الدائرة.
△ أ ب ج متطابق الضلعين. أب = أج
ق(ب أ̂ ج) = ٤٠°
٣٤


التاريخ الهجري: .... التاريخ الميلادي: .... تمرّن ٦-٣
الزوايا المركزية والزوايا المحيطية
Central Angles and Inscribed Angles
المجموعة أ تمارين أساسية
(١) أوجد قيمة المجهول في كل من الأشكال التالية:
(٢) أوجد قيمة المجهول في كل من الأشكال التالية بمعلومية أن الشعاع في كل رسم يمثل مماسًا للدائرة.
(٣) أوجد قياسات الزوايا والأقواس التالية مستخدمًا الرسم المقابل:
(أ) ق(أ̂).
(ب) ق(أ⌒جـ د).
(ج) ق(جـ⌒د).
(د) ق(أ⌒بـ د).
١٦



مثال (٥)

في الشكل المقابل، أثبت أن: ق(ب م̂ أ) = (ق(ب⌒أ) + ق(جـ⌒د)) / ٢ .

الحل:

المعطيات: أ، ب، جـ، د نقاط تنتمي إلى الدائرة التي مركزها و.

أجـ ∩ ب د = {م} ، ب جـ ∩ أد = {هـ}

المطلوب: إثبات أن ق(ب م̂ أ) = (ق(ب⌒أ) + ق(جـ⌒د)) / ٢

البرهان:

(ب م̂ أ) هي زاوية خارجة عن المثلث أم د.

ق(ب م̂ أ) = ق(ب د̂ أ) + ق(م أ̂ د)

= ١/٢ ق(ب⌒أ) + ١/٢ ق(جـ⌒د) = (ق(ب⌒أ) + ق(جـ⌒د)) / ٢

حاول أن تحل

٥ في المثال (٥)، أثبت أن ق(ب هـ̂ أ) = (ق(ب⌒أ) − ق(جـ⌒د)) / ٢

مثال (٦)

أ ب جـ د شكل رباعي دائري.

أثبت أن ق(أ ب̂ د) = ق(أ جـ̂ د).

الحل:

المعطيات: أ ب جـ د شكل رباعي دائري.

المطلوب: إثبات تساوي قياسي الزاويتين (أ ب̂ د)، (أ جـ̂ د).

البرهان: أ ب جـ د شكل رباعي دائري.

أ ب̂ د زاوية محيطية ∴ ق(أ ب̂ د) = ١/٢ ق(د⌒أ) (١)

أ جـ̂ د زاوية محيطية ∴ ق(أ جـ̂ د) = ١/٢ ق(د⌒أ) (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن ق (أ ب̂ د) = ق (أ جـ̂ د).

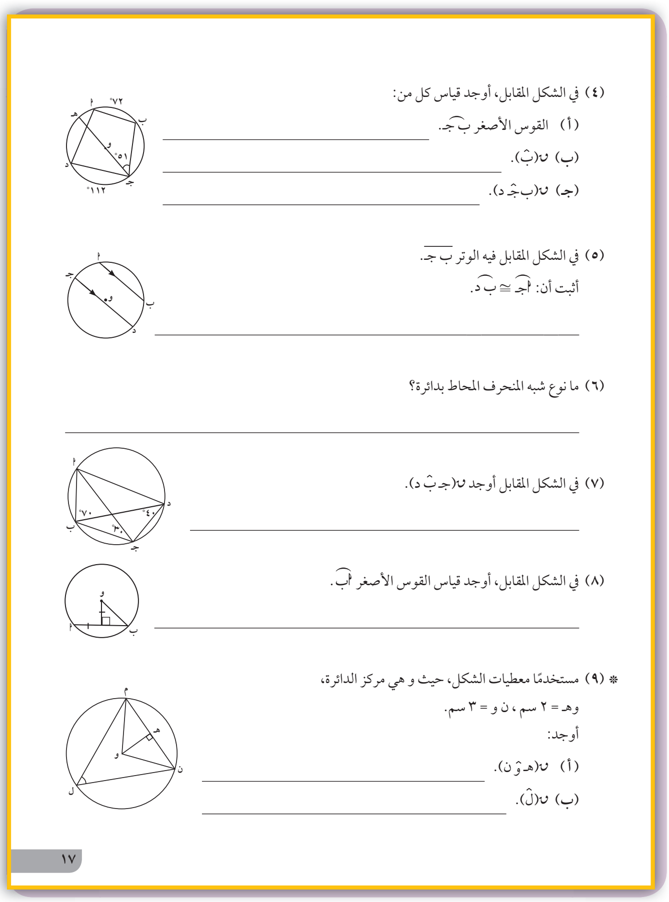
معلومة رياضية:

الشكل الرباعي الدائري هو مضلع رباعي تقع رؤوسه على دائرة.

حاول أن تحل

٦ في المثال (٦)، أثبت أن ق (أ د̂ ب) = ق (أ جـ̂ ب)

٣٦



(٤) في الشكل المقابل، أوجد قياس كل من:

(أ) القوس الأصغر ب⌒جـ.

(ب) ق(ب̂).

(جـ) ق(ب جـ̂ د).

(٥) في الشكل المقابل فيه الوتر ب جـ.

أثبت أن: أ⌒جـ ≅ ب⌒د.

(٦) ما نوع شبه المنحرف المحاط بدائرة؟

(٧) في الشكل المقابل أوجد ق(جـ ب̂ د).

(٨) في الشكل المقابل، أوجد قياس القوس الأصغر أ⌒ب.

* (٩) مستخدمًا معطيات الشكل، حيث و هي مركز الدائرة،

وهـ = ٢ سم ، ن و = ٣ سم.

أوجد:

(أ) ق(هـ و̂ ن).

(ب) ق(ل̂).

١٧

في المثال (٥)

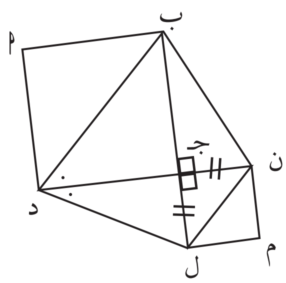
يربط قياس زاوية داخلية من الدائرة بقياس القوسين المحصورين بين ضلعيها على الدائرة.

شدّد على فقرة «نتائج» في الصفحة ٣٧. اطلب إلى الطلاب رسم أمثلة تطبيقية على السبورة بعد مراجعة المثال في هذه الصفحة.

اعرض امام الطلاب المثال التالي وهو تطبيق مباشر على النتيجة (٤) في الصفحة ٣٧ من كتاب الطالب: ناقش معهم الإجابة وكيفية إثبات أن الرباعي دائري باستخدام هذه النتيجة.

أ ب جـ د ، م ن جـ ل مربعان حيث جـ ∈ ن د.

هل ب د ل ن هو رباعي دائري؟ فسّر إجابتك.



الحل: ق(د ب̂ ل) = ق(د ن̂ ل) = ٤٥°

حيث إن د ل هي قاعدة مشتركة للزاويتين وهما تقعان في ناحية واحدة منها.

لذا: د ل ن ب هو رباعي دائري.

٦ الربط

لا يوجد.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

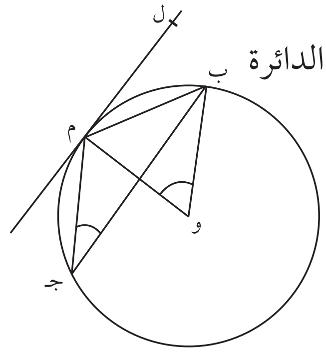
قد يخطئ الطلاب في تحديد موقع نقطة مع شروط محددة بالنسبة إلى الدائرة.

ساعد الطلاب من خلال أمثلة متعددة على تخطي هذه المشكلة.

٨ التقييم

راقب الطلاب باهتمام وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتكوّن فكرة واضحة عن مدى استيعابهم مفاهيم هذا الدرس ومهاراته.

اختبار سريع

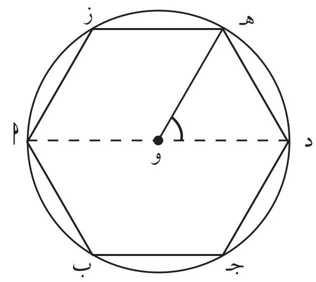


١ في الشكل المقابل، و مركز الدائرة

ق (م جـ^ ب) = ٣٠°

أوجد: ق (ل م^ ب) ٣٠°

ق (ب و^ م) ٦٠°



٢ في الشكل المقابل، و مركز الدائرة أ ب جـ د هـ ز سداسي منتظم محاط بالدائرة.

أوجد ق (د و^ هـ). ٦٠°

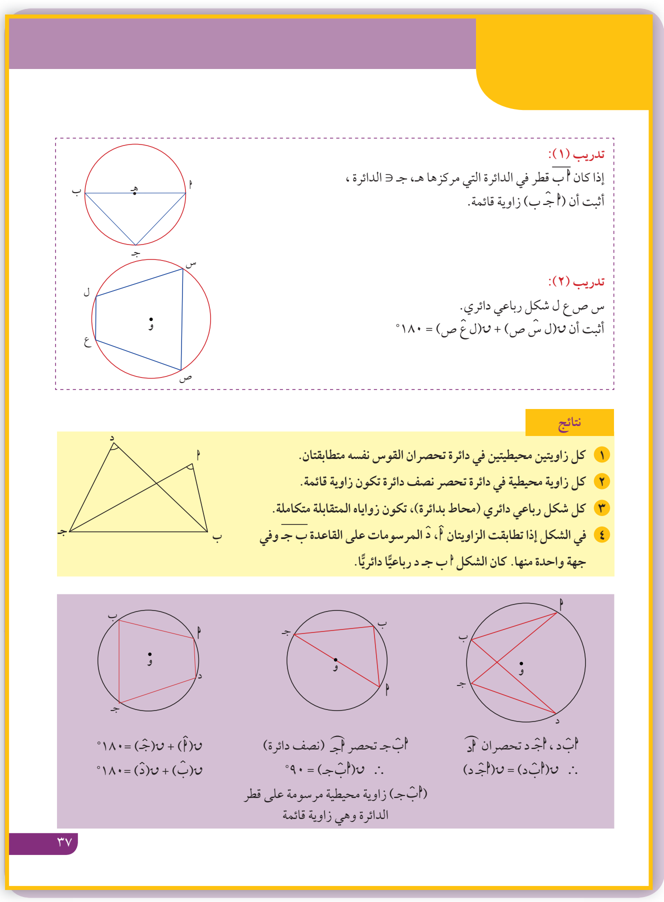
٩ إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

١ – ٥ تحقق من عمل الطلاب.

«حاول أن تحل»

١ ٣٥° ٢ ١٠٨° ٣ ٧٠°



تدريب (١):

إذا كان أب قطر في الدائرة التي مركزها هـ، جـ ∈ الدائرة ،
أثبت أن (أ جـ^ ب) زاوية قائمة.

تدريب (٢):

س ص ع ل شكل رباعي دائري.
أثبت أن ق(ل س^ ص) + ق(ل ع^ ص) = ١٨٠°

نتائج

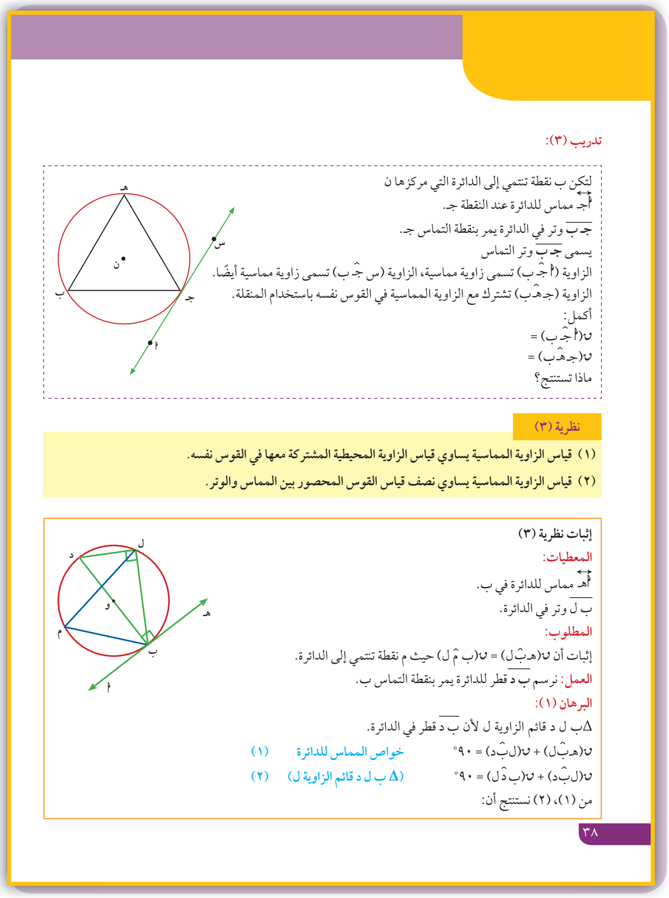
١ كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.
٢ كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.
٣ كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة)، تكون زواياه المتقابلة متكاملة.
٤ في الشكل إذا تطابقت الزاويتان أ^، د^ المرسومات على القاعدة ب جـ وفي جهة واحدة منها. كان الشكل أ ب جـ د رباعيًا دائريًا.

أب^د ، أجـ^د تحصران أد
∴ ق(أب^د) = ق(أجـ^د)

أب^جـ تحصر أجـ (نصف دائرة)
∴ ق(أب^جـ) = ٩٠°
(أب^جـ) زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة وهي زاوية قائمة

ق(أ^) + ق(جـ^) = ١٨٠°
ق(ب^) + ق(د^) = ١٨٠°

٣٧



تدريب (٣):

لتكن ب نقطة تنتمي إلى الدائرة التي مركزها ن
أجـ مماس للدائرة عند النقطة جـ.
جـ ب وتر في الدائرة يمر بنقطة التماس جـ.
يسمى جـ ب وتر التماس
الزاوية (أ جـ^ ب) تسمى زاوية مماسية، الزاوية (س جـ^ ب) تسمى زاوية مماسية أيضًا.
الزاوية (جـ هـ^ ب) تشترك مع الزاوية المماسية في القوس نفسه باستخدام المنقلة.
أكمل:
ق(أ جـ^ ب) =
ق(جـ هـ^ ب) =
ماذا تستنتج؟

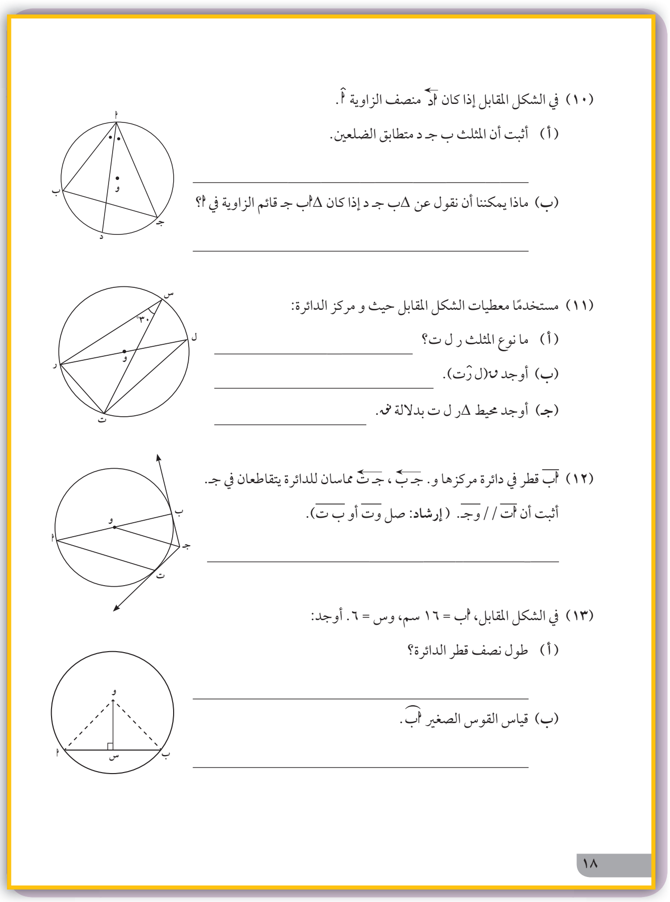
نظرية (٣)

(١) قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.
(٢) قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

إثبات نظرية (٣)

المعطيات:
أهـ مماس للدائرة في ب.
ب ل وتر في الدائرة.
المطلوب:
إثبات أن ق(هـ ب^ ل) = ق(ب م^ ل) حيث م نقطة تنتمي إلى الدائرة.
العمل: نرسم ب د قطر للدائرة يمر بنقطة التماس ب.
البرهان (١):
Δب ل د قائم الزاوية ل لأن ب د قطر في الدائرة.
ق(هـ ب^ ل) + ق(ل ب^ د) = ٩٠° خواص المماس للدائرة (١)
ق(ل ب^ د) + ق(ب د^ ل) = ٩٠° (Δ ب ل د قائم الزاوية ل) (٢)
من (١)، (٢) نستنتج أن:

٣٨



(١٠) في الشكل المقابل إذا كان أد منصف الزاوية أ^.
(أ) أثبت أن المثلث ب جـ د متطابق الضلعين.
(ب) ماذا يمكننا أن نقول عن Δب جـ د إذا كان Δأب جـ قائم الزاوية في أ؟

(١١) مستخدمًا معطيات الشكل المقابل حيث و مركز الدائرة:
(أ) ما نوع المثلث ر ل ت؟
(ب) أوجد ق(ل ر^ ت).
(جـ) أوجد محيط Δر ل ت بدلالة نق.

(١٢) أب قطر في دائرة مركزها و. جـ ب ، جـ ت مماسان للدائرة يتقاطعان في جـ.
أثبت أن أت // وجـ. (إرشاد: صل وت أو ب ت).

(١٣) في الشكل المقابل، أب = ١٦ سم، وس = ٦. أوجد:
(أ) طول نصف قطر الدائرة؟
(ب) قياس القوس الصغير أب.

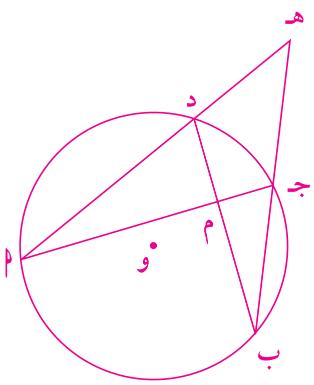
١٨

٤ ق(جـ^) = ٦٠°، ق(أب⌒) = ١٢٠°

ق(أ د^ ب) = $\frac{1}{2}$ ق(أب⌒) = ٦٠°

٥ ب جـ^ أ هي زاوية خارجية في المثلث أ جـ هـ .

نكتب: ق(ب جـ^ أ) = ق(جـ هـ^ أ) + ق(هـ أ^ جـ).



$\frac{1}{2}$ ق(أب⌒) = ق(جـ هـ^ أ) + $\frac{1}{2}$ ق(جـ د⌒)

ومنه: ق(ب هـ^ أ) = $\frac{1}{2}$ ق(أب⌒) − $\frac{1}{2}$ ق(جـ د⌒)

= $\frac{\text{ق(أب⌒)} - \text{ق(جـ د⌒)}}{٢}$.

مثال (٨)

أب قطر في دائرة مركزها و. نرسم أجـ مماسًا للدائرة بحيث يكون أجـ = ٢ نق . ب جـ تقطع الدائرة في د. أثبت أن أد = جـ د.

الحل:

المعطيات:

أب قطر في دائرة مركزها و. أجـ مماس للدائرة، أجـ = ٢ نق، ب جـ تقطع الدائرة في د

المطلوب: إثبات أن أد = جـ د

العمل: نرسم أد

البرهان:

ق(جـ أ^ د) = ق(أ ب^ د) (نظرية الزاوية المماسية والزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه) (١)

أجـ ⊥ أب (أجـ مماس للدائرة)

أجـ = أب = ٢ نق

∴ Δ أ ب جـ قائم الزاوية أ متطابق الضلعين.

ومنه ق(أ جـ^ د) = ق(أ ب^ د) (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن ق(جـ أ^ د) = ق(أ جـ^ د)

Δ أ د جـ متطابق الضلعين ∴ أد = جـ د

حاول أن تحل

٨ م ت مماس لدائرة مركزها و. م ن وتر في الدائرة بحيث يكون م ن = م ت. (م نقطة التماس) ت ن تقطع الدائرة في ل.

أثبت أن Δ ت ل م متطابق الضلعين (ل ت = ل م)

مثال (٩)

في الشكل المقابل، د هـ مماس للدائرة عند النقطة أ،

ب جـ وتر في الدائرة موازٍ للمماس د هـ .

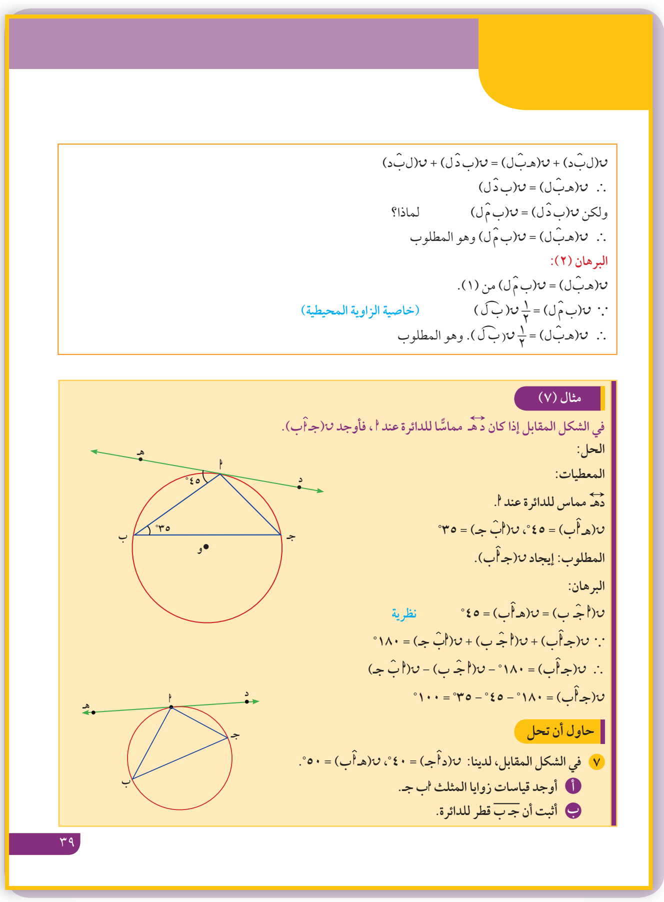
أثبت أن المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين.

الحل:

المعطيات: د هـ مماس للدائرة عند النقطة أ. د هـ // ب جـ

المطلوب: أثبت أن Δ أ ب جـ متطابق الضلعين.

٤٠



ق(ل ب^ د) + ق(هـ ب^ ل) = ق(ب د^ ل) + ق(ل ب^ د)

∴ ق(هـ ب^ ل) = ق(ب د^ ل)

ولكن ق(ب د^ ل) = ق(ب م^ ل) لماذا؟

∴ ق(هـ ب^ ل) = ق(ب م^ ل) وهو المطلوب

البرهان (٢):

ق(هـ ب^ ل) = ق(ب م^ ل) من (١).

∵ ق(ب م^ ل) = $\frac{1}{2}$ ق(ب ل⌒) (خاصية الزاوية المحيطية)

∴ ق(هـ ب^ ل) = $\frac{1}{2}$ ق(ب ل⌒). وهو المطلوب

مثال (٧)

في الشكل المقابل إذا كان د هـ مماسًا للدائرة عند أ، فأوجد ق(جـ أ^ ب).

الحل:

المعطيات:

د هـ مماس للدائرة عند أ.

ق(هـ أ^ ب) = ٤٥°، ق(أ ب^ جـ) = ٣٥°

المطلوب: إيجاد ق(جـ أ^ ب).

البرهان:

ق(أ جـ^ ب) = ق(هـ أ^ ب) = ٤٥° نظرية

∵ ق(جـ أ^ ب) + ق(أ جـ^ ب) + ق(أ ب^ جـ) = ١٨٠°

∴ ق(جـ أ^ ب) = ١٨٠° − ق(أ جـ^ ب) − ق(أ ب^ جـ)

ق(جـ أ^ ب) = ١٨٠° − ٤٥° − ٣٥° = ١٠٠°

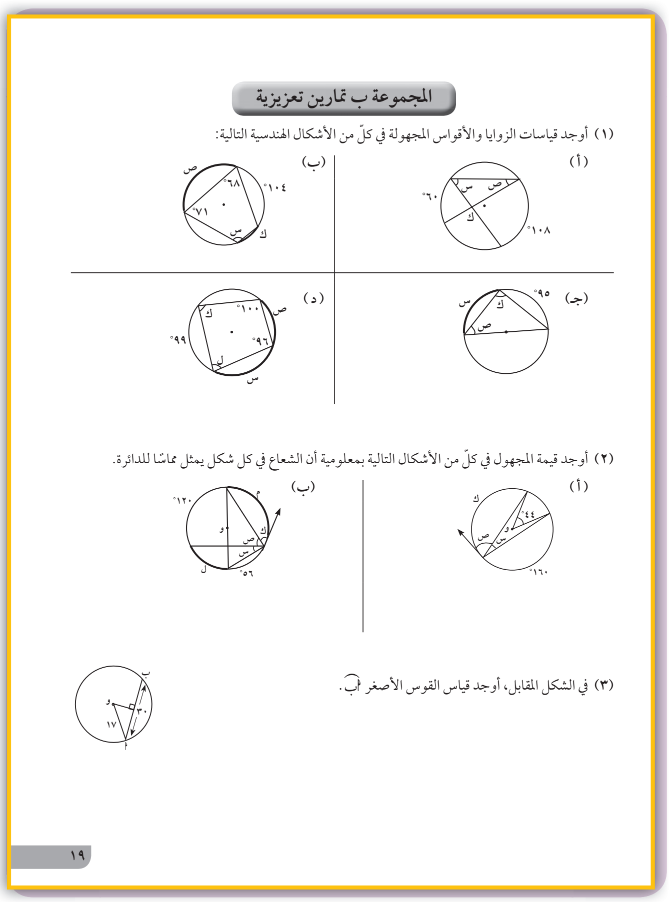
حاول أن تحل

٧ في الشكل المقابل، لدينا: ق(د أ^ جـ) = ٤٠°، ق(هـ أ^ ب) = ٥٠°.

أ أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ.

ب أثبت أن جـ ب قطر للدائرة.

٣٩



المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) أوجد قياسات الزوايا والأقواس المجهولة في كلّ من الأشكال الهندسية التالية:

(أ) (ب) (جـ) (د)

(٢) أوجد قيمة المجهول في كلّ من الأشكال التالية بمعلومية أن الشعاع في كل شكل يمثل مماسًا للدائرة.

(أ) (ب)

(٣) في الشكل المقابل، أوجد قياس القوس الأصغر أب⌒.

١٩

٦ ق (ا د ب) = ق (ا جـ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (ا⌒ب).

٧ (أ) ق(جـ اَ ب) = ١٨٠° − (٤٠° + ٥٠°)

ق(جـ اَ ب) = ٩٠°

ق(جَـ) = ق(ب اَ هـ) = ٥٠°

ق(بَ) = ق(د اَ جـ) = ٤٠°.

(ب) بما أن الزاوية المحيطية جـ ا ب قياسها ٩٠°

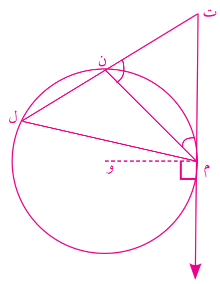
فيكون ق (ب⌒جـ) = ١٨٠° وبالتالي $\overline{\text{ا ب}}$ هو

قطر للدائرة.

٨ $\overleftarrow{\text{ت م}}$ مماس على الدائرة. م ت = م ن، لذا المثلث م ت ن

متطابق الضلعين ومنه: ق(تَ) = ق(نَ) ولكن نَ هي زاوية

خارجة في المثلث م ن ل لذا:



ق(نَ) = ق(تَ) =

ق(ن مَ ل) + ق(ن لَ م)

$= \frac{ق(ن⌒ل) + ق(م⌒ن)}{٢} = \frac{ق(م⌒ل)}{٢}$

وأيضًا ق(ت مَ ل) = $\frac{ق(م⌒ل)}{٢}$

∴ ق(ل تَ م) = ق(ت مَ ل) والمثلث ل ت م متطابق

الضلعين ∴ ل ت = ل م

٩ ق (جَـ) = ق (بَ) (ا ب جـ مثلث متطابق الضلعين)

ومنه: ق (ا⌒جـ) = ق (ا⌒ب)

ق (د اَ جـ) = ق (ا جَـ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (ا⌒جـ)

الزاويتان متبادلتان داخليًّا ومتساويتا القياس، فيكون

$\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ موازٍ لِـ $\overline{\text{ب جـ}}$.

«تدريب ١»

ق(ا جَـ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(ا⌒ب) = $\frac{١}{٢}$ × ١٨٠° = ٩٠°

«تدريب ٢»

ق(ل سَ ص) + ق(ل عَ ص) = $\frac{١}{٢}$ ق(ل⌒ع ص)

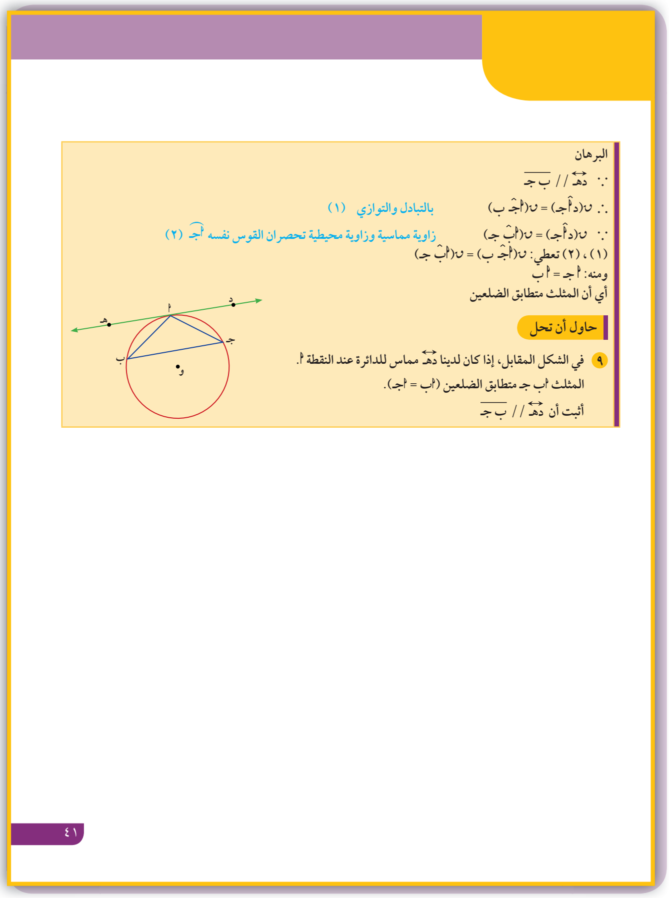
+ $\frac{١}{٢}$ ق(ل⌒س ص) = $\frac{١}{٢}$ × ٣٦٠° = ١٨٠°

«تدريب ٣»

ق(ا جَـ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(جـ⌒ب)

ق(جـ هَـ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(جـ⌒ب)

∴ ق(ا جَـ ب) = ق(جـ هَـ ب)



البرهان

∵ $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ ق(د اَ جـ) = ق(ا جَـ ب) بالتبادل والتوازي (١)

∵ ق(د اَ جـ) = ق(ا بَ جـ) زاوية مماسية وزاوية محيطية تحصران القوس نفسه ا⌒جـ (٢)

(١) ، (٢) تعطي: ق(ا جَـ ب) = ق(ا بَ جـ)

ومنه: ا جـ = ا ب

أي أن المثلث متطابق الضلعين

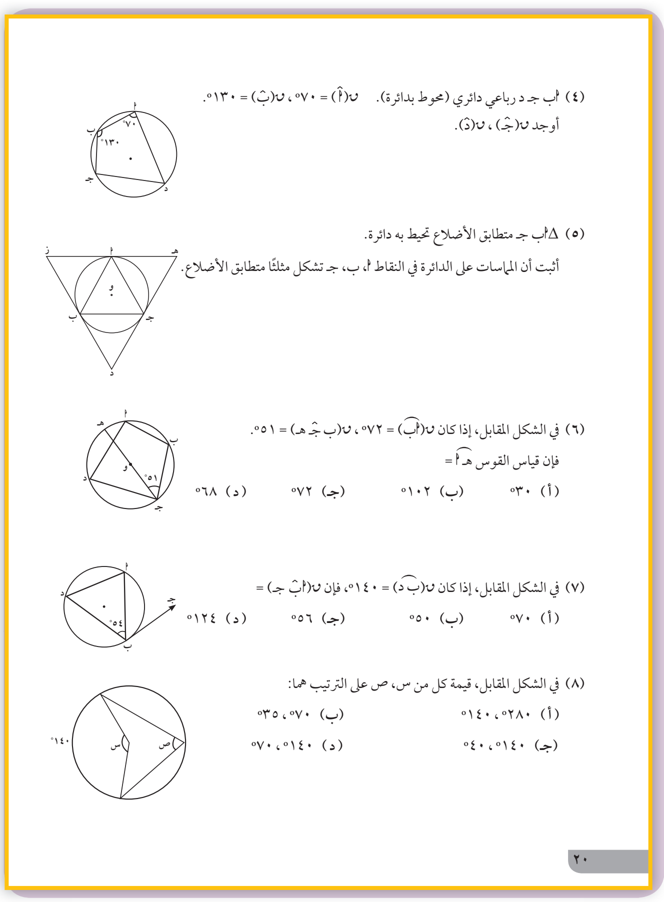
حاول أن تحل

٩ في الشكل المقابل، إذا كان لدينا $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة ا.

المثلث ا ب جـ متطابق الضلعين (ا ب = ا جـ).

أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

٤١



(٤) ا ب جـ د رباعي دائري (محوط بدائرة). ق(اَ) = ٧٠°، ق(بَ) = ١٣٠°.

أوجد ق(جَـ) ، ق(دَ).

(٥) Δا ب جـ متطابق الأضلاع تحيط به دائرة.

أثبت أن المماسات على الدائرة في النقاط ا، ب، جـ تشكل مثلثًا متطابق الأضلاع.

(٦) في الشكل المقابل، إذا كان ق(ا⌒ب) = ٧٢°، ق(ب جَـ هـ) = ٥١°.

فإن قياس القوس هـ⌒ا =

(أ) ٣٠° (ب) ١٠٢° (جـ) ٧٢° (د) ٦٨°

(٧) في الشكل المقابل، إذا كان ق(ب⌒د) = ١٤٠°، فإن ق(ا بَ جـ) =

(أ) ٧٠° (ب) ٥٠° (جـ) ٥٦° (د) ١٢٤°

(٨) في الشكل المقابل، قيمة كل من س، ص على الترتيب هما:

(أ) ٢٨٠°، ١٤٠° (ب) ٧٠°، ٣٥°

(جـ) ١٤٠°، ٤٠° (د) ١٤٠°، ٧٠°

٢٠

٦ـ٤: الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس

١ الأهداف

- يوجد العلاقة بين أطوال أجزاء الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة.
- يوجد العلاقة بين أطوال أجزاء الأوتار المتقاطعة خارج الدائرة.
- يوجد العلاقة بين طول قطعة مماسية للدائرة وأطوال أجزاء القاطع من الدائرة.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

مماس – قاطع.

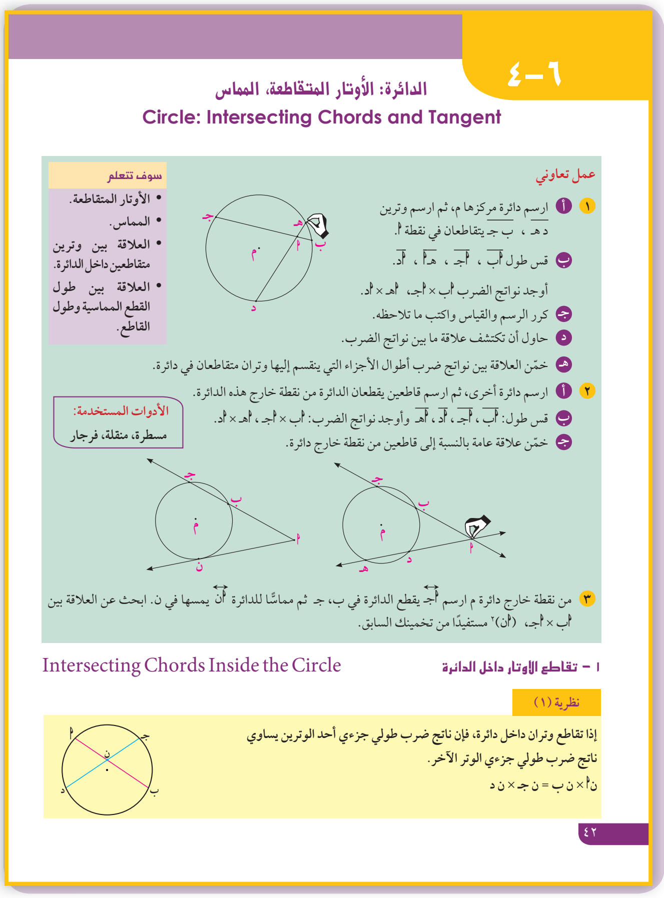
٣ الأدوات والوسائل

مسطرة – فرجار – منقلة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

- ما هي حالات تشابه مثلثين؟
- ما قياس الزاوية بين المماس ونصف قطر الدائرة عند نقطة المماس؟
- ما العلاقة بين قياس الزاوية المرسومة من مماس ووتر على الدائرة وقياس القوس المحصور بين هذين الضلعين؟



٦ـ٤

الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس

Circle: Intersecting Chords and Tangent

عمل تعاوني

١ أ ارسم دائرة مركزها م، ثم ارسم وترين د هـ ، ب جـ يتقاطعان في نقطة أ.

ب قس طول أب ، أجـ ، هـ أ ، أد.

أوجد نواتج الضرب أب × أجـ، أهـ × أد.

جـ كرر الرسم والقياس واكتب ما تلاحظه.

د حاول أن تكتشف علاقة ما بين نواتج الضرب.

هـ خمّن العلاقة بين نواتج ضرب أطوال الأجزاء التي ينقسم إليها وتران متقاطعان في دائرة.

٢ أ ارسم دائرة أخرى، ثم ارسم قاطعين يقطعان الدائرة من نقطة خارج هذه الدائرة.

ب قس طول: أب ، أجـ ، أد ، أهـ وأوجد نواتج الضرب: أب × أجـ ، أهـ × أد.

جـ خمّن علاقة عامة بالنسبة إلى قاطعين من نقطة خارج دائرة.

٣ من نقطة خارج دائرة م ارسم أجـ يقطع الدائرة في ب، جـ ثم مماسًا للدائرة أن يمسها في ن. ابحث عن العلاقة بين أب × أجـ، (أن)^{٢} مستفيدًا من تخمينك السابق.

سوف تتعلم

- الأوتار المتقاطعة.
- المماس.
- العلاقة بين وترين متقاطعين داخل الدائرة.
- العلاقة بين طول القطع المماسية وطول القاطع.

الأدوات المستخدمة:

مسطرة، منقلة، فرجار

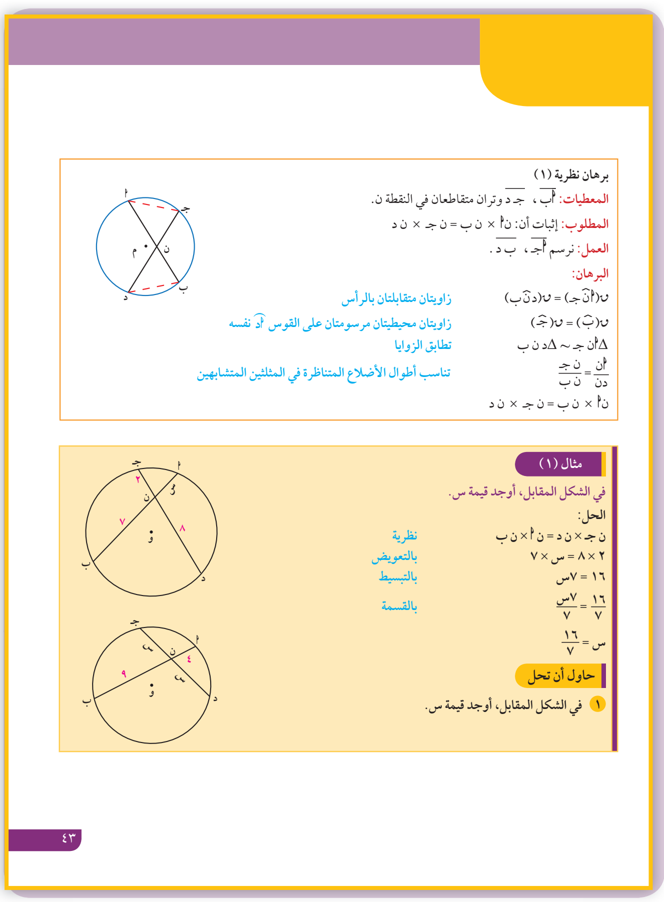
١ – تقاطع الأوتار داخل الدائرة Intersecting Chords Inside the Circle

نظرية (١)

إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي جزءي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزءي الوتر الآخر.

ن أ × ن ب = ن جـ × ن د

٤٢



برهان نظرية (١)

المعطيات: أب ، جـ د وتران متقاطعان في النقطة ن.

المطلوب: إثبات أن: ن أ × ن ب = ن جـ × ن د

العمل: نرسم أجـ ، ب د .

البرهان:

ق(أنَ جـ) = ق(دنَ ب) زاويتان متقابلتان بالرأس

ق(بَ) = ق(جَ) زاويتان محيطيتان مرسومتان على القوس أد نفسه

Δأن جـ ~ Δد ن ب تطابق الزوايا

$\frac{\text{أن}}{\text{دن}} = \frac{\text{ن جـ}}{\text{ن ب}}$ تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة في المثلثين المتشابهين

ن أ × ن ب = ن جـ × ن د

مثال (١)

في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.

الحل:

ن جـ × ن د = ن أ × ن ب نظرية

٢ × ٨ = س × ٧ بالتعويض

١٦ = ٧س بالتبسيط

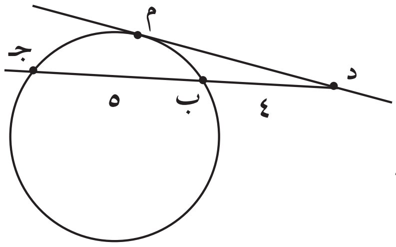
$\frac{١٦}{٧} = \frac{٧س}{٧}$ بالقسمة

س = $\frac{١٦}{٧}$

حاول أن تحل

١ في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.

٤٣



٥ التدريس

حفّز الطلاب على رسم دوائر متعددة واطلب إليهم رسم أوتار متقاطعة بزوايا مختلفة وأوتار متقاطعة متعامدة.

أعطهم بعض القياسات لأجزاء من هذه الأوتار، واطلب إليهم إيجاد المجهول.

يتعلق المثال (١) بالنظرية (١). شدّد على أن ناتج ضرب طولي القطعتين ثابت عندما تتغير النقاط أ، ب، جـ، د على الدائرة، شرط أن تبقى النقطة ن ثابتة.

في المثال (٣)

ساعد الطلاب على فهم النتيجة (١) ليتعرّفوا على العلاقة الموجودة.

برهان نتيجة (١)

المعطيات: $\overline{\text{م ب}}$، $\overline{\text{م د}}$ قاطعان يلتقيان في النقطة م خارج الدائرة.

المطلوب: إثبات أن م أ × م ب = م جـ × م د

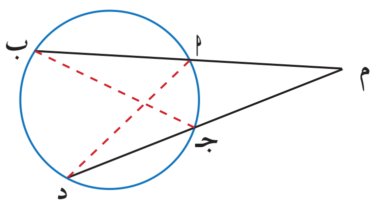
العمل: نرسم $\overline{\text{أ د}}$، $\overline{\text{جـ ب}}$.

البرهان: المثلثان م أ د، م جـ ب فيهما:

ق (أ مَ د) = ق (جـ مَ ب)

ق (م دَ أ) = ق (م بَ جـ)

∴ Δ م أ د ~ Δ م جـ ب



∴ $\frac{\text{م أ}}{\text{م جـ}} = \frac{\text{م د}}{\text{م ب}}$

م أ × م ب = م جـ × م د

برهان نتيجة (٢)

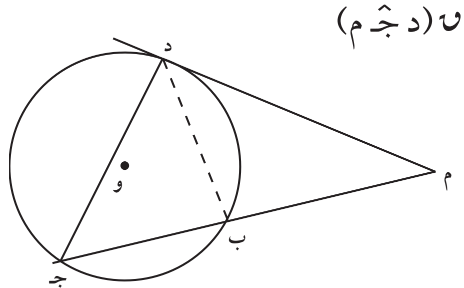
المعطيات: دائرة مركزها و، $\overline{\text{م د}}$ قطعة مماسية، $\overleftarrow{\text{م جـ}}$ قاطع

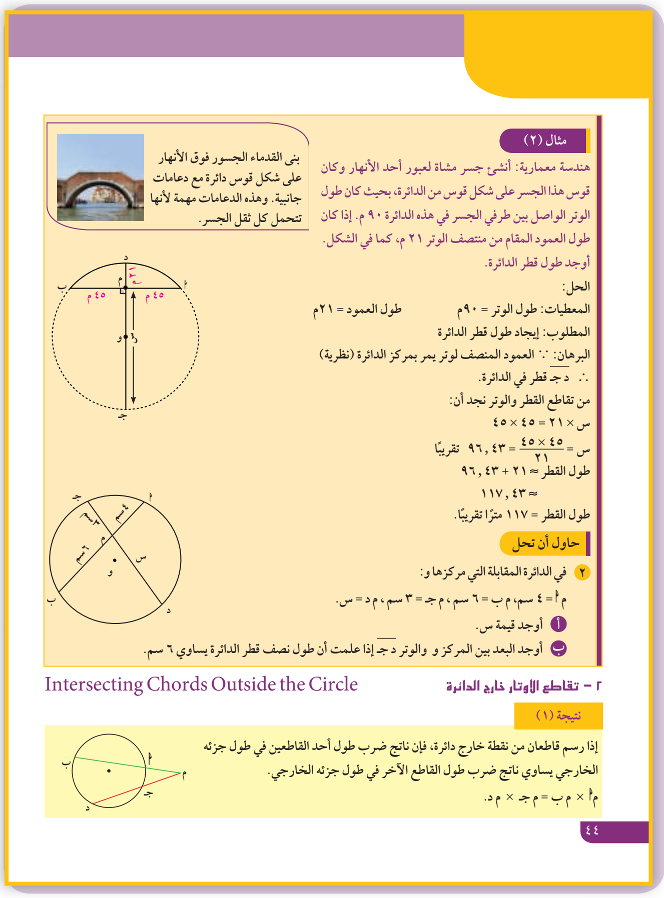
المطلوب: إثبات أن $(\text{م د})^2$ = م ب × م جـ

البرهان: Δ م د ب ~ Δ م جـ د

مَ زاوية مشتركة

ق (م دَ ب) = ق (د جَـ م)




مثال (٢)

هندسة معمارية: أنشئ جسر مشاة لعبور أحد الأنهار وكان قوس هذا الجسر على شكل قوس من الدائرة، بحيث كان طول الوتر الواصل بين طرفي الجسر في هذه الدائرة ٩٠ م. إذا كان طول العمود المقام من منتصف الوتر ٢١ م، كما في الشكل.
أوجد طول قطر الدائرة.

بنى القدماء الجسور فوق الأنهار على شكل قوس دائرة مع دعامات جانبية. وهذه الدعامات مهمة لأنها تتحمل كل ثقل الجسر.

الحل:
المعطيات: طول الوتر = ٩٠م طول العمود = ٢١م
المطلوب: إيجاد طول قطر الدائرة
البرهان: ∵ العمود المنصف لوتر يمر بمركز الدائرة (نظرية)
∴ $\overline{\text{د جـ}}$ قطر في الدائرة.
من تقاطع القطر والوتر نجد أن:
س × ٢١ = ٤٥ × ٤٥
س = $\frac{٤٥ \times ٤٥}{٢١}$ = ٩٦,٤٣ تقريبًا
طول القطر ≈ ٢١ + ٩٦,٤٣
≈ ١١٧,٤٣
طول القطر = ١١٧ مترًا تقريبًا.

حاول أن تحل

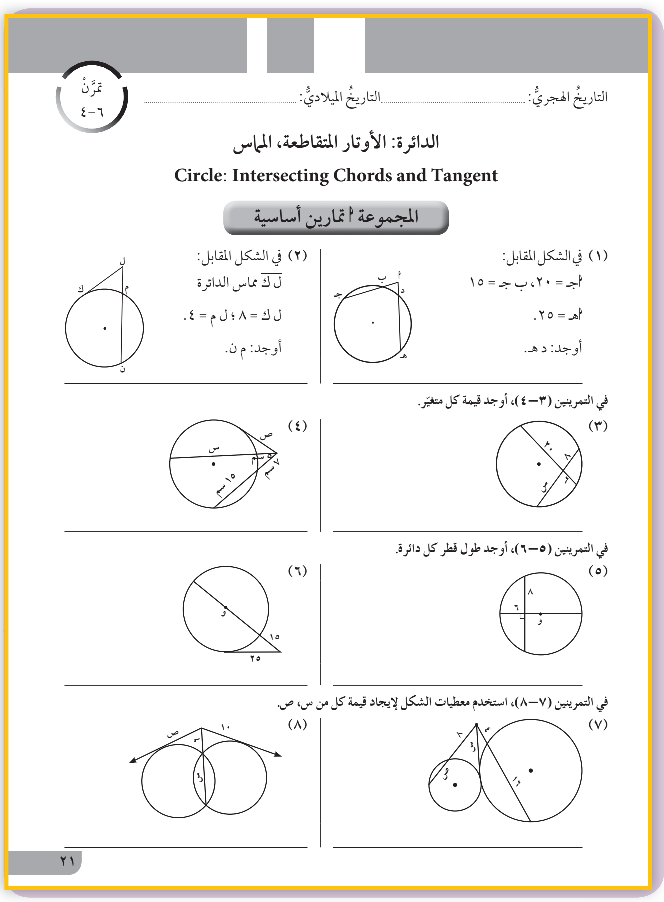
٢ في الدائرة المقابلة التي مركزها و:
م أ = ٤ سم، م ب = ٦ سم، م جـ = ٣ سم، م د = س.
أ أوجد قيمة س.
ب أوجد البعد بين المركز و والوتر $\overline{\text{د جـ}}$ إذا علمت أن طول نصف قطر الدائرة يساوي ٦ سم.

٢ – تقاطع الأوتار خارج الدائرة Intersecting Chords Outside the Circle

نتيجة (١)

إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.
م أ × م ب = م جـ × م د.

٤٤


التاريخُ الهجريُّ:........ التاريخُ الميلاديُّ:........ تمرَّنْ ٦-٤

الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس

Circle: Intersecting Chords and Tangent

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) في الشكل المقابل:
أجـ = ٢٠، ب جـ = ١٥
أهـ = ٢٥.
أوجد: د هـ.

(٢) في الشكل المقابل:
$\overline{\text{ل ك}}$ مماس الدائرة
ل ك = ٨ ؛ ل م = ٤.
أوجد: م ن.

في التمرينين (٣–٤)، أوجد قيمة كل متغيّر.

(٣)

(٤)

في التمرينين (٥–٦)، أوجد طول قطر كل دائرة.

(٥)

(٦)

في التمرينين (٧–٨)، استخدم معطيات الشكل لإيجاد قيمة كل من س، ص.

(٧)

(٨)

٢١

نكتب التناسب $\frac{م د}{م ب} = \frac{م ب}{م د} = \frac{ب د}{د جـ}$ ومنه نأخذ: $\frac{م د}{م ب} = \frac{م ب}{د م}$

باستخدام الضرب التقاطعي نجد:

$(م د)^2 = م ب \times م جـ$

في المثال (٤)، اطلب إليهم إيجاد طول قطعة المماس من نقطة إلى الدائرة.

أوجد د م، إذا كان م أ = ٥، م ب = ٢٠ .

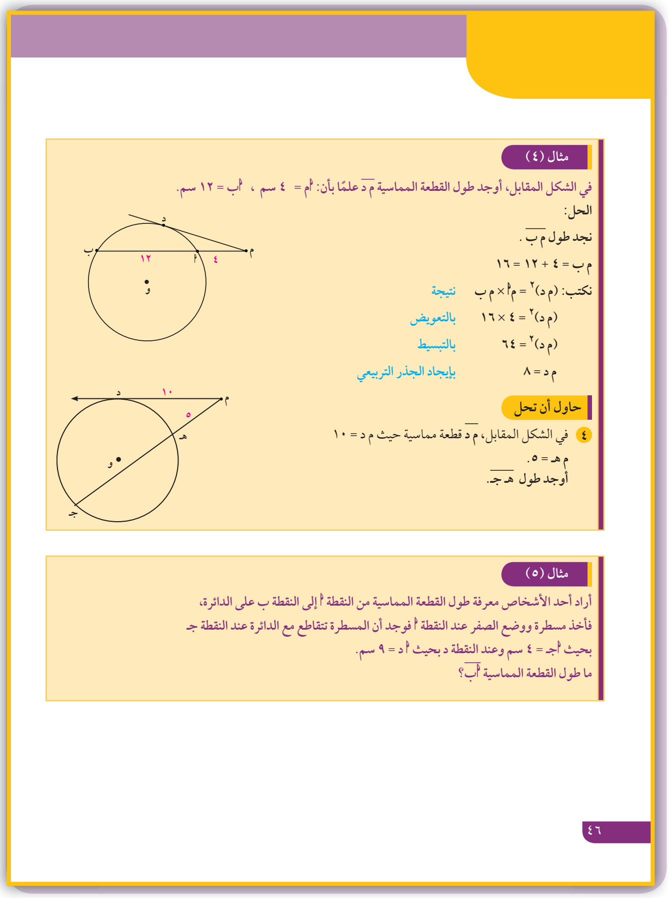
يرتبط المثال (٤) بالنتيجة (٢). أشر إلى أن:

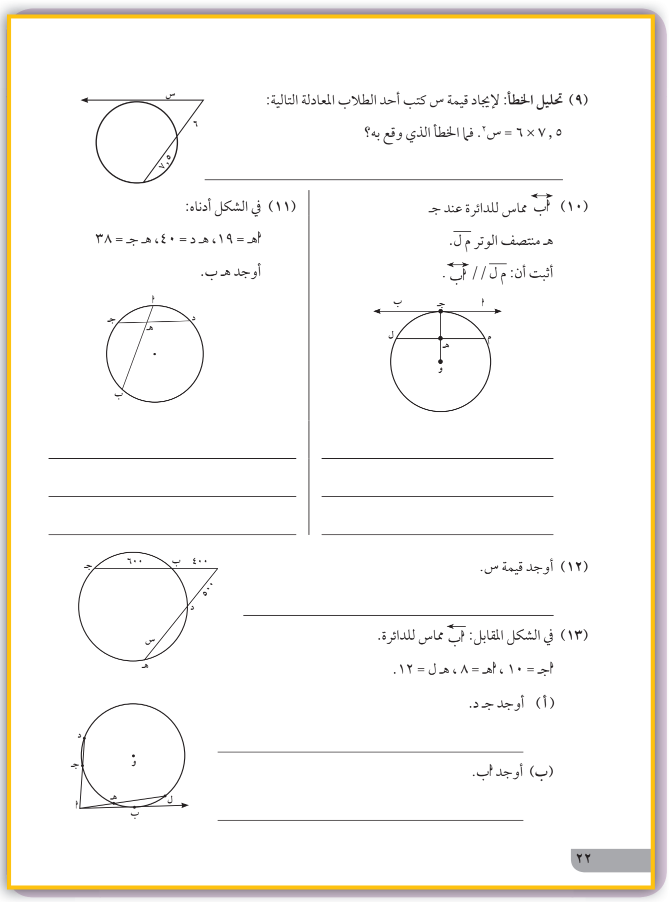
$(م د)^2 = م أ \times م ب = م جـ \times م د = ...$

يمكن رسم أكثر من قاطع للدائرة يمر في م ويبقى ناتج الضرب نفسه.

٦ الربط

انظر المثال (٢)، بنيت بعض الجسور، منذ القدم، على شكل قوس من دائرة. ويتنوع بناء هذه الجسور وفق المسافة المسموح بها. كلما صغرت المسافة صغر طول الوتر الذي بين طرفي الجسر، وصعب عبوره. الاتجاه الحالي في بناء الجسور هو تكبير طول الوتر، وهكذا يصبح عبوره أسهل.

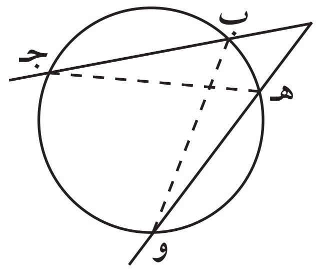




٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام العلاقة بين أجزاء القواطع على الدائرة من نقطة خارج الدائرة ،فيكتبون:

ٮ‍ ب × ب جـ = ٮ‍ هـ × هـ و.



أعد رسم المثلثين المتشابهين، واطلب إليهم استخدام ألوان مختلفة لكل مثلث ليروا جيدًا الأضلاع المتناظرة ونتائج الضرب التقاطعي.

ألفت انتباه الطلاب إلى القراءة دائمًا من نقطة التقاطع ٮ‍ فيكون:

ٮ‍ ب × ٮ‍ جـ = ٮ‍ هـ × ٮ‍ و

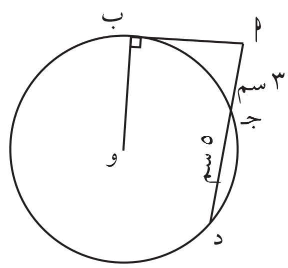
حتى لو كان التقاطع داخليًا وبالتالي ستقل نسبة الخطأ.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يحلون فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من صحة استخدامهم هذه العلاقات.

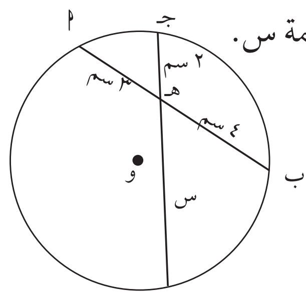
اختبار سريع

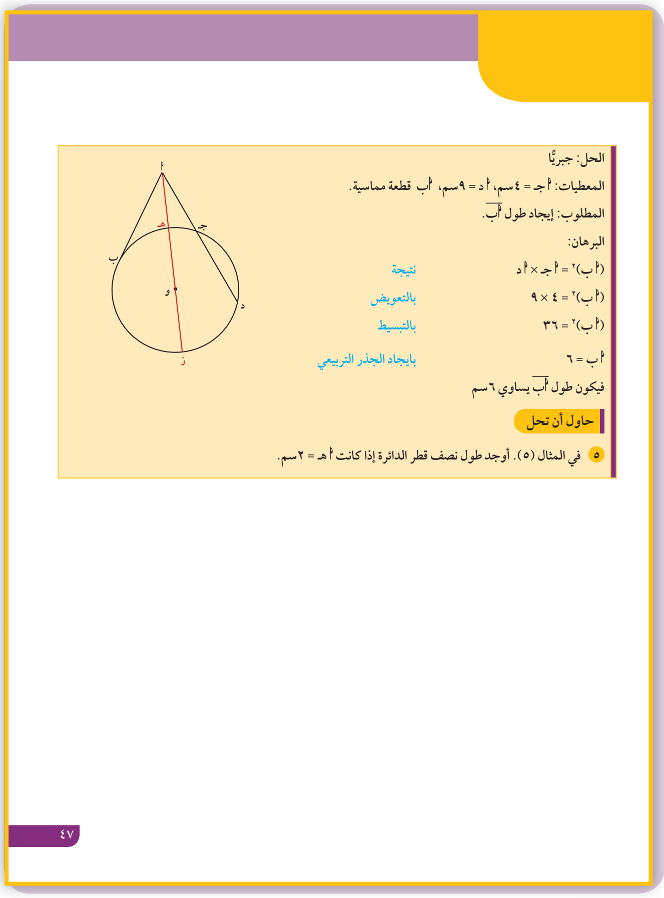
١ في الشكل المقابل أوجد ٮ‍ب. $\sqrt{٢٤} \simeq ٤,٩$ سم



٢ في الشكل المقابل أوجد قيمة س.

٦ سم





الحل: جبريًا

المعطيات: ٮ‍ جـ = ٤ سم، ٮ‍ د = ٩ سم، ٮ‍ب قطعة مماسية.

المطلوب: إيجاد طول ٮ‍ب.

البرهان:

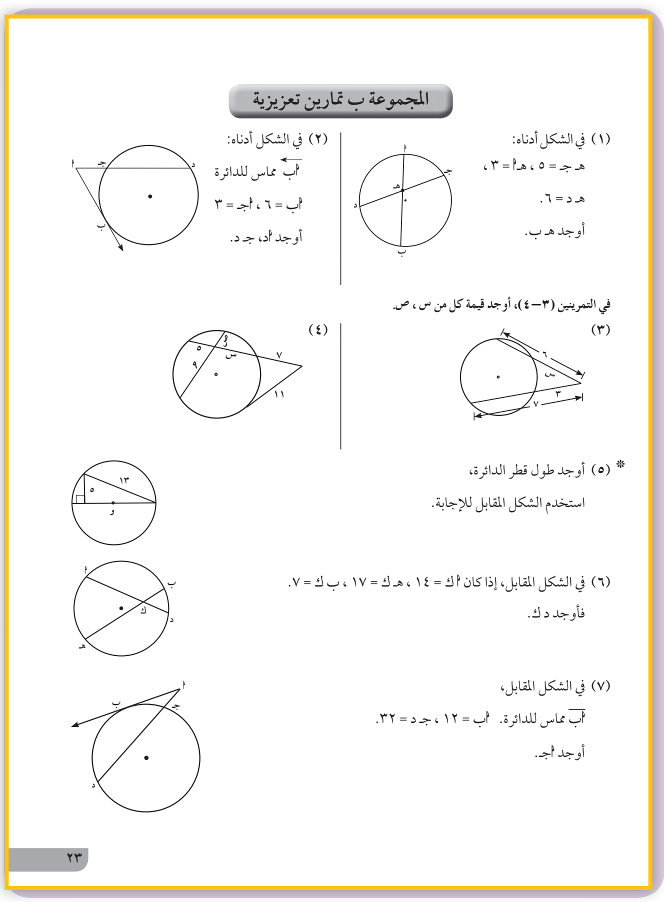
$(ٮ‍ب)^٢$ = ٮ‍ جـ × ٮ‍ د	نتيجة
$(ٮ‍ب)^٢$ = ٤ × ٩	بالتعويض
$(ٮ‍ب)^٢$ = ٣٦	بالتبسيط
ٮ‍ب = ٦	بايجاد الجذر التربيعي

فيكون طول ٮ‍ب يساوي ٦ سم

حاول أن تحل

٥ في المثال (٥). أوجد طول نصف قطر الدائرة إذا كانت ٮ‍ هـ = ٢ سم.

٤٧



المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) في الشكل أدناه:
هـ جـ = ٥ ، هـ ٮ‍ = ٣ ،
هـ د = ٦.
أوجد هـ ب.

(٢) في الشكل أدناه:
ٮ‍ب مماس للدائرة
ٮ‍ب = ٦ ، ٮ‍جـ = ٣
أوجد ٮ‍د، جـ د.

في التمرينين (٣–٤)، أوجد قيمة كل من س ، ص.

(٣)

(٤)

* (٥) أوجد طول قطر الدائرة،
استخدم الشكل المقابل للإجابة.

(٦) في الشكل المقابل، إذا كان ٮ‍ ك = ١٤ ، هـ ك = ١٧ ، ب ك = ٧.
فأوجد د ك.

(٧) في الشكل المقابل،
ٮ‍ب مماس للدائرة. ٮ‍ب = ١٢ ، جـ د = ٣٢.
أوجد ٮ‍جـ.

٢٣

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

١ ، ٢ ، ٣ تحقق من عمل الطلاب.

«حاول أن تحل»

١ س^{٢} = ٣٦ ، س = ٦ .

٢ (أ) س = ٨ سم

(ب) $\frac{\text{دجـ}}{٢} = \frac{١١}{٢}$ = ٥,٥ سم

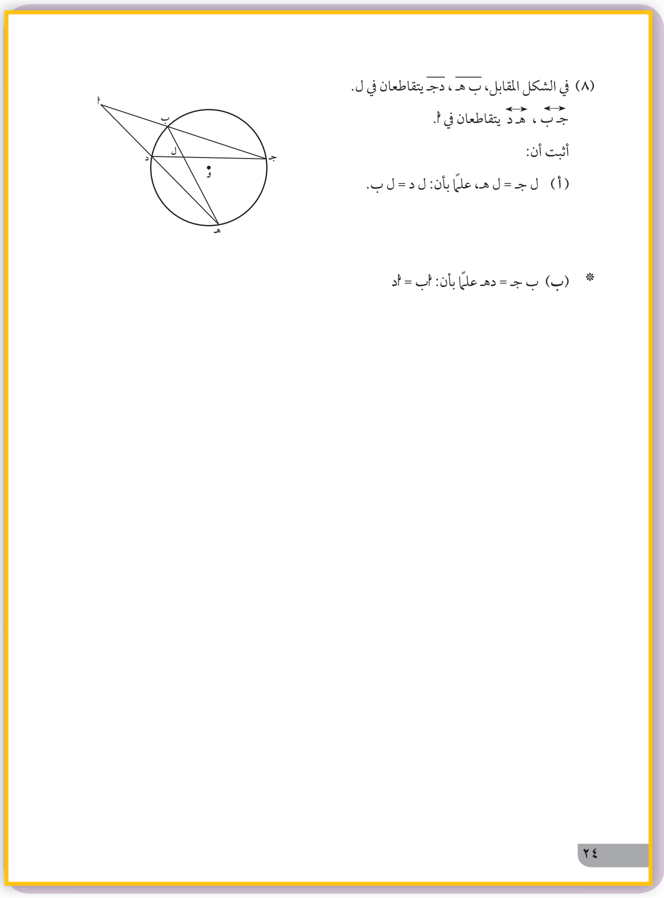
البعد = $\sqrt{(٦)^{٢} - (٥,٥)^{٢}} = \sqrt{(٥,٧٥)}$

≃ ٢,٤ سم

٣ ٣ × ١١ = ٤(٤ + س)؛ ∴ س = ٤,٢٥ سم.

٤ ١٠٠ = ٥(٥ + هـ جـ)؛ ∴ هـ جـ = ١٥ .

٥ ٣٦ = ٢(٢ + ٢نو)؛ ∴ نو = ٨ سم.



(٨) في الشكل المقابل، $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{دجـ}}$ يتقاطعان في ل.

$\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ د}}$ يتقاطعان في أ.

أثبت أن:

(أ) ل جـ = ل هـ، علمًا بأن: ل د = ل ب.

* (ب) ب جـ = دهـ علمًا بأن: أب = أد

٢٤

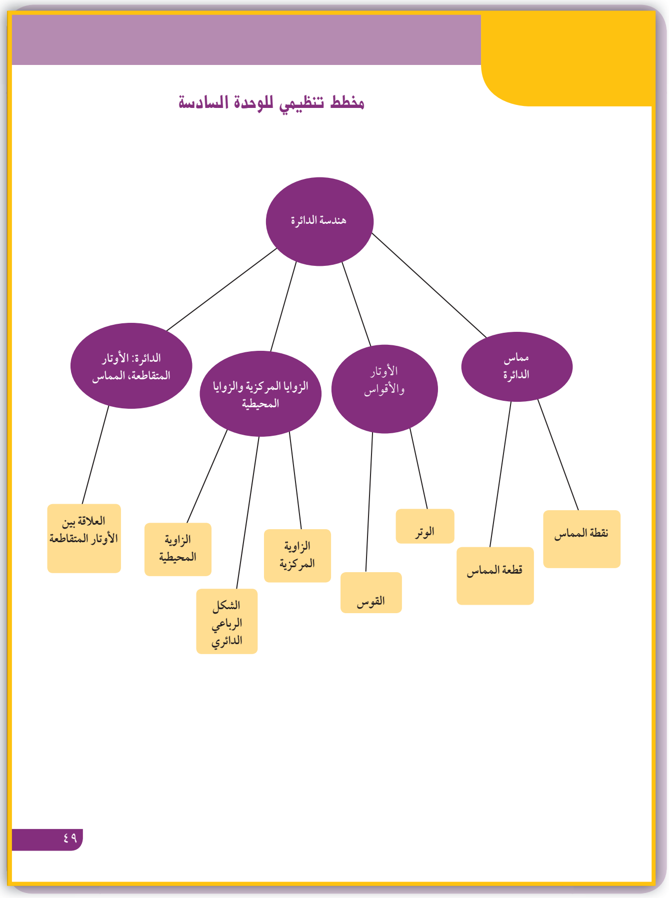
المرشد لحل المسائل

إجابة «مسألة إضافية»

$\overline{\text{وأ}} \perp \overline{\text{ن م}}$

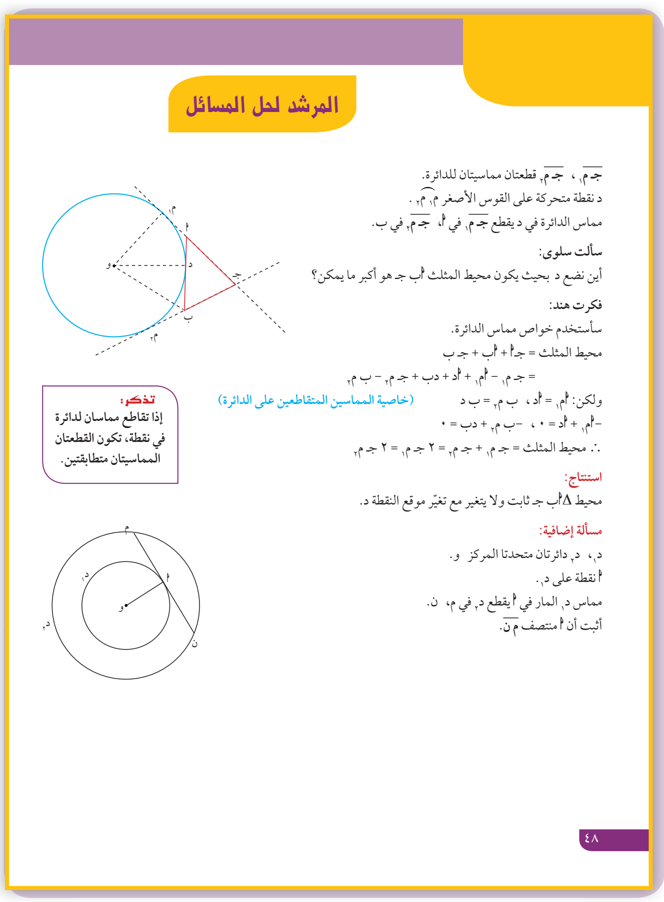
إذا كان نصف قطر في الدائرة عموديًّا على وتر في الدائرة، فإنه يمر في منتصف هذا الوتر .

وبالتالي، أ هي منتصف الوتر $\overline{\text{ن م}}$.



مخطط تنظيمي للوحدة السادسة

٤٩



المرشد لحل المسائل

$\overline{\text{جـ م}_1}$ ، $\overline{\text{جـ م}_2}$ قطعتان مماسيتان للدائرة.

د نقطة متحركة على القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{م}_1\text{م}_2}$.

مماس الدائرة في د يقطع $\overline{\text{جـ م}_1}$ في أ، $\overline{\text{جـ م}_2}$ في ب.

سألت سلوى:

أين نضع د بحيث يكون محيط المثلث أ ب جـ هو أكبر ما يمكن؟

فكرت هند:

سأستخدم خواص مماس الدائرة.

محيط المثلث = جـ أ + أ ب + جـ ب

= جـ م_1 − أم_1 + أ د + د ب + جـ م_2 − ب م_2

ولكن: أم_1 = أ د ، ب م_2 = ب د (خاصية المماسين المتقاطعين على الدائرة)

−أم_1 + أ د = ٠ ، −ب م_2 + د ب = ٠

∴ محيط المثلث = جـ م_1 + جـ م_2 = ٢ جـ م_1 = ٢ جـ م_2

استنتاج:

محيط Δ أ ب جـ ثابت ولا يتغير مع تغيّر موقع النقطة د.

مسألة إضافية:

د_1، د_2 دائرتان متحدتا المركز و.

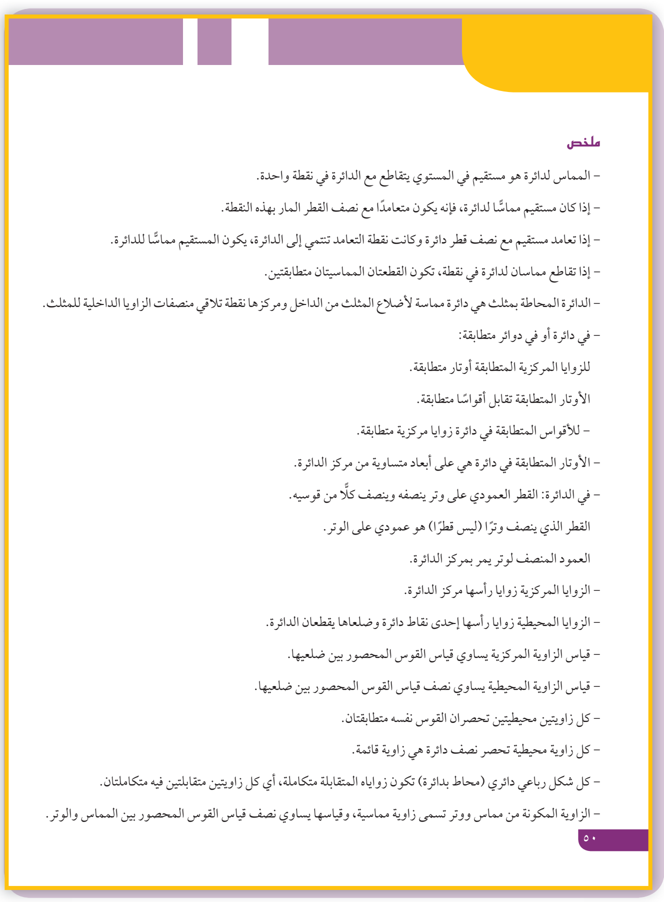
أ نقطة على د_1.

مماس د_1 المار في أ يقطع د_2 في م، ن.

أثبت أن أ منتصف $\overline{\text{م ن}}$.

تذكر: إذا تقاطع مماسان لدائرة في نقطة، تكون القطعتان المماسيتان متطابقتين.

٤٨



ملخص

– المماس لدائرة هو مستقيم في المستوي يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة.

– إذا كان مستقيم مماسًّا لدائرة، فإنه يكون متعامدًا مع نصف القطر المار بهذه النقطة.

– إذا تعامد مستقيم مع نصف قطر دائرة وكانت نقطة التعامد تنتمي إلى الدائرة، يكون المستقيم مماسًّا للدائرة.

– إذا تقاطع مماسان لدائرة في نقطة، تكون القطعتان المماسيتان متطابقتين.

– الدائرة المحاطة بمثلث هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث من الداخل ومركزها نقطة تلاقي منصفات الزاوايا الداخلية للمثلث.

– في دائرة أو في دوائر متطابقة:

للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.

الأوتار المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة.

– للأقواس المتطابقة في دائرة زوايا مركزية متطابقة.

– الأوتار المتطابقة في دائرة هي على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.

– في الدائرة: القطر العمودي على وتر ينصفه وينصف كلًّا من قوسيه.

القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) هو عمودي على الوتر.

العمود المنصف لوتر يمر بمركز الدائرة.

– الزوايا المركزية زوايا رأسها مركز الدائرة.

– الزوايا المحيطية زوايا رأسها إحدى نقاط دائرة وضلعاها يقطعان الدائرة.

– قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

– قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

– كل زاويتين محيطيتين تحصران القوس نفسه متطابقتان.

– كل زاوية محيطية تحصر نصف دائرة هي زاوية قائمة.

– كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة) تكون زواياه المتقابلة متكاملة، أي كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.

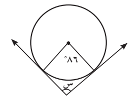
– الزاوية المكونة من مماس ووتر تسمى زاوية مماسية، وقياسها يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

٥٠

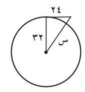
مراجعة الوحدة السادسة

في التمرينين (١–٢)، لنفرض أن الخطوط التي تبدو مماسة هي مماس للدائرة، أوجد قيمة س.

(١)

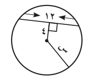


(٢)

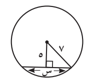


في التمرينين (٣–٤)، أوجد قيمة س.

(٣)

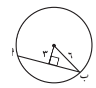


(٤)

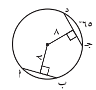


في التمرينين (٥–٦)، أوجد قياس القوس أب.

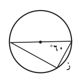
(٥)



(٦)

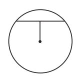


(٧) في الشكل المقابل، أوجد قيمة ز.



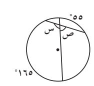
(٨) وتر في دائرة طوله ٢٫٤ سم ويبعد ٨ سم عن مركز الدائرة.

فما طول نصف قطر الدائرة؟



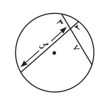
في التمارين (٩–١٢)، الخط الذي يبدو مماس هو مماس للدائرة أوجد قيمتي س، ص في كل مما يلي:

(٩)

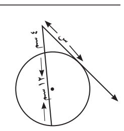


(١٠)

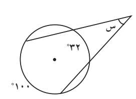
(١١)



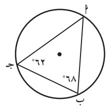
(١٢)



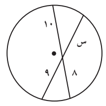
(١٣) في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



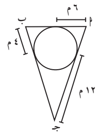
(١٤) في الشكل المقابل، أوجد قيمة ب جـ.



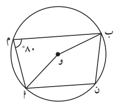
(١٥) في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



(١٦) أوجد محيط المثلث أب جـ.



(١٧) أوجد ن(نَ).



(١٨) في الشكل المقابل، Δأب جـ متطابق الأضلاع.

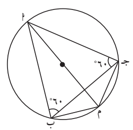
أوجد:

ن(أمَب).

ن(بمَجـ).

ن(مجَب).

ن(أمَجـ).



- إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي جزءي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزءي الوتر الآخر.
- إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.
- إذا رسم من نقطة خارج دائرة مماس وقاطع، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.

تمارين إثرائية

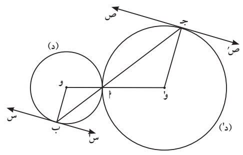
(١) (د)، (د') دائرتان لهما ﺃ نقطة مماس خارجية.

$\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ قاطع يمر بالنقطة ﺃ ويقطع الدائرة (د)

بالنقطة ب ويقطع الدائرة (د') بالنقطة جـ.

أثبت أن المماس من النقطة ب للدائرة (د) موازٍ للمماس

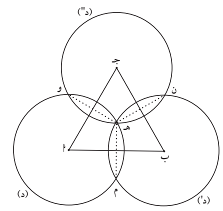
من النقطة جـ للدائرة (د').



(٢) (د)، (د')، (د") ثلاث دوائر متطابقة ومراكزها على الترتيب ﺃ، ب، جـ.

تتقاطع الدوائر الثلاث في النقطة المشتركة هـ.

ماذا تمثل النقطة هـ بالنسبة إلى المثلث ﺃب جـ؟ اشرح.

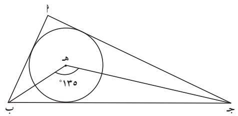


(٣) ﺃب جـ مثلث. هـ مركز الدائرة المحاطة بالمثلث ﺃب جـ

(نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية في المثلث ﺃب جـ).

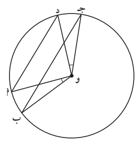
ق(ب هـ^ جـ) = ١٣٥°.

أثبت أن المثلث ﺃب جـ قائم الزاوية في ﺃ.



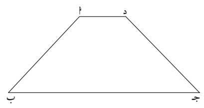
(٤) ﺃ، ب، جـ، د نقاط على الدائرة مركزها و، حيث ق(ﺃو^ب) = ق(دو^جـ).

أثبت أن: $\overline{\text{دﺃ}}$ // $\overline{\text{جـ ب}}$.



(٥) في الشكل المقابل ﺃب جـ د شبه منحرف متطابق الضلعين.

أثبت أنه رباعي دائري.



الوحدة السابعة: المصفوفات

Matrices

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

مقدمة الوحدة

يبني الطلاب في هذه الوحدة مفاهيم تتعلق بكيفية تنظيم البيانات الإحصائية في مصفوفات لإيجاد حلول لمسائل حياتية، وتوفير فرصة لاتخاذ قرارات مبنية على توقعات محددة.

سوف يتم ذلك من خلال جمع المصفوفات أو طرحها أو ضربها في عدد حقيقي أو ضربها في بعضها بعضًا بحسب ما يتطلب الموقف والحاجة.

اعرض أمام الطلاب بعض البيانات المنظمة في جداول. اطلب إليهم تحديد أي من هذه البيانات يقع في صفوف، وأي منها يقع في أعمدة، وأي منها يقع في صفوف وأعمدة.

الوحدة السابعة

المصفوفات

Matrices

مشروع الوحدة: المعالجة الحيوية (Biotherapy).

١ مقدمة المشروع: يعتبر تسرب الزيت والمواد الكيميائية إلى المياه الجوفية من أهم مخاطر العصر الحديث، كما وتستخدم البكتيريا في مجال المعالجة الحيوية التي تتكوّن طبيعيًّا في محيط البيئة للحدّ من هذه الأخطار.

٢ الهدف: عند العمل في هذه الوحدة، سوف تحلل بيانات المشروع، وسوف تعالجها، وتستخدم النتائج لرسم المحتويات وتوقعها، ومن ثم سوف تبحث عن مصادر مشاريع أخرى. وفي النهاية، سوف تلخص ما ستجده وتوضحه للمساعدة في تكملة المشروع.

٣ اللوازم: آلة حاسبة بيانية.

٤ أسئلة حول التطبيق: يوضح الجدول بيانات من نتائج تحليل العلماء لخمس عينات عشوائية من التربة نفسها. في أحد مشاريع المعالجة الحيوية، وجدوا التالي من عناصر المنتجات البترولية الخطرة: البنزين (ب)، التوليدين (ت) وهو سائل عديم اللون، إيثيل البنزين (ي)، إكسيلين (س) وهو مركب هيدروكربوني. اعرض البيانات في أربع مصفوفات، ثم اختر عنصرًا من كل مصفوفة، واذكر ماذا يمثل.

مستويات المركب في التربة (ملجم/ كجم)

العينة	ب	ت	ي	س
١	٠,٠٦	٠,٩٥	٠,٩	١٨,٥
٢	٠,٠٦	١,٠٥	٠,٧٣	١٣,٥
٣	٠,٣٥	٦	٥,٦	٤٩
٤	٠,٢٢	٠,١٩	٢	١٩,٥
٥	٠,١١	٠,٨٢	٢,٥	٢٦

أ اعرض بيانات الجدول في ٤ مصفوفات.

ب استخدم هذه المصفوفات، وأوجد توليفة البنزين والتوليدين وإيثيل البنزين والإكسيلين بالمليجرام/ كجم لكل عينة تراب.

جـ بعد ١٢ شهرًا، لاحظ العلماء أن النسبة المئوية لكل مركّب في كل عينة من التربة قد انخفضت بمعدل ٠,٠٥ ملجم/ كجم. فمثلًا، نسبة البنزين أصبحت في العينة الأولى ٠,٠١ وفي العينة الثانية ٠,٠١ وفي العينة الثالثة ٠,٣٠ وفي العينة الرابعة ٠,١٧ وفي العينة الخامسة ٠,٠٦. استخدم المصفوفات لحساب نقصان كل مركب في كل عينة.

٥ التقرير: حقق بحثًا عن موقع النفايات التي تتضمن خطورة، والتي تمت معالجتها حيويًّا. ما مدى اتساع الموقع؟ ما طرق المعالجة الأخرى التي يمكن استخدامها بخلاف المعالجة الحيوية؟

اكتب فقرات قليلة تلخص بحثك وتتضمن بيانات عن الموقع كلما أمكن.

دروس الوحدة

تنظيم البيانات في مصفوفات	جمع وطرح المصفوفات	ضرب المصفوفات	مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)	حل نظام من معادلتين خطيتين
٧-١	٧-٢	٧-٣	٧-٤	٧-٥

٥٢

مشروع الوحدة

يوفر هذا المشروع فرصة كبيرة أمام الطلاب للتعرف إلى المصفوفات واستخدامها في تنظيم البيانات الإحصائية عن المعالجات الحيوية والتي هي إحدى المشاكل البيئية في هذا العصر.

من خلال العمليات على المصفوفات، سوف يقوم الطلاب بحساب التغيرات في كميات المخلفات الموجودة، ثم ببحث مشاريع معالجة حيوية أخرى وتلخيصها وعرض ما توصلوا إليه.

- اسأل الطلاب ما إذا كانوا قد تواجدوا في موقع قد تمّ تنظيفه من بقع زيت أو نفط أو بقايا مواد كيماوية.
- وضح للطلاب أن مجال المعالجة الحيوية يستخدم البكتيريا الموجودة في الطبيعة لتفكيك المخلفات الضارة.
- اسأل الطلاب ما إذا قاموا بإعداد قائمة بالمواد التي سوف يحتاجون إليها في المشروع.
- حفّز الطلاب على إيجاد المزيد من المعلومات في مجال المعالجة الحيوية من شبكة الإنترنت أو أي مصادر أخرى.

الوحدة السابعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت تمثيل العلاقات باستخدام المتغيرات .
- تعلمت تبسيط العبارات الجبرية المتضمنة أعدادًا صحيحة وكسورًا وإيجاد قيمتها.
- تعلمت تمثيل معادلات من متغيرين.
- تعلمت رسم المعادلات والمتباينات بيانيًّا.
- تعلمت رسم نظام من المعادلات أو المتباينات بيانيًّا.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تستخدم المصفوفات لتنظيم البيانات.
- سوف تتعرف المصفوفات المتساوية.
- سوف تستخدم جمع المصفوفات وطرحها لحل معادلات المصفوفات في مواقف حياتية.
- سوف تستخدم ضرب المصفوفات لحل مسائل حياتية.
- سوف تستخدم معكوسات المصفوفات لحل معادلات المصفوفات في مسائل حياتية.
- سوف تحل نظامًا من معادلتين خطيتين باستخدام قاعدة كرامر.

أضف إلى معلوماتك

يستخدم الناس في أغلب المجالات، البيانات المرتبة في قاعدة منظمة، وإحدى طرق تنظيم البيانات بصورة مختصرة هي كتابتها في صورة مصفوفة، بذلك نستطيع جمع المصفوفات وطرحها وضربها. كما يمكن استخدام ذلك للحصول على معلومات إضافية تساعد في اتخاذ القرار. تاريخيًّا، استخدمت المصفوفات لحل رسائل مشفرة، كما ويمكن استخدام ضرب المصفوفات في مسائل وتطبيقات حياتية.

المصطلحات الأساسية

مصفوفة – أعمدة – صفوف – عنصر المصفوفة – العناصر المتناظرة – مصفوفة الجمع –المصفوفة الصفرية – العنصر المحايد الجمعي – العدد القياسي – مصفوفات الضرب – المصفوفة المربعة – مصفوفة الوحدة – النظير الضربي للمصفوفة (معكوس المصفوفة) – قاعدة كرامر – محدد المصفوفة.

٥٣

سلّم التقييم	
٤.	الحسابات صحيحة، المصفوفات واضحة ودقيقة، الشروح معبرة، التقرير مفصل ومفيد.
٣.	معظم الحسابات صحيحة، ومعظم المصفوفات واضحة ودقيقة، الشروح بحاجة إلى بعض الإيضاح، التقرير مفصل مع بعض الأخطاء.
٢.	يوجد أخطاء كثيرة في الحسابات، بعض المصفوفات واضحة ودقيقة، الشروح غامضة، التقرير غير مفهوم.
١.	معظم عناصر المشروع غير كاملة.

٧ـ١ : تنظيم البيانات في مصفوفات

١ الأهداف

- ينظم البيانات الإحصائية في مصفوفات.
- يوجد رتبة مصفوفة.
- يتعرف أنواع المصفوفات.
- يحل معادلات باستخدام المصفوفات المتساوية.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

بيانات إحصائية – مصفوفة – رتبة مصفوفة – صفوف – أعمدة – مصفوفة مربعة – مصفوفة أفقية – مصفوفة عمودية – مصفوفات متساوية.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

- اطلب إلى الطلاب تنظيم قوائم بكل المواقع التي سبق أن رأوا فيها بيانات معروضة مشابهة للبيان في فقرة «عمل تعاوني»، مثل بيانات الأرقام القياسية لأسعار المستهلك حسب أقسام الإنفاق الرئيسة.
- اطلب إليهم حل المعادلة: ٤س – ٧ = ٣س + ٥

٧–١
تنظيم البيانات في مصفوفات
Organising Data Into Matrices

عمل تعاوني
يبين الجدول الأرقام القياسية لأسعار المستهلك حسب أقسام الإنفاق الرئيسة:

سوف تتعلم
• تنظيم البيانات في مصفوفات
• المصفوفات المتساوية

مقارنة يناير ٢٠١١ بيناير ٢٠١٢. سنة الأساس ٢٠٠٠ = صفرًا

أقسام الإنفاق الرئيسة	يناير ٢٠١١	يناير ٢٠١٢
الرقم القياسي العام	١٤٦,٠	١٥١,١
المواد الغذائية	١٧٢,٠	١٨٥,٩
الحلويات	١٦٣,٢	١٦٩,١
الملابس	١٥٤,٨	١٥٩,٨
خدمات المسكن	١٤٨,٢	١٥١,٢
سلع وخدمات منزلية	١٣٧,٣	١٣٩,٨

• المصدر: الإدارة المركزية للإحصاء الكويت.

١ كم بلغت نسبة الزيادة في الرقم القياسي العام؟
٢ في أي قسم كانت نسبة الزيادة الأكبر؟ وفي أي قسم كانت الأصغر؟

تعريف
المصفوفة هي تنظيم من الأعداد المرتبة في صفوف وأعمدة.

الأعداد المكونة للمصفوفة تسمى عناصر Elements.

رتبة المصفوفة Dimension of a Matrix

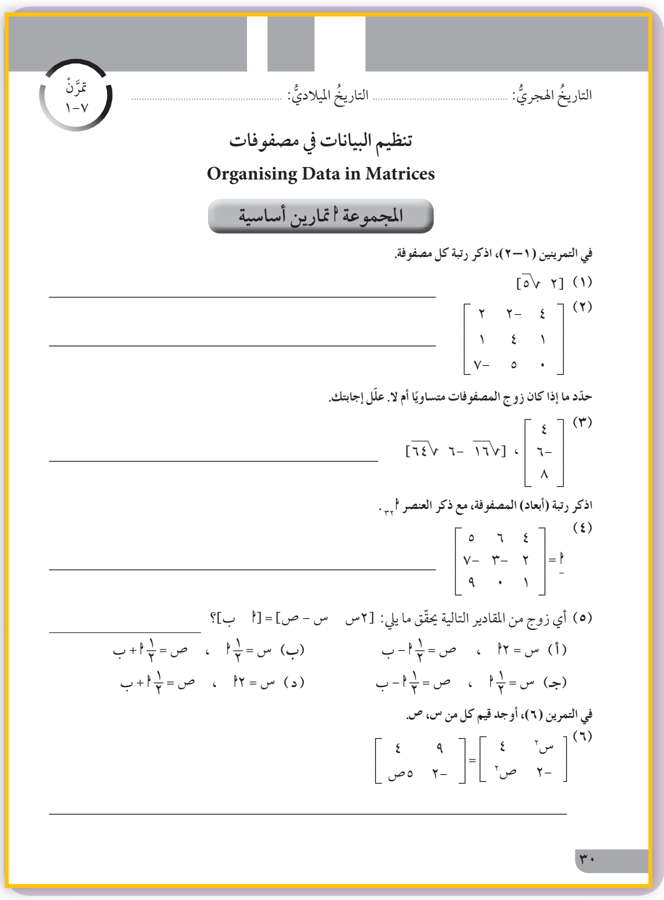
نرمز إلى المصفوفة بأحد حروف الهجاء ونضع تحته خطًّا، نكتب أ ونقرأ المصفوفة أ.
عدد الصفوف (م) وعدد الأعمدة (ن) يحددان رتبة المصفوفة ونكتب م × ن.

$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ٦ & ٧ & ٠ \end{bmatrix}$

المصفوفة أ هي من الرتبة ٢ × ٣.

ملاحظة: لكتابة رتبة المصفوفة نكتب أولًا عدد الصفوف يليه عدد الأعمدة.

٥٤



التاريخ الهجري: .... التاريخ الميلادي: .... تمرّن ٧–١

تنظيم البيانات في مصفوفات
Organising Data in Matrices

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمرين (١–٢)، اذكر رتبة كل مصفوفة.

(١) $[\sqrt{٥} \quad ٢]$

(٢) $\begin{bmatrix} ٤ & -٢ & ٢ \\ ١ & ٤ & ١ \\ ٠ & ٥ & -٧ \end{bmatrix}$

حدد ما إذا كان زوج المصفوفات متساويًا أم لا. علّل إجابتك.

(٣) $\begin{bmatrix} ٤ \\ -٦ \\ ٨ \end{bmatrix}$ ، $[\sqrt{١٦} \quad -٦ \quad \sqrt{٦٤}]$

اذكر رتبة (أبعاد) المصفوفة، مع ذكر العنصر $أ_{٢٣}$.

(٤) $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٥ \\ ٢ & -٣ & -٧ \\ ١ & ٠ & ٩ \end{bmatrix}$

(٥) أي زوج من المقادير التالية يحقق ما يلي: [٢س س – ص] = [أ ب]؟

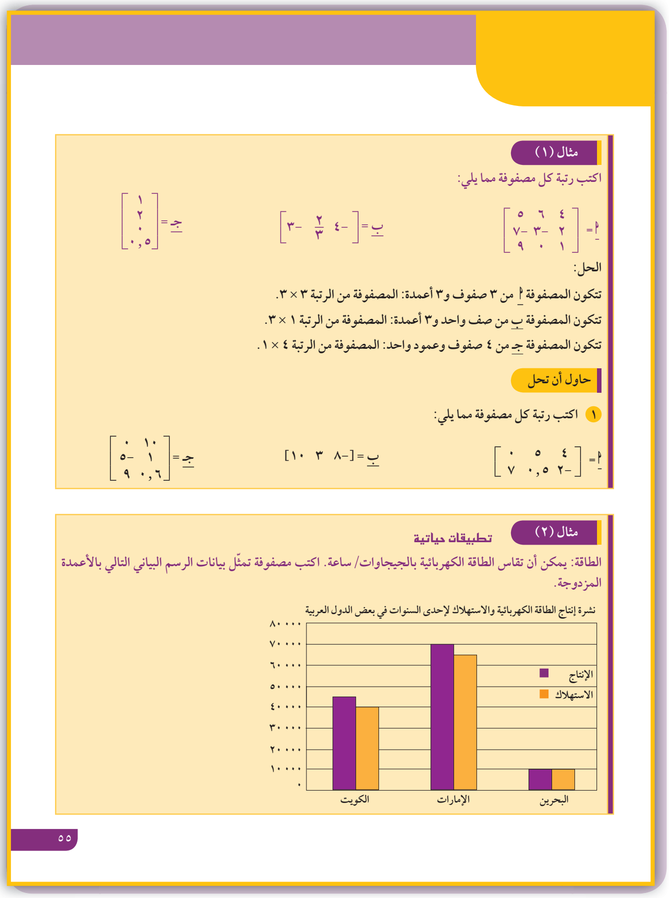
(أ) س = ٢أ ، ص = $\frac{١}{٢}$أ – ب (ب) س = $\frac{١}{٢}$أ ، ص = $\frac{١}{٢}$أ + ب

(جـ) س = $\frac{١}{٢}$أ ، ص = $\frac{١}{٢}$أ – ب (د) س = ٢أ ، ص = $\frac{١}{٢}$أ + ب

في التمرين (٦)، أوجد قيم كل من س، ص.

(٦) $\begin{bmatrix} س^٢ & ٤ \\ -٢ & ص^٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٤ \\ -٢ & ٥ص \end{bmatrix}$

٣٠


مثال (١)

اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٥ \\ ٢ & -٣ & -٧ \\ ١ & ٠ & ٩ \end{bmatrix} \qquad \underline{ب} = \begin{bmatrix} -٤ & \frac{٢}{٣} & -٣ \end{bmatrix} \qquad \underline{جـ} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ ٠,٥ \end{bmatrix}$$

الحل:

تتكون المصفوفة أ من ٣ صفوف و٣ أعمدة: المصفوفة من الرتبة ٣ × ٣.

تتكون المصفوفة ب من صف واحد و٣ أعمدة: المصفوفة من الرتبة ١ × ٣.

تتكون المصفوفة جـ من ٤ صفوف وعمود واحد: المصفوفة من الرتبة ٤ × ١.

حاول أن تحل

١ اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ٠ \\ -٢ & ٠,٥ & ٧ \end{bmatrix} \qquad \underline{ب} = \begin{bmatrix} -٨ & ٣ & ١٠ \end{bmatrix} \qquad \underline{جـ} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ١ & -٥ \\ ٠,٦ & ٩ \end{bmatrix}$$

مثال (٢) تطبيقات حياتية

الطاقة: يمكن أن تقاس الطاقة الكهربائية بالجيجاوات/ ساعة. اكتب مصفوفة تمثّل بيانات الرسم البياني التالي بالأعمدة المزدوجة.

٥٥

٥ التدريس

أشر في البدء إلى أن الجداول والتمثيلات البيانية هي طرائق لتنظيم البيانات الإحصائية ومنها يمكن الدخول إلى تنظيم هذه البيانات في مصفوفات.

أكّد لهم أن الجداول والتمثيلات البيانية والمصفوفات جميعها يمكن أن تمثل المعلومات نفسها ولكن بأشكال مختلفة.

اطلب إليهم تنظيم الجدول في فقرة «عمل تعاوني» على شكل مصفوفة.

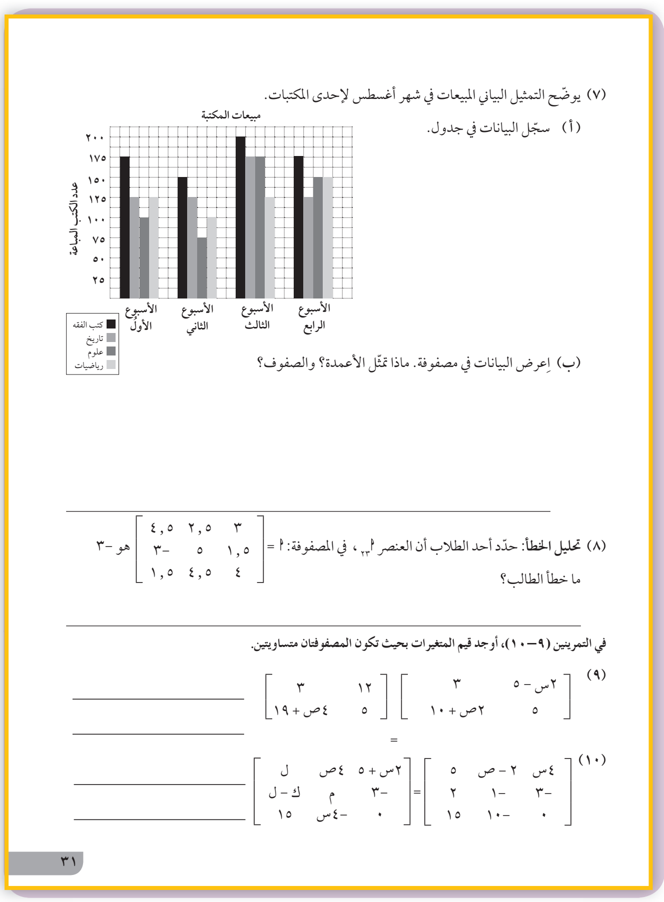
اسألهم عن عدد الصفوف والأعمدة في هذه المصفوفة وعن رتبتها وعما إذا كان بالإمكان تنظيم هذا الجدول بمصفوفة ثانية مختلفة عن الأولى وعن عدد صفوف وأعمدة ورتبة المصفوفة الثانية.

$$\begin{bmatrix} ١٥١,١ & ١٤٦,٠ \\ ١٨٥,٩ & ١٧٢,٠ \\ ١٦٩,١ & ١٦٣,٢ \\ ١٥٩,٨ & ١٥٤,٨ \\ ١٥١,٢ & ١٤٨,٢ \\ ١٣٩,٨ & ١٣٧,٣ \end{bmatrix}$$

الرتبة: ٦ × ٢

$$\begin{bmatrix} ١٣٧,٣ & ١٤٨,٢ & ١٥٤,٨ & ١٦٣,٢ & ١٧٢,٠ & ١٤٦,٠ \\ ١٣٩,٨ & ١٥١,٢ & ١٥٩,٨ & ١٦٩,١ & ١٨٥,٩ & ١٥١,١ \end{bmatrix}$$

الرتبة: ٢ × ٦


(٧) يوضّح التمثيل البياني المبيعات في شهر أغسطس لإحدى المكتبات.

(أ) سجّل البيانات في جدول.

(ب) اِعرض البيانات في مصفوفة. ماذا تمثّل الأعمدة؟ والصفوف؟

(٨) **تحليل الخطأ**: حدّد أحد الطلاب أن العنصر $أ_{٢٣}$ ، في المصفوفة: $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢,٥ & ٤,٥ \\ ١,٥ & ٥ & -٣ \\ ٤ & ٤,٥ & ١,٥ \end{bmatrix}$ هو -٣

ما خطأ الطالب؟

في التمرينين (٩–١٠)، أوجد قيم المتغيرات بحيث تكون المصفوفتان متساويتين.

(٩) $\begin{bmatrix} ٢س - ٥ & ٣ \\ ٥ & ٢ص + ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ص + ١٩ \end{bmatrix}$

(١٠) $\begin{bmatrix} ٤س & ٢ - ص & ٥ \\ -٣ & -١ & ٢ \\ ٠ & -١٠ & ١٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢س + ٥ & ٤ص & ل \\ -٣ & م & ك - ل \\ ٠ & -٤س & ١٥ \end{bmatrix}$

٣١

في المثال (٢)

الجيجاوات/ ساعة هي وحدة لقياس السعر الحراري؛ أي إنتاج الطاقة أو الجهد المساوي للجهد المبذول بجيجاوات من الطاقة خلال ساعة. جيجاوات واحد في الساعة يساوي $٣,٦ \times ١٠^{٩}$ جول. الجول وحدة قياس سُميت باسم عالم الفيزياء البريطاني جيمس جول (١٨١٨ – ١٨٨٩) والذي قام بتطوير نظرية تنص على أن السعرات الحرارية تشتق من الجهد بغض النظر عن شكله سواء أكان جهدًا كيميائيًّا أو ميكانيكيًّا أو كهربائيًّا. ساعد الطلاب على أن يتذكروا أن $٣,٦ \times ١٠^{٩}$ تساوي ٣ ٦٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠.

أشر إلى أن ترتيب البلدان في المصفوفة يمكن أن يكون الترتيب نفسه للبلدان في الرسم البياني. اطلب إلى الطلاب أن يضع كل منهم إحدى أصابعه على البلد في الرسم، وإصبعًا أخرى على البلد نفسه في المصفوفة لمقارنة البيانات.

اطلب إليهم كتابة المصفوفة بطريقة ثانية.

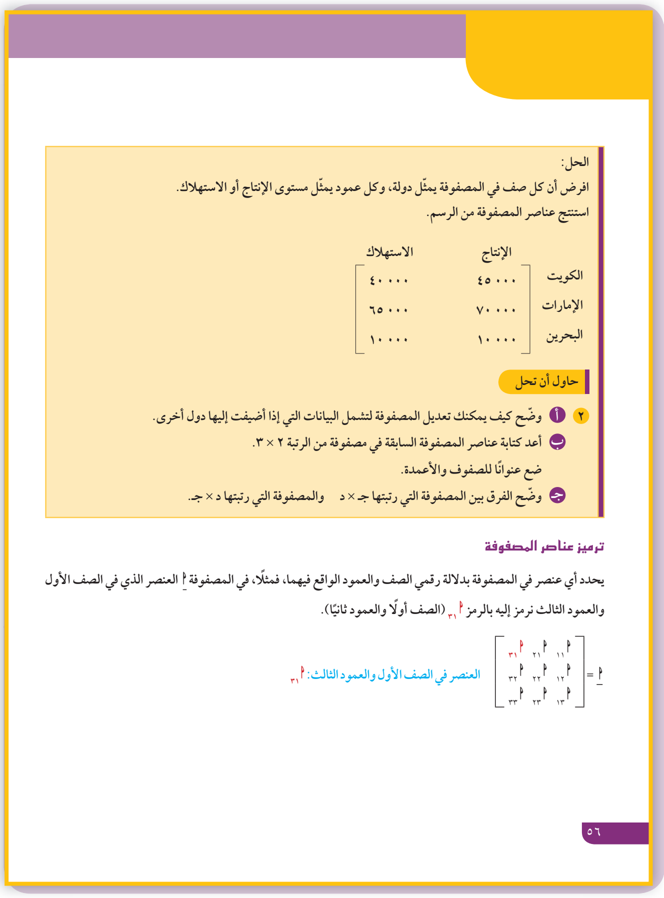
$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{الكويت} & \text{الإمارات} & \text{البحرين} \end{array} \\ \text{إنتاج} & \left[\begin{array}{ccc} ٤٥\,٠٠٠ & ٧٠\,٠٠٠ & ١٠\,٠٠٠ \end{array}\right. \\ \text{استهلاك} & \left.\begin{array}{ccc} ٤٠\,٠٠٠ & ٦٥\,٠٠٠ & ١٠\,٠٠٠ \end{array}\right] \end{array}$$

مصفوفة برتبة: ٢ × ٣

في المثال (٦)

أكد للطلاب أن المصفوفتين متساويتان في حال كانت جميع العناصر المتناظرة متساوية.

يجب التأكد من أن كافة عناصر المصفوفتين متساوية قبل البدء بحل المعادلات لإيجاد المجهول.


الحل:
افرض أن كل صف في المصفوفة يمثّل دولة، وكل عمود يمثّل مستوى الإنتاج أو الاستهلاك.
استنتج عناصر المصفوفة من الرسم.

	الإنتاج	الاستهلاك
الكويت	٤٥ ٠٠٠	٤٠ ٠٠٠
الإمارات	٧٠ ٠٠٠	٦٥ ٠٠٠
البحرين	١٠ ٠٠٠	١٠ ٠٠٠

حاول أن تحل

٢ أ وضّح كيف يمكنك تعديل المصفوفة لتشمل البيانات التي إذا أضيفت إليها دول أخرى.
ب أعد كتابة عناصر المصفوفة السابقة في مصفوفة من الرتبة ٢ × ٣.
ضع عنوانًا للصفوف والأعمدة.
جـ وضّح الفرق بين المصفوفة التي رتبتها جـ × د والمصفوفة التي رتبتها د × جـ.

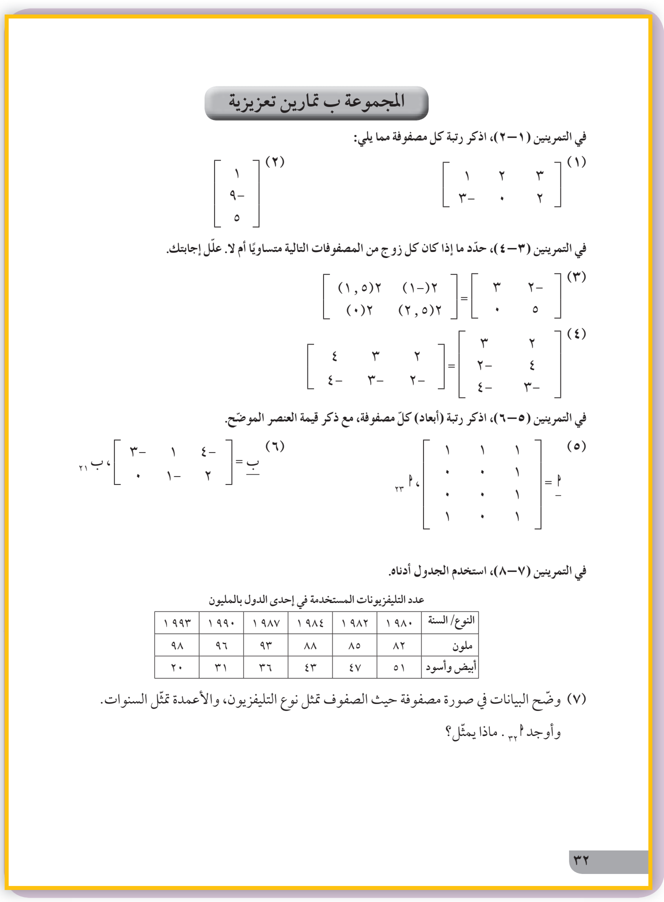
ترميز عناصر المصفوفة

يحدد أي عنصر في المصفوفة بدلالة رقمي الصف والعمود الواقع فيهما، فمثلًا، في المصفوفة أ العنصر الذي في الصف الأول والعمود الثالث نرمز إليه بالرمز $أ_{٣١}$ (الصف أولًا والعمود ثانيًا).

$$أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{bmatrix}$$

العنصر في الصف الأول والعمود الثالث: $أ_{٣١}$

٥٦


المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمرينين (١–٢)، اذكر رتبة كل مصفوفة مما يلي:

(١) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٠ & -٣ \end{bmatrix}$ (٢) $\begin{bmatrix} ١ \\ -٩ \\ ٥ \end{bmatrix}$

في التمرينين (٣–٤)، حدّد ما إذا كان كل زوج من المصفوفات التالية متساويًا أم لا. علّل إجابتك.

(٣) $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢(-١) & ٢(١,٥) \\ ٢(٢,٥) & ٢(٠) \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -٢ \\ -٣ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ -٢ & -٣ & -٤ \end{bmatrix}$

في التمرينين (٥–٦)، اذكر رتبة (أبعاد) كلّ مصفوفة، مع ذكر قيمة العنصر الموضّح.

(٥) $أ = \begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$، $أ_{٢٣}$ (٦) $ب = \begin{bmatrix} -٤ & ١ & -٣ \\ ٢ & -١ & ٠ \end{bmatrix}$، $ب_{٢١}$

في التمرينين (٧–٨)، استخدم الجدول أدناه.

عدد التليفزيونات المستخدمة في إحدى الدول بالمليون

النوع/ السنة	١٩٨٠	١٩٨٢	١٩٨٤	١٩٨٧	١٩٩٠	١٩٩٣
ملون	٨٢	٨٥	٨٨	٩٣	٩٦	٩٨
أبيض وأسود	٥١	٤٧	٤٣	٣٦	٣١	٢٠

(٧) وضّح البيانات في صورة مصفوفة حيث الصفوف تمثل نوع التليفزيون، والأعمدة تمثّل السنوات.
وأوجد $أ_{٣٢}$. ماذا يمثّل؟

٣٢

٦ الربط

في المثال (٢)، تقوم الدول بحملات إرشاد في استهلاك الطاقة حماية للبيئة من التلوث والانبعاث الحراري.

ناقش مع الطلاب كيفية الحد من استهلاك الطاقة الكهربائية وأثر ذلك على البيئة.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في قراءة البيانات وفق مواقعها في المصفوفة أو لا يتمكنون من تعريف موقع عنصر في المصفوفة.
ساعدهم على تحديد معنى كل عنصر في المصفوفة ومرتبته في الصف وفي العمود.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يحلون فقرات «حاول أن تحل»، تأكد من أن إجاباتهم صحيحة. أرشدهم ما إذا واجهوا مشاكل في حلها.

اختبار سريع

١ اكتب رتبة المصفوفة: $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٤ & ٨ \\ ٠ & -٥ & ٣ & ٩ \\ ١ & ٦ & ٢ & -١ \end{bmatrix}$ ٣ × ٤

٢ حدد العنصر $أ_{٤٢}$، $أ_{٢٣}$، $أ_{٣١}$ ٠، ٢، ٠

٣ إذا كانت $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٤ & س + ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ص - ٢ \\ ص - ١ & ٥ \end{bmatrix}$

فأوجد قيمة كل من س، ص س = ٤، ص = ٥


مثال (٣)

في المصفوفة: ب = $\begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ١ & ١٢ \\ ٣,٥ & ٢ & ٦ & ٢ \\ -٤ & ١ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ اكتب قيمة كل عنصر مما يلي:

أ $ب_{٢٢}$ ب $ب_{١٣}$ جـ $ب_{١١}$

الحل:

أ العنصر $ب_{٢٢}$ يقع في الصف ٢ وفي العمود ٢ ∴ $ب_{٢٢}$ = ٦

ب العنصر $ب_{١٣}$ يقع في الصف ٣ وفي العمود ١ ∴ $ب_{١٣}$ = ١

جـ العنصر $ب_{١١}$ يقع في الصف ١ وفي العمود ١ ∴ $ب_{١١}$ = ١٢

حاول أن تحل

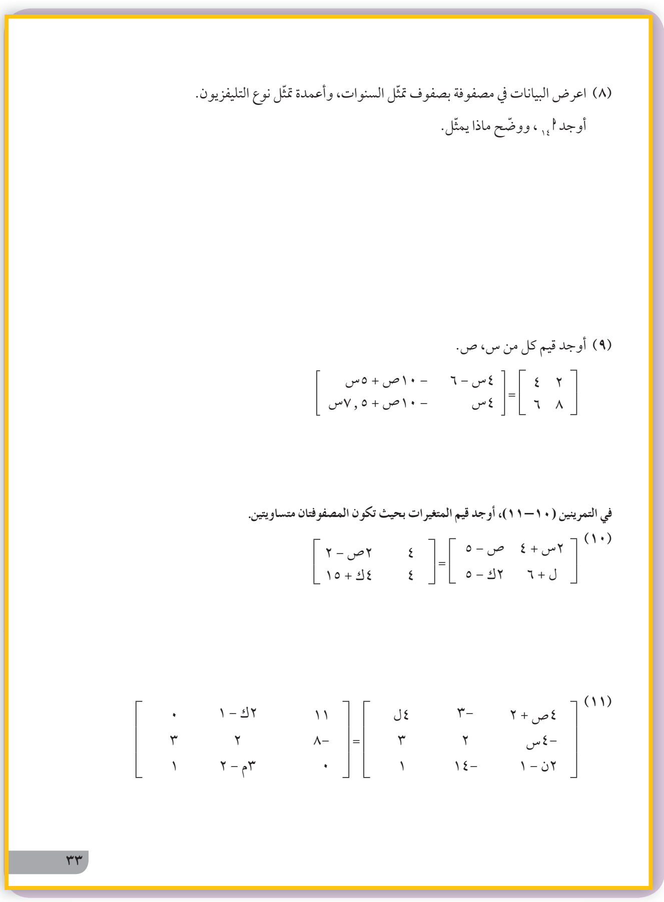
٣ في المثال (٣)، أوجد $ب_{٢٣}$ من المصفوفة ب.

المصفوفات: المربعة، الأفقية، العمودية

Horizontal and Vertical Matrices Square,

- المصفوفة المربعة: هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.
  وفي ما عدا ذلك، تسمى المصفوفة: مصفوفة مستطيلة Rectangular Matrix.
- المصفوفة الأفقية: هي مصفوفة مكونة من صف واحد Horizontal Matrix.
- المصفوفة العمودية: هي مصفوفة مكونة من عمود واحد Vertical Matrix.
- فكر وناقش: هل يمكن لمصفوفة أن تكون عمودية وأفقية معًا؟

٥٧


(٨) اعرض البيانات في مصفوفة بصفوف تمثّل السنوات، وأعمدة تمثّل نوع التليفزيون.
أوجد $أ_{١٤}$، ووضّح ماذا يمثّل.

(٩) أوجد قيم كل من س، ص.

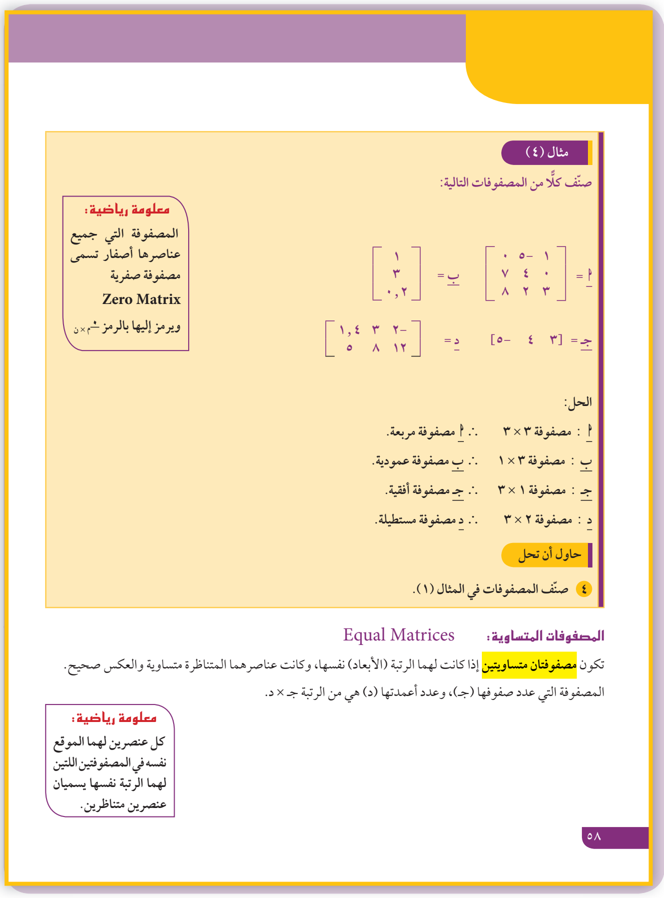
$$\begin{bmatrix} -١٠ص + ٥س & ٤س - ٦ \\ -١٠ص + ٧,٥س & ٤س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ٨ \end{bmatrix}$$

في التمرينين (١٠–١١)، أوجد قيم المتغيرات بحيث تكون المصفوفتان متساويتين.

(١٠) $$\begin{bmatrix} ٢ص - ٢ & ٤ \\ ٤ك + ١٥ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص - ٥ & ٢س + ٤ \\ ٢ك - ٥ & ل + ٦ \end{bmatrix}$$

(١١) $$\begin{bmatrix} ٠ & ٢ك - ١ & ١١ \\ ٣ & ٢ & -٨ \\ ١ & ٣م - ٢ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ل & -٣ & ٤ص + ٢ \\ ٣ & ٢ & -٤س \\ ١ & -١٤ & ٢ن - ١ \end{bmatrix}$$

٣٣


مثال (٤)

صنّف كلًّا من المصفوفات التالية:

$أ = \begin{bmatrix} ١ & -٥ & ٠ \\ ٠ & ٤ & ٧ \\ ٣ & ٢ & ٨ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٠,٢ \end{bmatrix}$

$جـ = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & -٥ \end{bmatrix}$ ، $د = \begin{bmatrix} -٢ & ٣ & ١,٤ \\ ١٢ & ٨ & ٥ \end{bmatrix}$

معلومة رياضية:
المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار تسمى مصفوفة صفرية
Zero Matrix
ويرمز إليها بالرمز $\dot{-}_{م \times ن}$

الحل:

أ : مصفوفة ٣ × ٣ ∴ أ مصفوفة مربعة.

ب : مصفوفة ٣ × ١ ∴ ب مصفوفة عمودية.

جـ : مصفوفة ١ × ٣ ∴ جـ مصفوفة أفقية.

د : مصفوفة ٢ × ٣ ∴ د مصفوفة مستطيلة.

حاول أن تحل

٤ صنّف المصفوفات في المثال (١).

المصفوفات المتساوية: Equal Matrices

تكون **مصفوفتان متساويتين** إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية والعكس صحيح.

المصفوفة التي عدد صفوفها (جـ)، وعدد أعمدتها (د) هي من الرتبة جـ × د.

معلومة رياضية:
كل عنصرين لهما الموقع نفسه في المصفوفتين اللتين لهما الرتبة نفسها يسميان عنصرين متناظرين.

٥٨

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

١ $\dfrac{١٥١,١ - ١٤٦,٠}{١٤٦,٠} = ٠,٠٣٤٩$ أي ٣,٥٪.

٢ المواد الغذائية: ٨,١٪؛ الحلويات: ٣,٦٪؛

الملابس: ٣,٢٣٪ خدمات المسكن: ٢٪؛

سلع وخدمات منزلية: ١,٨٪.

أكبر نسبة زيادة كانت في المواد الغذائية، وأصغر نسبة زيادة كانت في السلع والخدمات المنزلية.

«حاول أن تحل»

١ أ ٢ × ٣ ب ١ × ٣ جـ ٣ × ٢

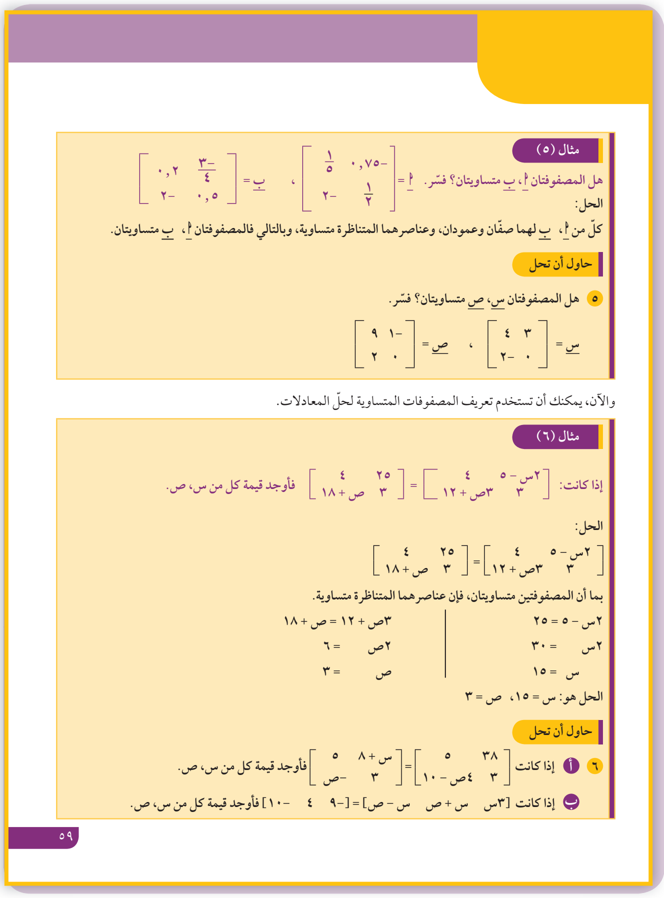
٢ (أ) بإضافة صفّ واحد لكل دولة مضافة بمعرفة الإنتاج والاستهلاك.

(ب)

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{الكويت} & \text{الإمارات} & \text{البحرين} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{الإنتاج} \\ \text{الاستهلاك} \end{array} & \begin{bmatrix} ٤٥٠٠٠٠ & ٧٠٠٠٠٠ & ١٠٠٠٠٠ \\ ٤٠٠٠٠٠ & ٦٥٠٠٠٠ & ١٠٠٠٠٠ \end{bmatrix} \end{array}$$

(جـ) المصفوفة التي رتبتها جـ × د تتضمن جـ صفًّا، د عمودًا.

أما المصفوفة التي رتبتها د × جـ فتتضمن د صفًّا، جـ عمودًا.


مثال (٥)

هل المصفوفتان أ، ب متساويتان؟ فسّر. $أ = \begin{bmatrix} -٠٫٧٥ & \frac{١}{٥} \\ \frac{١}{٢} & -٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} \frac{-٣}{٤} & ٠٫٢ \\ ٠٫٥ & -٢ \end{bmatrix}$

الحل:

كلّ من أ، ب لهما صفّان وعمودان، وعناصرهما المتناظرة متساوية، وبالتالي فالمصفوفتان أ، ب متساويتان.

حاول أن تحل

٥ هل المصفوفتان س، ص متساويتان؟ فسّر.

$س = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} -١ & ٩ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$

والآن، يمكنك أن تستخدم تعريف المصفوفات المتساوية لحلّ المعادلات.

مثال (٦)

إذا كانت: $\begin{bmatrix} ٢س - ٥ & ٤ \\ ٣ & ٣ص + ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٤ \\ ٣ & ص + ١٨ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

الحل:

$\begin{bmatrix} ٢س - ٥ & ٤ \\ ٣ & ٣ص + ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٤ \\ ٣ & ص + ١٨ \end{bmatrix}$

بما أن المصفوفتين متساويتان، فإن عناصرهما المتناظرة متساوية.

٢س − ٥ = ٢٥	٣ص + ١٢ = ص + ١٨
٢س = ٣٠	٢ص = ٦
س = ١٥	ص = ٣

الحل هو: س = ١٥، ص = ٣

حاول أن تحل

٦ أ إذا كانت $\begin{bmatrix} ٣٨ & ٥ \\ ٣ & ٤ص - ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س + ٨ & ٥ \\ ٣ & -ص \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

ب إذا كانت [٣س س + ص س − ص] = [−٩ ٤ −١٠] فأوجد قيمة كل من س، ص.

٥٩

٣ ب$_{٢٣}$ = ٠ (صفر)

٤ أ: مصفوفة مربعة، ب: مصفوفة أفقية،

جـ: مصفوفة عمودية.

٥ كلّا. لأنّ العناصر المتناظرة ليست متساوية.

٦ (أ) ٣٨ = س + ٨ ∴ س = ٣٠

٤ص − ١٠ = −ص ∴ ص = ٢

(ب) ٣س = −٩ ∴ س = −٣

س + ص = ٤ ∴ ص = ٧

للتحقق: س − ص = −٣ − ٧ = −١٠

٧-٢: جمع وطرح المصفوفات

١ الأهداف

- يجمع المصفوفات ويطرحها.
- يحل معادلات مصفوفية.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

عناصر متناظرة – خاصية الإغلاق – خاصية الإبدال – خاصية التجميع – المصفوفة الصفرية – المعكوس الجمعي.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اكتب على السبورة:

(٤س + ٣ص + ٦ع) + (٢س + ٤ص + ٣ع)

واطلب إلى أحد المتطوعين من الطلاب أن يجد الناتج، ثم اطلب إلى آخر إيجاد الناتج لما يلي:

(٤س + ٣ص + ٦ع) − (٢س + ٤ص + ٣ع)

ذكّر الطلّاب أنه عند جمع تعبيرين أو عند طرحهما يجب جمع الحدود المتشابهة أو طرح الحدود المتشابهة.

اكتب على السبورة مصفوفتين مثل:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} -٣ & ٦ & ٢ \\ ٢ & ٣ & ٤ \end{bmatrix} ، \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ -٤ & ٤ & -٣ \end{bmatrix}$$

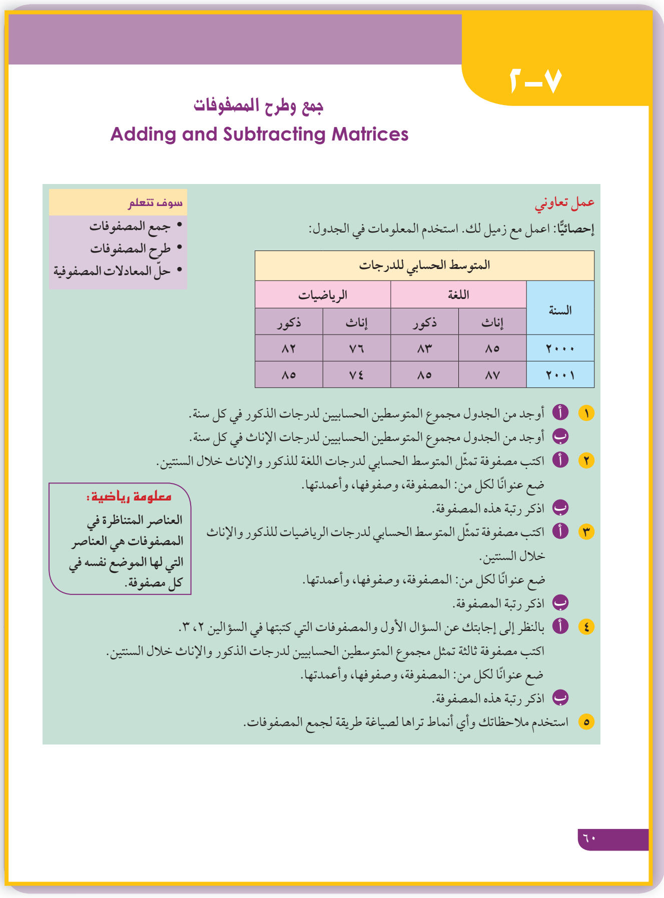
وناقش مع الطلّاب كيفية إيجاد:

$\underline{أ} + \underline{ب}$ ثم $\underline{أ} - \underline{ب}$.

٥ التدريس

ذكر الطلّاب بتعريف المتوسط الحسابي للبيانات قبل البدء بالإجابة عن الأسئلة الموجودة في فقرة «عمل تعاوني».

ساعد الطلاب على فهم الأسئلة الموجودة في فقرة «عمل تعاوني»، تجول بينهم لتتأكد من إجاباتهم. اسألهم إذا كان بإمكانهم الربط بين الإجابات التي حصلوا عليها في السؤالين ١ (أ) وَ ١ (ب) والأسئلة ٢ و ٣.



٧-٢

جمع وطرح المصفوفات
Adding and Subtracting Matrices

عمل تعاوني

إحصائيًّا: اعمل مع زميل لك. استخدم المعلومات في الجدول:

السنة	المتوسط الحسابي للدرجات: اللغة – إناث	اللغة – ذكور	الرياضيات – إناث	الرياضيات – ذكور
٢٠٠٠	٨٥	٨٣	٧٦	٨٢
٢٠٠١	٨٧	٨٥	٧٤	٨٥

١ (أ) أوجد من الجدول مجموع المتوسطين الحسابيين لدرجات الذكور في كل سنة.
(ب) أوجد من الجدول مجموع المتوسطين الحسابيين لدرجات الإناث في كل سنة.

٢ (أ) اكتب مصفوفة تمثّل المتوسط الحسابي لدرجات اللغة للذكور والإناث خلال السنتين.
ضع عنوانًا لكل من: المصفوفة، وصفوفها، وأعمدتها.
(ب) اذكر رتبة هذه المصفوفة.

٣ (أ) اكتب مصفوفة تمثّل المتوسط الحسابي لدرجات الرياضيات للذكور والإناث خلال السنتين.
ضع عنوانًا لكل من: المصفوفة، وصفوفها، وأعمدتها.
(ب) اذكر رتبة المصفوفة.

٤ (أ) بالنظر إلى إجابتك عن السؤال الأول والمصفوفات التي كتبتها في السؤالين ٢، ٣.
اكتب مصفوفة ثالثة تمثل مجموع المتوسطين الحسابيين لدرجات الذكور والإناث خلال السنتين.
ضع عنوانًا لكل من: المصفوفة، وصفوفها، وأعمدتها.
(ب) اذكر رتبة هذه المصفوفة.

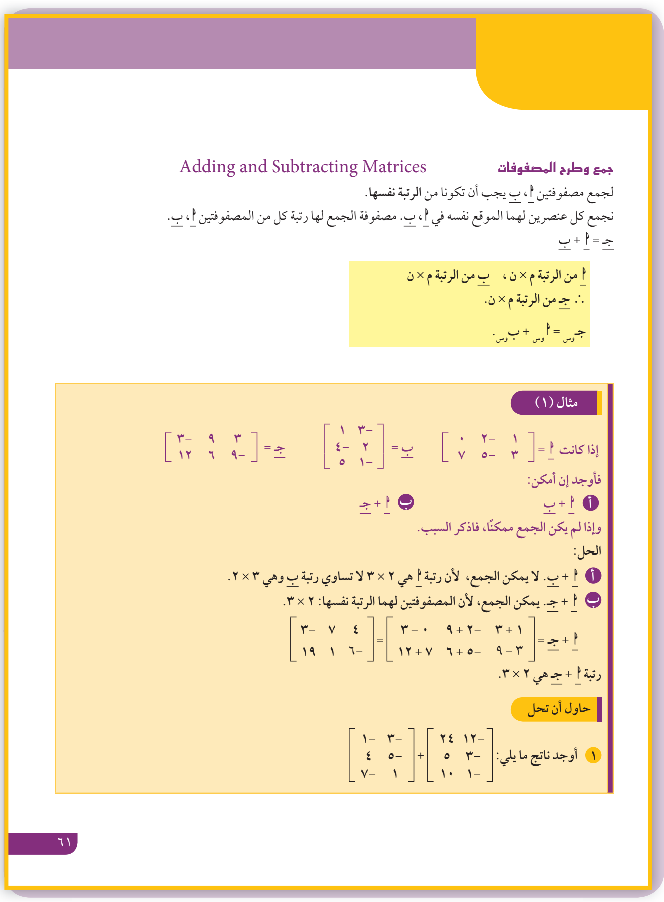
٥ استخدم ملاحظاتك وأي أنماط تراها لصياغة طريقة لجمع المصفوفات.

سوف تتعلم

- جمع المصفوفات
- طرح المصفوفات
- حلّ المعادلات المصفوفية

معلومة رياضية:
العناصر المتناظرة في المصفوفات هي العناصر التي لها الموضع نفسه في كل مصفوفة.

٦٠



جمع وطرح المصفوفات Adding and Subtracting Matrices

لجمع مصفوفتين $\underline{أ}$، $\underline{ب}$ يجب أن تكونا من **الرتبة نفسها**.

نجمع كل عنصرين لهما الموقع نفسه في $\underline{أ}$، $\underline{ب}$. مصفوفة الجمع لها رتبة كل من المصفوفتين $\underline{أ}$، $\underline{ب}$.

$\underline{جـ} = \underline{أ} + \underline{ب}$

$\underline{أ}$ من الرتبة م × ن ، $\underline{ب}$ من الرتبة م × ن
∴ $\underline{جـ}$ من الرتبة م × ن.
$جـ_{وس} = أ_{وس} + ب_{وس}$.

مثال (١)

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & -٢ & ١ \\ ٧ & -٥ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ -٤ & ٢ \\ ٥ & -١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} -٣ & ٩ & ٣ \\ ١٢ & ٦ & -٩ \end{bmatrix}$

فأوجد إن أمكن:

(أ) $\underline{أ} + \underline{ب}$ (ب) $\underline{أ} + \underline{جـ}$

وإذا لم يكن الجمع ممكنًا، فاذكر السبب.

الحل:

(أ) $\underline{أ} + \underline{ب}$. لا يمكن الجمع، لأن رتبة $\underline{أ}$ هي ٢ × ٣ لا تساوي رتبة $\underline{ب}$ وهي ٣ × ٢.

(ب) $\underline{أ} + \underline{جـ}$. يمكن الجمع، لأن المصفوفتين لهما الرتبة نفسها: ٢ × ٣.

$$\underline{أ} + \underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٠ - ٣ & -٢ + ٩ & ١ + ٣ \\ ٧ + ١٢ & -٥ + ٦ & ٣ - ٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & ٧ & ٤ \\ ١٩ & ١ & -٦ \end{bmatrix}$$

رتبة $\underline{أ} + \underline{جـ}$ هي ٢ × ٣.

حاول أن تحل

١ أوجد ناتج ما يلي: $\begin{bmatrix} ٢٤ & -١٢ \\ ٥ & -٣ \\ ١٠ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & -٣ \\ ٤ & -٥ \\ -٧ & ١ \end{bmatrix}$

٦١

مثال (٢) **تطبيقات حياتية**

الرياضة: في رياضة الخماسيّ الحديث، والتي تجرى منافسات فيها على مدار يوم واحد، يكون على كلّ متسابق أو لاعب أن يشارك في الألعاب الخمس: الرماية، المبارزة بالسيف، السباحة، الفروسيّة، اختراق الضاحية.

كون مصفوفة لكل لعبة من الجدول التالي ثم أوجد مجموع النقاط التي حصل عليها كلّ لاعب في الألعاب الخمس أثناء منافساتهم في إحدى البطولات.

الرياضة / اللاعب	رماية	مبارزة بالسيف	سباحة	فروسية	اختراق الضاحية
الأوّل	١ ١٥٦	٨١٦	١ ١٨٨	٨٨٩	١ ١٦٨
الثاني	١ ٠٣٦	٨١٦	١ ٢٨٠	٨٢٦	١ ٢١٠
الثالث	١ ٠٢٤	٦٧٨	١ ٢٩٦	١ ٠٧٠	١ ٢٧٠

الحل:

اكتب خمس مصفوفات ٣ × ١، ثم اجمع المصفوفات:

الرماية $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ ١٥٦ \\ ١ ٠٣٦ \\ ١ ٠٢٤ \end{bmatrix}$ ، المبارزة $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٨١٦ \\ ٨١٦ \\ ٦٧٨ \end{bmatrix}$ ، السباحة $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ١ ١٨٨ \\ ١ ٢٨٠ \\ ١ ٢٩٦ \end{bmatrix}$ ، الفروسية $\underline{د} = \begin{bmatrix} ٨٨٩ \\ ٨٢٦ \\ ١ ٠٧٠ \end{bmatrix}$ ، اختراق الضاحية $\underline{هـ} = \begin{bmatrix} ١ ١٦٨ \\ ١ ٢١٠ \\ ١ ٢٧٠ \end{bmatrix}$

$$\underline{أ} + \underline{ب} + \underline{جـ} + \underline{د} + \underline{هـ} = \begin{bmatrix} ١ ١٥٦ \\ ١ ٠٣٦ \\ ١ ٠٢٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٨١٦ \\ ٨١٦ \\ ٦٧٨ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ ١٨٨ \\ ١ ٢٨٠ \\ ١ ٢٩٦ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٨٨٩ \\ ٨٢٦ \\ ١ ٠٧٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ ١٦٨ \\ ١ ٢١٠ \\ ١ ٢٧٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ ١٥٦ + ٨١٦ + ١ ١٨٨ + ٨٨٩ + ١ ١٦٨ \\ ١ ٠٣٦ + ٨١٦ + ١ ٢٨٠ + ٨٢٦ + ١ ٢١٠ \\ ١ ٠٢٤ + ٦٧٨ + ١ ٢٩٦ + ١ ٠٧٠ + ١ ٢٧٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ ٢١٧ \\ ٥ ١٦٨ \\ ٥ ٣٣٨ \end{bmatrix}$$

وبالتالي فاللاعب الفائز في هذه الألعاب هو اللاعب الثالث.

٦٢

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٧-٢

جمع وطرح المصفوفات

Adding And Subtracting Matrices

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمرينين (١–٢)، أوجد ناتج كلّ مما يلي:

(١) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} ٦ & -٣ \\ -٧ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٦ & ٣ \\ ٧ & -٢ \end{bmatrix}$

في التمرينين (٣–٤)، استخدم الحساب الذهني أو الورقة والقلم أو الآلة الحاسبة لإيجاد الناتج:

(٣) $\begin{bmatrix} ٦ & -٩ & ٠ \\ -٨ & ٥ & ٧ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٢ & -٤ & ١ \\ ٣ & ١١ & ١٠ \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \\ ٦ & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ -٣ & ٦ \\ -٥ & ٧ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ٣ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

في التمارين (٥–٩)، اذكر ما إذا كان الجمع أو الطرح ممكنًا أو غير ممكن مع تفسير إجابتك:

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & \frac{١}{٢} & ٤ & ٥ \\ ٢ & \frac{٣}{٥} & ٨ & ٩ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٠,٣٣ & ٤ \\ -٧ & ٠,١٥ \end{bmatrix}$

$\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤٤ \\ ١ & ٠ \\ ١٤ & ٢٣,٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{د} = \begin{bmatrix} -٢ & -٤ & \frac{٧}{٨} & \frac{١١}{٢} \\ ٣ & ٢ & -١ & -\frac{١٠}{١١} \end{bmatrix}$

(٥) $\underline{أ} + \underline{د}$

٣٤

اطرح عليهم أسئلة مشابهة للسؤال التالي: هل المتوسط الحسابي للإناث في سنة ٢٠٠٠ (لغة ورياضيات) هو نفسه العنصر الأول من الصف الأول من العمود الأول في المصفوفة التي حصلت عليها في السؤال ٤ ؟

أكّد للطلاب أنه عند جمع المصفوفات أو طرحها يجب دائمًا استخدام العناصر المتناظرة وأن تكون المصفوفات من الرتبة نفسها.

في المثال (٢)، اشرح للطلاب أن هناك ثلاثة لاعبين وخمس لعبات رياضية، لذلك يوجد ثلاث مجموعات من النتائج حيث لكل لاعب نتيجة وبذلك يمكن معرفة اللاعب الفائز في الألعاب الخمس.

٦ الربط

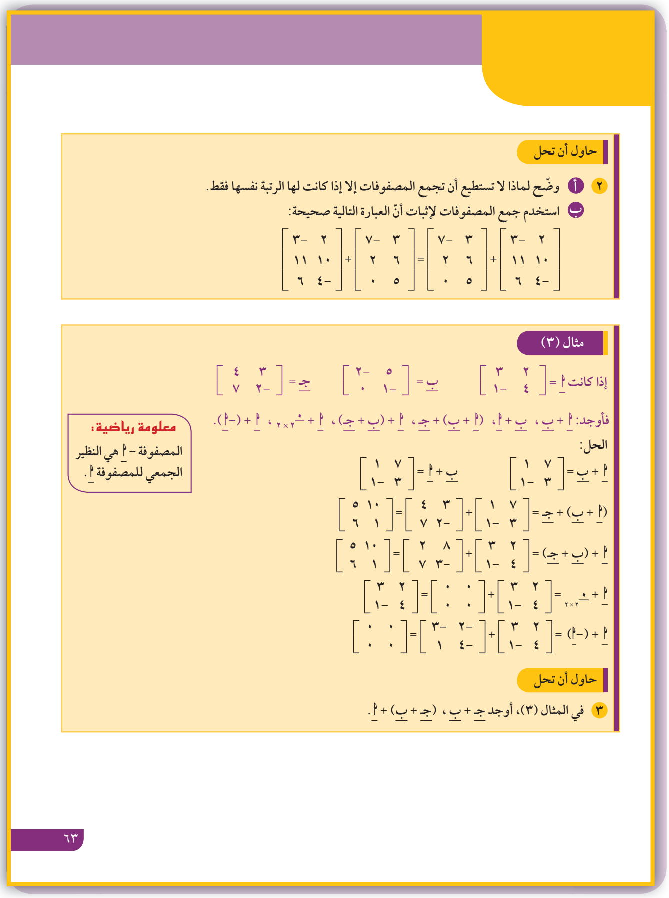
في المثال (٢)، يستخدم المدربون الرياضيون المصفوفات لعرض النتائج مما يسهل عليهم العمل على الرياضيين لجهة تحسين آدائهم بغية تحقيق مراكز متقدمة في المباريات.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في جمع أو طرح المصفوفات. شدد على أن يجمع الطلاب أو يطرحوا فقط العناصر المتناظرة في المصفوفات.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل»، تأكد من إجاباتهم وأرشدهم عند الضرورة.



حاول أن تحل

٢ (أ) وضّح لماذا لا تستطيع أن تجمع المصفوفات إلا إذا كانت لها الرتبة نفسها فقط.

(ب) استخدم جمع المصفوفات لإثبات أنّ العبارة التالية صحيحة:

$$\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ١٠ & ١١ \\ -٤ & ٦ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & -٧ \\ ٦ & ٢ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٧ \\ ٦ & ٢ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ١٠ & ١١ \\ -٤ & ٦ \end{bmatrix}$$

مثال (٣)

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix}$

فأوجد: أ + ب ، ب + أ ، (أ + ب) + جـ ، أ + (ب + جـ) ، أ + $٠_{٢ \times ٢}$ ، أ + (−أ).

الحل:

أ + ب = $\begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ ، ب + أ = $\begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$

(أ + ب) + جـ = $\begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٥ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$

أ + (ب + جـ) = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ -٣ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٥ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$

أ + $٠_{٢ \times ٢}$ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$

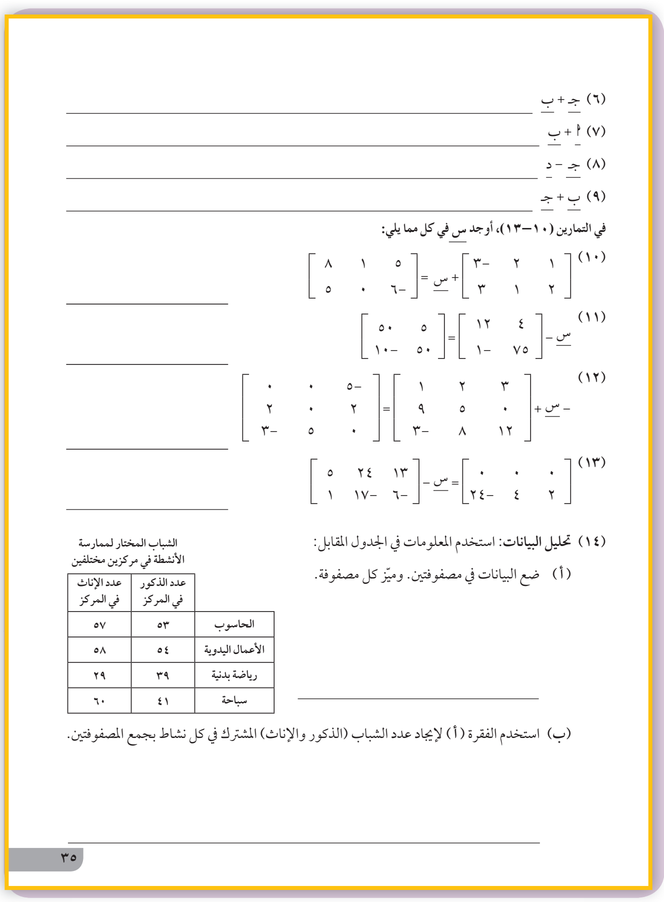
أ + (−أ) = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & -٣ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

معلومة رياضية: المصفوفة −أ هي النظير الجمعي للمصفوفة أ.

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، أوجد جـ + ب ، (جـ + ب) + أ.

٦٣



(٦) جـ + ب

(٧) أ + ب

(٨) جـ − د

(٩) ب + جـ

في التمارين (١٠–١٣)، أوجد س في كل مما يلي:

(١٠) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{bmatrix} + س = \begin{bmatrix} ٥ & ١ & ٨ \\ -٦ & ٠ & ٥ \end{bmatrix}$

(١١) $س - \begin{bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ٧٥ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٥٠ \\ ٥٠ & -١٠ \end{bmatrix}$

(١٢) $-س + \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ & ٩ \\ ١٢ & ٨ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٥ & -٣ \end{bmatrix}$

(١٣) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٤ & -٢٤ \end{bmatrix} = س - \begin{bmatrix} ١٣ & ٢٤ & ٥ \\ -٦ & -١٧ & ١ \end{bmatrix}$

(١٤) **تحليل البيانات:** استخدم المعلومات في الجدول المقابل:

(أ) ضع البيانات في مصفوفتين. وميّز كل مصفوفة.

الشباب المختار لممارسة الأنشطة في مركزين مختلفين

	عدد الذكور في المركز	عدد الإناث في المركز
الحاسوب	٥٣	٥٧
الأعمال اليدوية	٥٤	٥٨
رياضة بدنية	٣٩	٢٩
سباحة	٤١	٦٠

(ب) استخدم الفقرة (أ) لإيجاد عدد الشباب (الذكور والإناث) المشترك في كل نشاط بجمع المصفوفتين.

٣٥

اختبار سريع

أوجد ناتج كل مما يلي:

١ $\begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٠ & -١٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٩ & ٦ \\ ٦ & -٥ \end{bmatrix}$ $\qquad \begin{bmatrix} -٧ & ١٤ \\ ٦ & -١٧ \end{bmatrix}$

٢ $\begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٤ & ٨ \\ -٥ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٣ & -٢ \\ ٩ & ٥ \\ ٤ & -٦ \end{bmatrix}$ $\qquad \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ -٥ & ٣ \\ -٩ & ١٠ \end{bmatrix}$

٣ $س - \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٧ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$ $\qquad \begin{bmatrix} ٦ & ١٠ \\ ١ & ١١ \end{bmatrix}$

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

١ (أ) ١٦٥؛ ١٧٠

(ب) ١٦١؛ ١٦١

٢ (أ)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{إناث} & \text{ذكور} \end{array} \\ \begin{array}{c} ٢٠٠٠ \\ ٢٠٠١ \end{array} & \begin{bmatrix} ٨٥ & ٨٣ \\ ٨٧ & ٨٥ \end{bmatrix} \end{array}$$

متوسط درجات اللغة

(ب) رتبة المصفوفة: ٢ × ٢

٣ (أ)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{إناث} & \text{ذكور} \end{array} \\ \begin{array}{c} ٢٠٠٠ \\ ٢٠٠١ \end{array} & \begin{bmatrix} ٧٦ & ٨٢ \\ ٧٤ & ٨٥ \end{bmatrix} \end{array}$$

متوسط درجات الرياضيات

(ب) رتبة المصفوفة: ٢ × ٢

٤ (أ)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{إناث} & \text{ذكور} \end{array} \\ \begin{array}{c} ٢٠٠٠ \\ ٢٠٠١ \end{array} & \begin{bmatrix} ١٦١ & ١٦٥ \\ ١٦١ & ١٧٠ \end{bmatrix} \end{array}$$

مجموع المتوسطين الحسابيين لدرجات الذكور والإناث.

(ب) رتبة المصفوفة: ٢ × ٢

٥ لجمع المصفوفات يجب أن يكون لها الرتبة نفسها، ويجب أن نجمع العناصر المتناظرة.

«حاول أن تحل»

١
$$\begin{bmatrix} ٢٣ & ١٥- \\ ٩ & ٨- \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$$

٢ (أ) لا يمكن إيجاد ناتج:

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٤ & ٨ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix}$$

لأن المصفوفة الأولى من الرتبة ٢ × ٢ والمصفوفة الثانية من الرتبة ٢ × ٣، وبالتالي لا يوجد في المصفوفة الأولى عناصر متناظرة مع العمود الثالث في المصفوفة الثانية.

(ب)
$$\begin{bmatrix} ١٠- & ٥ \\ ١٣ & ١٦ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠- & ٥ \\ ١٣ & ١٦ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$$

العناصر المتناظرة هي نفسها.

خواص جمع المصفوفات

إذا كان أ ، ب ، جـ مصفوفات من الرتبة م × ن فإن:

- أ + ب هي من الرتبة م × ن — خاصية الإقفال (الانغلاق)
- أ + ب = ب + أ — خاصية الإبدال Commutative
- (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) — خاصية التجميع Associative
- $٠_{م×ن}$ + أ = أ + $٠_{م×ن}$ = أ — المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد الجمعي من الرتبة م × ن
- أ + (−أ) = $٠_{م×ن}$ — خاصية المعكوس الجمعي (النظير الجمعي).

طرح المصفوفات

يمكن طرح المصفوفات باستخدام خاصية مصفوفة المعكوس الجمعي.

إذا كان للمصفوفتين أ ، ب الرتبة نفسها، فإن أ − ب = أ + (−ب).

ملاحظة: إذا كان أ ≠ ب ولهما الرتبة نفسها فإن: أ − ب ≠ ب − أ وبالتالي، عملية طرح المصفوفات ليست إبدالية.

مثال (٤)

$$أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ & ١- \end{bmatrix} ، \quad ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ١ \\ ٤ & ٢ & ٢- \end{bmatrix}$$

أوجد أ − ب ، ب − أ

الحل:

الطريقة الأولى:

أ − ب = أ + (− ب)

$$= \begin{bmatrix} ٤ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ & ١- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣- & ٤- & ١- \\ ٤- & ٢- & ٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٤ + (٣-) & ٢ + (٤-) & ٣ + (١-) \\ ٠ + (٤-) & ٤ + (٢-) & ١- + (٢) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٢- & ٢ \\ ٤- & ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

الطريقة الثانية:

$$أ - ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ & ١- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ١ \\ ٤ & ٢ & ٢- \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٤ - ٣ & ٢ - ٤ & ٣ - ١ \\ ٠ - ٤ & ٤ - ٢ & ١- - (٢-) \end{bmatrix}$$

٦٤

(جـ) أوجد عدد الذكور − عدد الإناث المشتركين في كل نشاط.

المجموعة ب تمارين تعزيزية

الحساب الذهني: في التمارين (١ – ٤)، أوجد ناتج كلّ مما يلي:

(١) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ٣- & ٢ \\ ٧- & ٦ & ٥ \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ٥ \\ ٦ & ٢- & ١ \end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} ٥- & ٠ \\ ٢- & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ٠ \\ ٢ & ١- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} ٩,٥ & ٠,٥ \\ ٥,٥ & ٣,٥- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٩,٥ & ٠,٥ \\ ٥,٥ & ٣,٥- \end{bmatrix}$

(٥) **التصنيع**: يوضّح الجدول عدد كرات الشاطئ المنتجة في مصنعين ومستويات الإنتاج لفترة عمل واحدة. المصنع الأول يعمل فترتين كل يوم، والمصنع الثاني يعمل ثلاث فترات.

	المصنع الأول		المصنع الثاني	
	بلاستيك	مطاط	بلاستيك	مطاط
لون واحد	٥٠٠	٧٠٠	٤٠٠	١٢٠٠
ثلاثة ألوان	١٣٠٠	١٩٠٠	٦٠٠	١٦٠٠

(أ) اكتب مصفوفات لتمثل الإنتاج اليومي لكلّ مصنع.

٣٦

٣ $\underline{\text{جـ}}+\underline{\text{ب}}=\begin{bmatrix}٤&٣\\٧&-٢\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-٢&٥\\٠&-١\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}٢&٨\\٧&-٣\end{bmatrix}$

$(\underline{\text{جـ}}+\underline{\text{ب}})+\underline{\text{أ}}=\begin{bmatrix}٢&٨\\٧&-٣\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}٣&٢\\-١&٤\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}٥&١٠\\٦&١\end{bmatrix}$

٤ (أ) $\begin{bmatrix}٧&-١٢&١٠\\-٢&-٤&-٨\end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix}٤&٠\\١٤&-٣\end{bmatrix}$

٥ $\underline{\text{س}}=\begin{bmatrix}٧&٩\\٩&-٢\end{bmatrix}$

(ب) استخدم النتائج من الفقرة (أ). أوجد ناتج طرح المنتج الكلي في المصنع الثاني من المنتج الكلي في المصنع الأول.

في التمارين (٦–٨)، استخدم الحساب الذهني أو الورقة والقلم لإيجاد ناتج كلّ مما يلي:

(٦) $\begin{bmatrix}٢&-٤\\-٥&٩\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}٨&٢\\١&٤\end{bmatrix}$

(٧) $\begin{bmatrix}-٥&٢&٣\\٠&١&٦\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}٦&-٢&٠\\-٦&٥&-٥\end{bmatrix}$

(٨) $\begin{bmatrix}٨&-٧&٩\\-٤&-٣&٦\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}٢&-٥&١٠\\-٩&١&٤\end{bmatrix}$

(٩) **السؤال المفتوح:** صف موقفًا يتطلّب جمع أو طرح معلومات مخزّنة على صورة مصفوفات.

في التمارين (١٠–١٢)، اختر الحساب الذهني أو الورقة والقلم أو الآلة الحاسبة لإيجاد ناتج كلّ مما يلي:

(١٠) $\begin{bmatrix}٠&٠&-٢\\٥&-٤&١\\-١٠&٠&٧\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}٠&٢&١\\٥&-٤&٣\\-٢&٠&٧\end{bmatrix}$

(١١) $\begin{bmatrix}٦&١&-٩\\-٩&٠&-٥\\٣&-٢&٢\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}٤&٠&٨\\٧&-٦&٥\\-١&٢&-٢\end{bmatrix}$

(١٢) $\begin{bmatrix}٠&١\\٠&٠\\١&٠\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}١&٠\\١&٠\\٠&١\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}١&١\\٠&٠\\١&١\end{bmatrix}$

٣٧

$=\begin{bmatrix}١&-٢&٢\\-٤&٢&١\end{bmatrix}$

$\underline{\text{ب}}-\underline{\text{أ}}=\begin{bmatrix}٣&٤&١\\٤&٢&-٢\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}٤&٢&٣\\٠&٤&-١\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٣&٤&١\\٤&٢&-٢\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-٤&-٢&-٣\\٠&-٤&١\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}٣-٤&٤-٢&١-٣\\٤-٠&٢-٤&-٢-(-١)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-١&٢&-٢\\٤&-٢&-١\end{bmatrix}$

حاول أن تحل

٤ **أوجد ناتج كل مما يلي:**

أ $\begin{bmatrix}٧&-٩&٦\\٨&١&-٢\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}٠&٣&-٤\\١٠&٥&٦\end{bmatrix}$

ب $\begin{bmatrix}٥&-٣\\١٠&-١\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}١&-٣\\-٤&٢\end{bmatrix}$

حل المعادلات المصفوفية Solving Matrix Equations

المعادلة المصفوفية هي معادلة إحدى مصفوفاتها غير معلومة (المتغير).

يمكنك استخدام خواص المساواة لحل المعادلات المصفوفية.

لأي مصفوفات $\underline{\text{أ}}$، $\underline{\text{ب}}$، $\underline{\text{جـ}}$ لها الرتبة نفسها إذا كان: $\underline{\text{أ}}=\underline{\text{ب}}$، فإن: $\underline{\text{أ}}+\underline{\text{جـ}}=\underline{\text{ب}}+\underline{\text{جـ}}$، $\underline{\text{أ}}-\underline{\text{جـ}}=\underline{\text{ب}}-\underline{\text{جـ}}$.

مثال (٥)

حل المعادلة المصفوفية التالية:

$\underline{\text{س}}-\begin{bmatrix}١&١\\٢&٣\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}١&٠\\٩&٨\end{bmatrix}$

الحل:

$\underline{\text{س}}-\begin{bmatrix}١&١\\٢&٣\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}١&٠\\٩&٨\end{bmatrix}$

$\underline{\text{س}}-\begin{bmatrix}١&١\\٢&٣\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}١&١\\٢&٣\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}١&٠\\٩&٨\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}١&١\\٢&٣\end{bmatrix}$ بإضافة $\begin{bmatrix}١&١\\٢&٣\end{bmatrix}$ لكل من طرفي المعادلة

وبالتالي: $\underline{\text{س}}=\begin{bmatrix}٢&١\\١١&١١\end{bmatrix}$

حاول أن تحل

٥ أوجد $\underline{\text{س}}$ حيث:

$\underline{\text{س}}-\begin{bmatrix}٠&-١\\٥&٢\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٧&١٠\\٤&-٤\end{bmatrix}$

٦٥

في التمارين (١٣–١٦)، اذكر ما إذا كان الجمع أو الطرح ممكنًا أو غير ممكن:

$\underline{\text{أ}}=\begin{bmatrix}٥&٤&\frac{١}{٢}&١\\٩&٨&\frac{٣}{٥}&٢\end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}}=\begin{bmatrix}-٢&١\\٤&٠٫٣٣\\٠٫١٥&-٧\end{bmatrix}$

$\underline{\text{جـ}}=\begin{bmatrix}٤٤&٣\\٠&١\\٢٣٫٣&١٤\end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{د}}=\begin{bmatrix}\frac{١١}{٢}&\frac{٧}{٨}&-٤&-٢\\-\frac{١٠}{١١}&-١&٢&٣\end{bmatrix}$

(١٣) $\underline{\text{ب}}-\underline{\text{جـ}}$

(١٤) $\underline{\text{د}}+\underline{\text{أ}}$

(١٥) $\underline{\text{أ}}+\underline{\text{ب}}+\underline{\text{جـ}}$

(١٦) $\underline{\text{أ}}+(\underline{\text{جـ}}-\underline{\text{د}})$

في التمارين (١٧–٢٠)، أوجد $\underline{\text{س}}$ في كل مما يلي:

(١٧) $\begin{bmatrix}٢&١\\١&٢\\٤&-٣\end{bmatrix}+\underline{\text{س}}=\begin{bmatrix}-٦&٥\\٠&١\\٥&٨\end{bmatrix}$

(١٨) $\begin{bmatrix}-١&١&٢\\١&٢&٠\end{bmatrix}-\underline{\text{س}}=\begin{bmatrix}-١٣&٣&١١\\٨&-٩&١٥\end{bmatrix}$

(١٩) $\underline{\text{س}}-\begin{bmatrix}٧&١\\-٢&٣\\١&٠\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٧&١\\-٢&٣\\١&٠\end{bmatrix}$

(٢٠) $\underline{\text{س}}+\begin{bmatrix}٥&١٢\\٢٨&١٧\\٢&-٣\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٢٠&١٤\\٠&-٥\\-١٩&٣\end{bmatrix}$

٣٨

٧ـ٣: ضرب المصفوفات

١ الأهداف

- يضرب المصفوفة في عدد حقيقي (قياسي).
- يضرب المصفوفات.
- يوجد مربع المصفوفة.

٧ـ٣

ضرب المصفوفات

Matrix Multiplication

عمل تعاوني

اعمل مع زميل لك. استخدم البيانات في الجدول:

	مبيعات مطعم		
	وجبة ١	وجبة ٢	وجبة ٣
ثمن وجبة الغداء	٢,٥٠٠ دينار	١,٧٥٠ دينار	٢,٠٠٠ دينار
عدد الوجبات المباعة	٥٠	١٠٠	٧٥

سوف تتعلم
- ضرب مصفوفة في عدد
- الضرب القياسي
- ضرب المصفوفات

١ ما ثمن: وجبات الغداء ١، وجبات الغداء ٢، وجبات الغداء ٣؟

٢ أ ما ثمن الوجبات المباعة؟

ب وضح كيف استخدمت البيانات الموجودة في الجدول لإيجاد الإجابة.

٣ أ اكتب مصفوفة ١ × ٣ لتمثل ثمن كل وجبة مباعة.

ب اكتب مصفوفة ٣ × ١ لتمثل عدد الوجبات المباعة.

جـ **الكتابة**: استخدم الكلمات: (صف، عمود، عنصر) لتصف إجراءات استخدام المصفوفات التي حصلت عليها، لإيجاد المبلغ بالدينار الذي يبيع به المطعم جميع الوجبات.

ضرب مصفوفة في عدد Multiplying a Matrix by a Scalar

يمكنك أن تضرب عدد حقيقي في مصفوفة مثل:

$$\begin{bmatrix} ١٥ & ٦ \\ ٩- & ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣- & ٤ \end{bmatrix}٣$$

الضرب القياسي Scalar Multiplication

الضرب القياسي هو عملية ضرب مصفوفة أ في عدد حقيقي ك : ك ≠ ٠.

الناتج هو المصفوفة ك أ.

نحصل على المصفوفة ك أ بضرب كل عنصر من أ في ك.

إذا كان ك = ٠، يكون الناتج مصفوفة صفرية.

معلومة رياضية: رتبة المصفوفة ك أ تساوي رتبة المصفوفة أ.

٦٦

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

العدد القياسي – مصفوفة ناتج الضرب.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب إيجاد نواتج ما يلي:

- ٢س^{٢} × ٤ص^{٤}.
- ٤س^{٢} × ٣س^{٣}.
- ٧س (٣س + ٤ش).
- ٣س^{٤} × ٤ص^{٣} × ٦ع^{٢}.

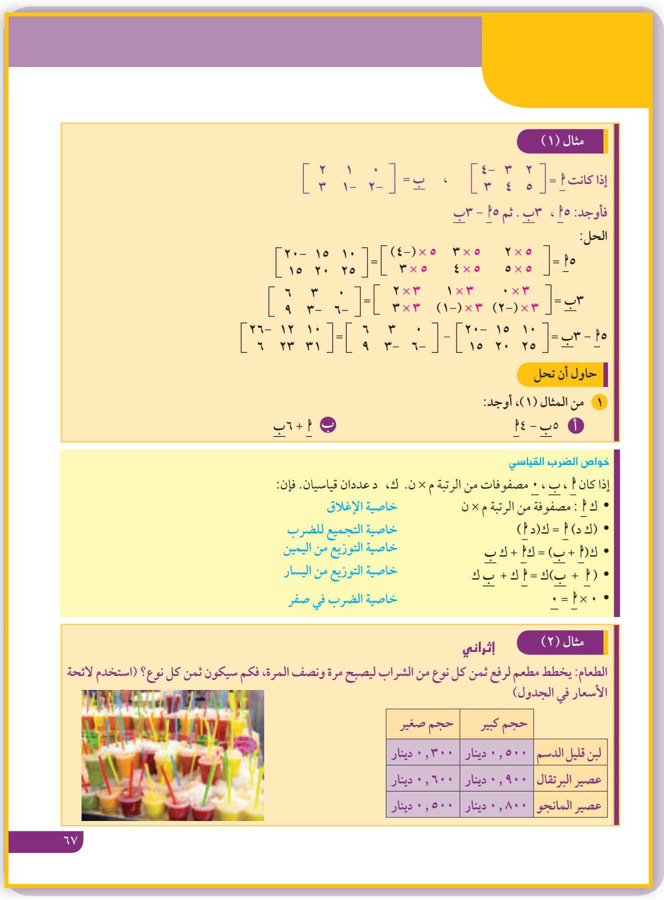
٥ التدريس

وضّح للطلاب أن الخطوات المطلوبة في فقرة «عمل تعاوني» هي ضرورية لفهم عملية ضرب المصفوفات، وأن كتابة المصفوفات في السؤالين ٣ (أ) وَ ٣ (ب) تساعد على الربط بين ضرب المصفوفات والنتائج التي توصلوا إليها في السؤالين ١ وَ ٢.

أكد لهم أنه عند ضرب عدد قياسي في مصفوفة، يجب ضرب العدد في كل عناصر المصفوفة وليس فقط في الجانب الأيمن من المصفوفة.

مثال ذلك: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{bmatrix}$ ك ≠ ٠ فإن:

$$ك \times \underline{أ} = \begin{bmatrix} ك\,أ_{٣١} & ك\,أ_{٢١} & ك\,أ_{١١} \\ ك\,أ_{٣٢} & ك\,أ_{٢٢} & ك\,أ_{١٢} \end{bmatrix}$$



مثال (١)

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤- & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ١- & ٢- \end{bmatrix}$

فأوجد: ٥أ ، ٣ب . ثم ٥أ – ٣ب

الحل:

$$٥\underline{أ} = \begin{bmatrix} (٤-)\times٥ & ٣\times٥ & ٢\times٥ \\ ٣\times٥ & ٤\times٥ & ٥\times٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٠- & ١٥ & ١٠ \\ ١٥ & ٢٠ & ٢٥ \end{bmatrix}$$

$$٣\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢\times٣ & ١\times٣ & ٠\times٣ \\ ٣\times٣ & (١-)\times٣ & (٢-)\times٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ٠ \\ ٩ & ٣- & ٦- \end{bmatrix}$$

$$٥\underline{أ} - ٣\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢٠- & ١٥ & ١٠ \\ ١٥ & ٢٠ & ٢٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ٠ \\ ٩ & ٣- & ٦- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٦- & ١٢ & ١٠ \\ ٦ & ٢٣ & ٣١ \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل

١ من المثال (١)، أوجد:

أ ٥ب – ٤أ

ب أ + ٦ب

خواص الضرب القياسي

إذا كان أ ، ب ، ٠ مصفوفات من الرتبة م × ن. ك، د عددان قياسيان. فإن:

- ك أ : مصفوفة من الرتبة م × ن — خاصية الإغلاق
- (ك د) أ = ك(د أ) — خاصية التجميع للضرب
- ك(أ + ب) = ك أ + ك ب — خاصية التوزيع من اليمين
- (أ + ب)ك = أ ك + ب ك — خاصية التوزيع من اليسار
- ٠ × أ = ٠ — خاصية الضرب في صفر

مثال (٢) **إثرائي**

الطعام: يخطط مطعم لرفع ثمن كل نوع من الشراب ليصبح مرة ونصف المرة، فكم سيكون ثمن كل نوع؟ (استخدم لائحة الأسعار في الجدول)

	حجم كبير	حجم صغير
لبن قليل الدسم	٠,٥٠٠ دينار	٠,٣٠٠ دينار
عصير البرتقال	٠,٩٠٠ دينار	٠,٦٠٠ دينار
عصير المانجو	٠,٨٠٠ دينار	٠,٥٠٠ دينار

٦٧

خواص الضرب في عدد قياسي تساعد كثيرًا على حل معادلات تتضمن مصفوفات كما في المثال (٣).

قبل أن يبدأ الطلاب العمل في المثال التمهيدي، اطلب إليهم قراءة عدد الأسئلة التي أجاب عنها ناصر، أحمد وعبدالله في كل مادة ثم التمعن جيدًا بدرجة كل سؤال في كل مادة أيضًا وذلك لإيجاد الربط مع الناتج الذي يجدونه مع $\underline{أ} \times \underline{ب}$ لاحقًا.

ركز في المثال (٤) على أن هذه المصفوفات مختلفة الرتب. ركز على أسباب تلوين الصف والعمود اللذين يجري ضربهما.

أخبرهم أن بإمكانهم القيام بذلك عدة مرات كي يتمكنوا من إجراء ضرب المصفوفات دون الوقوع بالخطأ.

أكّد لهم أن الشرط الأساسي للقيام بضرب مصفوفتين لا يمكن تجاهله فهو أساسي في عملية الضرب. ارسم لهم مخططًا بسيطًا كما يلي:

$$\underline{أ}_{م \times ن} \times \underline{ب}_{ن \times ر} = \underline{جـ}_{م \times ر}$$

اشرح لهم أن بالإمكان إيجاد $\underline{أ} \times \underline{ب}$ وَ $\underline{ب} \times \underline{أ}$ في حالات كثيرة ولكن عمومًا $\underline{أ} \times \underline{ب} \neq \underline{ب} \times \underline{أ}$. وأحيانًا كثيرة يمكن إيجاد $\underline{أ} \times \underline{ب}$ ولكن لا يمكن إيجاد $\underline{ب} \times \underline{أ}$. استخدم أمثلة لتأكيد ذلك. أخبرهم أن المصفوفة $\underline{أ}_{م \times م}$ هي مصفوفة مربعة أي أن عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها.

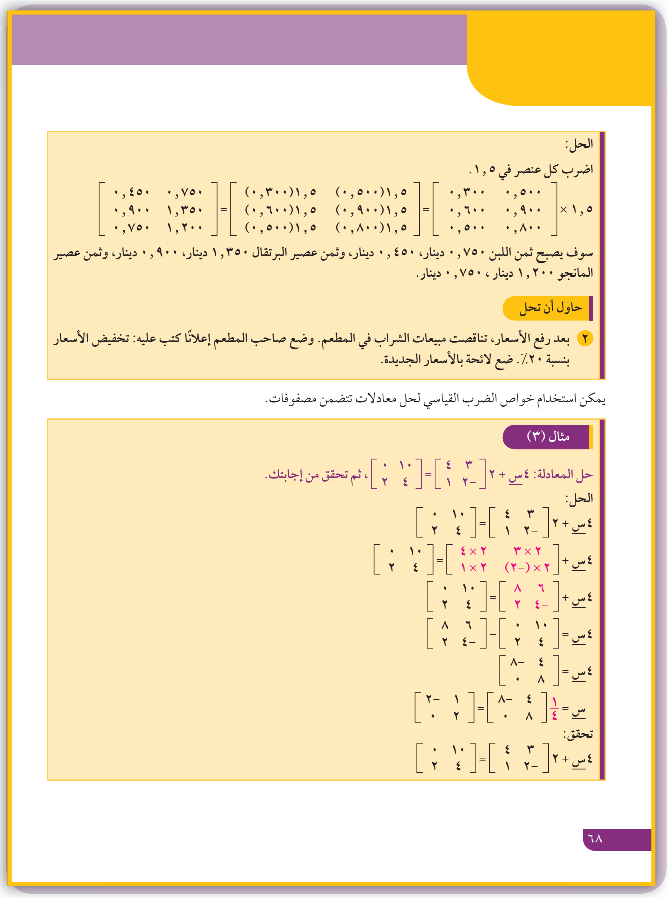
٦ الربط

في المثال (٢)، يسمح عرض الأسعار في مصفوفة بدراسة حركة السوق واتخاذ قرارات عن صحة رفع الأسعار ومدى الإفادة منه.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في عملية ضرب المصفوفات.

في البدء اطلب إليهم القيام بضرب العناصر المتناظرة في كل صف في العناصر المتناظرة في كل عمود، ثم إجراء عملية الجمع وبعد ذلك وضع الناتج في المكان الصحيح.



الحل:

اضرب كل عنصر في ١,٥ .

$$١,٥ \times \begin{bmatrix} ٠,٥٠٠ & ٠,٣٠٠ \\ ٠,٩٠٠ & ٠,٦٠٠ \\ ٠,٨٠٠ & ٠,٥٠٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١,٥(٠,٥٠٠) & ١,٥(٠,٣٠٠) \\ ١,٥(٠,٩٠٠) & ١,٥(٠,٦٠٠) \\ ١,٥(٠,٨٠٠) & ١,٥(٠,٥٠٠) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠,٧٥٠ & ٠,٤٥٠ \\ ١,٣٥٠ & ٠,٩٠٠ \\ ١,٢٠٠ & ٠,٧٥٠ \end{bmatrix}$$

سوف يصبح ثمن اللبن ٠,٧٥٠ دينار، ٠,٤٥٠ دينار، وثمن عصير البرتقال ١,٣٥٠ دينار، ٠,٩٠٠ دينار، وثمن عصير المانجو ١,٢٠٠ دينار ، ٠,٧٥٠ دينار.

حاول أن تحل

٢ بعد رفع الأسعار، تناقصت مبيعات الشراب في المطعم. وضع صاحب المطعم إعلانًا كتب عليه: تخفيض الأسعار بنسبة ٢٠٪. ضع لائحة بالأسعار الجديدة.

يمكن استخدام خواص الضرب القياسي لحل معادلات تتضمن مصفوفات.

مثال (٣)

حل المعادلة: $٤\underline{س} + ٢\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ثم تحقق من إجابتك.

الحل:

$$٤\underline{س} + ٢\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$٤\underline{س} + \begin{bmatrix} ٢ \times ٣ & ٢ \times ٤ \\ ٢ \times (-٢) & ٢ \times ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$٤\underline{س} + \begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$٤\underline{س} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

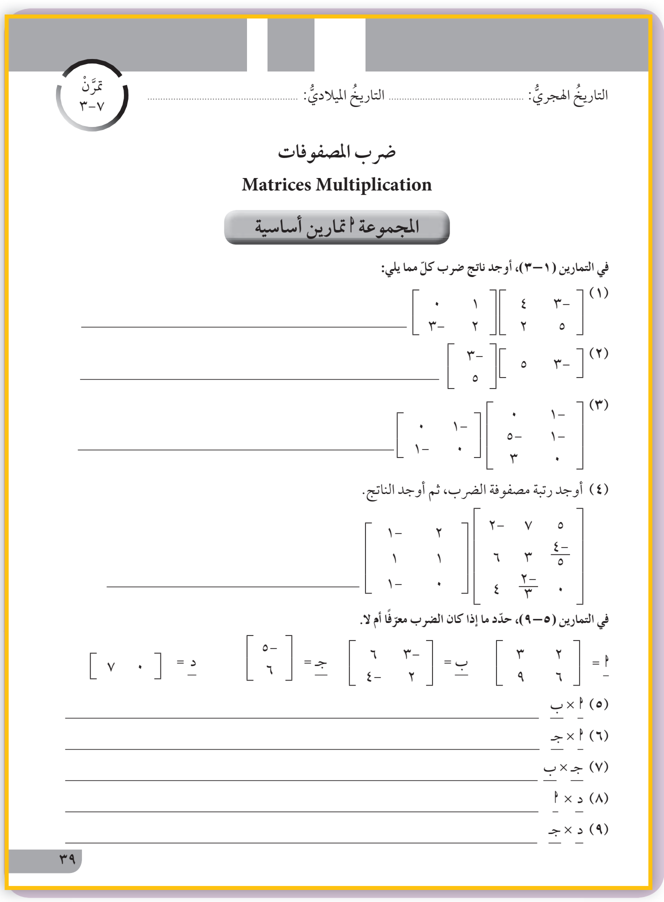
$$٤\underline{س} = \begin{bmatrix} ٤ & -٨ \\ ٨ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\underline{س} = \frac{١}{٤}\begin{bmatrix} ٤ & -٨ \\ ٨ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

تحقق:

$$٤\underline{س} + ٢\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

٦٨



التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٣-٧

ضرب المصفوفات

Matrices Multiplication

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمارين (١–٣)، أوجد ناتج ضرب كلّ مما يلي:

(١) $\begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$ ______

(٢) $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٣ \\ ٥ \end{bmatrix}$ ______

(٣) $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ -١ & -٥ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ ______

(٤) أوجد رتبة مصفوفة الضرب، ثم أوجد الناتج.

$\begin{bmatrix} ٥ & ٧ & -٢ \\ \frac{-٤}{٥} & ٣ & ٦ \\ ٠ & \frac{-٢}{٣} & ٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ١ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ ______

في التمارين (٥–٩)، حدّد ما إذا كان الضرب معرّفًا أم لا.

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٦ & ٩ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} -٣ & ٦ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} -٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$ ، $\underline{د} = \begin{bmatrix} ٠ & ٧ \end{bmatrix}$

(٥) $\underline{أ} \times \underline{ب}$ ______

(٦) $\underline{أ} \times \underline{جـ}$ ______

(٧) $\underline{جـ} \times \underline{ب}$ ______

(٨) $\underline{د} \times \underline{أ}$ ______

(٩) $\underline{د} \times \underline{جـ}$ ______

٣٩

٨ التقييم

تابع الطلاب بدقة وهم يكتبون الإجابات لفقرات «حاول أن تحل». ناقش معهم كل إجابة لتتأكد من أنهم قد فهموا جيدًا الضرب في عدد قياسي ومتى يستخدم، وأيضًا ضرب المصفوفات ومتى يستخدم.

اختبار سريع

أوجد الناتج: $٨ \times \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٠ & -٥ & ٤ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ١٦ & ٢٤ & -٨ \\ ٠ & -٤٠ & ٣٢ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٠ & -٥ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ \\ ٩ \\ ٤ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ٢٧ \\ -٢٩ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ٢ \\ ٩ \\ ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٣ & ٢ & -١ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -٦ & ٤ & -٢ \\ -٢٧ & ١٨ & -٩ \\ -١٢ & ٨ & -٤ \end{bmatrix}$

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

١ ١٢٥ دينارًا؛ ١٧٥ دينارًا؛ ١٥٠ دينارًا.

٢ (أ) ١٢٥ + ١٧٥ + ١٥٠ = ٤٥٠ دينارًا.

(ب) إجابة ممكنة: أضرب ثمن كل وجبة في عدد الوجبات ثم أجمع النواتج.

٣ (أ) $\begin{bmatrix} ٢,٥٠٠ & ١,٧٥٠ & ٢,٠٠٠ \end{bmatrix}$

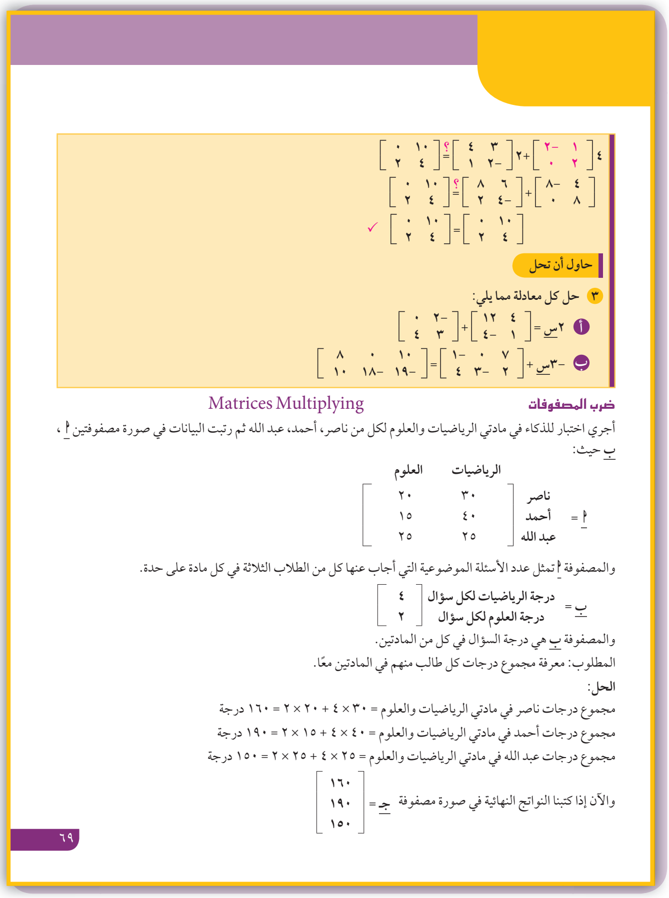
(ب) $\begin{bmatrix} ٥٠ \\ ١٠٠ \\ ٧٥ \end{bmatrix}$

(ج) إجابة ممكنة:

العنصر الأول من الصف الأول من العمود الأول

$\begin{bmatrix} ٢,٥٠٠ & ١,٧٥٠ & ٢,٠٠٠ \end{bmatrix}$ × × × $\begin{bmatrix} ٥٠ \\ ١٠٠ \\ ٧٥ \end{bmatrix}$

اضرب عناصر كل صف من المصفوفة الأولى في عناصر كل عمود من المصفوفة الثانية بنفس الترتيب. أوجد ناتج كل ضرب ثم اجمع نواتج الضرب أو وظف الألوان للتوضيح.



$٤\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} + ٢\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ٤ & -٨ \\ ٨ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ✓

حاول أن تحل

٣ حل كل معادلة مما يلي:

أ $٢\underline{س} = \begin{bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

ب $-٣\underline{س} + \begin{bmatrix} ٧ & ٠ & -١ \\ ٢ & -٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ & ٨ \\ -١٩ & -١٨ & ١٠ \end{bmatrix}$

ضرب المصفوفات Matrices Multiplying

أجري اختبار للذكاء في مادتي الرياضيات والعلوم لكل من ناصر، أحمد، عبد الله ثم رتبت البيانات في صورة مصفوفتين $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ حيث:

$\underline{أ}$ =

	الرياضيات	العلوم
ناصر	٣٠	٢٠
أحمد	٤٠	١٥
عبد الله	٢٥	٢٥

والمصفوفة $\underline{أ}$ تمثل عدد الأسئلة الموضوعية التي أجاب عنها كل من الطلاب الثلاثة في كل مادة على حدة.

$\underline{ب}$ =

درجة الرياضيات لكل سؤال	٤
درجة العلوم لكل سؤال	٢

والمصفوفة $\underline{ب}$ هي درجة السؤال في كل من المادتين.

المطلوب: معرفة مجموع درجات كل طالب منهم في المادتين معًا.

الحل:

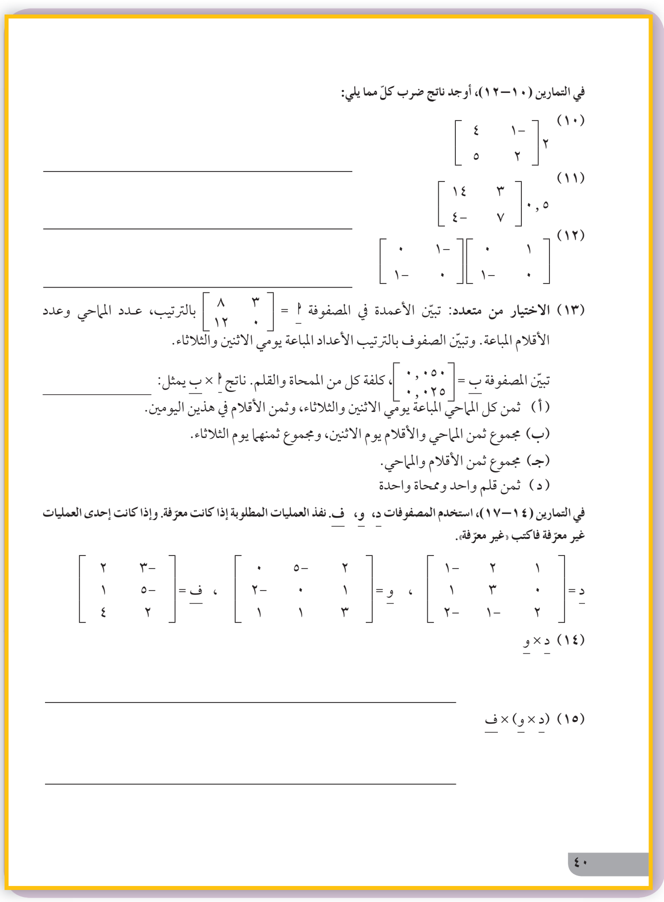
مجموع درجات ناصر في مادتي الرياضيات والعلوم = ٣٠ × ٤ + ٢٠ × ٢ = ١٦٠ درجة

مجموع درجات أحمد في مادتي الرياضيات والعلوم = ٤٠ × ٤ + ١٥ × ٢ = ١٩٠ درجة

مجموع درجات عبد الله في مادتي الرياضيات والعلوم = ٢٥ × ٤ + ٢٥ × ٢ = ١٥٠ درجة

والآن إذا كتبنا النواتج النهائية في صورة مصفوفة $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ١٦٠ \\ ١٩٠ \\ ١٥٠ \end{bmatrix}$

٦٩



في التمارين (١٠–١٢)، أوجد ناتج ضرب كلّ مما يلي:

(١٠) $٢\begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$

(١١) $٠,٥\begin{bmatrix} ٣ & ١٤ \\ ٧ & -٤ \end{bmatrix}$

(١٢) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$

(١٣) **الاختيار من متعدد:** تبيّن الأعمدة في المصفوفة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ ٠ & ١٢ \end{bmatrix}$ بالترتيب، عدد المماحي وعدد الأقلام المباعة. وتبيّن الصفوف بالترتيب الأعداد المباعة يومي الاثنين والثلاثاء.

تبيّن المصفوفة $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠,٠٥٠ \\ ٠,٠٢٥ \end{bmatrix}$، كلفة كل من الممحاة والقلم. ناتج $\underline{أ} \times \underline{ب}$ يمثل: ________

(أ) ثمن كل المماحي المباعة يومي الاثنين والثلاثاء، وثمن الأقلام في هذين اليومين.

(ب) مجموع ثمن المماحي والأقلام يوم الاثنين، ومجموع ثمنهما يوم الثلاثاء.

(جـ) مجموع ثمن الأقلام والمماحي.

(د) ثمن قلم واحد وممحاة واحدة

في التمارين (١٤–١٧)، استخدم المصفوفات $\underline{د}$، $\underline{و}$، $\underline{ف}$. نفذ العمليات المطلوبة إذا كانت معرّفة. وإذا كانت إحدى العمليات غير معرّفة فاكتب «غير معرّفة».

$\underline{د} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ ٠ & ٣ & ١ \\ ٢ & -١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $\underline{و} = \begin{bmatrix} ٢ & -٥ & ٠ \\ ١ & ٠ & -٢ \\ ٣ & ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ف} = \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ -٥ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

(١٤) $\underline{د} \times \underline{و}$

(١٥) $(\underline{د} \times \underline{و}) \times \underline{ف}$

٤٠

$$٧٥ \times ٢,٠٠٠ + ١٠٠ \times ١,٧٥٠ + ٥٠ \times ٢,٥٠٠$$

«حاول أن تحل»

١ (أ) $٥\underline{ب} - ٤\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢٦ & -٧ & -٨ \\ ٣ & -٢١ & -٣٠ \end{bmatrix}$

(ب) $\underline{أ} + ٦\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٨ & ٩ & ٢ \\ ٢١ & -٢ & -٧ \end{bmatrix}$

٢ $٠,٨٠ \times \begin{bmatrix} ٠,٤٥٠ & ٠,٧٥٠ \\ ٠,٩٠٠ & ١,٣٥٠ \\ ٠,٧٥٠ & ١,٢٠٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠,٣٦٠ & ٠,٦٠٠ \\ ٠,٧٢٠ & ١,٠٨٠ \\ ٠,٦٠٠ & ٠,٩٦٠ \end{bmatrix}$

---

(١٦) $\underline{د} - ٢ \times \underline{و}$

(١٧) $(٢ \times \underline{د})(٣ \times \underline{ف})$

(١٨) تعرض شركة تبيع الخردوات في محلاتها الأسعار في مصفوفة من الرتبة ١ × ٣ ومبيعات المحال الثلاثة اليومية في مصفوفة من الرتبة ٣ × ٣.

مطرقة	منبه ضوئي	قنديل
٠,٣٠٠ دينار	٠,٥٠٠ دينار	٠,٧٠٠ دينار

	المحل أ	المحل ب	المحل ج
مطرقة	١٠	٩	٨
منبه ضوئي	٣	١٤	٦
قنديل	٢	٥	٧

(أ) أوجد ناتج ضرب المصفوفتين. اشرح ما الذي يمثله.

(ب) كيف يمكن إيجاد المبيع العام في المحال الثلاثة؟

(جـ) أوجد مبيع المنبهات الضوئية في المحال الثلاثة.

(١٩) **السؤال المفتوح:** اكتب مصفوفتين $\underline{س}$، $\underline{ص}$ من الرتبة ٢ × ٢ ليست كل العناصر متساوية بحيث يكون $\underline{س} \times \underline{ص} = \underline{ص} \times \underline{س}$.

(٢٠) أوجد قيمة كل من س ، ص: $\begin{bmatrix} ٢س & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ & -٩ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

٤١

في التمرين (٢١)، استخدم المصفوفات $\underline{أ}$، $\underline{ب}$ ، $\underline{جـ}$ ، حدّد ما إذا كان التعبيران في الزوج التالي متساويين.

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$ $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$

(٢١) $(\underline{أ} + \underline{ب}) \times \underline{جـ}$ ، $\underline{أ} \times \underline{جـ} + \underline{ب} \times \underline{جـ}$.

(٢٢) إذا كانت $\underline{م} = \begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ن} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فهل $\underline{م} \times \underline{ن} = \underline{ن} \times \underline{م}$ ؟ فسّر.

(٢٣) أي ضرب مما يلي غير معرّف؟

(أ) $\begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix}[-١ \quad ٢]$

(ب) $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}[-١ \quad ٢]$

(جـ) $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$

(د) $[-١ \quad ٢]\begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix}$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١ — ٤)، أوجد ناتج ضرب كلّ مما يلي:

(١) $\begin{bmatrix} -٤ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٤ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$

(٢) $[-٣ \quad ٥]\begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$

(٣) $-١\begin{bmatrix} ٩ & -٧ & -٤ \\ -٨ & -٢ & ٣ \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -١ & ٠ & ١ \\ ٠ & -١ & ١ \end{bmatrix}$

٤٢

وهذا ينتج من ضرب المصفوفتين $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$. لكي تقوم بعملية ضرب مصفوفتين، اضرب عناصر كلّ صفّ من المصفوفة الأولى في عناصر كلّ عمود من المصفوفة الثانية. أوجد ناتج كلّ ضرب، ثمّ اجمع نواتج الضرب كما في المثال التالي:

$$\underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢٠ & ٣٠ \\ ١٥ & ٤٠ \\ ٥ & ٢٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٤ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \times ٢٠ + ٤ \times ٣٠ \\ ٢ \times ١٥ + ٤ \times ٤٠ \\ ٢ \times ٢٥ + ٤ \times ٢٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٦٠ \\ ١٩٠ \\ ١٥٠ \end{bmatrix}$$

وبالتالي تكون درجة أحمد هي الأفضل.

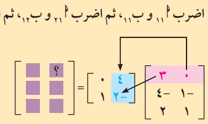
مثال (٤)

أوجد ناتج $\underline{أ} \times \underline{ب}$.

حيث $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٤ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$

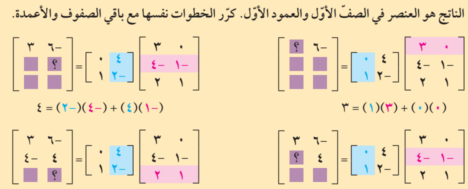
الحل:

اضرب $أ_{١١}$ و $ب_{١١}$، ثم اضرب $أ_{٢١}$ و $ب_{١٢}$، ثم اجمع نواتج الضرب.



$(٠)(٤) + (٣)(-٢) = -٦$

الناتج هو العنصر في الصفّ الأوّل والعمود الأوّل. كرّر الخطوات نفسها مع باقي الصفوف والأعمدة.



$(٠)(٠) + (٣)(١) = ٣$ $\quad (-١)(٤) + (-٤)(-٢) = ٤$

$(-١)(٠) + (-٤)(١) = -٤$ $\quad (١)(٤) + (٢)(-٢) = ٠$

٧٠

٣ (أ) ٢ س = $\begin{bmatrix} ١٢ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ ؛ ∴ س = $\begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$

(ب) −٣ س = $\begin{bmatrix} ٩ & ٠ & ٣ \\ ٦ & -١٥ & -٢١ \end{bmatrix}$ ؛

∴ س = $\begin{bmatrix} -٣ & ٠ & -١ \\ -٢ & ٥ & ٧ \end{bmatrix}$

٤ (أ) ضرب كل عنصر من الصف في كل عنصر مناظر له من العمود ثم إيجاد ناتج الجمع.

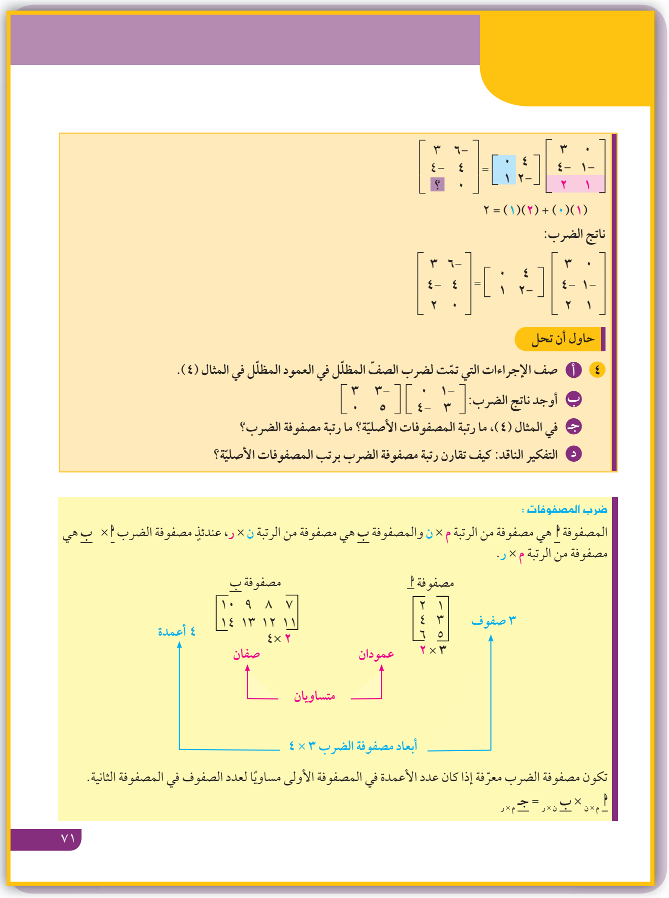
(ب) $\begin{bmatrix} -٣ & ٣ \\ ٩ & -٢٩ \end{bmatrix}$

(جـ) رتبة المصفوفة أ هي: ٣ × ٢

رتبة المصفوفة ب هي: ٢ × ٢

رتبة مصفوفة ناتج الضرب هي: ٣ × ٢

(د) رتبة مصفوفة ناتج الضرب هي عدد صفوف المصفوفة الأولى × عدد أعمدة المصفوفة الثانية.


$$\begin{bmatrix} ٣ & -٦ \\ -٤ & ٤ \\ ؟ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٤ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

(١)(٠) + (٢)(١) = ٢

ناتج الضرب:

$$\begin{bmatrix} ٣ & -٦ \\ -٤ & ٤ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٤ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل

٤ (أ) صف الإجراءات التي تمّت لضرب الصفّ المظلّل في العمود المظلّل في المثال (٤).

(ب) أوجد ناتج الضرب: $\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$

(جـ) في المثال (٤)، ما رتبة المصفوفات الأصليّة؟ ما رتبة مصفوفة الضرب؟

(د) التفكير الناقد: كيف تقارن رتبة مصفوفة الضرب برتب المصفوفات الأصليّة؟

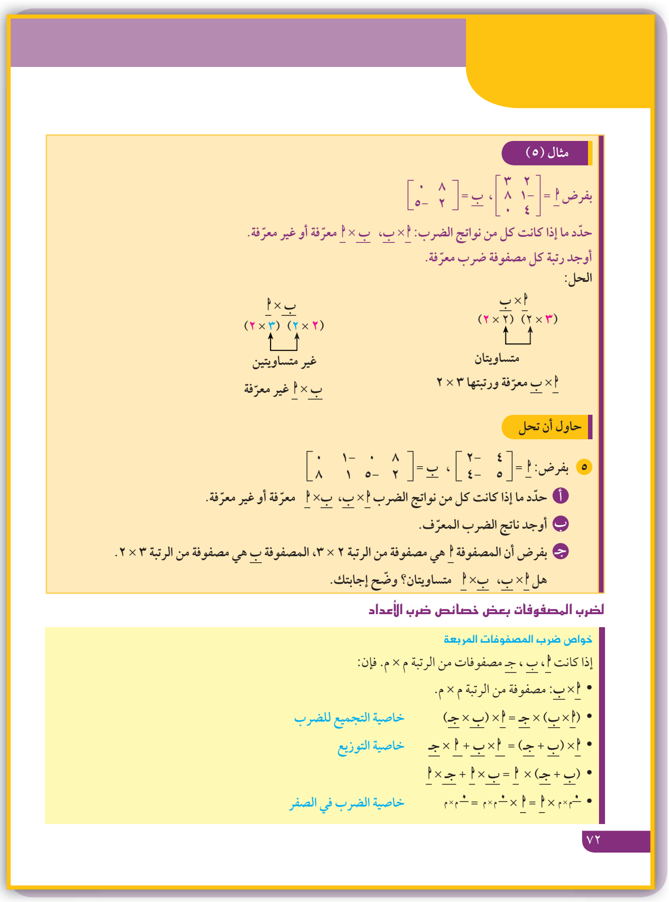
ضرب المصفوفات:

المصفوفة أ هي مصفوفة من الرتبة م × ن والمصفوفة ب هي مصفوفة من الرتبة ن × ر، عندئذٍ مصفوفة الضرب أ × ب هي مصفوفة من الرتبة م × ر.

تكون مصفوفة الضرب معرّفة إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساويًا لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

$أ_{م×ن} × ب_{ن×ر} = جـ_{م×ر}$

٧١


مثال (٥)

بفرض أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٨ & -١ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ٨ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix}$

حدّد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب: أ × ب، ب × أ معرّفة أو غير معرّفة.

أوجد رتبة كل مصفوفة ضرب معرّفة.

الحل:

حاول أن تحل

٥ بفرض: أ = $\begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٠ & -١ & ٠ & ٨ \\ ٨ & ١ & -٥ & ٢ \end{bmatrix}$

(أ) حدّد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب أ × ب، ب × أ معرّفة أو غير معرّفة.

(ب) أوجد ناتج الضرب المعرّف.

(جـ) بفرض أن المصفوفة أ هي مصفوفة من الرتبة ٢ × ٣، المصفوفة ب هي مصفوفة من الرتبة ٣ × ٢.

هل أ × ب، ب × أ متساويتان؟ وضّح إجابتك.

لضرب المصفوفات بعض خصائص ضرب الأعداد

خواص ضرب المصفوفات المربعة

إذا كانت أ، ب، جـ مصفوفات من الرتبة م × م. فإن:

- أ × ب: مصفوفة من الرتبة م × م.
- (أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ) خاصية التجميع للضرب
- أ × (ب + جـ) = أ × ب + أ × جـ خاصية التوزيع
- (ب + جـ) × أ = ب × أ + جـ × أ
- $أ × ٠_{م×م} = ٠_{م×م} × أ = ٠_{م×م}$ خاصية الضرب في الصفر

٧٢

٥ (أ) أ من الرتبة: ٢ × ٢

ب من الرتبة: ٢ × ٤

لذا: أ × ب هي (٢ × ٢) وَ(٢ × ٤) أي عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى يساوي عدد الصفوف في المصفوفة الثانية فتكون أ × ب معرّفة.

ب × أ هي (٢ × ٤) وَ(٢ × ٢) أي عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى لا يساوي عدد الصفوف في المصفوفة الثانية فتكون ب × أ غير معرّفة.

(ب) $\begin{bmatrix} -16 & -6 & 10 & 28 \\ -32 & -9 & 20 & 32 \end{bmatrix}$

(جـ) ٢ × ٣ وَ٣ × ٢ ناتج الضرب معرّف

٣ × ٢ وَ٢ × ٣ ناتج الضرب معرّف ولكن ليس ضروريًّا أن نجد أ × ب = ب × أ، لأن أ × ب من الرتبة ٢ × ٢ بينما ب × أ من الرتبة ٣ × ٣.

مثال: أ = $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

أ × ب = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ، ب × أ = $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

ملاحظة: عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية.

مثال (مضاد)

أ = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

أوجد أ × ب، ب × أ . ماذا تستنتج؟

الحل:

أ × ب = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 16 \\ 27 & 12 \end{bmatrix}$

ب × أ = $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 17 \\ 30 & 25 \end{bmatrix}$

أ × ب ≠ ب × أ ∴ عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية.

تذكر: يكفي إيجاد مثال مضاد واحد لإثبات عدم صحة النظرية.

مربع المصفوفة Square Matrix

إذا كانت أ مصفوفة مربعة، فإن المصفوفة أ × أ يرمز إليها بالرمز أ^2.

وتقرأ مربع المصفوفة أ. وبالمثل أ^3 = أ × أ × أ، أ^4 = أ^3 × أ، ....

مثال (٦)

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

أوجد: أ^2، أ^3

الحل:

أ^2 = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

أ^3 = أ^2 × أ = $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

حاول أن تحل

٦ إذا كانت ب = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. أوجد: ب^2، ب^3.

٧٣

في التمارين (٥–٩)، حدّد ما إذا كان الضرب معرّفًا أم لا مع تفسير إجابتك.

أ = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix}$ ، د = $\begin{bmatrix} 0 & 7 \end{bmatrix}$

(٥) ب × أ

(٦) جـ × أ

(٧) ب × جـ

(٨) أ × د

(٩) جـ × د

في التمارين (١٠–١٣)، استخدم المصفوفات د ، و ، ن ثم نفذ العمليّات المطلوبة إذا كانت معرّفة. وإذا كانت إحدى العمليّات غير معرّفة فاكتب «غير معرّفة».

د = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ ، و = $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، ن = $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(١٠) −٣ × ن

(١١) د × (و × ن)

(١٢) (و − د) × ن

(١٣) (د × د) × و

(١٤) **الكتابة في الرياضيات:** لنفرض أن المصفوفة أ هي من الرتبة ٢ × ٣ والمصفوفة ب من الرتبة ٣ × ٢. هل أ × ب ، ب × أ متساويتان؟ اشرح تفكيرك.

٤٣

٦ $\underline{ب}^{٢} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ -٦ & ١٥ \end{bmatrix}$

$= ٣ \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$

$\underline{ب}^{٣} = \underline{ب} \times \underline{ب}^{٢} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ -٦ & ١٥ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٠ & ٢٧ \\ -٢٧ & ٥٤ \end{bmatrix}$

$= ٢٧ \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$

(١٥) اكتب مصفوفة تمثل العائد اليومي للبطاقات المباعة مستخدمًا الجدولين التاليين:

	درجة ١	درجة ٢	درجة ٣
أسعار البطاقات بالدينار	٧	٦	٥

	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس
عدد البطاقات المباعة درجة ١	١٥٠	١٣٠	١٦٠
عدد البطاقات المباعة درجة ٢	١٢٥	١٣٠	١٧٥
عدد البطاقات المباعة درجة ٣	٦٠	٥٢	٨٠

(١٦) أوجد قيمة كل من س ، ص إذا كانت:

$$\begin{bmatrix} ٢س & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٢س & -ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ & -٩ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$$

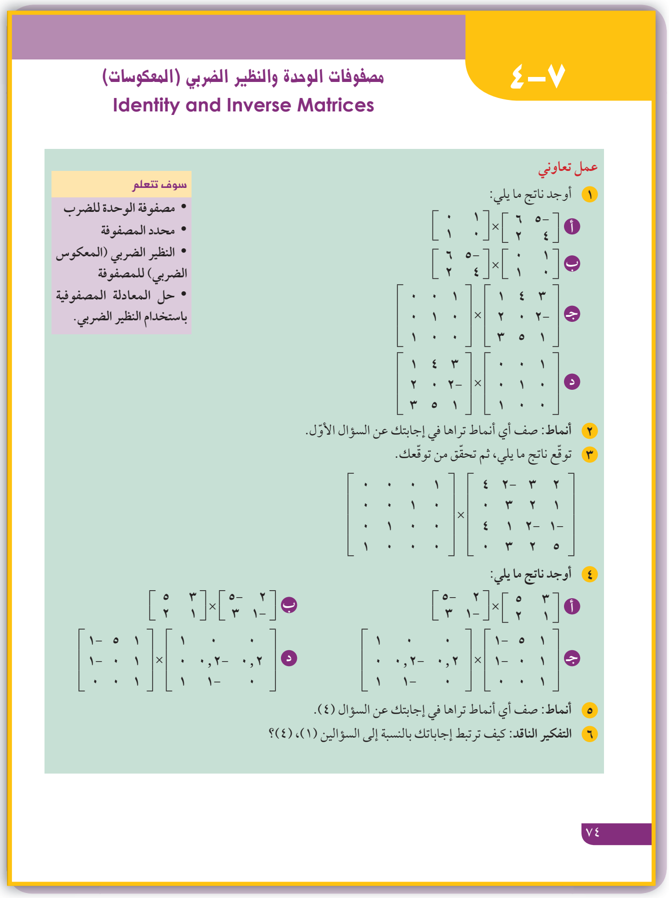
في التمرين (١٧)، استخدم المصفوفات $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$، $\underline{هـ}$ لتبين صحة العبارة.

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ $\underline{ب} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ $\underline{هـ} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

(١٧) $(\underline{أ} + \underline{ب}) \times \underline{هـ} = \underline{أ} \times \underline{هـ} + \underline{ب} \times \underline{هـ}$.

٤٤

٧-٤: مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)



١ الأهداف

- يتعرف مصفوفة الوحدة.
- يتعرف محدد المصفوفة المربعة.
- يوجد النظير الضربي للمصفوفة المربعة (معكوس المصفوفة).
- يستخدم النظير الضربي لحل معادلات مصفوفية.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

مصفوفة الوحدة – محدد مصفوفة – نظير ضربي.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

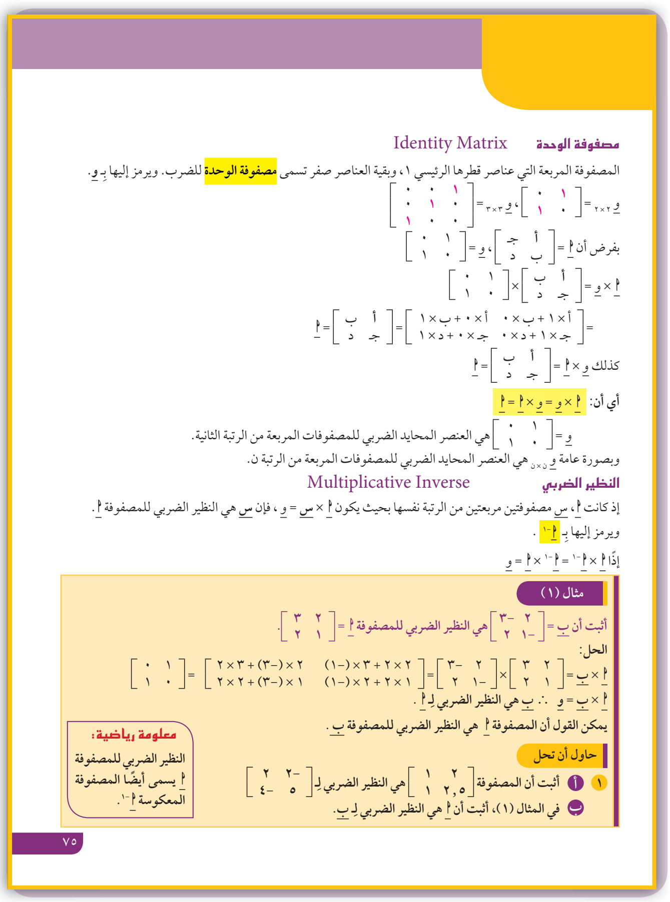
(أ) ما المعكوس الضربي للعدد $\frac{٢}{٣}$؟

(ب) ما المعكوس الضربي للعدد ٦؟

(جـ) ما المعكوس الضربي للتعبير $\frac{٣}{٤}$ س^٢؟

(د) ما العدد المحايد في عملية ضرب الأعداد؟

(هـ) في الأسئلة (أ)، (ب)، (جـ) أوجد ناتج ضرب كل عدد في معكوسه الضربي. ماذا تلاحظ؟



٥ التدريس

في فقرة «عمل تعاوني» شجع الطلاب على الربط بين ما أنجزوه في فقرة (١) والنتائج التي سوف يحصلون عليها من الأسئلة (٣)، (٤).

ركز انتباه الطلاب إلى أهمية المصفوفات من الفئة و

$$\text{و} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

أخبرهم بأنهم من الآن فصاعدًا سوف يتعاملون مع مصفوفة مربعة من نوع خاص اسمها مصفوفة الوحدة، حيث لها دور مهم مع النظير الضربي للمصفوفة المربعة.

دعهم يتأكدون من خلال الأمثلة كيف أن:

$\underline{أ} \times \underline{و} = \underline{و} \times \underline{أ} = \underline{أ}$

وأن $\underline{أ} \times \underline{أ}^{-1} = \underline{أ}^{-1} \times \underline{أ} = \underline{و}$ لكل مصفوفة مربعة $\underline{أ}$.

أخبرهم أن عليهم التعامل مع محدد المصفوفة $\begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$

كما هو: $\begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{vmatrix} =$ أ د − ب جـ ، وأن نظير المصفوفة موجود إذا كان أ د − ب جـ $\neq$ ٠.

أكّد لهم أن بإمكانهم تبديل أمكنة أ، د فقط.

شجعهم على التحقق من صحة النظير الضربي بإجراء عملية ضرب المصفوفة مع نظيرها الضربي لتحصل على مصفوفة الوحدة: $\underline{و}$.

٦ الربط

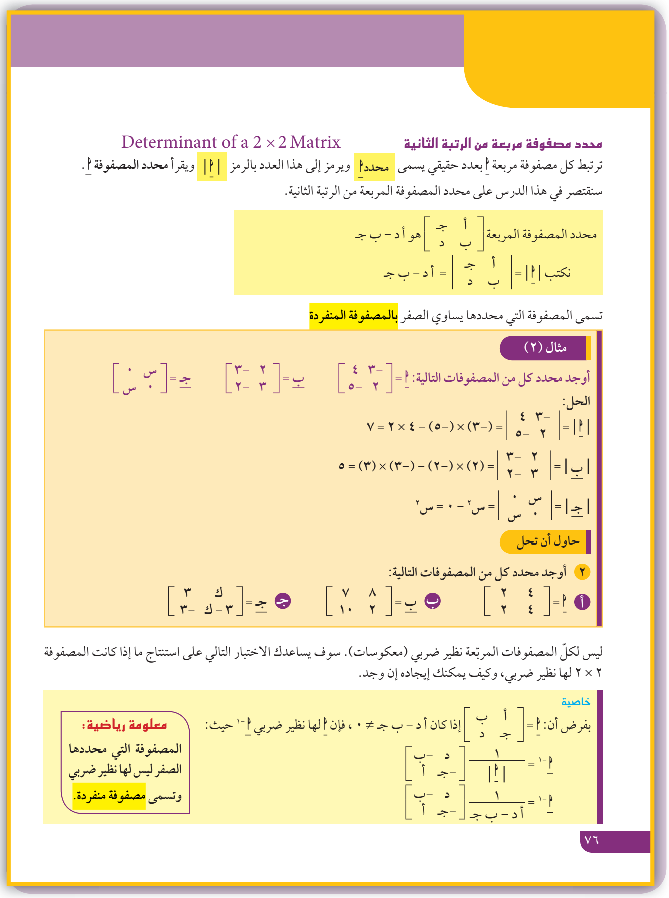
لا يوجد.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تبديل العناصر ضمن المصفوفة المربعة من الرتبة الثانية أو لا يضعون الإشارات المناسبة. ساعدهم على فهم ذلك من خلال أمثلة متعددة؛ راقب أداءهم.

٨ التقييم

تابع باهتمام كبير ما يقوم به الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لما لها من أهمية في تكوين أفكار عن مدى قدرة الطلاب على إيجاد النظير الضربي وبالتالي حل مسائل مرتبطة به.



محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية Determinant of a 2 × 2 Matrix

ترتبط كل مصفوفة مربعة $\underline{أ}$ بعدد حقيقي يسمى **محدد $\underline{أ}$** ويرمز إلى هذا العدد بالرمز $|\underline{أ}|$ ويقرأ **محدد المصفوفة $\underline{أ}$**.

سنقتصر في هذا الدرس على محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثانية.

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{bmatrix}$ هو أ د − ب جـ

نكتب $|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{vmatrix} =$ أ د − ب جـ

تسمى المصفوفة التي محددها يساوي الصفر **بالمصفوفة المنفردة**

مثال (٢)

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} س & ٠ \\ ٠ & س \end{bmatrix}$

الحل:

$|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{vmatrix} = (-٣) \times (-٥) - ٤ \times ٢ = ٧$

$|\underline{ب}| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix} = (٢) \times (-٢) - (-٣) \times (٣) = ٥$

$|\underline{جـ}| = \begin{vmatrix} س & ٠ \\ ٠ & س \end{vmatrix} = س^٢ - ٠ = س^٢$

حاول أن تحل

٢ أوجد محدد كل من المصفوفات التالية:

أ $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ب $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٨ & ٧ \\ ٢ & ١٠ \end{bmatrix}$ جـ $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ك & ٣ \\ ٣ - ك & -٣ \end{bmatrix}$

ليس لكلّ المصفوفات المربّعة نظير ضربي (معكوسات). سوف يساعدك الاختبار التالي على استنتاج ما إذا كانت المصفوفة ٢ × ٢ لها نظير ضربي، وكيف يمكنك إيجاده إن وجد.

خاصية

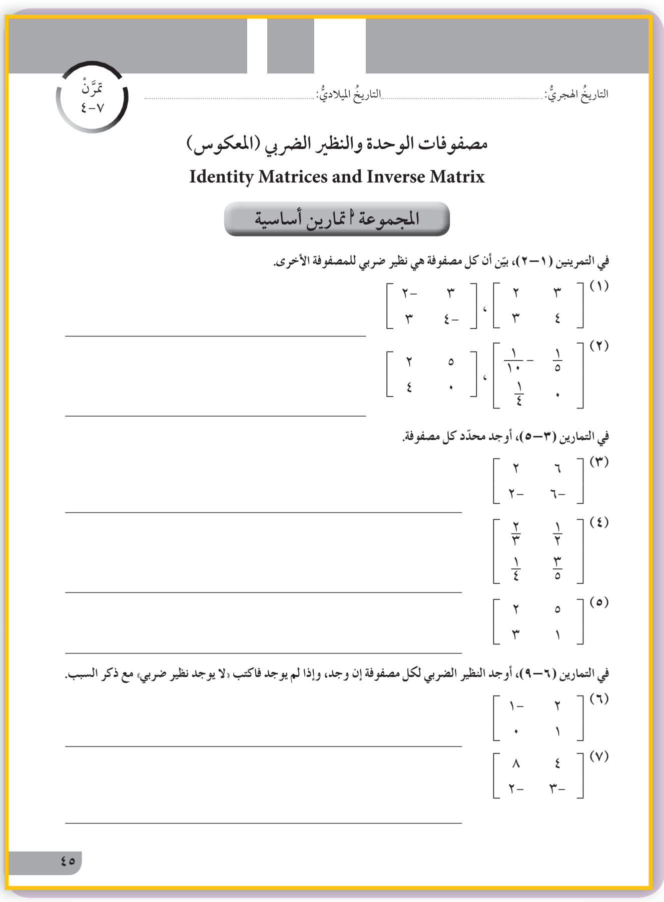
بفرض أن: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$ إذا كان أ د − ب جـ $\neq$ ٠ ، فإن $\underline{أ}$ لها نظير ضربي $\underline{أ}^{-١}$ حيث:

$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{|\underline{أ}|} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$

$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{أ د - ب جـ} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$

معلومة رياضية: المصفوفة التي محددها الصفر ليس لها نظير ضربي وتسمى **مصفوفة منفردة**.

٧٦



تمرَّنْ ٧-٤

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوس)

Identity Matrices and Inverse Matrix

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمرينين (١–٢)، بيّن أن كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى.

(١) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٥} & -\frac{١}{١٠} \\ ٠ & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$

في التمارين (٣–٥)، أوجد محدّد كل مصفوفة.

(٣) $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٦ & -٢ \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{٢}{٣} \\ \frac{٣}{٥} & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$

(٥) $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

في التمارين (٦–٩)، أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة إن وجد، وإذا لم يوجد فاكتب «لا يوجد نظير ضربي» مع ذكر السبب.

(٦) $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

(٧) $\begin{bmatrix} ٤ & ٨ \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix}$

٤٥

مثال (٣)

إذا كانت المصفوفة $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} \text{س} & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{bmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س.

الحل:

$|\underline{\text{أ}}| = \begin{vmatrix} \text{س} & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{vmatrix} = ٠$ محدد المصفوفة المنفردة

$٦\text{س} - ٤٨ = ٠$ تبسيط المحدد

$٦\text{س} = ٤٨$

$\text{س} = ٨$

حاول أن تحل

٣ إذا كانت المصفوفة $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ -٤ & ٢\text{س} \end{bmatrix}$ منفردة، أوجد قيمة س.

مثال (٤)

هل للمصفوفة: $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٨ & -٢ \end{bmatrix}$ نظير (معكوس) ضربي؟ في حالة الإيجاب أوجده.

الحل:

أ د − ب جـ = $(-١)(-٢) - (٠)(٨) = ٢$ ∵ $٢ \neq ٠$ ∴ $\underline{\text{أ}}$ لها نظير ضربي $\underline{\text{أ}}^{-١}$

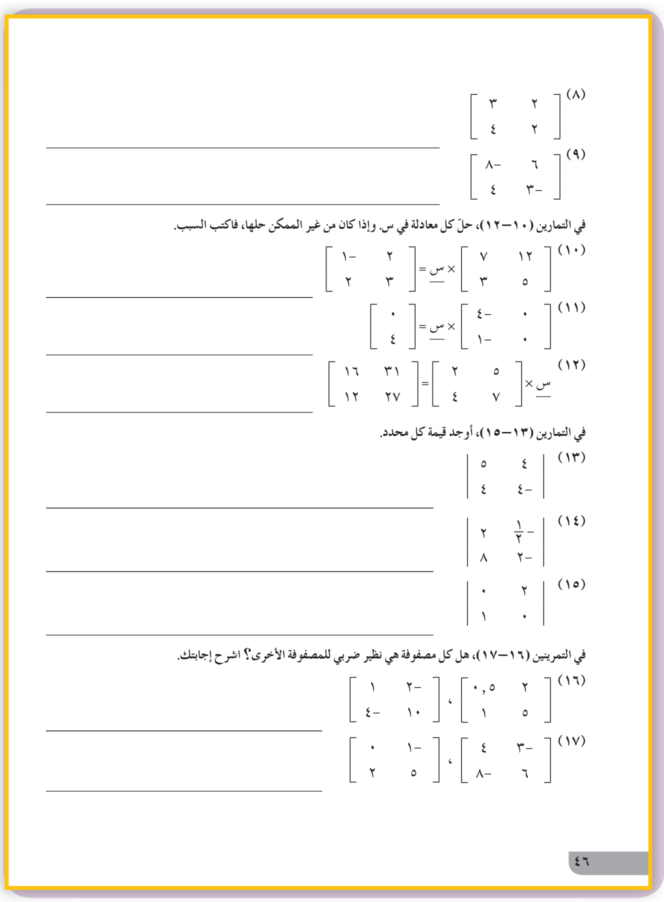
$\underline{\text{أ}}^{-١} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ -٨ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ -٤ & -٠,٥ \end{bmatrix}$

حاول أن تحل

٤ (أ) هل $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

(ب) هل $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ -٣ & -٤ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

٧٧



(٨) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

(٩) $\begin{bmatrix} ٦ & -٨ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix}$

في التمارين (١٠–١٢)، حلّ كل معادلة في س. وإذا كان من غير الممكن حلها، فاكتب السبب.

(١٠) $\begin{bmatrix} ١٢ & ٧ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix} \times \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

(١١) $\begin{bmatrix} ٠ & -٤ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix} \times \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٤ \end{bmatrix}$

(١٢) $\underline{\text{س}} \times \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣١ & ١٦ \\ ٢٧ & ١٢ \end{bmatrix}$

في التمارين (١٣–١٥)، أوجد قيمة كل محدد.

(١٣) $\begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ -٤ & ٤ \end{vmatrix}$

(١٤) $\begin{vmatrix} -\frac{١}{٢} & ٢ \\ -٢ & ٨ \end{vmatrix}$

(١٥) $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix}$

في التمرينين (١٦–١٧)، هل كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى؟ اشرح إجابتك.

(١٦) $\begin{bmatrix} ٢ & ٠,٥ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ١٠ & -٤ \end{bmatrix}$

(١٧) $\begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٦ & -٨ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$

٤٦

اختبار سريع

١ هل المصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ -٤ & -٥ \end{bmatrix}$ هي معكوس ضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$؟ اشرح. **كلا.**

لأن $\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ -٤ & -٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

٢ أوجد النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ ٣ & -٧ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -٣,٥ & -٢ \\ -١,٥ & -١ \end{bmatrix}$

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

١ (أ)، (ب) $\begin{bmatrix} -٥ & ٦ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

(جـ)، (د) $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ١ \\ -٢ & ٠ & ٢ \\ ١ & ٥ & ٣ \end{bmatrix}$

٢ $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{و}} = \underline{\text{و}} \times \underline{\text{أ}} = \underline{\text{أ}}$

٣ $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -٢ & ٤ \\ ١ & ٢ & ٣ & ٠ \\ -١ & -٢ & ١ & ٤ \\ ٥ & ٢ & ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ، اضرب المصفوفتين للتحقق

٤ (أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

٥ في (أ)، (ب) ناتج الضرب هو مصفوفة الوحدة من الرتبة ٢ × ٢.

في (جـ)، (د) ناتج الضرب هو مصفوفة من الرتبة ٣ × ٣.

٦ في السؤال ١ مصفوفة × مصفوفة الوحدة = مصفوفة.

في السؤال ٤ مصفوفة × مصفوفة = مصفوفة الوحدة.

«حاول أن تحل»

١ (أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢,٥ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

لذا أ هو النظير الضربي لـ ب.

٢ (أ) ٤ × ٢ − ٤ × ٢ = ٨ − ٨ = ٠

(ب) ٨ × ١٠ − ٧ × ٢ = ٦٦

(جـ) −٣ك − ٩ + ٣ك = −٩

٣ |ب| = $\begin{vmatrix} ٥ & ١٠ \\ -٤ & ٢س \end{vmatrix}$ = ٠

١٠س + ٤٠ = ٠

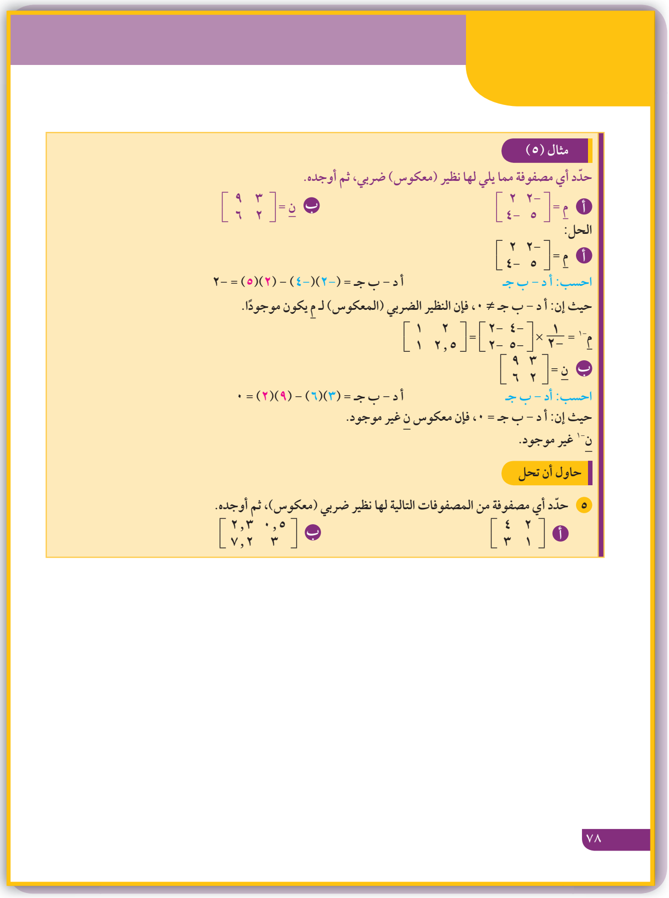
س = −٤

٤ (أ) |ب| = ١ × ٤ − ٣ × ٢ = ٤ − ٦ = −٢ ≠ ٠

∴ ب لها نظير ضربي. لأن |ب| ≠ ٠

(ب) |ب| = ٦ × (−٤) − (−٣) × (٨) = −٢٤ + ٢٤ = ٠

ليس لها نظير ضربي. لأن |ب| = ٠



مثال (٥)

حدّد أي مصفوفة مما يلي لها نظير (معكوس) ضربي، ثم أوجده.

أ م = $\begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$ ب ن = $\begin{bmatrix} ٣ & ٩ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

الحل:

أ م = $\begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$

احسب: أ د − ب جـ أ د − ب جـ = (−٢)(−٤) − (٢)(٥) = −٢

حيث إن: أ د − ب جـ ≠ ٠، فإن النظير الضربي (المعكوس) لـ م يكون موجودًا.

$م^{-١} = \frac{١}{-٢} \times \begin{bmatrix} -٤ & -٢ \\ -٥ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢,٥ & ١ \end{bmatrix}$

ب ن = $\begin{bmatrix} ٣ & ٩ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

احسب: أ د − ب جـ أ د − ب جـ = (٣)(٦) − (٩)(٢) = ٠

حيث إن: أ د − ب جـ = ٠، فإن معكوس ن غير موجود.

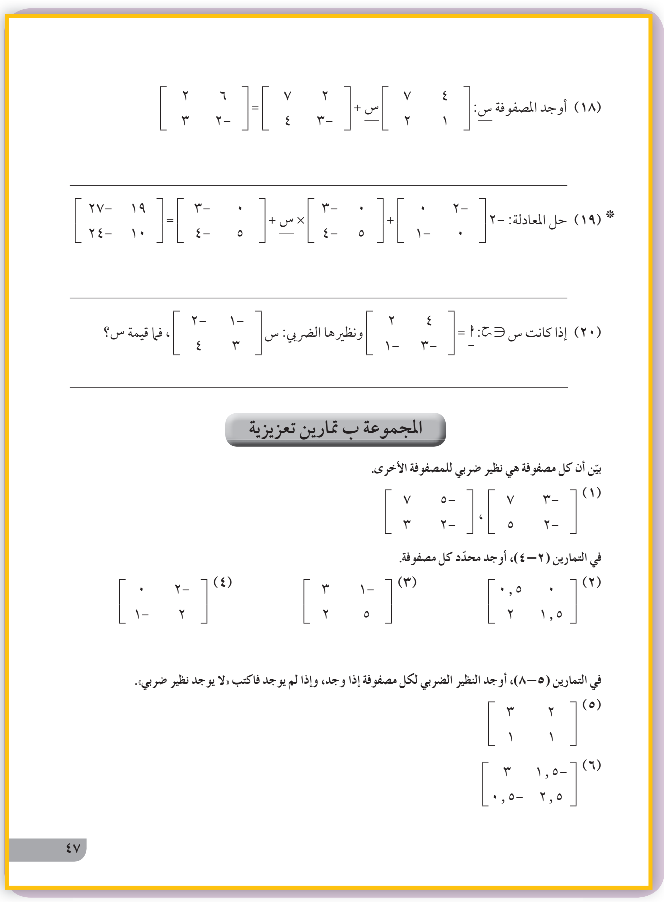
$ن^{-١}$ غير موجود.

حاول أن تحل

٥ حدّد أي مصفوفة من المصفوفات التالية لها نظير ضربي (معكوس)، ثم أوجده.

أ $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٠,٥ & ٢,٣ \\ ٣ & ٧,٢ \end{bmatrix}$

٧٨



(١٨) أوجد المصفوفة س: $\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ٧ \end{bmatrix}$ س + $\begin{bmatrix} ٢ & ٧ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$

* (١٩) حل المعادلة: −٢ $\begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & -٣ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix} \times$ س + $\begin{bmatrix} ٠ & -٣ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٩ & -٢٧ \\ ١٠ & -٢٤ \end{bmatrix}$

(٢٠) إذا كانت س ∈ ح: أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ -٣ & -١ \end{bmatrix}$ ونظيرها الضربي: س $\begin{bmatrix} -١ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$، فما قيمة س؟

المجموعة ب تمارين تعزيزية

بيّن أن كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى.

(١) $\begin{bmatrix} -٣ & ٧ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -٥ & ٧ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$

في التمارين (٢–٤)، أوجد محدّد كل مصفوفة.

(٢) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠,٥ \\ ١,٥ & ٢ \end{bmatrix}$ (٣) $\begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ (٤) $\begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$

في التمارين (٥–٨)، أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة إذا وجد، وإذا لم يوجد فاكتب «لا يوجد نظير ضربي».

(٥) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

(٦) $\begin{bmatrix} -١,٥ & ٣ \\ ٢,٥ & -٠,٥ \end{bmatrix}$

٤٧

(٧) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

(٨) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

(٩) أوجد $\underline{\text{س}}$: $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \times \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$

في التمرينين (١٠–١١)، أوجد قيمة كل محدد.

(١٠) $\begin{vmatrix} -3 & 10 \\ 6 & 20 \end{vmatrix}$

(١١) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$

(١٢) هل كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى؟ اشرح.

$\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -2{,}5 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

(١٣) أوجد $\underline{\text{س}}$: $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \times \underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

*(١٤) حل المعادلة:

$\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \underline{\text{س}} - \begin{bmatrix} 2 & -26 \\ 3 & -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 25 \\ 2 & 24 \end{bmatrix}$

٤٨

٥ (أ) $2 \times 3 - 1 \times 4 = 6 - 4 = 2 \neq 0$

∴ لها نظير ضربي

النظير الضربي $= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1{,}5 & -2 \\ -0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$

(ب) $0{,}5 \times 7{,}2 - 3 \times 2{,}3 = 3{,}6 - 6{,}9$

$= -3{,}3 \neq 0$

∴ لها نظير ضربي

النظير الضربي $= \frac{1}{-3{,}3}\begin{bmatrix} 7{,}2 & -2{,}3 \\ -3 & 0{,}5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{-7{,}2}{3{,}3} & \frac{2{,}3}{3{,}3} \\ \frac{3}{3{,}3} & \frac{-0{,}5}{3{,}3} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{-24}{11} & \frac{23}{33} \\ \frac{10}{11} & \frac{-5}{33} \end{bmatrix}$

٧-٥: حل نظام من معادلتين خطيتين

١ الأهداف

- يحل نظام من معادلتين خطيتين باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.
- يستخدم قاعدة كرامر لحل معادلتين خطيتين.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

نظام معادلتين خطيتين – قاعدة كرامر.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب حل ما يلي:

- ٤س = ١٢
- ٣س + ٥ = ٨
- $\frac{٧}{٤}$س − ٨ = ١٩
- { ٢س + ٣ص = ٢ ، ٣س − ص = ١٤ } (بالحذف أو بالتعويض)

اطلب إليهم إيجاد ناتج:

- [٢ −٣ ؛ ٤ ١] × [٥ ؛ ٣]

٥ التدريس

من المفيد الربط بين أنظمة المعادلات والمصفوفات كما هي واردة في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش»، لذا يجب التركيز على النظير الضربي للمصفوفة كي يصل الطلاب إلى حل المعادلة.

٧-٥
حل نظام من معادلتين خطيتين
Solving a System of Two Linear Equations

سوف تتعلم
- حل نظام من معادلتين خطيتين
- قاعدة كرامر

دعنا نفكر ونتناقش
يمكن للمعادلة المصفوفية أن تمثّل أي نظام معادلات.

نظام معادلات	المعادلة المصفوفية
{ س + ٢ص = ٥ ، ٣س + ٥ص = ١٤ }	[١ ٢ ؛ ٣ ٥] × [س ؛ ص] = [٥ ؛ ١٤]

١ قارن طريقتي كتابة النظام في معادلات المصفوفات. أين تجد معامل س، ص؟ المتغيرات؟ الثوابت؟
كل مصفوفة في معادلة المصفوفات على الشكل أ × ع = ب لها اسمها:

مصفوفة المعاملات أ		مصفوفة المتغيرات ع		مصفوفة الثوابت ب
[١ ٢ ؛ ٣ ٥]	×	[س ؛ ص]	=	[٥ ؛ ١٤]

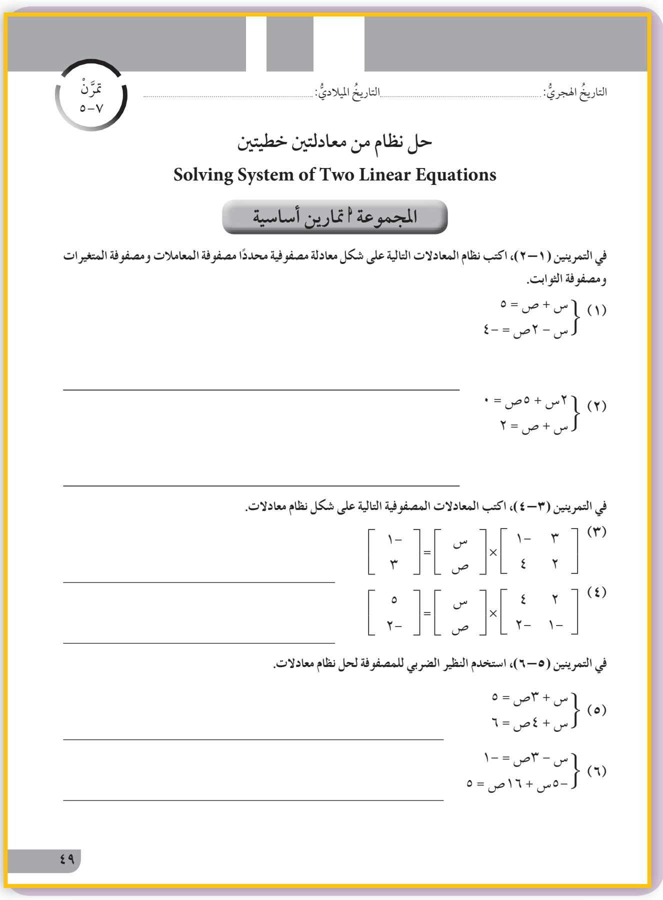
٢ أ أوجد مصفوفة الضرب: [١ ٢ ؛ ٣ ٥] × [س ؛ ص]
ب يمكن كتابة مصفوفة الضرب بأنها مساوية للمصفوفة [٥ ؛ ١٤].
اشرح كيف أن معادلة المصفوفة تمثّل نظام المعادلات.

حل النظام: Solving a System
تستطيع إيجاد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات، ثم الحصول سريعًا على حل النظام من المعادلات الخطية.

١ – الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة المربعة: Solving by Using Inverse Matrix

مثال (١)
حلّ النظام: { س + ص = ٣ ، س − ص = ٧ } باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.
الحل:
اكتب النظام مع معادلة المصفوفات.
[١ ١ ؛ ١ −١] × [س ؛ ص] = [٣ ؛ ٧] (١)
حيث أ = [١ ١ ؛ ١ −١]، ع = [س ؛ ص]، ب = [٣ ؛ ٧]
|أ| = | ١ ١ ؛ ١ −١ | = ١ × (−١) − ١ × ١ = −٢ ≠ ٠

٧٩



التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....
تمرَّنْ ٧-٥

حل نظام من معادلتين خطيتين
Solving System of Two Linear Equations

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمرينين (١–٢)، اكتب نظام المعادلات التالية على شكل معادلة مصفوفية محددًا مصفوفة المعاملات ومصفوفة المتغيرات ومصفوفة الثوابت.

(١) { س + ص = ٥ ، س − ٢ص = −٤ }

(٢) { ٢س + ٥ص = ٠ ، س + ص = ٢ }

في التمرينين (٣–٤)، اكتب المعادلات المصفوفية التالية على شكل نظام معادلات.

(٣) [٣ −١ ؛ ٢ ٤] × [س ؛ ص] = [−١ ؛ ٣]

(٤) [٢ ٤ ؛ −١ −٢] × [س ؛ ص] = [٥ ؛ −٢]

في التمرينين (٥–٦)، استخدم النظير الضربي للمصفوفة لحل نظام معادلات.

(٥) { س + ٣ص = ٥ ، س + ٤ص = ٦ }

(٦) { س − ٣ص = −١ ، −٥س + ١٦ص = ٥ }

٤٩

أخبرهم أن حل معادلة المصفوفات $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ع}} = \underline{\text{ب}}$ ،

حيث $\underline{\text{ع}} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$، مشابه لحل معادلة بسيطة من نوع ٣س = ٤ . ولإيجاد الحل نكتب: $\frac{١}{٣} \times ٣\text{س} = \frac{١}{٣} \times ٤$ (نستخدم المعكوس الضربي)، ونحصل على س = $\frac{٤}{٣}$،

وفي معادلة المصفوفات نستخدم أيضًا النظير الضربي للمصفوفة $\underline{\text{أ}}$ إن وجد فنكتب:

$\underline{\text{أ}}^{-١} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ع}} = \underline{\text{أ}}^{-١} \times \underline{\text{ب}}$. والمعروف بحسب الدرس السابق أن $\underline{\text{أ}}^{-١} \times \underline{\text{أ}} = \underline{\text{و}}$ (مصفوفة الوحدة).

المثال (٢)، هو تطبيق مباشر لقاعدة كرامر التي تستخدم حل نظام معادلتين أو أكثر لإيجاد قيم المتغيرات، والأساس في هذه القاعدة هو فهم الطالب لتغيير الأعمدة بحسب كل متغير، ثم إيجاد المحدد لكل مصفوفة.

٦ الربط

في المثال (٢)، أشر إلى أن استخدام المصفوفات في حل أنظمة معادلات ليس بذات أهمية كبرى في حالة معادلتين من مجهولين ولكن تصبح هذه الطريقة مهمة في حالة ٣ معادلات من ٣ مجاهيل أو أكثر.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تبديل الأعمدة عند استخدام قاعدة كرامر. شجعهم على كتابة النظام أولًا على الشكل القياسي:

$$\begin{cases} \text{أس} + \text{ب ص} = \text{جـ} \\ \text{أ}'\text{س} + \text{ب}'\text{ص} = \text{جـ}' \end{cases}$$

ثم كتابة Δ، $\Delta_{\text{س}}$، $\Delta_{\text{ص}}$.

$$\underline{\text{أ}}^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} -١ & -١ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix}$$

وبضرب كل من طرفي المعادلة (١) من جهة اليمين في $\underline{\text{أ}}^{-١}$.

نحصل على $\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ \\ ٧ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ -٢ \end{bmatrix}$$

وبالتالي: س = ٥، ص = −٢

حاول أن تحل

١ حلّ النظام: $\begin{cases} ٥\text{س} + ٣\text{ص} = ٧ \\ ٣\text{س} + ٢\text{ص} = ٥ \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

يمكن أيضًا حلّ نظام من معادلتين خطيتين باستخدام المحددات، وتسمى قاعدة كرامر Crammer’s Rule.

٢ – استخدام قاعدة كرامر (المحددات) لحل معادلتين خطيتين:

Using Crammer's Rule to Solve Two Linear Equations

لحل نظام معادلتين خطيتين:

أس + ب ص = ل

جـ س + د ص = م

نكتب: $\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ب} \\ \text{م} & \text{د} \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات بعد استبدال العمود الزائد بعمود معاملات س

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ل} \\ \text{جـ} & \text{م} \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات بعد استبدال العمود الزائد بعمود معاملات ص

فإن س = $\frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}$ ، ص = $\frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$ (بشرط أن $\Delta \neq ٠$)

٨٠

في التمارين (٧–٩)، بيّن ما إذا كان لنظام معادلات حلًّا وحيدًا أم لا.

(٧) $\begin{cases} ٢٠\text{س} + ٥\text{ص} = ٢٤٠ \\ \text{ص} + ٢٠\text{س} = ٠ \end{cases}$

(٨) $\begin{cases} ٣\text{س} + ٢\text{ص} = ١٠ \\ ٦\text{س} + ٤\text{ص} = ١٦ \end{cases}$

(٩) $\begin{cases} \text{ص} = \frac{٢}{٣}\text{س} - ٣ \\ \text{ص} = -\text{س} + ٧ \end{cases}$

في التمارين (١٠–١٢)، استخدم قاعدة كرامر لحل نظام معادلات.

(١٠) $\begin{cases} ٢\text{س} + \text{ص} = ٤ \\ ٣\text{س} - \text{ص} = ٦ \end{cases}$

(١١) $\begin{cases} ٢\text{س} + \text{ص} = ٧ \\ -٢\text{س} + ٥\text{ص} = -١ \end{cases}$

(١٢) $\begin{cases} \frac{\text{س}}{٢} + \frac{\text{ص}}{٤} = ٤ \\ \frac{\text{س}}{٤} - \frac{٣\text{ص}}{٨} = -٢ \end{cases}$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمرينين (١–٢)، اكتب نظام المعادلات التالية على شكل معادلة مصفوفية، محددًا مصفوفة المعاملات ومصفوفة المتغيرات ومصفوفة الثوابت.

(١) $\begin{cases} \text{ص} = ٣\text{س} - ٧ \\ \text{ص} = ٢ \end{cases}$

٥٠

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يجيبون عن الأسئلة في فقرات «حاول أن تحل» للتأكد من فهمهم في استخدام النظير الضربي أو قاعدة كرامر عند حل معادلة المصفوفات.

اختبار سريع

١ حل النظام $\begin{cases} ٣س + ٢ص = -٦ \\ ٢س - ٣ص = ٦١ \end{cases}$

باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ \\ ٦١ \end{bmatrix}$ ؛ (٨، −١٥)

٢ حل النظام $\begin{cases} ١٢س + ٨ص = -٣ \\ ٣س - ٧ص = ٥٠ \end{cases}$

باستخدام قاعدة كرامر.

$س = \frac{٣٧٩}{١٠٨}$ ؛ $ص = -\frac{٢٠٣}{٣٦}$

٩ إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

١ تتنوّع الإجابات. راجع عمل الطلاب.

٢ (أ) $\begin{bmatrix} س + ٢ص \\ ٣س + ٥ص \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} س + ٢ص \\ ٣س + ٥ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ١٤ \end{bmatrix}$

عند المساواة بين مصفوفتين نكتب: س + ٢ ص = ٥

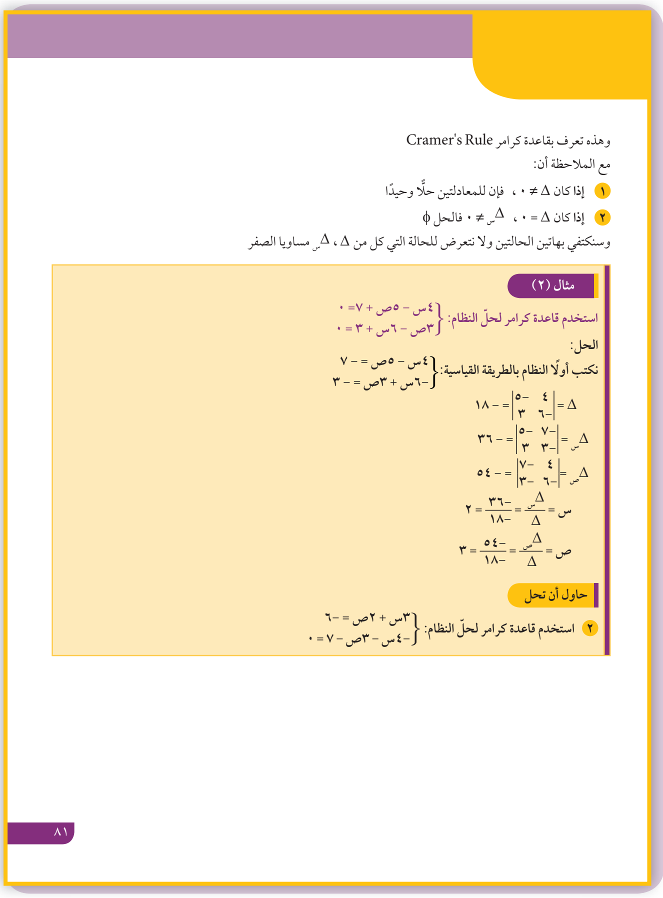
٣س + ٥ص = ١٤

«حاول أن تحل»

١ $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix}$

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ؛ $|\underline{أ}| = ١ \neq ٠$

$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{١} \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix}$



وهذه تعرف بقاعدة كرامر Cramer's Rule

مع الملاحظة أن:

١ **إذا** كان $\Delta \neq ٠$ ، فإن للمعادلتين حلًّا وحيدًا

٢ **إذا** كان $\Delta = ٠$ ، $\Delta_{س} \neq ٠$ فالحل ϕ

وسنكتفي بهاتين الحالتين ولا نتعرض للحالة التي كل من Δ ، $\Delta_{س}$ مساويا الصفر

مثال (٢)

استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام: $\begin{cases} ٤س - ٥ص + ٧ = ٠ \\ ٣ص - ٦س + ٣ = ٠ \end{cases}$

الحل:

نكتب أولًا النظام بالطريقة القياسية: $\begin{cases} ٤س - ٥ص = -٧ \\ -٦س + ٣ص = -٣ \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & -٥ \\ -٦ & ٣ \end{vmatrix} = -١٨$

$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} -٧ & -٥ \\ -٣ & ٣ \end{vmatrix} = -٣٦$

$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٤ & -٧ \\ -٦ & -٣ \end{vmatrix} = -٥٤$

$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{-٣٦}{-١٨} = ٢$

$ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{-٥٤}{-١٨} = ٣$

حاول أن تحل

٢ استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام: $\begin{cases} ٣س + ٢ص = -٦ \\ -٤س - ٣ص - ٧ = ٠ \end{cases}$

٨١

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ٣- & ٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ٣- & ٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١- \\ ٤ \end{bmatrix}$$

الحل: س = −١، ص = ٤ .

٢ $\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤- & ٣- \end{vmatrix} = -١$

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ٦- & ٢ \\ ٧ & ٣- \end{vmatrix} = ٤$

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٣ & ٦- \\ ٤- & ٧ \end{vmatrix} = -٣$

$\text{س} = \dfrac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = -٤$ ، $\text{ص} = \dfrac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = ٣$

(٢) $\begin{cases} \text{س} + ٢\text{ص} = ١١ \\ ٢\text{س} + ٣\text{ص} = ١٨ \end{cases}$

في التمرينين (٣–٤)، استخدم النظير الضربي للمصفوفة لحل نظام المعادلات.

(٣) $\begin{cases} ٢\text{س} + ٣\text{ص} = ١٢ \\ \text{س} + ٢\text{ص} = ٧ \end{cases}$

(٤) $\begin{cases} ٢\text{س} + ٣\text{ص} = ٥ \\ \text{س} + ٢\text{ص} = ٦ \end{cases}$

في التمرينين (٥–٦)، حلّ المعادلة المصفوفية إن أمكن:

(٥) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ \\ ١٠ \end{bmatrix}$

(٦) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ٤- & ٦ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$

في التمرينين (٧–٨)، استخدم قاعدة كرامر لحل نظام معادلات.

(٧) $\begin{cases} ٠{,}٥\text{س} + ١{,}٥\text{ص} = ٧ \\ ٢{,}٥\text{س} - ٣{,}٥\text{ص} = -٩ \end{cases}$

(٨) $\begin{cases} \dfrac{\text{س}}{٥} - \dfrac{٢\text{ص}}{٥} = ٤ \\ \dfrac{٢\text{س}}{٥} - \dfrac{٣\text{ص}}{٥} = ٥ \end{cases}$

(٩) ينتج أحد المصانع أقلام رصاص ومماحي. يبلغ ثمن علبة تحتوي على ٥ مماحي وقلمي رصاص ١٥٠٠ فلس. ويبلغ ثمن علبة أخرى تحتوي على ٧ مماحي و٥ أقلام ٢٦٥٠ فلسًا.
أوجد ثمن الممحاة وثمن القلم مستخدمًا النظير الضربي للمصفوفة.

المرشد لحل المسائل

إجابات «مسألة إضافية»

١) $\begin{bmatrix} ١٢ & ١٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٤ \\ ٩ \end{bmatrix}$

$أ = \begin{bmatrix} ١٢ & ١٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}$ ؛ $|أ| = ١٩ \neq ٠$

$أ^{-١} = \frac{١}{١٩}\begin{bmatrix} ٧ & -١٣ \\ -٥ & ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٧}{١٩} & \frac{-١٣}{١٩} \\ \frac{-٥}{١٩} & \frac{١٢}{١٩} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٧}{١٩} & \frac{-١٣}{١٩} \\ \frac{-٥}{١٩} & \frac{١٢}{١٩} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١٤ \\ ٩ \end{bmatrix}$

س = −١، ص = ٢

إحداثيا النقطة هما (−١، ٢).

٢) لن يوجد نظير ضربي للمصفوفة أ، وبالتالي سوف يحتاج إحدى الطرق السابقة (الحذف أو التعويض).

(أ) لن يتمكن مرشد من إيجاد النظير الضربي للمصفوفة لأن محدد المصفوفة أ يساوي صفر.

(ب) يساوي المحدد في هذه الحالة صفرًا لذا لن يتمكن مرشد من إيجاد النظير الضربي للمصفوفة أ.

المرشد لحل المسائل

الإحداثيان (س، ص) لنقطة في المستوي هي حل النظام: $\begin{cases} ٢س + ٣ص = ١٣ \\ ٥س + ٧ص = ٣١ \end{cases}$.

أوجد إحداثيي هذه النقطة.

كيف فكر مرشد؟

حل المسألة هو الزوج المرتب (س، ص).

يمكنني رسم المستقيمين بيانيًّا وقراءة إحداثيي نقطة التقاطع، ولكن هذا ليس ضروريًّا.

يمكنني استخدام المصفوفات في الحل.

سأعيد كتابة النظام في شكل معادلة مصفوفات.

لإيجاد المصفوفة $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ سوف أضرب طرفي المعادلة في النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}$.

والآن، بما أنني حصلت على النظير الضربي فسوف أضرب.

تذكرت ! يجب أن أضرب من جهة اليمين، لأن عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية.

سأعيد كتابة معادلة المصفوفات، ثم أضرب. هذا يعني أن:

س = ٢، ص = ٣.

وماذا كتب؟

$\begin{cases} ٢س + ٣ص = ١٣ \\ ٥س + ٧ص = ٣١ \end{cases}$

$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٣ \\ ٣١ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}^{-١} = \frac{١}{٢\times٧ - ٥\times٣}\begin{bmatrix} ٧ & -٣ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix}$

$= -١\begin{bmatrix} ٧ & -٣ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -٧ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٣ \\ ٣١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٧ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}$

٢ × ١ ٢ × ٢

لا يمكن أن أضرب

$\begin{bmatrix} -٧ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١٣ \\ ٣١ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-٧)\times١٣ + ٣\times٣١ \\ ٥\times١٣ + (-٢)\times٣١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$

إحداثيا نقطة التقاطع هما (٢، ٣)

مسألة إضافية

١) إحداثيا نقطة في المستوي هما حل النظام: $\begin{cases} ١٢س + ١٣ص = ١٤ \\ ٥س + ٧ص = ٩ \end{cases}$

استخدم المصفوفات لحل النظام وإيجاد إحداثيي هذه النقطة.

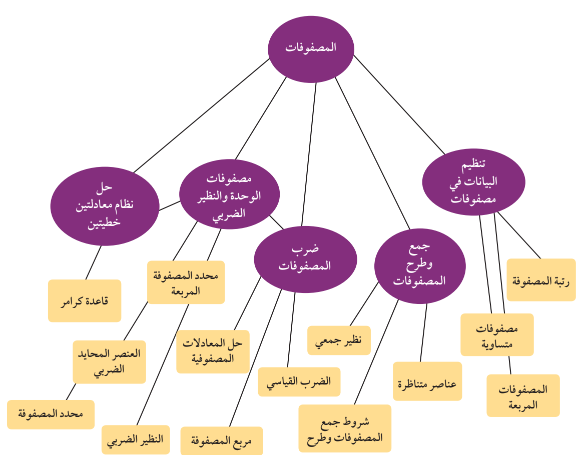
٢) ما المشاكل التي ستعترض مرشدًا

أ) إذا لم يكن للنظام حلول؟

ب) إذا كان للنظام عدد غير منته من الحلول؟

٨٢

مخطط تنظيمي للوحدة السابعة



٨٣

ملخص

- المصفوفة عبارة عن تنظيم من الأعداد على شكل مستطيل، ترتب فيه الأعداد في صفوف وأعمدة وتكتب مثلًا: أ.
- يحدّد أي عنصر في المصفوفة بدلالة رقمي الصف والعمود الواقع فيهما.
- تكون المصفوفتان متساويتين إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية.
- تحصل على مصفوفة الجمع بجمع العناصر المتناظرة، كما ويمكنك أيضًا طرح المصفوفات عن طريق طرح العناصر المتناظرة.
- العناصر المتناظرة في المصفوفات هي العناصر التي لها الرتبة نفسها في كلّ مصفوفة.
- المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار تسمى مصفوفة صفرية.
- المصفوفة –أ هي النظير الجمعي للمصفوفة أ.
- خواص جمع المصفوفات: أ + ب = ب + أ

أ + (ب + جـ) = (أ + ب) + جـ

٠ + أ = أ + ٠ = أ

أ + (–أ) = ٠

- عند ضرب مصفوفة في عدد قياسي، نضرب كل عنصر من المصفوفة في هذا العدد.
- تكون مصفوفة الضرب معرّفة، إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساويًا لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

$أ_{م\times ن} \times ب_{ن\times ر} = جـ_{م\times ر}$.

- لكي تقوم بعملية ضرب المصفوفات، اضرب عناصر كل صف من المصفوفة الأولى في عناصر كل عمود من المصفوفة الثانية. أوجد ناتج كل ضرب، ثم اجمع نواتج الضرب.
- إذا كانت أ من الرتبة م × ن ، ب من الرتبة ن × ر، فإن رتبة المصفوفة أ × ب هي م × ر.
- خصائص ضرب المصفوفات: (أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ)

أ × (ب + جـ) = أ × ب + أ × جـ

(ب + جـ) × أ = ب × أ + جـ × أ

- المصفوفة المربعة هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.
- المصفوفة المربعة ن × ن التي عناصر قطرها الرئيسي هي ١ وبقية العناصر هي الصفر، تسمى مصفوفة الوحدة للضرب وتكتب و.
- مصفوفة الوحدة هي مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي ١ وبقية العناصر صفر.

مراجعة الوحدة السابعة

(١) يبيّن الجدول درجات الحرارة العظمى والصغرى المسجلة في ست مناطق.

المنطقة	الدرجة العظمى	الدرجة الصغرى
١	°٣٠	°٣٧–
٢	°٤٠	°٣٣–
٣	°٤٢	°١٤–
٤	°٣٧	°١–
٥	°٣٩	°٢٨–
٦	°٤٤	°٢–

(أ) اعرض البيانات في مصفوفة (في كل صف الدرجة العظمى والدرجة الصغرى لمنطقة). ما أبعاد هذه المصفوفة؟

(ب) حدّد $أ_{٢٤}$

في التمرينين (٢–٣)، أوجد الناتج .

(٢) $\begin{bmatrix} ٥- & ٧ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٩ \\ ١- & ٨ \end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} ١٨- & ٧ & ٢٢ \\ ١١ & ١٥ & ٥ \\ ١٧- & ١٤ & ١٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١٦ & ١٣ & ١ \\ ١٩ & ٣- & ٢٤ \\ ٢٠ & ١٠ & ٩ \end{bmatrix}$

- مصفوفة النظير (المعكوس) الضربي للمصفوفة المربعة أ، تكتب $أ^{-١}$ ويكون:

$أ^{-١} \times أ = و$، $أ \times أ^{-١} = و$، وتسمى النظير الضربي للمصفوفة أ .

- تقترن كل مصفوفة مربعة أ بعدد حقيقي يسمى «محدد» ويرمز إليه بالرمز |أ| ويقرأ محدد المصفوفة أ. وإذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ب & أ \\ د & جـ \end{bmatrix}$

فإن |أ| = $\begin{vmatrix} ب & أ \\ د & جـ \end{vmatrix}$ = أد – ب جـ

$أ^{-١} = \frac{١}{أد - ب جـ} \begin{bmatrix} -ب & د \\ أ & -جـ \end{bmatrix}$ حيث أد – ب جـ ≠ ٠

- في المصفوفة $\begin{bmatrix} ب & أ \\ د & جـ \end{bmatrix}$، إذاكان أ د – ب جـ = ٠. تسمى المصفوفة منفردة وليس لها نظير ضربي.
- حلّ نظام من معادلتين خطيتين هو زوج مرتب يحقق المعادلتين معًا.
- يمكن حلّ نظام من معادلتين خطيتين باستخدام النظير الضربي للمصفوفة أو باستخدام المحددات (قاعدة كرامر).

في التمارين (٤–٧)، أوجد ناتج ضرب كل مما يأتي إن أمكن مع ذكر السبب.

(٤) $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix}$

(٥) $\begin{bmatrix} ١٠ & ٣ \\ ٤- & ٢١ \end{bmatrix} ٣-$

(٦) $\begin{bmatrix} ٠ & ٤ & ٢ \\ ٨ & ٠ & ٥- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٦ & ١٥ & ٩ \\ ٧ & ٢ & ٨- \\ ١ & ٨- & ٦٣ \end{bmatrix}$

(٧) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

في التمرينين (٨–٩)، أوجد محدد كل مصفوفة.

(٨) $\begin{bmatrix} ٧- & ٦- \\ ٨ & ٥ \end{bmatrix}$

(٩) $\begin{bmatrix} ٥- & ١ \\ ٩ & ٢- \end{bmatrix}$

في التمرينين (١٠–١١)، أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة إن أمكن مع ذكر السبب.

(١٠) $\begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

(١١) $\begin{bmatrix} ٨ & ٧ \\ ١٦- & ١٤- \end{bmatrix}$

في التمارين (١٢–١٧)، حل في س.

(١٢) $\begin{bmatrix} ٣ \\ ٢ \end{bmatrix} = س \times \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١- & ١- \end{bmatrix}$

(١٣) $\begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} - \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ١ & ٨ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$

(١٤) $\underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ١ \\ ١ & ٢ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٨ \\ -١ & ٣ & ١٤ \end{bmatrix}$

(١٥) $\begin{bmatrix} -٢ & -٣ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \times \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} -١ & ٨ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$

(١٦) $٤\underline{\text{س}} + ٣\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ١٠ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$

(١٧) $٢\underline{\text{س}} = \frac{١}{٤}\begin{bmatrix} ٢ & -٦ \\ -٨ & ٨ \end{bmatrix}$

(١٨) حل النظام: $\begin{cases} ٢\text{س} - \text{ص} = ٢ \\ ٢\text{س} - ٢\text{ص} = ٤ \end{cases}$ مستخدمًا النظير الضربي.

(١٩) حل النظام: $\begin{cases} -٣\text{س} + ٥\text{ص} = -٤ \\ \text{س} - ٣\text{ص} = ٤ \end{cases}$ مستخدمًا طريقة كرامر.

(٢٠) اكتب مصفوفتين أ، ب كل منهما من الرتبة ٢ × ٢.

أثبت أن ضرب المصفوفات هو غير إبدالي.

(٢١) هل كل مصفوفة مما يلي هي النظير الضربي للأخرى؟

$\begin{bmatrix} -١ & -١ \\ -٢ & -٣ \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix}$

(٢٢) اشتريت ١٠ قرنفلات و٥ أقحوانات بمبلغ ١٢,٥٠٠ دينارًا. وبعد ظهر اليوم نفسه اشتريت ٥ قرنفلات و٨ أقحوانات بمبلغ ١١,٧٥٠ دينارًا.

فما سعر القرنفلة الواحدة والأقحوانة الواحدة باستخدام المصفوفات؟

تمارين إثرائية

(١) لنعتبر $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} -١ & -٣ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$

(أ) هل للمصفوفات: أ، ب ، أ + ب نظير ضربي؟

(ب) أوجد $\underline{\text{أ}}^{-١}$، $\underline{\text{ب}}^{-١}$، $(\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}})^{-١}$.

(جـ) وضّح ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتان ذات نظير ضربي، أ + ب هي مصفوفة ذات نظير ضربي فإن:

$(\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}})^{-١} = \underline{\text{أ}}^{-١} + \underline{\text{ب}}^{-١}$.

(د) أعطِ مثلًا عن مصفوفتين ذات نظير ضربي شرط ألا يكون لمصفوفة مجموعهما نظيرًا ضربيًّا.

(٢) لنعتبر $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix}$

(أ) أوجد أ + ب ، ثمّ $(\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}})^{٢}$.

(ب) أوجد $\underline{\text{أ}}^{٢}$ ، $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}$ ، $\underline{\text{ب}}^{٢}$ ثمّ $\underline{\text{أ}}^{٢} + ٢\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} + \underline{\text{ب}}^{٢}$. قارن بين إجابتيك في (ب)، (أ).

(جـ) طبّق الخطوتين (أ)، (ب) باستخدام $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} -٥ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$

(٣) إذا طرحنا ثلاثة أمثال عمر ربيع من مثلي عمر جاد نحصل على ٥ . أمّا إذا طرحنا ثلاثة أمثال عمر جاد من خمسة أمثال عمر ربيع نحصل على −٢.

(أ) مثّل المسألة أعلاه على شكل نظام معادلتين من متغيرين.

(ب) اكتب نظام معادلات على شكل معادلة مصفوفية: $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{س}} = \underline{\text{ب}}$ ،

حيث أ هي مصفوفة مرّبعة من الرتبة ٢ × ٢، $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$ ، ب من الرتبة ٢ × ١.

(جـ) أوجد محدد المصفوفة أ. هل للمصفوفة أ نظير ضربي؟ إذا كان لها نظيرًا ضربيًّا فأوجد $\underline{\text{أ}}^{-١}$.

(د) أوجد قيم س، ص باستخدام $\underline{\text{أ}}^{-١}$.

(هـ) حل نظام معادلات مستخدمًا قاعدة كرامر.

(٤) لنأخذ المصفوفات التالية:

$\underline{\text{و}} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

(أ) احسب $\underline{\text{أ}}^{٢}$ ، $\underline{\text{أ}}^{٣}$.

(ب) لكل عدد حقيقي س، نعتبر المصفوفة م(س)، حيث إنّ:

$\underline{\text{م}}(\text{س}) = \underline{\text{و}} + \text{س}\,\underline{\text{أ}} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} \times (\underline{\text{أ}}^{٢})$.

١. تحقق من أنّ: $\underline{\text{م}}(\text{س}) = \begin{bmatrix} \frac{\text{س}^{٢}}{٢} & \text{س} & ١ \\ \text{س} & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٢. احسب: م(٠) ، م(٤).

٣. س، ص عددان حقيقيان، احسب $\underline{\text{م}}(\text{س}) \times \underline{\text{م}}(\text{ص})$.

٤. برهن أنّ: $\underline{\text{م}}(\text{س}) \times \underline{\text{م}}(\text{ص}) = \underline{\text{م}}(\text{س} + \text{ص})$.

(٥) **التفكير الناقد:** لتكن $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} \text{جـ} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ب} \end{bmatrix}$. ما هي قيم العناصر أ ، ب ، جـ ، د عندما يكون النظير الضربي للمصفوفة أ هو أ ؟ (**مساعدة:** هناك أكثر من إجابة صحيحة واحدة).

الوحدة الثامنة: حساب المثلثات [٢] Trigonometry [2]

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

٨ - ١ : دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)

جزء ١ : دائرة الوحدة.

جزء ٢ : إشارات الدوال المثلثية.

جزء ٣: زاوية الإسناد.

٨ - ٢ : العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

جزء ١ : العلاقات بين الدوال المثلثية للزاوية θ مع: $-\theta$، $\pi - \theta$، $\pi + \theta$، $\frac{\pi}{٢} - \theta$، $\frac{\pi}{٢} + \theta$، $\theta + ٢ك\pi$.

جزء ٢: حل معادلات مثلثية.

جزء ٣: تبسيط تعبيرات جبرية تحتوي على دوال مثلثية.

٨ - ٣: العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

جزء ١ : متطابقات فيثاغورث.

جزء ٢ : علاقات مثلثية.

جزء ٣: تبسيط عبارات تتضمن دوال مثلثية.

جزء ٤ : برهنة صحة بعض المتطابقات المثلثية.

مقدمة الوحدة


الوحدة الثامنة

حساب المثلثات (٢)
Trigonometry (2)

مشروع الوحدة: موجة المستقبل

١ مقدمة المشروع: يحتوي مد وجزر المحيط على كمّ هائل من الطاقة. استخدمَتْ هذه الطاقة خلال القرون الغابرة لإدارة الطواحين. أما في العقود الأخيرة فقد اكتشفت الشركات كيفية تسخير هذه الطاقة لتوليد الكهرباء. تتغير قوة المد والجزر بدرجة عالية ولكن بطريقة متوقّعة ومتكررة مما سهل الاستفادة منها.

يجب إجراء دراسة دقيقة لحركة المد والجزر لتحديد مكان وضع المحرّكات، بغية (الهدف) الاستفادة القصوى من الطاقة المولدة. يبنى السّد عادة حيث يوجد أكبر فرق بين المد والجزر. تتولد الطاقة من دخول الماء وخروجه من خلال السد. يتمُّ استخدام مصادر أخرى للطاقة لدعم تلك المتولّدة من حركة المد والجزر عندما تخف هذه الحركة.

٢ الأهداف: دراسة حول الطاقة المتولدة من حركة المد والجزر، وإمكانية الاستفادة منها في توليد الطاقة الكهربائية.

٣ اللوازمُ: أوراق مليمترية، آلة حاسبة بيانية.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ يسجل يوميًّا في مواقع معيّنة من العالم ارتفاع المياه فوق مستوى معين، يُسمى متوسط المياه المنخفضة **Low Water Mean**. يُبيِّن الجدولان المرفقان المعلومات المسجلة في موقعين. قدّر فترة ومدى الدالة التي تنمذج دورة المد والجزر في كل موقع.

الموقع الأول		الموقع الثاني	
الوقت	ارتفاع المياه	الوقت	ارتفاع أو انخفاض المياه
١١:٣٠ ق.ظ	١٨ سم	٤:٤٦ ب.ظ	−٧٣ سم
٥:٤٢ ب.ظ	١٤٦ سم	١٠:٥٩ ب.ظ	١٠١ سم
١١:٥٥ ب.ظ	١٨ سم	٥:١١ ق.ظ	−٧٣ سم
٦:٠٧ ق.ظ	١٤٦ سم	١١:٢٤ ق.ظ	١٠١ سم

ب يتأثر المد والجزر بمواقع الشمس والقمر، يحدث أصغر أو أكبر مد وجزر عندما يكون القمر هلالًا أو بدرًا. ابحث عن ترابط موقع القمر وقوة المد والجزر، وارسم تمثيلًا بيانيًّا يُبيِّن تحولات المد والجزر بدلالة الوقت خلال شهر قمري معين.

ج كيف يمكن تفسير عدم ثبات الطاقة المتولدة من حركة المد والجزر؟

د أوجد بعض المناطق على الكرة الأرضية حيث يمكن إقامة سدود للاستفادة من حركة المدّ والجزر.

٥ التقرير: مرتكزًا على الأبحاث التي قمت بها، أُكتب مقالًا صغيرًا تبين فيه مزايا وعيوب هذه الطاقة. هل تعتقد أنه يمكن تشكيل مصدر عمليّ للطاقة الكهربائية في المستقبل؟

دروس الوحدة

٨-١	٨-٢	٨-٣
دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)	العلاقات بين الدوال المثلثية (١)	العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

٨٦

سوف يكمل الطالب في الوحدة الثامنة تطوير مفاهيمه وتنمية مهاراته في حساب المثلثات حيث تعرف على حساب المثلثات في الوحدة الثانية على أنها نسبًا مثلثية في المثلث قائم الزاوية. ولكن في هذه الوحدة سوف يكون أمام الطالب حساب مثلثات كدالة لمتغير على دائرة الوحدة. لذا كان لا بد للطالب أن يستخدم مكتسباته عن الدائرة وعلاقة نصف قطرها مع المماس عند نقطة التماس، وأيضًا عن نظرية فيثاغورث والمثلثات المتشابهة والأضلاع المتناسبة فيها.

من المفيد أن نشير هنا إلى أهمية النسب المثلثية والدوال المثلثية في التطبيقات الحياتية، حيث ساهمت في إيجاد حلول لمشاكل تواجه الإنسان وخاصة في القياسات غير المباشرة والعلوم العسكرية...

أخبرهم أن التعامل مع الدوال المثلثية سوف يستمر في السنوات القادمة في مجالات علمية متعددة ولن يقتصر الأمر على الرياضيات فقط.

مشروع الوحدة

يقدم هذا المشروع أمام الطلاب معطيات علمية مهمة. فهو يؤكد على كيفية استخدام ظاهرة طبيعية لها علاقة بحركة القمر ودورانه حول الأرض، إذ يحول حركة المد والجزر في البحار إلى طاقة يستخدمها الإنسان في مواقف مختلفة.

فبدلًا من أن نقف في ليلة قمرية يكتمل البدر فيها نتأمل حركة المد والجزر، يحفزنا هذا المشروع على أن نأخذ ورقة وقلمًا ونسجل الأوقات وارتفاع المياه لنكتب بعدها دالة جيبية، ثم نعيد التجربة عندما يكون القمر على شكل الهلال...

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(أ) الموقع الأول:

من ١١:٣٠ ق.ظ إلى ١١:٥٥ ب.ظ ← الفترة
١٢ ساعة ٢٥ دقيقة

من ٥:٤٢ ب.ظ إلى ٦:٠٧ ق.ظ ← الفترة
١٢ ساعة ٢٥ دقيقة

المدى = $\frac{١٤٦ - ١٨}{٢} = \frac{١٢٨}{٢} = ٦٤$ سم

الفترة هي المدة الفاصلة بين ارتفاع معين وإعادة تكراره

الموقع الثاني:

من ٤:٤٦ ب.ظ إلى ٥:١١ ق.ظ ← الفترة
١٢ ساعة ٢٥ دقيقة

من ١٠:٥٩ ب. ظ إلى ١١:٢٤ ق.ظ ← الفترة
١٢ ساعة ٢٥ دقيقة

المدى = $\frac{١٠١ - (-٧٣)}{٢} = \frac{١٧٤}{٢} = ٨٧$ سم

(ب) تحقق من عمل الطلاب.

(جـ) تحقق من عمل الطلاب.

(د) تحقق من عمل الطلاب.

التقرير

قدّم تقريرًا مفصلًا عن عملك. ناقش مع زملائك النقاط الأساسية في المشروع. أعد النظر ببعض النتائج إذا كان ذلك ضروريًّا.

سلّم التقييم	
٤.	الحسابات صحيحة. البحث شامل. التفسيرات جيدة. التقرير مفصل وواضح.
٣.	الحسابات بمعظمها صحيحة. البحث مقبول. التفسيرات مقبولة. التقرير مفصل ومعظمه واضح.
٢.	الحسابات بعضها صحيح. البحث يتضمن غموض. التفسيرات غير منطقية في بعض الأحيان. التقرير ينقصه الإيضاح.
١.	معظم عناصر المشروع ناقصة وغير مقبولة.

الوحدة الثامنة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت كيفية استخدام النسب المثلثية.
- تعلمت كيفية استخدام نظرية فيثاغورث.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تتعرف دائرة الوحدة.
- سوف توجد إحداثيات النقطة على دائرة الوحدة لتستخدمها في إيجاد قيم الدوال المثلثية.
- سوف توجد العلاقة بين الدوال المثلثية لزاوية حادة لحل المعادلات المثلثية.
- سوف تقوم بتبسيط عبارات جبرية تحتوي على دوال مثلثية.
- سوف توجد العلاقة بين:

– جا$^{٢}\theta$، جتا$^{٢}\theta$ لأي زاوية θ.

– ظا$^{٢}\theta$ وقا$^{٢}\theta$ لأي زاوية θ.

– ظتا$^{٢}\theta$ وقتا$^{٢}\theta$ لأي زاويةθ.

- سوف تبسط عبارات تتضمن دوالّ مثلثية وتبرهن صحة متطابقات مثلثية.

المصطلحات الأساسية

دائرة الوحدة – دوال مثلثية – إشارات الدوال المثلثية – إشارات مقلوب دالة مثلثية – الربع الأول – الربع الثاني – الربع الثالث – الربع الرابع – زاوية الإسناد – متطابقات.

أضف إلى معلوماتك

أُطلق اسم جيب (**sin**) على دالة الجيب (**sin function**) نتيجة عدم وضوح حصل في القرون الوسطى. جاءت هذه التّسمية من كلمة سنسكريتية (**Sanskrit**) وهي «جيڤا» (**Jiva**) وتعني الوتر. وقد استخدمت أولًا في الهند مع «أريابتا» (**Araybheta**) سنة ٥١٠ م. وكانت تعني نصف وتر ولكن تم اختصارها، ونقلت إلى اللغة العربية تحت اسم «جيبا» (**jiba**) وهي مشابهة لكلمة «جيب» (**jaib**) وتعني الصدر (أو التجويف). أما في الوقت الحاضر فكلمة جيب في اللغة العربية هي مرادفة لكلمة (**sin**).

وجد المترجمون عند نقل الناتج الفكري العربي إلى اللاتينية أنّ كلمة جيب (**sinus**) تعني أيضًا الصدر (أو التجويف) ومن كلمة (**sinus**) حصلنا على كلمة (**sin**) جيب، أمّا كلمة ظل (**tangent**) فهي تعود إلى «توماس فينك» (**Thomas Finck**) عام ١٥٨٣، التي يمكن فهمها بالنظر إلى الرسم:

القطعة المستقيمة $\overline{دجـ}$ هي مماسة للدائرة في النقطة جـ. لنأخذ م ب = م جـ = ١ فيكون ظاهـ = $\frac{دجـ}{م جـ} = \frac{دجـ}{١}$ = دجـ ، كما وعرفت **tangent** قديمًا بعبارة «**umbra versa**» وتعني الظل المدار. تستخدم دائرة الوحدة في حل تمارين تتعلق بالدوال المثلثية.

٨٧

٨ـ١ : دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية [الدائرية]

١ الأهداف

- يتعرف دائرة الوحدة.
- يتعرف النقطة المثلثية.
- يتعرف الدوال المثلثية (الدائرية).
- يحدّد إشارات الدوال المثلثية.
- يوجد زاوية الإسناد ويستخدمها.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

دائرة الوحدة – النقطة المثلثية – زاوية الإسناد – الدالة المثلثية.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة – فرجار – منقلة – آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اسأل الطلاب تعريف:

- النسب المثلثية في المثلث قائم الزاوية:

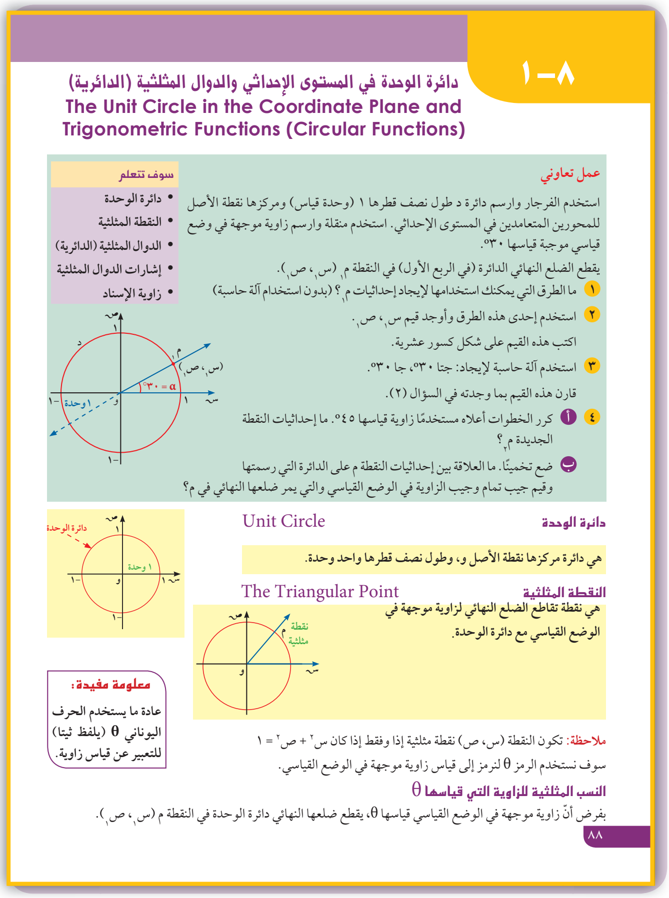
  جا، جتا، ظا، طتا، . . .

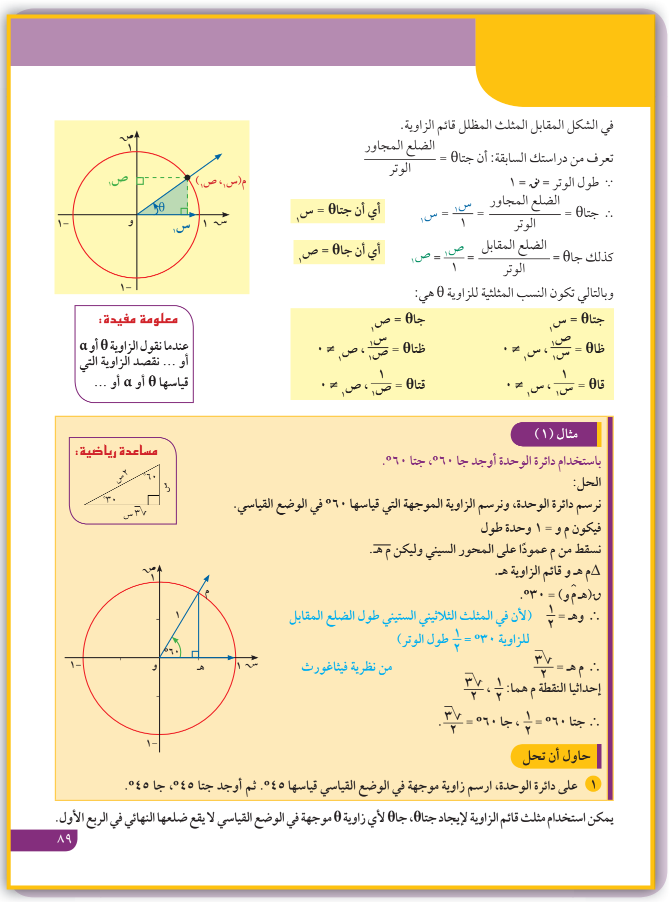
- الزاوية الموجهة الموجبة في الوضع القياسي.
- الزاوية الموجهة السالبة في الوضع القياسي.
- المثلث الثلاثيني ستيني.

٥ التدريس

في فقرة «عمل تعاوني»، اشرح للطلاب أن المقصود بوحدة القياس هي الوحدة المشتركة المستخدمة على المحورين وأن طول نصف قطر دائرة الوحدة يجب أن يساوي هذه الوحدة.

ركز مع الطلاب على فكرة أن كل نقطة في المستوى الإحداثي تكون معرفة دائمًا بزوج مرتب (س، ص)، حيث س الإحداثي السيني، ص الإحداثي الصادي وبالتالي كل نقطة على دائرة الوحدة سوف تعرف أيضًا بزوج مرتب (س، ص) حيث س^{٢} + ص^{٢} = ١ وهي النقطة المثلثية.





وكلما تغيرت النقطة على دائرة الوحدة سوف تحدد زاوية مركزية مع محور السينات، قياسها يساوي قياس القوس المحصور بين محور السينات ونصف القطر الواصل من مركز الدائرة إلى هذه النقطة.

اطلب إليهم رسم المستقيم العمودي من أي نقطة على الدائرة على محور السينات والمستقيم العمودي من هذه النقطة على محور الصادات. اسألهم تعريف الوتر في المثلث قائم الزاوية الذي حصلوا عليه وإيجاد طول الوتر.

دعهم يعرفون بصوت مرتفع النقطة المثلثية على دائرة الوحدة.

شجعهم على الربط بين النسب المثلثية في المثلث قائم الزاوية ليتعرفوا على النتائج الجديدة على دائرة الوحدة.

ركز معهم على فهم الاتجاه الموجب والسالب للزاوية على دائرة واحدة. أخبرهم أن هذه الحالات لم نستخدمها في النسب المثلثية على المثلث قائم الزاوية وأنهم الآن سوف يحسبون نسبًا مثلثية لزوايا سالبة وأيضًا لزوايا قياسها أكبر من 90°.

مثال توضيحي

أقم حوارًا مع الطلاب وأنت تتعامل مع المثال التوضيحي، حيث المطلوب إيجاد جا(-120°) وجتا(-120°)، لأن الطلاب سيتفاجأون مع زاوية قياسها -120°.

شدّد على فكرة ربط النسب المثلثية على دائرة الوحدة مع الإحداثي السيني والإحداثي الصادي على المحاور مقارنة بنقطة الأصل للمحورين المتعامدين. سوف يتأكد الطلاب من إشارة جا، جتا بحسب موقع النقطة المثلثية على دائرة الوحدة.

اشرح لهم جيدًا مفهوم زاوية الإسناد. أخبرهم أنه بالإمكان إيجاد قياس هذه الزاوية باستخدام المنقلة. ثم أعط أمثلة لتبين لهم أهمية هذه الزاوية، عند حساب النسب المثلثية لزاوية قياسها أكبر من 90°.

مثال توضيحي

باستخدام دائرة الوحدة أوجد جتا(-120°)، جا(-120°).

الحل:

الخطوة ١

ارسم زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها -120° ويقطع ضلعها النهائي دائرة الوحدة في النقطة م.

الخطوة ٢

ارسم مثلثًا قائم الزاوية بحيث ينطبق الوتر على الضلع النهائي للزاوية ثم ضع أحد ضلعيه على محور السينات (بحيث يكون الضلع الآخر موازيًا لمحور الصادات) وليكن المثلث ؟وم.

الخطوة ٣

لاحظ أن ق(م و أ) = 60° لماذا؟

أوجد طول كل ضلع في المثلث.

طول الوتر و م = ١ — طول الوتر يساوي طول نصف قطر الدائرة

طول الضلع الأصغر و أ = $\frac{1}{2}$ — طول الضلع المقابل للزاوية 30° يساوي نصف طول الوتر

طول الضلع الأكبر أ م = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ — باستخدام نظرية فيثاغورث

بما أن النقطة تقع في الربع الثالث، فكلا الإحداثيين سالبان.

ينطبق الضلع الأصغر على محور السينات ∴ جتا(-120°) = $-\frac{1}{2}$ ، جا(-120°) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

حاول أن تحل

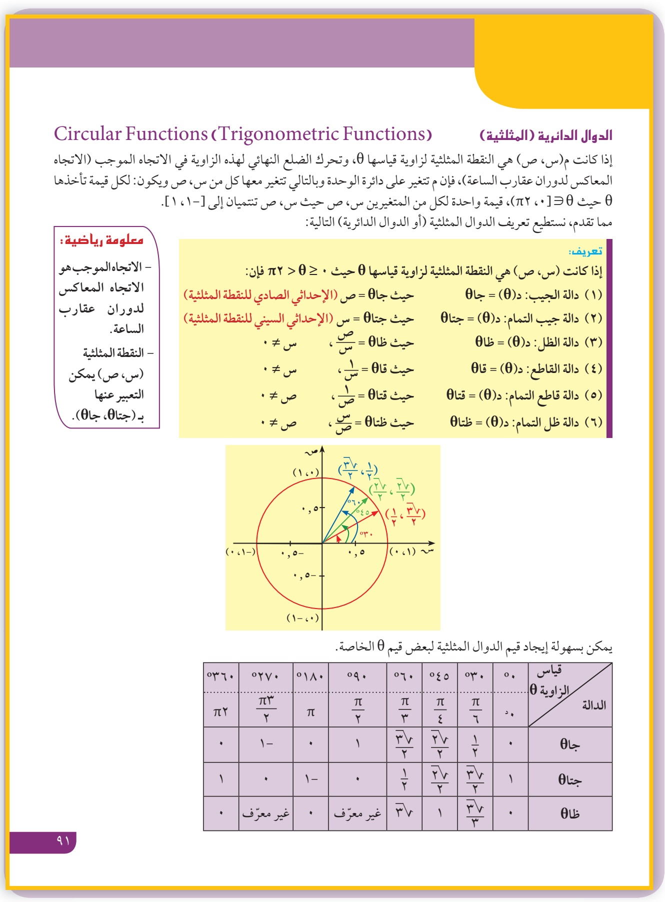
٢ مستخدمًا طريقة المثال التوضيحي، أوجد جتا $\frac{3\pi}{4}$ ، جا $\frac{3\pi}{4}$.

تدريب

استخدم آلة حاسبة وأكمل الجدول التالي مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين:

النسبة \ قياس الزاوية θ	20°	40°	80°	130°	160°	220°	250°	310°
جاθ (sinθ)								
جتاθ (cosθ)								
ظاθ (tanθ)								

٩٠



الدوال الدائرية (المثلثية) Circular Functions (Trigonometric Functions)

إذا كانت م(س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية قياسها θ، وتحرك الضلع النهائي لهذه الزاوية في الاتجاه الموجب (الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة)، فإن م تتغير على دائرة الوحدة وبالتالي تتغير معها كل من س، ص ويكون: لكل قيمة تأخذها θ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$، قيمة واحدة لكل من المتغيرين س، ص حيث س، ص تنتميان إلى [−١، ١].

مما تقدم، نستطيع تعريف الدوال المثلثية (أو الدوال الدائرية) التالية:

تعريف:

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية قياسها θ حيث $0 \leq \theta < 2\pi$ فإن:

(١) دالة الجيب: د(θ) = جاθ حيث جاθ = ص (الإحداثي الصادي للنقطة المثلثية)

(٢) دالة جيب التمام: د(θ) = جتاθ حيث جتاθ = س (الإحداثي السيني للنقطة المثلثية)

(٣) دالة الظل: د(θ) = ظاθ حيث ظاθ = $\frac{ص}{س}$ ، س ≠ ٠

(٤) دالة القاطع: د(θ) = قاθ حيث قاθ = $\frac{1}{س}$ ، س ≠ ٠

(٥) دالة قاطع التمام: د(θ) = قتاθ حيث قتاθ = $\frac{1}{ص}$ ، ص ≠ ٠

(٦) دالة ظل التمام: د(θ) = ظتاθ حيث ظتاθ = $\frac{س}{ص}$ ، ص ≠ ٠

معلومة رياضية:

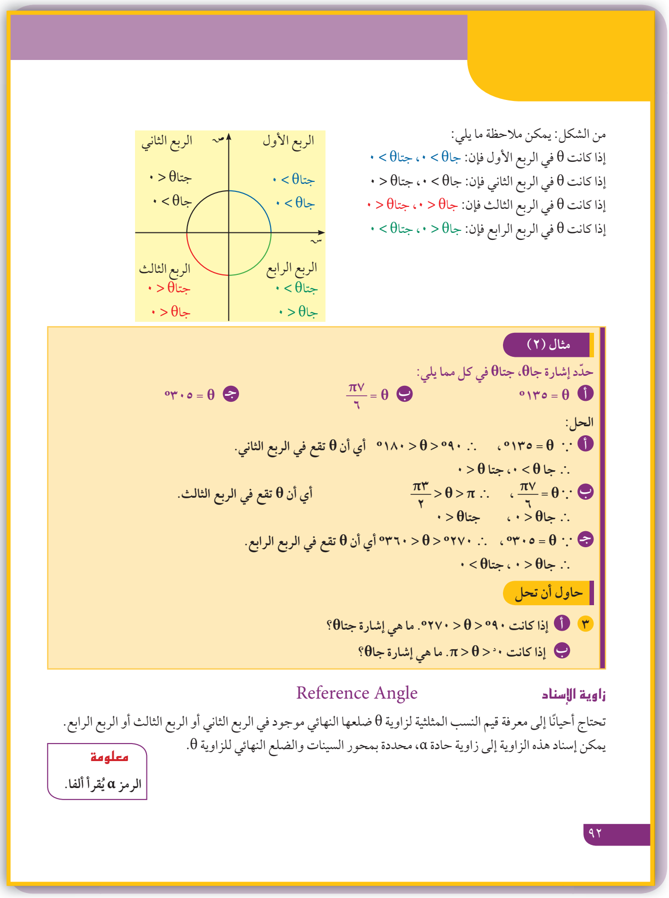
– الاتجاه الموجب هو الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة.

– النقطة المثلثية (س، ص) يمكن التعبير عنها بـ(جتاθ، جاθ).

يمكن بسهولة إيجاد قيم الدوال المثلثية لبعض قيم θ الخاصة.

الدالة \ قياس الزاوية θ	0° / ٠	30° / $\frac{\pi}{6}$	45° / $\frac{\pi}{4}$	60° / $\frac{\pi}{3}$	90° / $\frac{\pi}{2}$	180° / π	270° / $\frac{3\pi}{2}$	360° / 2π
جاθ	٠	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	١	٠	−١	٠
جتاθ	١	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	٠	−١	٠	١
ظاθ	٠	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	١	$\sqrt{3}$	غير معرّف	٠	غير معرّف	٠

٩١



من الشكل: يمكن ملاحظة ما يلي:

إذا كانت θ في الربع الأول فإن: جاθ > ٠، جتاθ > ٠

إذا كانت θ في الربع الثاني فإن: جاθ > ٠، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الثالث فإن: جاθ < ٠، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الرابع فإن: جاθ < ٠، جتاθ > ٠

مثال (٢)

حدّد إشارة جاθ، جتاθ في كل مما يلي:

أ θ = ١٣٥°　ب θ = $\frac{٧\pi}{٦}$　جـ θ = ٣٠٥°

الحل:

أ ∵ θ = ١٣٥°، ∴ ٩٠° < θ < ١٨٠° أي أن θ تقع في الربع الثاني.

∴ جا θ > ٠، جتا θ < ٠

ب ∵ θ = $\frac{٧\pi}{٦}$، ∴ π < θ < $\frac{٣\pi}{٢}$ أي أن θ تقع في الربع الثالث.

∴ جاθ < ٠، جتاθ < ٠

جـ ∵ θ = ٣٠٥°، ∴ ٢٧٠° < θ < ٣٦٠° أي أن θ تقع في الربع الرابع.

∴ جاθ < ٠، جتاθ > ٠

حاول أن تحل

٣ أ إذا كانت ٩٠° < θ < ٢٧٠°. ما هي إشارة جتاθ؟

ب إذا كانت ٠ٰ < θ < π. ما هي إشارة جاθ؟

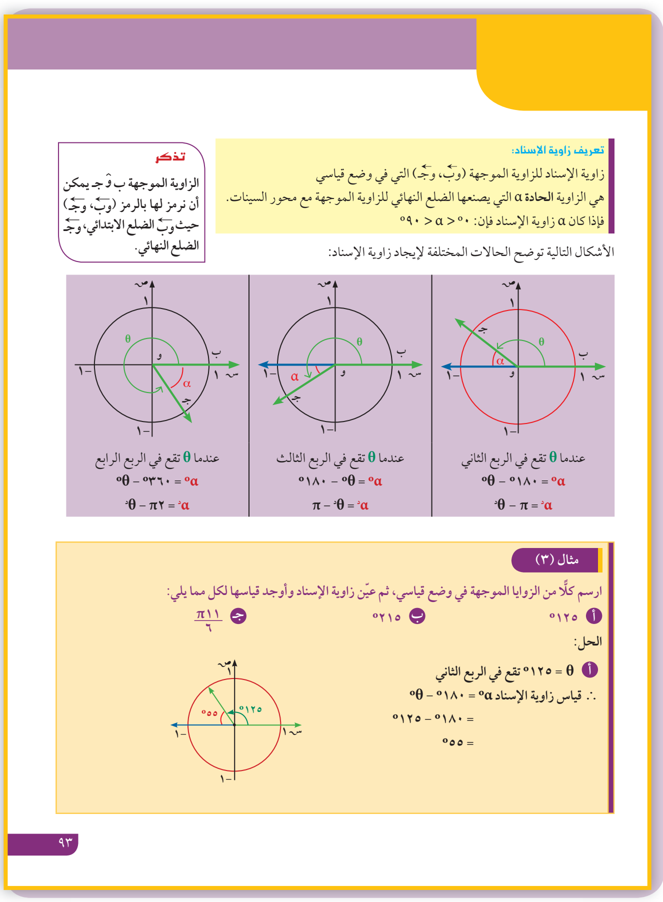
زاوية الإسناد　Reference Angle

تحتاج أحيانًا إلى معرفة قيم النسب المثلثية لزاوية θ ضلعها النهائي موجود في الربع الثاني أو الربع الثالث أو الربع الرابع.
يمكن إسناد هذه الزاوية إلى زاوية حادة α، محددة بمحور السينات والضلع النهائي للزاوية θ.

معلومة

الرمز α يُقرأ ألفا.

٩٢



تعريف زاوية الإسناد:

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة (وبَ، وجـَ) التي في وضع قياسي هي الزاوية **الحادة** α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات.
فإذا كان α زاوية الإسناد فإن: ٠° < α < ٩٠°

تذكر

الزاوية الموجهة ب وَ جـ يمكن أن نرمز لها بالرمز (وبَ، وجـَ) حيث وبَ الضلع الابتدائي، وجـَ الضلع النهائي.

الأشكال التالية توضح الحالات المختلفة لإيجاد زاوية الإسناد:

عندما θ تقع في الربع الثاني
α° = ١٨٠° − θ°
αٰ = π − θٰ

عندما θ تقع في الربع الثالث
α° = θ° − ١٨٠°
αٰ = θٰ − π

عندما θ تقع في الربع الرابع
α° = ٣٦٠° − θ°
αٰ = ٢π − θٰ

مثال (٣)

ارسم كلًّا من الزوايا الموجهة في وضع قياسي، ثم عيّن زاوية الإسناد وأوجد قياسها لكل مما يلي:

أ ١٢٥°　ب ٢١٥°　جـ $\frac{١١\pi}{٦}$

الحل:

أ θ = ١٢٥° تقع في الربع الثاني

∴ قياس زاوية الإسناد α° = ١٨٠° − θ°

= ١٨٠° − ١٢٥°

= ٥٥°

٩٣

٦ الربط

زاوية مركزية على دائرة الوحدة قياسها ١٥٠°. باستخدام زاوية الإسناد أوجد: جا ١٥٠°، جتا ١٥٠°، ظا ١٥٠°.

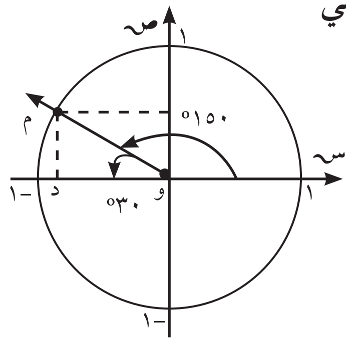
قياس زاوية الإسناد ٣٠°.

المثلث القائم وم د ثلاثيني ستيني

$دم = \frac{١}{٢}$ ، $ود = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

فيكون جا ١٥٠° $= \frac{١}{٢}$

جتا ١٥٠° $= -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$



ظا ١٥٠° $= \frac{\frac{١}{٢}}{\frac{-\sqrt{٣}}{٢}} = -\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تحديد جيب الزاوية وجيب تمام الزاوية على المحاور. أكّد لهم أن المحور الأفقي هو محور جيب تمام الزاوية وأن المحور العمودي هو محور جيب الزاوية.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يجيبون عن فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من فهمهم العلاقة بين النسب المثلثية ودائرة الوحدة والمحاور المرافقة.

اختبار سريع

❶ أوجد جا $\frac{2\pi}{3}$ ‏ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، جتا $\frac{4\pi}{3}$ ‏ $-\frac{1}{2}$

❷ إذا كانت ٩٠° < θ < ١٨٠°، ما هي إشارة كل من جا θ، جتا θ؟ ‏ ٠ < جاθ ، ٠ > جتاθ

❸ أوجد قياس زاوية الاسناد لكل من الزوايا التالية:

θ = ١٢٠° ‏ ٦٠°

θ = ٢٣٠° ‏ ٥٠°

θ = −١٥٠° ‏ ٣٠°

٩ إجابات وحلول

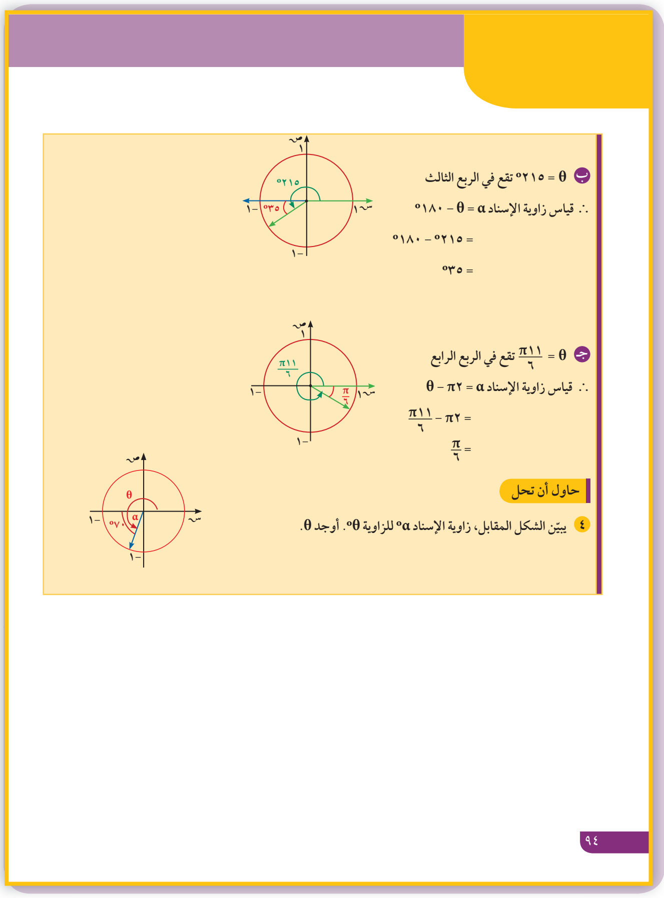
«عمل تعاوني»

١ باستخدام العمود المرسوم من م١ على محور السينات والعمود المرسوم من م١ على محور الصادات.

٢ بما أن الزاوية المركزية قياسها ٣٠° يكون لدينا مثلث قائم ثلاثيني ستيني. لذا ص١ = $\frac{1}{2}$ = ٠,٥؛ س١ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ≃ ٠,٨٦٦.

٣ جا ٣٠° = ٠,٥ ؛ جتا ٣٠° ≃ ٠,٨٦٦ بالمقارنة نجد أن: ص١ = جا ٣٠° = ٠,٥ ؛ س١ = جتا ٣٠° ≃ ٠,٨٦٦.

٤ (أ) ، (ب) ، تحقق من عمل الطلاب.



ب θ = ٢١٥° تقع في الربع الثالث

∴ قياس زاوية الإسناد α = θ − ١٨٠°

= ٢١٥° − ١٨٠°

= ٣٥°

جـ θ = $\frac{11\pi}{6}$ تقع في الربع الرابع

∴ قياس زاوية الإسناد α = ٢π − θ

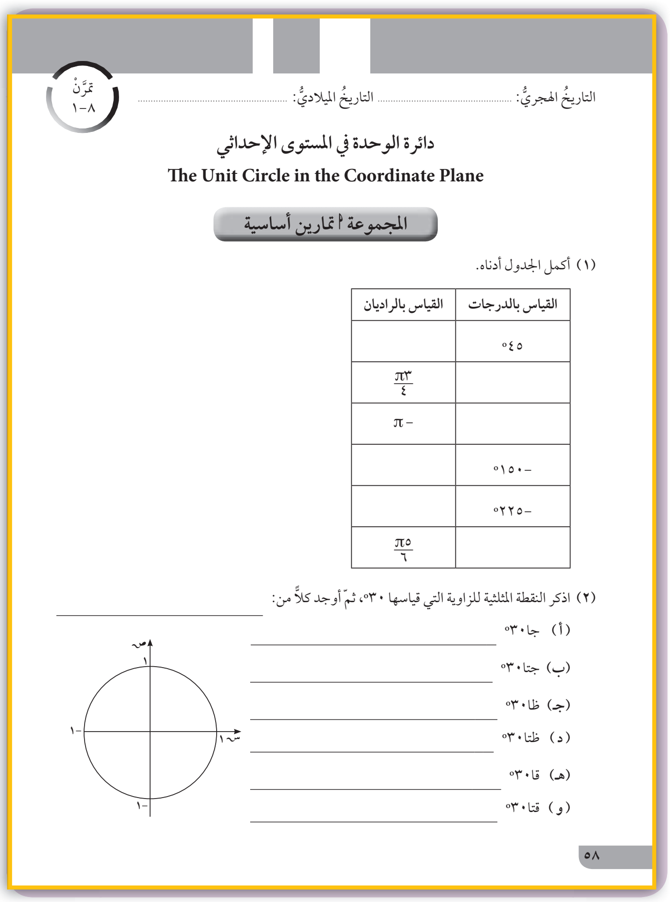
= ٢π − $\frac{11\pi}{6}$

= $\frac{\pi}{6}$

حاول أن تحل

٤ يبيّن الشكل المقابل، زاوية الإسناد α° للزاوية θ°. أوجد θ.

٩٤



التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٨-١

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي

The Unit Circle in the Coordinate Plane

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أكمل الجدول أدناه.

القياس بالدرجات	القياس بالراديان
٤٥°	
	$\frac{3\pi}{4}$
	$-\pi$
−١٥٠°	
−٢٢٥°	
	$\frac{5\pi}{6}$

(٢) اذكر النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها ٣٠°، ثمّ أوجد كلاً من:

(أ) جا٣٠°

(ب) جتا٣٠°

(جـ) ظا٣٠°

(د) ظتا٣٠°

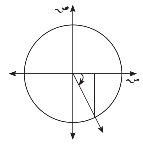
(هـ) قا٣٠°

(و) قتا٣٠°

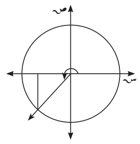
٥٨

في التمرينين (٣-٤)، باستخدام دائرة الوحدة أوجد جيب تمام الزاوية وجيب الزاوية لكلّ من:

(٣) -٦٠°



(٤) ٢٢٥°



في التارين (٥-٧)، بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جيب تمام، جيب، ظل الزاوية على الترتيب لكلّ من الزوايا التالية:

(٥) $\frac{\pi}{٤}$ __________

(٦) ٦٠° __________

(٧) ٠° __________

في التارين (٨-١١)، في أيّ ربع أو على أيّ محور يقع الضلع النهائي لكلّ من الزوايا التالية:

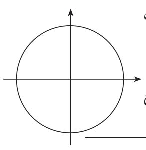
(٨) ١٥٠° __________

(٩) $-\pi$ __________

(١٠) -٦٠° __________

(١١) $\frac{٧\pi}{٦}$ __________

(١٢) (أ) أكمل الفراغ في الرسم أدناه.



الربع الأول
جتاθ > ٠
جاθ > ٠

الربع الثاني
جتاθ ______
جاθ ______

الربع الثالث
جتاθ ______
جاθ ______

الربع الرابع
جتاθ ______
جاθ ______

(ب)افترض أن جتاθ سالبة جاθ موجبة. يقع الضلع النهائي للزاوية θ في:

(أ) الربع الأول (ب) الربع الثاني (جـ) الربع الثالث (د) الربع الرابع

(١٣) **الكتابة في الرياضيات:** فسِّر كيفية إيجاد جيب، جيب تمام الزوايا التالية: ٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°، ٣٦٠° بدون استخدام الآلة الحاسبة.

في التهارين (١٤-١٧)، ارسم كلًّا من الزوايا الموجهة التالية في وضع قياسي، ثم عيِّن زاوية الإسناد وأوجد قياسها.

(١٤) ٢١٠° __________ (١٥) $\frac{٢\pi}{٣}$ __________

(١٦) ١٧٠° __________ (١٧) $\frac{٧\pi}{٣}$ __________

في التمرينين (١٨-١٩)، اختر الإجابة الصحيحة:

(١٨) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها تختلف عن الزوايا الأخرى هي:

(أ) ١٩٠° (ب) ١٧٠°

(جـ) ٣٥٠° (د) ١١٠°

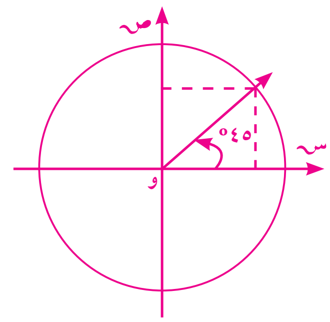
(١٩) الزاوية التي في الوضع القياسي وضلعها النهائي يمر بالنقطة م$\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$ التي تقع على دائرة الوحدة هي:

(أ) ٤٥° (ب) ٢٢٥°

(جـ) ١٣٥° (د) ٣٣٠°

«حاول أن تحل»

١



جا ٤٥° = جتا ٤٥°

$= \frac{\sqrt{٢}}{٢} \simeq ٠,٧٠٧$

٢

$\frac{٣\pi}{٤} = \pi - \frac{\pi}{٤}$

جتا $\frac{٣\pi}{٤} = -\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

جا $\frac{٣\pi}{٤} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

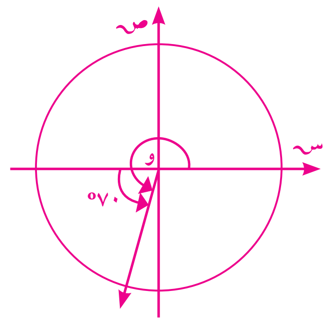
٣ (أ) ∵ θ تقع في الربع الثاني أو الثالث

جتاθ < ٠

(ب) ∵ θ تقع في الربع الأول أو الثاني

جاθ > ٠

٤

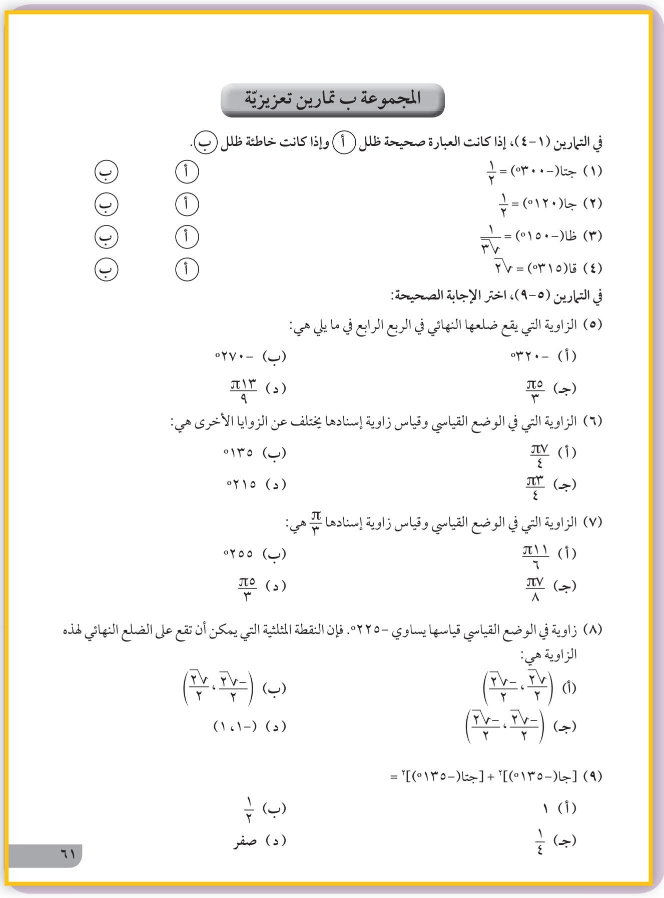


θ° = ١٨٠° + ٧٠°

θ° = ٢٥٠°

«تدريب»

قياس الزاوية θ / النسبة	٢٠°	٤٠°	٨٠°	١٣٠°	١٦٠°	٢٢٠°	٢٥٠°	٣١٠°
جاθ	٠,٣٤	٠,٦٤	٠,٩٨	٠,٧٧	٠,٣٤	-٠,٦٤	-٠,٩٤	-٠,٧٧
جتاθ	٠,٩٤	٠,٧٧	٠,١٧	-٠,٦٤	-٠,٩٤	-٠,٧٧	-٠,٣٤	٠,٦٤
ظاθ	٠,٣٦	٠,٨٤	٥,٦٧	-١,١٩	-٠,٣٦	٠,٨٤	٢,٧٥	-١,١٩



المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

في التمارين (١-٤)، إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

(١) جتا(-٣٠٠°) = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(٢) جا(١٢٠°) = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(٣) ظا(-١٥٠°) = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (أ) (ب)

(٤) قا(٣١٥°) = $\sqrt{٢}$ (أ) (ب)

في التمارين (٥-٩)، اختر الإجابة الصحيحة:

(٥) الزاوية التي يقع ضلعها النهائي في الربع الرابع في ما يلي هي:

(أ) -٣٢٠° (ب) -٢٧٠°

(جـ) $\frac{٥\pi}{٣}$ (د) $\frac{١٣\pi}{٩}$

(٦) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها يختلف عن الزوايا الأخرى هي:

(أ) $\frac{٧\pi}{٤}$ (ب) ١٣٥°

(جـ) $\frac{٣\pi}{٤}$ (د) ٢١٥°

(٧) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها $\frac{\pi}{٣}$ هي:

(أ) $\frac{١١\pi}{٦}$ (ب) ٢٥٥°

(جـ) $\frac{٧\pi}{٨}$ (د) $\frac{٥\pi}{٣}$

(٨) زاوية في الوضع القياسي قياسها يساوي -٢٢٥°. فإن النقطة المثلثية التي يمكن أن تقع على الضلع النهائي لهذه الزاوية هي:

(أ) $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}، \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$ (ب) $\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٢}، \frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$

(جـ) $\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٢}، \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$ (د) (-١، ١)

(٩) [جا(-١٣٥°)]^{٢} + [جتا(-١٣٥°)]^{٢} =

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$

(جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) صفر

٦١

٨ـ٢: العلاقات بين الدوال المثلثية [١]

١ الأهداف

- يوجد العلاقة بين الدوال المثلثية للزاوية θ والدوال المثلثية لكل من الزوايا $(-\theta)$، $(\pi - \theta)$، $(\pi + \theta)$، $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$، $\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$، $(\theta + ٢ك\pi)$.
- يحلّ معادلات مثلثية.
- يبسط تعبيرات جبريّة تحتوي على دوال مثلثية.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

نسب مثلثية أساسية – دالة مثلثية – العلاقات بين الدوال المثلثية – معادلات مثلثية – تبسيط تعبيرات مثلثية.

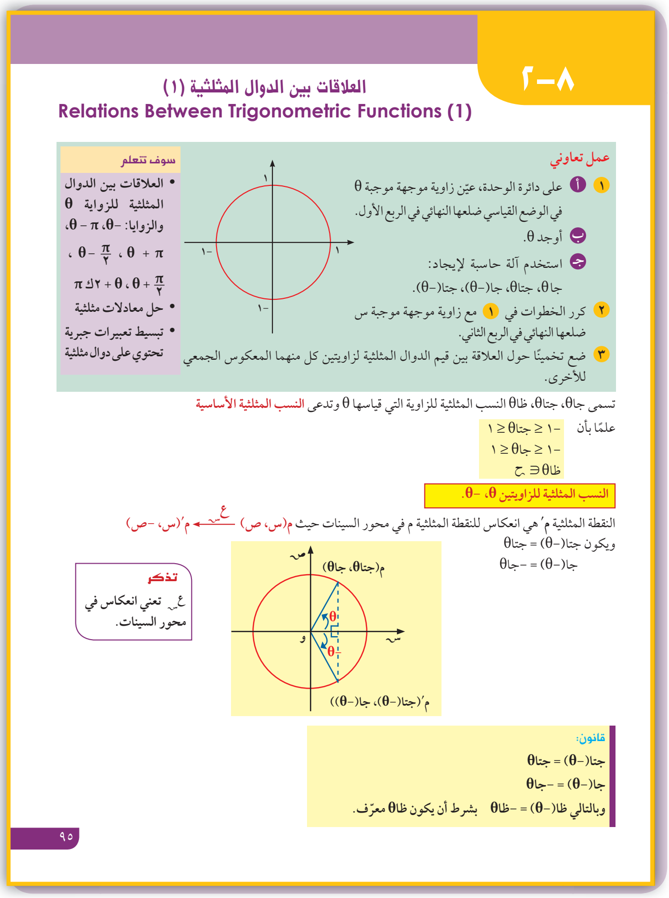
٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة – فرجار – منقلة – آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

- ما هي دائرة الوحدة؟ وما طول نصف قطرها؟
- كيف تعرف جا، جتا لزاوية على محور السينات ومحور الصادات؟
- كيف يوجد انعكاس نقطة في محور ما؟
- كيف تجد انعكاس نقطة في نقطة ما؟
- كيف تعرف أن مثلثين قائمي الزاوية هما متطابقان؟


٨–٢
العلاقات بين الدوال المثلثية (١)
Relations Between Trigonometric Functions (1)

عمل تعاوني
١ أ على دائرة الوحدة، عيّن زاوية موجهة موجبة θ في الوضع القياسي ضلعها النهائي في الربع الأول.
ب أوجد θ.
ج استخدم آلة حاسبة لإيجاد: جاθ، جتاθ، جا(−θ)، جتا(−θ).
٢ كرر الخطوات في ١ مع زاوية موجهة موجبة س ضلعها النهائي في الربع الثاني.
٣ ضع تخمينًا حول العلاقة بين قيم الدوال المثلثية لزاويتين كل منهما المعكوس الجمعي للأخرى.

سوف تتعلم
- العلاقات بين الدوال المثلثية للزاوية θ والزوايا: −θ، π − θ، π + θ، π/٢ − θ، π/٢ + θ، θ + ٢كπ
- حل معادلات مثلثية
- تبسيط تعبيرات جبرية تحتوي على دوال مثلثية

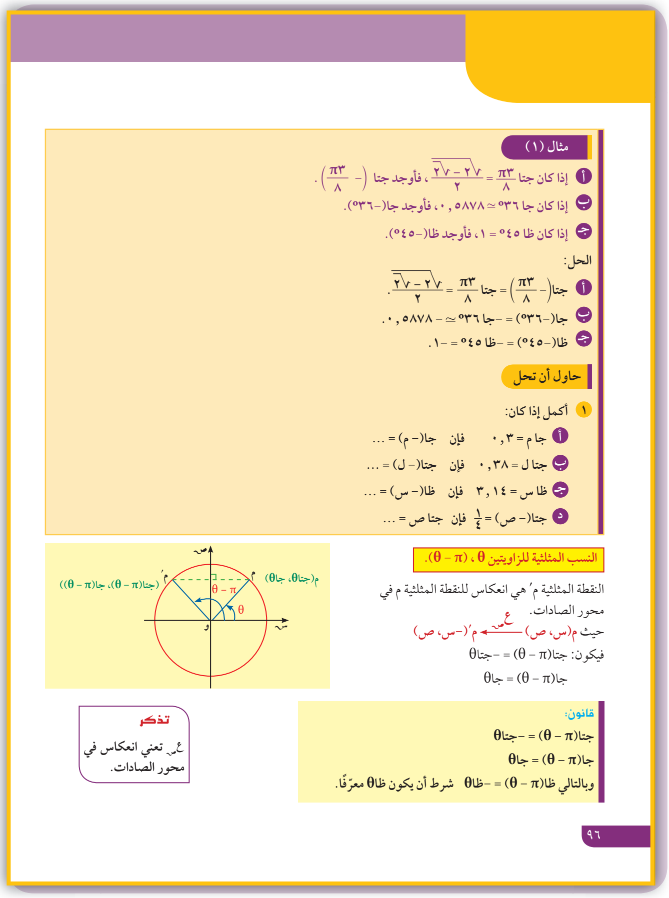
تسمى جاθ، جتاθ، ظاθ النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ وتدعى النسب المثلثية الأساسية
علمًا بأن −١ ≤ جتاθ ≤ ١
−١ ≤ جاθ ≤ ١
ظاθ ∈ ح

النسب المثلثية للزاويتين θ، −θ.
النقطة المثلثية م′ هي انعكاس للنقطة المثلثية م في محور السينات حيث م(س، ص) ← م′(س، −ص)
ويكون جتا(−θ) = جتاθ
جا(−θ) = −جاθ

تذكر
عس تعني انعكاس في محور السينات.

قانون:
جتا(−θ) = جتاθ
جا(−θ) = −جاθ
وبالتالي ظا(−θ) = −ظاθ بشرط أن يكون ظاθ معرّف.

٩٥


مثال (١)
أ إذا كان جتا ٣π/٨ = √(٢ − √٢)/٢، فأوجد جتا (−٣π/٨).
ب إذا كان جا ٣٦° ≃ ٠,٥٨٧٨، فأوجد جا(−٣٦°).
ج إذا كان ظا ٤٥° = ١، فأوجد ظا(−٤٥°).

الحل:
أ جتا(−٣π/٨) = جتا ٣π/٨ = √(٢ − √٢)/٢.
ب جا(−٣٦°) = −جا ٣٦° ≃ −٠,٥٨٧٨.
ج ظا(−٤٥°) = −ظا ٤٥° = −١.

حاول أن تحل
١ أكمل إذا كان:
أ جا م = ٠,٣ فإن جا(− م) = ...
ب جتا ل = ٠,٣٨ فإن جتا(− ل) = ...
ج ظا س = ٣,١٤ فإن ظا(− س) = ...
د جتا(− ص) = ١/٤ فإن جتا ص = ...

النسب المثلثية للزاويتين θ، (π − θ).
النقطة المثلثية م′ هي انعكاس للنقطة المثلثية م في محور الصادات.
حيث م(س، ص) ← م′(−س، ص)
فيكون: جتا(π − θ) = −جتاθ
جا(π − θ) = جاθ

قانون:
جتا(π − θ) = −جتاθ
جا(π − θ) = جاθ
وبالتالي ظا(π − θ) = −ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

تذكر
عص تعني انعكاس في محور الصادات.

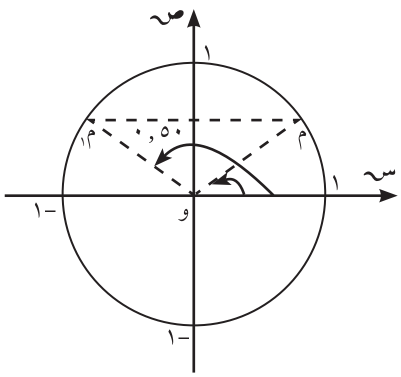
٩٦

٥ التدريس

بعد أن تعرف الطالب في الدرس السابق على النسب المثلثية الأساسية جاθ، جتاθ، ظاθ... سوف يوسّع الآن معارفه عن النسب المثلثية ليجد دوال مثلثية على دائرة الوحدة ويحدّد العلاقات بين جاθ، جتاθ، ظاθ... ودوال لزوايا مختلفة بدءًا من المعكوس الجمعي −θ للزاوية θ مرورًا بالزاوية المتممة والزاوية المكملة وصولًا إلى زوايا ناتج الفرق بينها $\frac{\pi}{2}$ أو π...

وضح للطلاب مفهوم العلاقات من خلال دائرة الوحدة، وزاوية الاسناد حفّزهم على رسم كل حالة أمامهم وإيجاد كل علاقة بدلًا من حفظها غيبًا.

أخبرهم أن ذلك سوف يساعدهم كثيرًا على تبسيط التعبيرات التي تتضمن دوال مثلثية كما في المثال (٤).



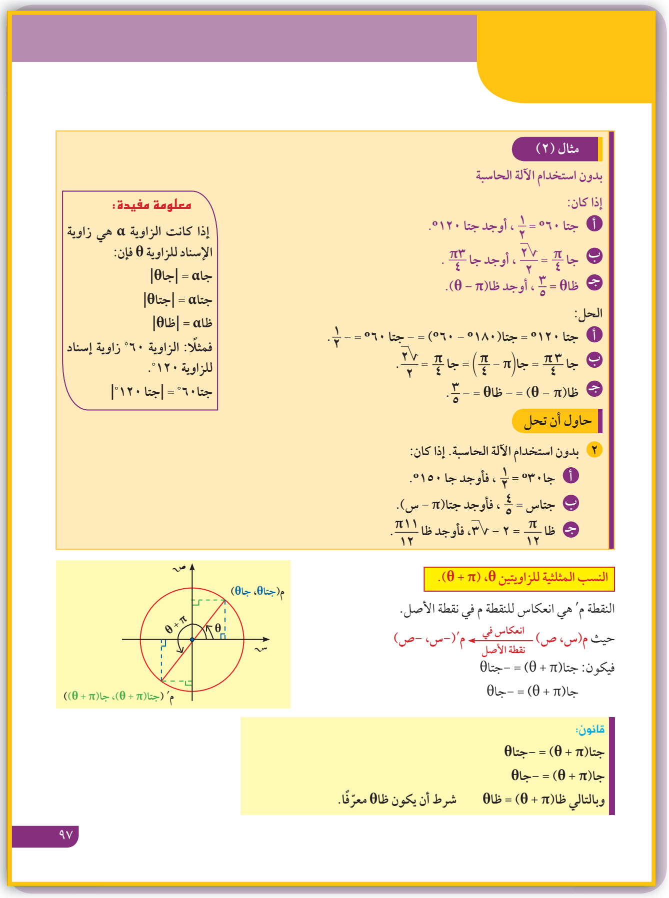
توسّع معهم في حل المعادلات. قبل البدء في حل المعادلات المثلثية اعرض أمامهم نشاطًا عن دائرة الوحدة ليفهموا فكرة وجود حلول كثيرة.

مثال ذلك:

أوجد على دائرة الوحدة حل المعادلة: جاθ = $\frac{1}{2}$ = ٠,٥ .

اطلب إليهم رسم دائرة الوحدة، ثم من النقطة ٠,٥ ارسم مستقيم عمودي على محور الصادات حيث يقطع الدائرة بنقطتين م، م١ وبالتالي يوجد زاويتان لها جاθ = ٠,٥ . إذا افترضنا دورات كاملة على الدائرة من م وإليها، ومن م١ وإليها يكون هناك حلول لا متناهية للزاوية θ حيث جاθ = ٠,٥ . ويمكن أيضًا تقديم نشاط آخر حول جتا θ...

شدّد للطلاب على فكرة أنه في حلول معادلة تتضمن دوال مثلثية يجب أن يكون طرفا المعادلة من دالة واحدة، وبالتالي يمكن استخدام العلاقات بين الدوال المثلثية لتحقيق ذلك.



مثال (٢)

بدون استخدام الآلة الحاسبة

إذا كان:

أ جتا ٦٠° = $\frac{1}{2}$ ، أوجد جتا ١٢٠°.

ب جا $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، أوجد جا $\frac{3\pi}{4}$.

جـ ظاθ = $\frac{3}{5}$ ، أوجد ظا(π − θ).

الحل:

أ جتا ١٢٠° = جتا(١٨٠° − ٦٠°) = − جتا ٦٠° = − $\frac{1}{2}$.

ب جا $\frac{3\pi}{4}$ = جا$\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$ = جا $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

جـ ظا(π − θ) = − ظاθ = − $\frac{3}{5}$.

معلومة مفيدة:

إذا كانت الزاوية α هي زاوية الإسناد للزاوية θ فإن:

جاα = |جاθ|

جتاα = |جتاθ|

ظاα = |ظاθ|

فمثلًا: الزاوية ٦٠° زاوية إسناد للزاوية ١٢٠°.

جتا٦٠° = |جتا ١٢٠°|

حاول أن تحل

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة. إذا كان:

أ جا٣٠° = $\frac{1}{2}$ ، فأوجد جا ١٥٠°.

ب جتاس = $\frac{4}{5}$ ، فأوجد جتا(π − س).

جـ ظا $\frac{\pi}{12}$ = ٢ − $\sqrt{3}$، فأوجد ظا $\frac{11\pi}{12}$.

النسب المثلثية للزاويتين θ، (π + θ).

النقطة م′ هي انعكاس للنقطة م في نقطة الأصل.

حيث م(س، ص) $\xrightarrow[\text{نقطة الأصل}]{\text{انعكاس في}}$ م′(−س، −ص)

فيكون: جتا(π + θ) = −جتاθ

جا(π + θ) = −جاθ

م(جتاθ، جاθ)

م′ (جتا(π + θ)، جا(π + θ))

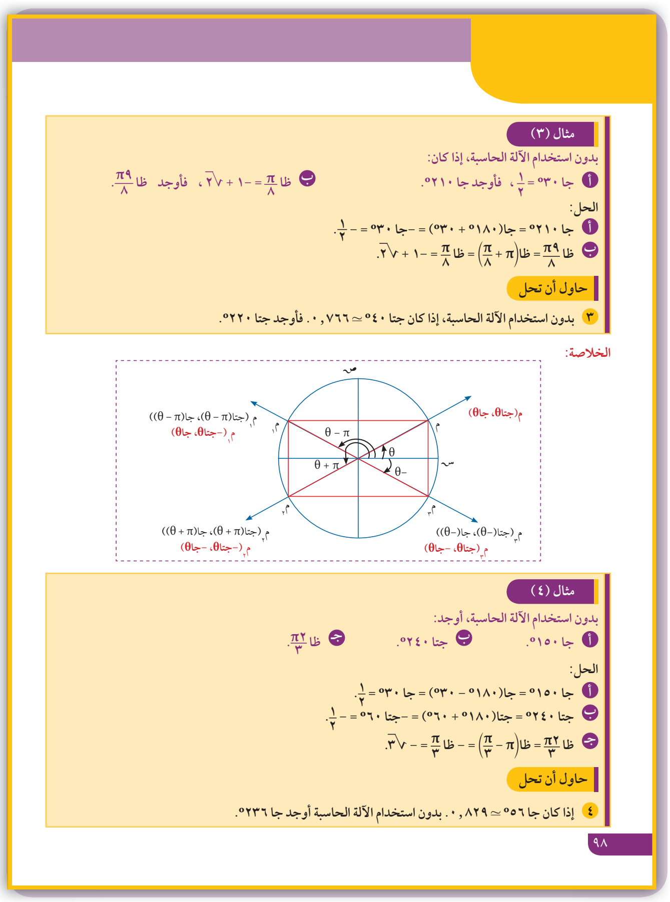
قانون:

جتا(π + θ) = −جتاθ

جا(π + θ) = −جاθ

وبالتالي ظا(π + θ) = ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

٩٧



مثال (٣)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان:

أ جا ٣٠° = $\frac{1}{2}$ ، فأوجد جا ٢١٠°.

ب ظا $\frac{\pi}{8}$ = −١ + $\sqrt{2}$ ، فأوجد ظا $\frac{9\pi}{8}$.

الحل:

أ جا ٢١٠° = جا(١٨٠° + ٣٠°) = −جا ٣٠° = − $\frac{1}{2}$.

ب ظا $\frac{9\pi}{8}$ = ظا$\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right)$ = ظا $\frac{\pi}{8}$ = −١ + $\sqrt{2}$.

حاول أن تحل

٣ بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جتا ٤٠° ≃ ٠,٧٦٦ . فأوجد جتا ٢٢٠°.

الخلاصة:

م(جتاθ، جاθ)

م١ (جتا(π − θ)، جا(π − θ))

م١ (−جتاθ، جاθ)

م٢ (جتا(π + θ)، جا(π + θ))

م٢ (−جتاθ، −جاθ)

م٣ (جتا(−θ)، جا(−θ))

م٣ (جتاθ، −جاθ)

مثال (٤)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، أوجد:

أ جا ١٥٠°. ب جتا ٢٤٠°. جـ ظا $\frac{2\pi}{3}$.

الحل:

أ جا ١٥٠° = جا(١٨٠° − ٣٠°) = جا ٣٠° = $\frac{1}{2}$.

ب جتا ٢٤٠° = جتا(١٨٠° + ٦٠°) = −جتا ٦٠° = − $\frac{1}{2}$.

جـ ظا $\frac{2\pi}{3}$ = ظا$\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ = − ظا $\frac{\pi}{3}$ = − $\sqrt{3}$.

حاول أن تحل

٤ إذا كان جا ٥٦° ≃ ٠,٨٢٩ . بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جا ٢٣٦°.

٩٨

٦ الربط

أوجد مجموعة حلول للمعادلة:

$$\text{جتا}\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta\right) = -\text{جا}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

نكتب: $\text{جا}\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{جتا}\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta\right)$

$$\text{جا}\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{جا}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2\theta\right)$$

$$\text{جا}\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{جا}\left(\frac{\pi}{6} + 2\theta\right)$$

أولًا: $-\frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{6} + 2\theta + 2\text{ك}\pi$

$$-3\theta = \frac{2\pi}{3} + 2\text{ك}\pi ،\ \text{ك} \in \text{ص}$$

$$\theta = \frac{-2\pi}{9} + \frac{2}{3}\text{ك}\pi ،\ \text{ك} \in \text{ص}$$

ثانيًا: $-\frac{\pi}{2} - \theta = \pi - \frac{\pi}{6} - 2\theta + 2\text{ك}\pi$

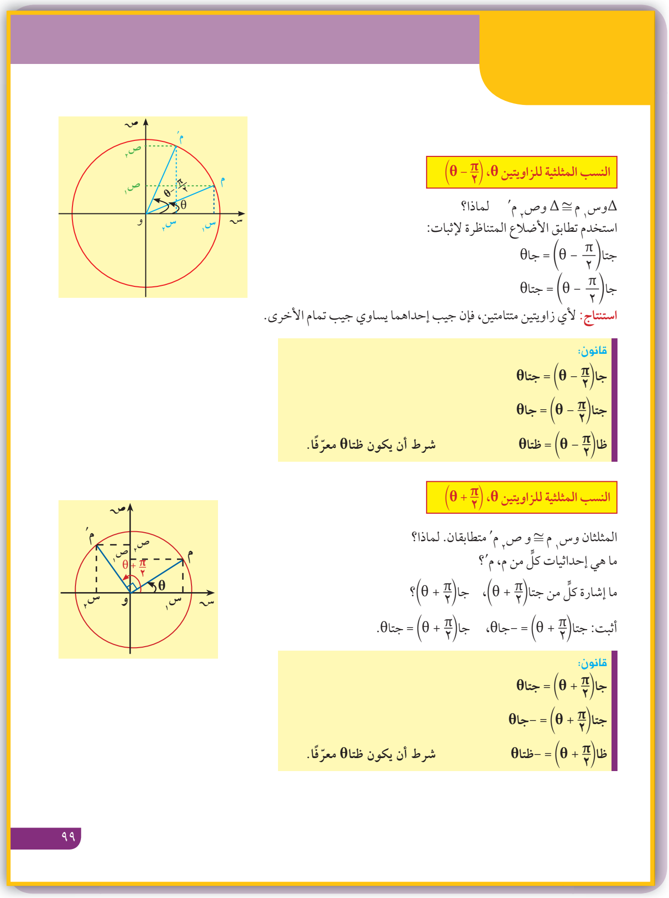
$$\theta = \frac{4\pi}{3} + 2\text{ك}\pi ،\ \text{ك} \in \text{ص}$$

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

لا يستخدم الطلاب العلاقات بين الدوال المثلثية بشكل صحيح. اطلب إليهم في كل حالة رسم دائرة الوحدة وتحديد كل حالة، ثم إيجاد العلاقة.

٨ التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من فهمهم لهذا الدرس، لأن حفظ العلاقات لن ينفع كثيرًا.



النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

Δوس$_1$ م $\cong \Delta$ وص$_2$ م$'$ لماذا؟

استخدم تطابق الأضلاع المتناظرة لإثبات:

$\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{جا}\theta$

$\text{جا}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{جتا}\theta$

استنتاج: لأي زاويتين متتامتين، فإن جيب إحداهما يساوي جيب تمام الأخرى.

قانون:

$\text{جا}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{جتا}\theta$

$\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{جا}\theta$

$\text{ظا}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{ظتا}\theta$ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

المثلثان وس$_1$ م $\cong$ و ص$_2$ م$'$ متطابقان. لماذا؟

ما هي إحداثيات كلٍّ من م، م$'$؟

ما إشارة كلٍّ من $\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$، $\text{جا}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$؟

أثبت: $\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\text{جا}\theta$، $\text{جا}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \text{جتا}\theta$.

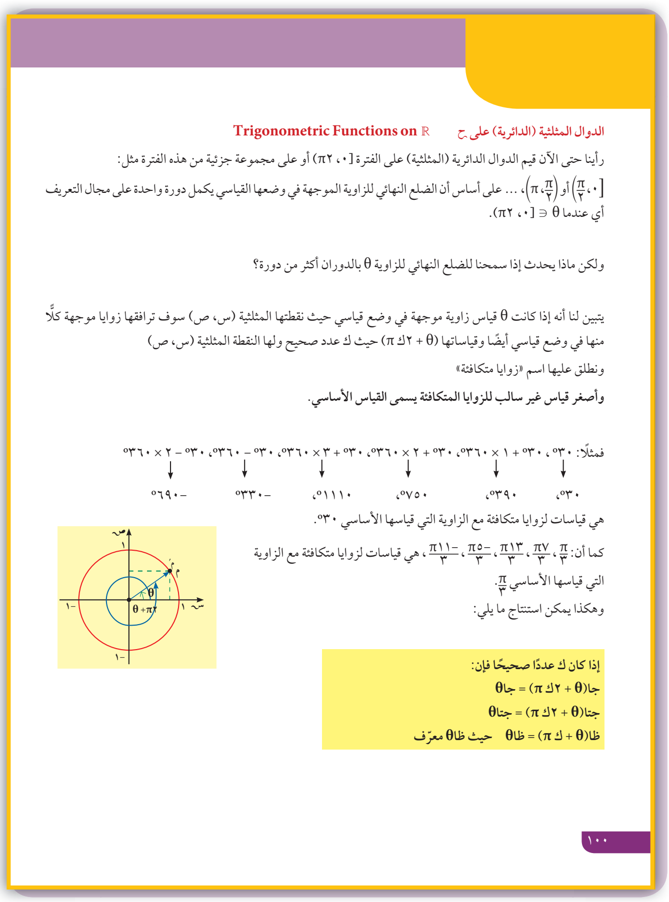
قانون:

$\text{جا}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \text{جتا}\theta$

$\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\text{جا}\theta$

$\text{ظا}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\text{ظتا}\theta$ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

٩٩



الدوال المثلثية (الدائرية) على ح Trigonometric Functions on $\mathbb{R}$

رأينا حتى الآن قيم الدوال الدائرية (المثلثية) على الفترة [٠، ٢π) أو على مجموعة جزئية من هذه الفترة مثل: [٠، $\frac{\pi}{2}$) أو ($\frac{\pi}{2}$، π)، ... على أساس أن الضلع النهائي للزاوية الموجهة في وضعها القياسي يكمل دورة واحدة على مجال التعريف أي عندما $\theta \in$ [٠، ٢π).

ولكن ماذا يحدث إذا سمحنا للضلع النهائي للزاوية θ بالدوران أكثر من دورة؟

يتبين لنا أنه إذا كانت θ قياس زاوية موجهة في وضع قياسي حيث نقطتها المثلثية (س، ص) سوف ترافقها زوايا موجهة كلًّا منها في وضع قياسي أيضًا وقياساتها (θ + ٢ك π) حيث ك عدد صحيح ولها النقطة المثلثية (س، ص)

ونطلق عليها اسم «زوايا متكافئة»

وأصغر قياس غير سالب للزوايا المتكافئة يسمى القياس الأساسي.

فمثلًا: ٣٠°، ٣٠° + ١ × ٣٦٠°، ٣٠° + ٢ × ٣٦٠°، ٣٠° + ٣ × ٣٦٠°، ٣٠° − ٣٦٠°، ٣٠° − ٢ × ٣٦٠°

٣٠°، ٣٩٠°، ٧٥٠°، ١١١٠°، −٣٣٠° −٦٩٠°

هي قياسات لزوايا متكافئة مع الزاوية التي قياسها الأساسي ٣٠°.

كما أن: $\frac{\pi}{3}$، $\frac{7\pi}{3}$، $\frac{13\pi}{3}$، $\frac{-5\pi}{3}$، $\frac{-11\pi}{3}$، هي قياسات لزوايا متكافئة مع الزاوية التي قياسها الأساسي $\frac{\pi}{3}$.

وهكذا يمكن استنتاج ما يلي:

إذا كان ك عددًا صحيحًا فإن:

$\text{جا}(\theta + 2\text{ك}\pi) = \text{جا}\theta$

$\text{جتا}(\theta + 2\text{ك}\pi) = \text{جتا}\theta$

$\text{ظا}(\theta + \text{ك}\pi) = \text{ظا}\theta$ حيث ظاθ معرّف

١٠٠

اختبار سريع

١ حل كلًّا من المعادلات التالية:

جا$\left(٢\text{ س} + \frac{\pi}{٦}\right)$ = جا$\left(\text{س} + \frac{\pi}{٤}\right)$

س = $\frac{\pi}{١٢}$ + ٢ ك π أو س = $\frac{٧\pi}{٣٦}$ + $\frac{٢}{٣}$ ك π ك ∈ ص

٢ جتا ٣ س = جتا$\left(\text{س} + \frac{\pi}{٣}\right)$

س = $\frac{\pi}{٦}$ + ك π أو س = $\frac{-\pi}{١٢}$ + $\frac{ك\pi}{٢}$ ك ∈ ص

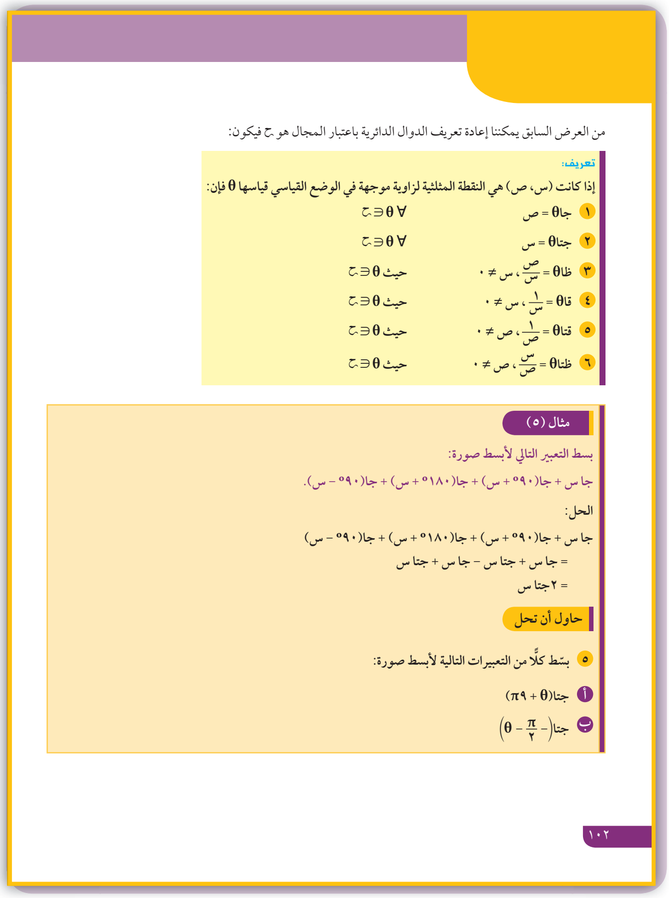
٣ جتا ٤ س = جا$\left(٢\text{ س} + \frac{\pi}{٤}\right)$

س = $\frac{\pi}{٢٤}$ − $\frac{١}{٣}$ ك π أو س = − $\frac{\pi}{٨}$ − ك π ك ∈ ص

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

١، ٢، ٣ تحقق من عمل الطلاب.


من العرض السابق يمكننا إعادة تعريف الدوال الدائرية باعتبار المجال هو ح فيكون:

تعريف:

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ فإن:

١ جاθ = ص ∀ θ ∈ ح
٢ جتاθ = س ∀ θ ∈ ح
٣ ظاθ = $\frac{ص}{س}$، س ≠ ٠ حيث θ ∈ ح
٤ قاθ = $\frac{١}{س}$، س ≠ ٠ حيث θ ∈ ح
٥ قتاθ = $\frac{١}{ص}$، ص ≠ ٠ حيث θ ∈ ح
٦ ظتاθ = $\frac{س}{ص}$، ص ≠ ٠ حيث θ ∈ ح

مثال (٥)

بسط التعبير التالي لأبسط صورة:

جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° − س).

الحل:

جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° − س)
= جا س + جتا س − جا س + جتا س
= ٢ جتا س

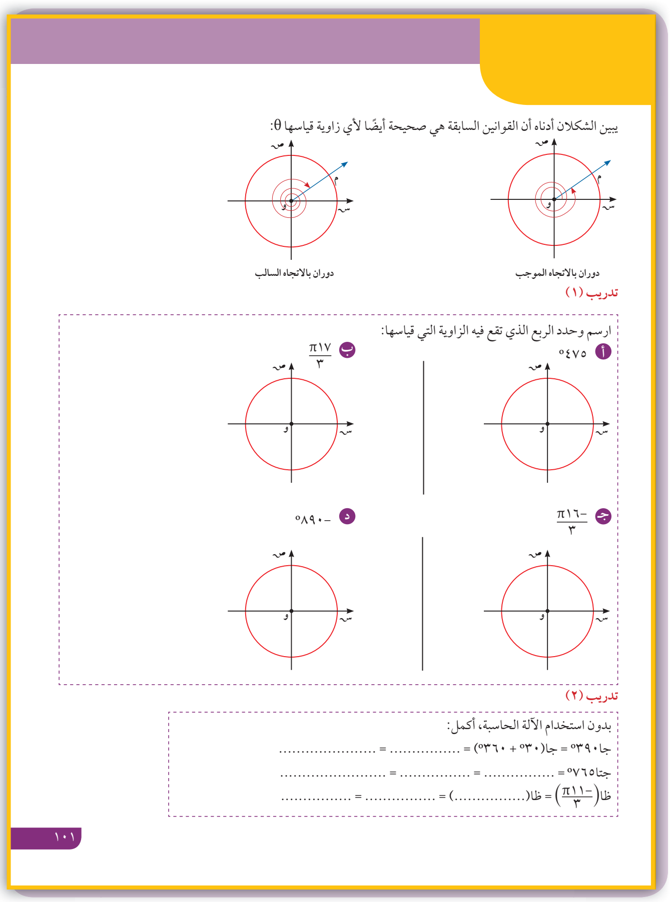
حاول أن تحل

٥ بسّط كلًّا من التعبيرات التالية لأبسط صورة:

أ جتا(θ + ٩π)

ب جتا$\left(-\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

١٠٢


يبين الشكلان أدناه أن القوانين السابقة هي صحيحة أيضًا لأي زاوية قياسها θ:

دوران بالاتجاه الموجب

دوران بالاتجاه السالب

تدريب (١)

ارسم وحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية التي قياسها:

أ ٤٧٥°

ب $\frac{١٧\pi}{٣}$

جـ $\frac{-١٦\pi}{٣}$

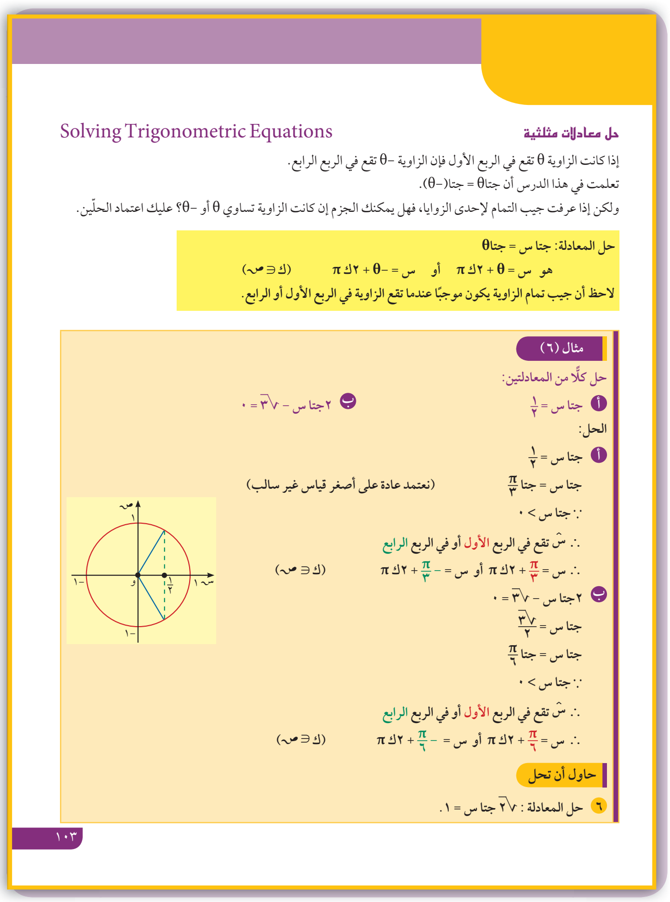
د −٨٩٠°

تدريب (٢)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، أكمل:

جا٣٩٠° = جا(٣٠° + ٣٦٠°) = ... = ...
جتا٧٦٥° = ... = ... = ...
ظا$\left(\frac{-١١\pi}{٣}\right)$ = ظا(................) = ... = ...

١٠١


حل معادلات مثلثية Solving Trigonometric Equations

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية −θ تقع في الربع الرابع.
تعلمت في هذا الدرس أن جتاθ = جتا(−θ).
ولكن إذا عرفت جيب التمام لإحدى الزوايا، فهل يمكنك الجزم إن كانت الزاوية تساوي θ أو −θ؟ عليك اعتماد الحلّين.

حل المعادلة: جتا س = جتاθ
هو س = θ + ٢ك π أو س = −θ + ٢ك π (ك ∈ ص)
لاحظ أن جيب تمام الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع.

مثال (٦)

حل كلًّا من المعادلتين:

أ جتا س = $\frac{١}{٢}$ ب ٢جتا س − $\sqrt{٣}$ = ٠

الحل:

أ جتا س = $\frac{١}{٢}$
جتا س = جتا $\frac{\pi}{٣}$ (نعتمد عادة على أصغر قياس غير سالب)
∵ جتا س > ٠
∴ سَ تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع
∴ س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π أو س = − $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π (ك ∈ ص)

ب ٢جتا س − $\sqrt{٣}$ = ٠
جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
جتا س = جتا $\frac{\pi}{٦}$
∵ جتا س > ٠
∴ سَ تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع
∴ س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ك π أو س = − $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ك π (ك ∈ ص)

حاول أن تحل

٦ حل المعادلة: $\sqrt{٢}$ جتا س = ١.

١٠٣

«حاول أن تحل»

١ (أ) جا(−م) = −٣,٠

(ب) جتا(−ل) = ٠,٣٨

(ج) ظا(−س) = −٣,١٤

(د) جتاص = $\frac{١}{٤}$

٢ (أ) جا(١٥٠°) = جا(١٨٠° − ٣٠°)

= جا٣٠° = $\frac{١}{٢}$

(ب) جتا(π − س) = −جتاس = −$\frac{٤}{٥}$

(ج) ظا$\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ = ظا$\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)$

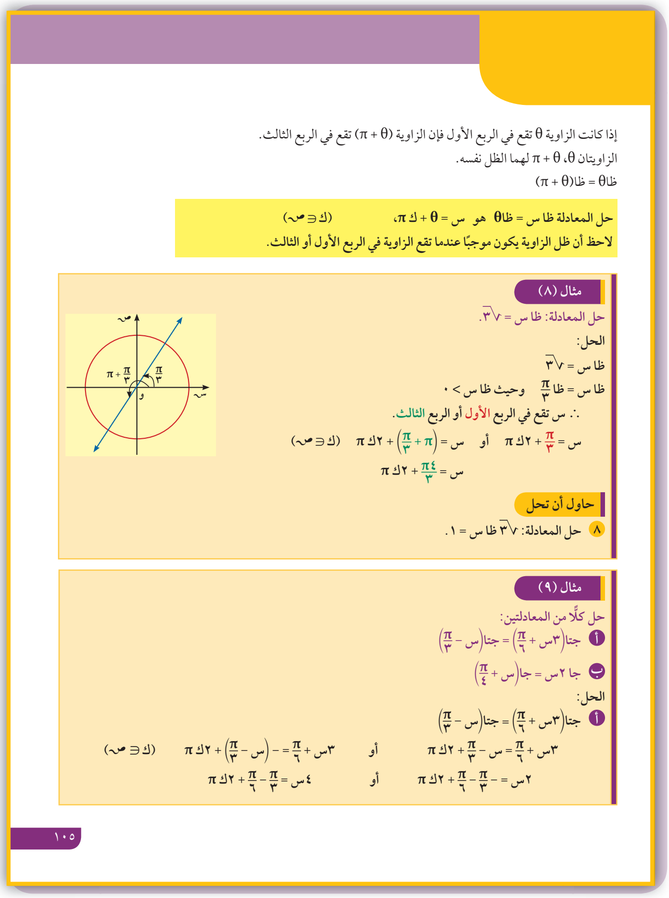
= −ظا$\left(\frac{\pi}{12}\right)$ = −٢ + √٣

٣ جتا٢٢٠° = جتا(١٨٠° + ٤٠°) = −جتا٤٠°

≃ −٠,٧٦٦

٤ جا٢٣٦° = جا(١٨٠° + ٥٦°) = −جا٥٦°

≃ −٠,٨٢٩

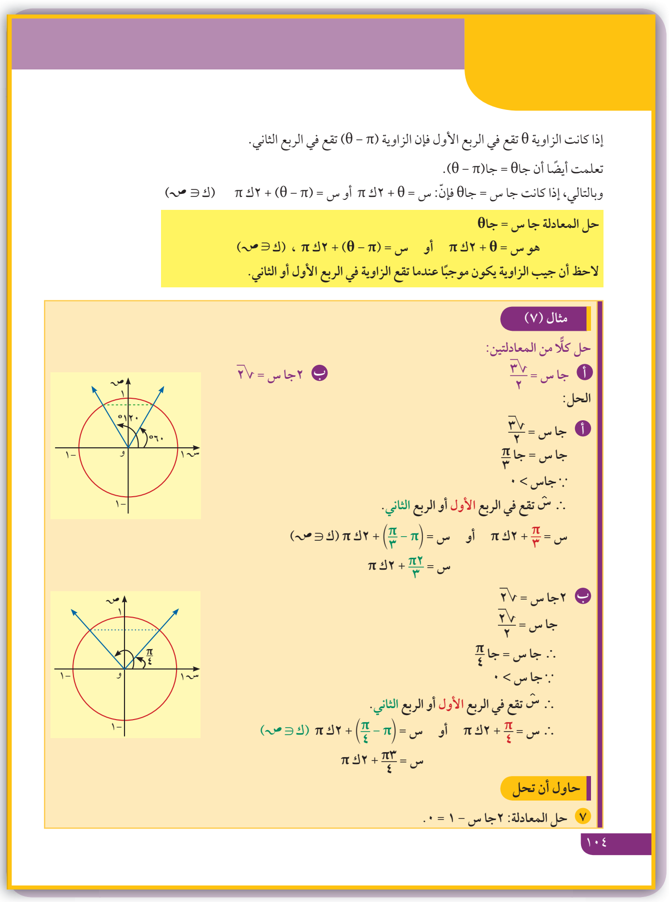

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية (π + θ) تقع في الربع الثالث.
الزاويتان θ، π + θ لهما الظل نفسه.
ظاθ = ظا(π + θ)

حل المعادلة ظا س = ظاθ هو س = θ + ك π، (ك ∈ ص)
لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث.

مثال (٨)
حل المعادلة: ظا س = √٣.
الحل:
ظا س = √٣
ظا س = ظا $\frac{\pi}{3}$ وحيث ظا س > ٠
∴ س تقع في الربع الأول أو الربع الثالث.
س = $\frac{\pi}{3}$ + ٢ك π أو س = $\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$ + ٢ك π (ك ∈ ص)
س = $\frac{4\pi}{3}$ + ٢ك π

حاول أن تحل
٨ حل المعادلة: √٣ ظا س = ١.

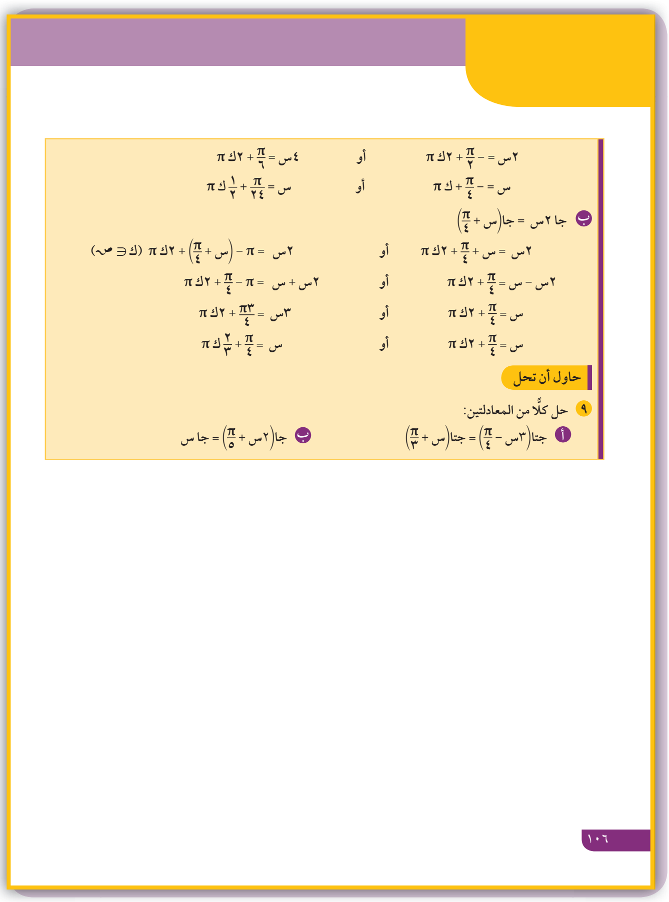
مثال (٩)
حل كلًّا من المعادلتين:
أ جتا$\left(٣س + \frac{\pi}{6}\right)$ = جتا$\left(س - \frac{\pi}{3}\right)$
ب جا ٢س = جا$\left(س + \frac{\pi}{4}\right)$
الحل:
أ جتا$\left(٣س + \frac{\pi}{6}\right)$ = جتا$\left(س - \frac{\pi}{3}\right)$
٣س + $\frac{\pi}{6}$ = س − $\frac{\pi}{3}$ + ٢ك π أو ٣س + $\frac{\pi}{6}$ = −$\left(س - \frac{\pi}{3}\right)$ + ٢ك π (ك ∈ ص)
٢س = −$\frac{\pi}{3}$ − $\frac{\pi}{6}$ + ٢ك π أو ٤س = $\frac{\pi}{3}$ − $\frac{\pi}{6}$ + ٢ك π
١٠٥


إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية (π − θ) تقع في الربع الثاني.
تعلمت أيضًا أن جاθ = جا(π − θ).
وبالتالي، إذا كانت جا س = جاθ فإنّ: س = θ + ٢ك π أو س = (π − θ) + ٢ك π (ك ∈ ص)

حل المعادلة جا س = جاθ
هو س = θ + ٢ك π أو س = (π − θ) + ٢ك π، (ك ∈ ص)
لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني.

مثال (٧)
حل كلًّا من المعادلتين:
أ جا س = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ب ٢ جا س = √٣
الحل:
أ جا س = $\frac{\sqrt{3}}{2}$
جا س = جا $\frac{\pi}{3}$
∵ جا س > ٠
∴ س تقع في الربع الأول أو الربع الثاني.
س = $\frac{\pi}{3}$ + ٢ك π أو س = $\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ + ٢ك π (ك ∈ ص)
س = $\frac{2\pi}{3}$ + ٢ك π
ب ٢ جا س = √٢
جا س = $\frac{\sqrt{2}}{2}$
∴ جا س = جا $\frac{\pi}{4}$
∵ جا س > ٠
∴ س تقع في الربع الأول أو الربع الثاني.
∴ س = $\frac{\pi}{4}$ + ٢ك π أو س = $\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$ + ٢ك π (ك ∈ ص)
س = $\frac{3\pi}{4}$ + ٢ك π

حاول أن تحل
٧ حل المعادلة: ٢ جا س − ١ = ٠.
١٠٤


٢س = −$\frac{\pi}{2}$ + ٢ك π أو ٤س = $\frac{\pi}{6}$ + ٢ك π
س = −$\frac{\pi}{4}$ + ك π أو س = $\frac{\pi}{24}$ + $\frac{1}{2}$ ك π
ب جا ٢س = جا$\left(س + \frac{\pi}{4}\right)$
٢س = س + $\frac{\pi}{4}$ + ٢ك π أو ٢س = π − $\left(س + \frac{\pi}{4}\right)$ + ٢ك π (ك ∈ ص)
٢س − س = $\frac{\pi}{4}$ + ٢ك π أو ٢س + س = π − $\frac{\pi}{4}$ + ٢ك π
س = $\frac{\pi}{4}$ + ٢ك π أو ٣س = $\frac{3\pi}{4}$ + ٢ك π
س = $\frac{\pi}{4}$ + ٢ك π أو س = $\frac{\pi}{4}$ + $\frac{2}{3}$ ك π

حاول أن تحل
٩ حل كلًّا من المعادلتين:
أ جتا$\left(٣س - \frac{\pi}{4}\right)$ = جتا$\left(س + \frac{\pi}{3}\right)$ ب جا$\left(٢س + \frac{\pi}{5}\right)$ = جا س
١٠٦

٥ (أ) جتا$(\theta + ٨\pi + \pi) = -$جتا$\theta$

(ب) جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right) = -$جا$\theta$

٦ جتا س = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، جتا س = جتا $\frac{\pi}{٤}$

س = $\frac{\pi}{٤} + ٢$ ك π

أو س = $-\frac{\pi}{٤} + ٢$ ك π (ك ∈ ص)

٧ جاس = $\frac{١}{٢}$ ؛ جاس = جا$\frac{\pi}{٦}$

س = $\frac{\pi}{٦} + ٢$ك π أو

س = $\frac{٥\pi}{٦} + ٢$ ك π ، حيث (ك ∈ ص)

٨ ظا$\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، ظاθ = ظا$\frac{\pi}{٦}$

$\theta = \frac{\pi}{٦} +$ ك π، حيث (ك ∈ ص)

٩ (أ) ٣س $- \frac{\pi}{٤}$ = س $+ \frac{\pi}{٣} + ٢$ك π

س = $\frac{٧\pi}{٢٤} +$ ك π، حيث (ك ∈ ص)

أو ٣س $- \frac{\pi}{٤} = -$س $- \frac{\pi}{٣} + ٢$ك π

س = $-\frac{\pi}{٤٨} + \frac{١}{٢}$ ك π، حيث (ك ∈ ص)

(ب) ٢س $+ \frac{\pi}{٥}$ = س $+ ٢$ك π ؛

س = $-\frac{\pi}{٥} + ٢$ك π، حيث (ك ∈ ص)

أو ٢س $+ \frac{\pi}{٥} = \pi -$ س $+ ٢$ك π

س = $\frac{٤\pi}{١٥} + \frac{٢}{٣}$ ك π، حيث (ك ∈ ص)

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٨-٢

العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

Relations Between Trigonometric Functions (1)

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) اكتب النسب المثلثية التالية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ.

(أ) جا$(\pi + \theta)$ ____________

(ب) جتا$(\pi - \theta)$ ____________

(جـ) جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ ____________

(د) جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ ____________

(٢) اكتب النسب المثلثية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية س.

(أ) ظا(١٨٠° − س) ____________

(ب) جتا(١٨٠° + س) ____________

(جـ) جا(− س) ____________

(٣) استخدم ما تعلمته لكتابة النسب المثلثية التالية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ.

(أ) ظتا$(\pi + \theta)$ ____________

(ب) قتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ ____________

(جـ) ظتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ ____________

(د) قا$(-\theta)$ ____________

(٤) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) جا١٥٠° ____________

(ب) ظا(−٢٢٥°) ____________

(جـ) جتا(−١٣٥°) ____________

(٥) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) جتا $\frac{٧\pi}{٦}$ ____________

(ب) جا$\left(-\frac{٢\pi}{٣}\right)$ ____________

(جـ) ظا $\frac{١١\pi}{٦}$ ____________

(٦) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) جا٣٩٠° ____________

(ب) قتا٤٥٠° ____________

(جـ) قا $\frac{١٧\pi}{٤}$ ____________

في التمارين (٧–١٠)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة .

(٧) إذا كانت جاθ = ٠,٢ فإن جا$(\pi + \theta)$ = ٠,٢ (أ) (ب)

(٨) إذا كانت جتا$\theta = \frac{٢}{٣}$ فإن قا$\theta = \frac{٣}{٢}$ (أ) (ب)

(٩) إذا كانت ظاθ = ٣ فإن ظتا$(\pi + \theta)$ = ٣ (أ) (ب)

(١٠) إذا كانت جا$\theta = \frac{١}{٥}$ فإن قتا$(\pi + \theta)$ = −٥ (أ) (ب)

(١١) بسّط التعبيرات التالية لأبسط صورة:

(أ) جتا$(\pi - \theta)$ − جتا$(-\theta)$ + جا$(\pi + \theta)$ + جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$.

____

(ب) جا$(\pi + \theta)$ − جتا$\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$ + جتا$(\theta - \pi)$ + جا$\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$.

____

«تدريب (١)»

(أ) الربع الثاني

(ب) الربع الرابع

(ج) الربع الثاني

(د) الربع الثالث

«تدريب (٢)»

$\text{جا }(٣٩٠^\circ) = \text{جا}(٣٠^\circ + ٣٦٠^\circ) = \text{جا }٣٠^\circ = \frac{١}{٢}$

$\text{جتا }(٧٦٥^\circ) = \text{جتا}(٤٥^\circ + ٢ \times ٣٦٠^\circ) = \text{جتا }٤٥^\circ = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

$\text{ظا }\left(-\frac{١١\pi}{٣}\right) = \text{ظا}\left(\frac{\pi}{٣} - \frac{١٢\pi}{٣}\right) = \text{ظا }\frac{\pi}{٣} = \sqrt{٣}$

(١٢) حلّ المعادلات التالية:

(أ) $\text{جتا س} = +\frac{١}{٢}$ ________________

(ب) $\text{ظتا س} = \sqrt{٣}$ ________________

(جـ) $٢ \text{ جا س} = +\sqrt{٢}$ ________________

(د) $\text{جا}(٤\text{س}) = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ________________

المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

(١) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

$\text{ظا}٢٢٥^\circ - ٣\text{جا}١٢٣٠^\circ + ٢\text{جتا}(-٩٦٠^\circ) = -\frac{٣}{٢}$ (أ) (ب)

$\text{قتا }\frac{١٩\pi}{٦} - ٢\text{قا }\frac{١٣\pi}{٦} + \text{جا}\left(-\frac{٨\pi}{٣}\right) - \text{جتا}\left(\frac{١٧\pi}{٦}\right) = ٢$ (أ) (ب)

$\text{ظتا }\frac{١٩\pi}{٤} - ٣\text{ظا}\left(-\frac{١١\pi}{٦}\right) + \text{جتا}\left(\frac{٢٤\pi}{٣}\right) - ٢\text{جا}\left(\frac{٤٥\pi}{٦}\right) = ١$ (أ) (ب)

$\text{قا}(-٣١٥^\circ) + ٢\text{قتا}٥٨٥^\circ - ٢\text{جتا}٨٥٥^\circ = \sqrt{٢}$ (أ) (ب)

(٢) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

إذا كان $\text{جا س} = \sqrt{٣}$ فإن مجموعة الحل $= \varnothing$ (أ) (ب)

إذا كان $\text{جتا س} = \frac{١}{٢}$ فإن $\text{س} = \frac{\pi}{٣}$ (أ) (ب)

إذا كانت $\text{س} = \frac{\pi}{٦}$ فإن $\text{جا س} = \frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

مجموعة حل قا س = ٣,٠ هي $\varnothing$ (أ) (ب)

$\text{ظا }(١٥\pi) =$ صفر (أ) (ب)

في التمارين (٣-٥)، اختر الإجابة الصحيحة:

(٣) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها $\frac{١}{٢}$ هي:

(أ) $\text{جا}(-٣٣٠^\circ)$ (ب) $\text{جتا}(-٢٤٠^\circ)$ (جـ) $\text{ظتا}(-١٥٠٠^\circ)$ (د) $\text{ظا}٧٦٥^\circ$

(٤) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$:

(أ) $\text{جتا }\frac{٣١\pi}{٦}$ (ب) $\text{جا}\left(-\frac{٣٥\pi}{٣}\right)$ (جـ) $\text{ظا }\frac{١٧\pi}{٦}$ (د) $\text{قا }\frac{١٣\pi}{٣}$

(٥) إن قيمة المقدار $\text{قا}(٢\pi - \theta) - \text{قتا}\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right) + \text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right) + \text{جا}\theta$ هي:

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

٦٤

٨-٣: العلاقات بين الدوال المثلثية [٢]

١ الأهداف

- يوجد متطابقات فيثاغورث.
- يوجد علاقات مثلثية أساسية.
- يبسط عبارات تتضمن دوال مثلثية.
- يبرهن صحة متطابقات مثلثية أساسية.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

متطابقات فيثاغورث – علاقات مثلثية أساسية – متطابقات مثلثية.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة – فرجار – منقلة – آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

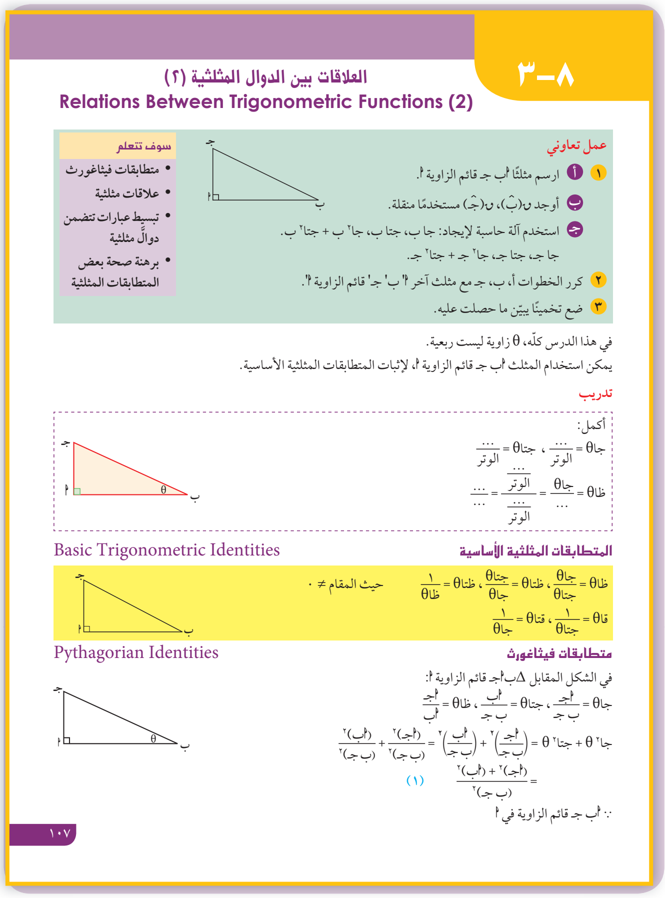
اسأل الطلاب تعريف:

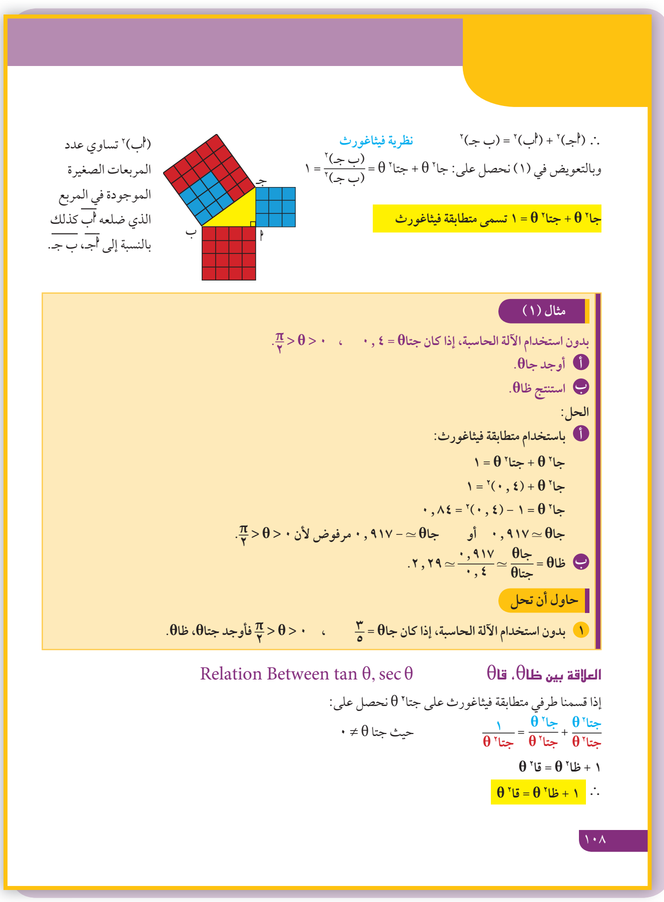
- ما هي نظرية فيثاغورث؟ وأين تستخدم؟
- ما مجموعة حلول المعادلة: س^{٢} + ٨١ = ٢٢٥؟
- ما قيم ظاθ، قاθ، بدلالة ظاθ، جتاθ، جاθ على الترتيب؟
- ما مجموعة حلول المعادلة: ٤س^{٢} – ٧س + ٣ = ٠؟
- ما مجموعة حلول المعادلة: ٤ جا^{٢}س – ١ = ٠؟

٥ التدريس

يوفّر هذا الدرس علاقات أساسية بين الدوال المثلثية، حيث يمكن للطلاب باستخدامها إيجاد كافة الدوال المثلثية إذا عرفت قيمة واحدة منها فقط. لذا يجب أولًا أن يفهم الطلاب متطابقة فيثاغورث وكيفية استخدامها مع التركيز على أن التربيع يطال العدد الحقيقي وليس الزاوية على دائرة الوحدة، أي أن هناك فرقًا كبيرًا بين جا^{٢}θ وجاθ^{٢} وهنا تكمن أهمية هذه المتطابقة، وهي تصلح لأي قيمة من θ ∈ [٠، ٢π).

أعط أمثلة متعددة لترسيخ هذه المتطابقة.


٨-٣
العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)
Relations Between Trigonometric Functions (2)
عمل تعاوني
١ ارسم مثلثًا أ ب جـ قائم الزاوية أ.
أوجد ق(ب)، ق(جـ) مستخدمًا منقلة.
استخدم آلة حاسبة لإيجاد: جا ب، جتا ب، جا^{٢} ب + جتا^{٢} ب.
جا جـ، جتا جـ، جا^{٢} جـ + جتا^{٢} جـ.
٢ كرر الخطوات أ، ب، جـ مع مثلث آخر أ' ب' جـ' قائم الزاوية أ'.
٣ ضع تخمينًا يبيّن ما حصلت عليه.
سوف تتعلم
- متطابقات فيثاغورث
- علاقات مثلثية
- تبسيط عبارات تتضمن دوال مثلثية
- برهنة صحة بعض المتطابقات المثلثية
في هذا الدرس كلّه θ زاوية ليست ربعية.
يمكن استخدام المثلث أ ب جـ قائم الزاوية أ، لإثبات المتطابقات المثلثية الأساسية.
تدريب
أكمل:
جاθ = $\frac{...}{\text{الوتر}}$ ، جتاθ = $\frac{...}{\text{الوتر}}$
ظاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{...}$ = $\frac{\frac{...}{\text{الوتر}}}{\frac{...}{\text{الوتر}}}$ = $\frac{...}{...}$
المتطابقات المثلثية الأساسية
Basic Trigonometric Identities
ظاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ ، ظتاθ = $\frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$ ، ظتاθ = $\frac{١}{\text{ظا}\theta}$ حيث المقام ≠ ٠
قاθ = $\frac{١}{\text{جتا}\theta}$ ، قتاθ = $\frac{١}{\text{جا}\theta}$
متطابقات فيثاغورث
Pythagorian Identities
في الشكل المقابل Δ أ ب جـ قائم الزاوية أ:
جاθ = $\frac{\text{أجـ}}{\text{ب جـ}}$ ، جتاθ = $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}}$ ، ظاθ = $\frac{\text{أجـ}}{\text{أب}}$
جا^{٢}θ + جتا^{٢}θ = $\left(\frac{\text{أجـ}}{\text{ب جـ}}\right)^{٢}$ + $\left(\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}}\right)^{٢}$ = $\frac{(\text{أجـ})^{٢}}{(\text{ب جـ})^{٢}}$ + $\frac{(\text{أب})^{٢}}{(\text{ب جـ})^{٢}}$
= $\frac{(\text{أجـ})^{٢} + (\text{أب})^{٢}}{(\text{ب جـ})^{٢}}$ (١)
∵ أ ب جـ قائم الزاوية في أ
١٠٧


∴ (أجـ)^{٢} + (أب)^{٢} = (ب جـ)^{٢} نظرية فيثاغورث
وبالتعويض في (١) نحصل على: جا^{٢}θ + جتا^{٢}θ = $\frac{(\text{ب جـ})^{٢}}{(\text{ب جـ})^{٢}}$ = ١
جا^{٢}θ + جتا^{٢}θ = ١ تسمى متطابقة فيثاغورث
(أب)^{٢} تساوي عدد المربعات الصغيرة الموجودة في المربع الذي ضلعه أب كذلك بالنسبة إلى أجـ، ب جـ.
مثال (١)
بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جتاθ = ٠,٤ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$
١ أوجد جاθ.
٢ استنتج ظاθ.
الحل:
١ باستخدام متطابقة فيثاغورث:
جا^{٢}θ + جتا^{٢}θ = ١
جا^{٢}θ + (٠,٤)^{٢} = ١
جا^{٢}θ = ١ – (٠,٤)^{٢} = ٠,٨٤
جاθ ≃ ٠,٩١٧ أو جاθ ≃ –٠,٩١٧ مرفوض لأن ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$
٢ ظاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ ≃ $\frac{٠,٩١٧}{٠,٤}$ ≃ ٢,٢٩.
حاول أن تحل
١ بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جاθ = $\frac{٣}{٥}$ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$ فأوجد جتاθ، ظاθ.
العلاقة بين ظاθ، قاθ
Relation Between tan θ, sec θ
إذا قسمنا طرفي متطابقة فيثاغورث على جتا^{٢}θ نحصل على:
$\frac{\text{جا}^{٢}\theta}{\text{جتا}^{٢}\theta}$ + $\frac{\text{جتا}^{٢}\theta}{\text{جتا}^{٢}\theta}$ = $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\theta}$ حيث جتاθ ≠ ٠
١ + ظا^{٢}θ = قا^{٢}θ
∴ ١ + ظا^{٢}θ = قا^{٢}θ
١٠٨

وبالانتقال إلى بقية المتطابقات يصبح من السهل التعامل معها. دعهم يجدون بأنفسهم المتطابقات التي تربط بين ظاθ، قاθ، ظتاθ، قتاθ. لا تدعهم يعتمدون على الحفظ بل على فهم كيفية إيجاد كل متطابقة.

ناقش معهم بإسهاب الأمثلة التي تتناول تبسيط المقادير المثلثية ليتعرفوا كيفية استخدام المتطابقات. أخبرهم أن ذلك يساعد كثيرًا على حل المعادلات المثلثية في خطوات لاحقة.

٦ الربط

بسّط المقادير التالية:

(أ) جا^{٢} ٣٥° + جا^{٢} ٥٥° =

جا^{٢}٣٥° + جا^{٢}(٩٠° − ٣٥°) =

جا^{٢}٣٥° + جتا^{٢}٣٥° = ١ (متطابقة فيثاغورث)

(ب) جتا^{٢}(٤٣°) + جتا^{٢}(٤٧°) =

جتا^{٢}٤٣° + جتا^{٢}(٩٠° − ٤٣°) =

جتا^{٢}٤٣° + جا^{٢}٤٣° = ١ (متطابقة فيثاغورث)

(جـ) في مثال ٣ يجب الأخذ بالاعتبار عند اختيار طريقة رسم المثلث القائم الزاوية للزاوية الواقعة في الربع الأول ستعتمد القياس الأساس للزاوية.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام المتطابقات الأساسية. شجّعهم على إعادة كتابة كل متطابقة وكيفية استنتاجها.

٨ التقييم

تابع بعناية عمل الطلاب مع فقرات «حاول أن تحل» لتكون فكرة واضحة عن مدى فهمهم هذا الدرس.

اختبار سريع

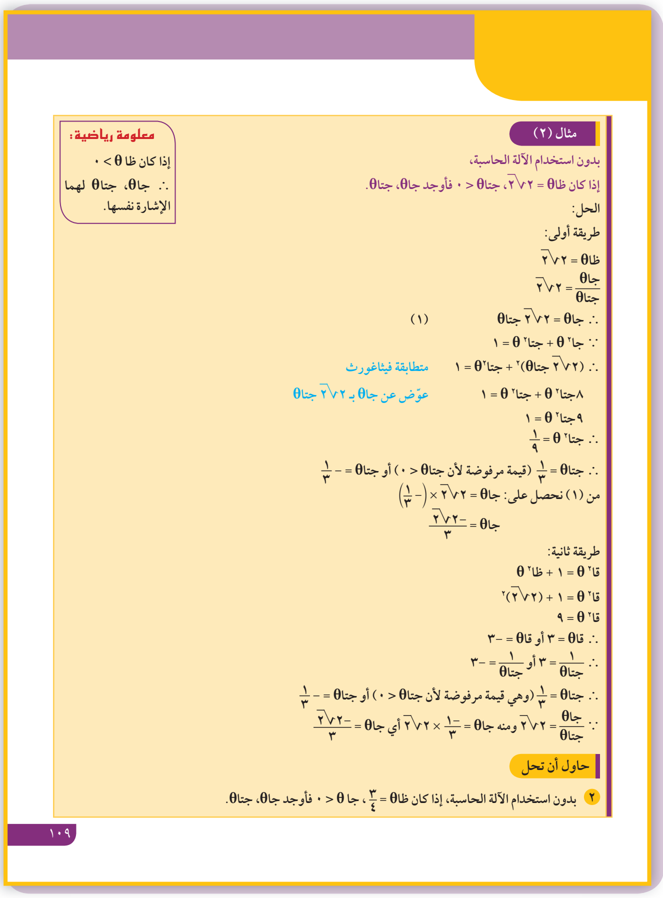
١ بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان ظاθ = ٤ $\sqrt{٥}$، جاθ > ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

جتا$^{٢}\theta$ = $\frac{١}{١ + \text{ظا}^{٢}\theta}$ = $\frac{١}{١ + (٤\sqrt{٥})^{٢}}$ = $\frac{١}{٨١}$

جتا θ = − $\frac{١}{٩}$، جا θ = − $\frac{٤\sqrt{٥}}{٩}$.

٢ بسط المقدار: جا^{٢}٦٢° + جا^{٢}٢٨° =

جا^{٢}٦٢° + جا^{٢}(٩٠° − ٦٢°) = جا^{٢}٦٢° + جتا^{٢}٦٢° = ١



مثال (٢)

بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظاθ = ٢$\sqrt{٢}$، جتاθ > ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

الحل:

طريقة أولى:

ظاθ = ٢$\sqrt{٢}$

$\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ = ٢$\sqrt{٢}$

∴ جاθ = ٢$\sqrt{٢}$ جتاθ (١)

∵ جا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٢}\theta$ = ١

∴ (٢$\sqrt{٢}$ جتاθ)^{٢} + جتا$^{٢}\theta$ = ١ متطابقة فيثاغورث

٨جتا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٢}\theta$ = ١ عوّض عن جاθ بـ ٢$\sqrt{٢}$ جتاθ

٩جتا$^{٢}\theta$ = ١

∴ جتا$^{٢}\theta$ = $\frac{١}{٩}$

∴ جتاθ = $\frac{١}{٣}$ (قيمة مرفوضة لأن جتاθ < ٠) أو جتاθ = − $\frac{١}{٣}$

من (١) نحصل على: جاθ = ٢$\sqrt{٢}$ × $\left(-\frac{١}{٣}\right)$

جاθ = $\frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$

طريقة ثانية:

قا$^{٢}\theta$ = ١ + ظا$^{٢}\theta$

قا$^{٢}\theta$ = ١ + (٢$\sqrt{٢}$)^{٢}

قا$^{٢}\theta$ = ٩

∴ قاθ = ٣ أو قاθ = −٣

∴ $\frac{١}{\text{جتا}\theta}$ = ٣ أو $\frac{١}{\text{جتا}\theta}$ = −٣

∴ جتاθ = $\frac{١}{٣}$ (وهي قيمة مرفوضة لأن جتاθ < ٠) أو جتاθ = − $\frac{١}{٣}$

∵ $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ = ٢$\sqrt{٢}$ ومنه جاθ = $\frac{-١}{٣}$ × ٢$\sqrt{٢}$ أي جاθ = $\frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$

معلومة رياضية:

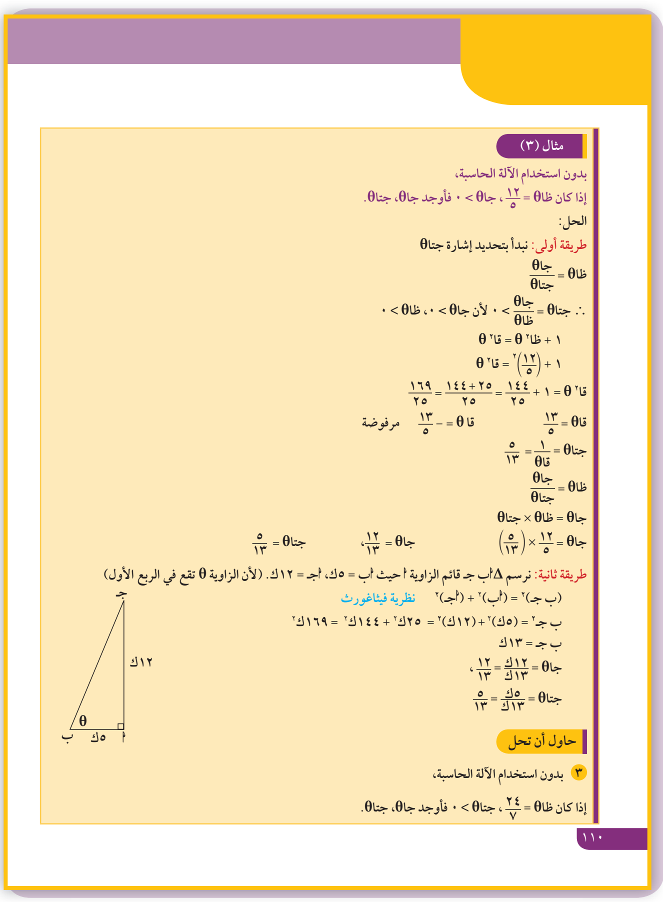
إذا كان ظاθ > ٠

∴ جاθ، جتاθ لهما الإشارة نفسها.

حاول أن تحل

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظاθ = $\frac{٣}{٤}$، جاθ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

١٠٩



مثال (٣)

بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظاθ = $\frac{١٢}{٥}$، جاθ > ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

الحل:

طريقة أولى: نبدأ بتحديد إشارة جتاθ

ظاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

∴ جتاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{ظا}\theta}$ > ٠ لأن جاθ > ٠، ظاθ > ٠

١ + ظا$^{٢}\theta$ = قا$^{٢}\theta$

١ + $\left(\frac{١٢}{٥}\right)^{٢}$ = قا$^{٢}\theta$

قا$^{٢}\theta$ = ١ + $\frac{١٤٤}{٢٥}$ = $\frac{٢٥ + ١٤٤}{٢٥}$ = $\frac{١٦٩}{٢٥}$

قاθ = $\frac{١٣}{٥}$ قاθ = − $\frac{١٣}{٥}$ مرفوضة

جتاθ = $\frac{١}{\text{قا}\theta}$ = $\frac{٥}{١٣}$

ظاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

جاθ = ظاθ × جتاθ

جاθ = $\frac{١٢}{٥}$ × $\left(\frac{٥}{١٣}\right)$ جاθ = $\frac{١٢}{١٣}$، جتاθ = $\frac{٥}{١٣}$

طريقة ثانية: نرسم Δأ ب جـ قائم الزاوية أ حيث أب = ٥ك، أجـ = ١٢ك. (لأن الزاوية θ تقع في الربع الأول)

(ب جـ)^{٢} = (أب)^{٢} + (أجـ)^{٢} نظرية فيثاغورث

ب جـ^{٢} = (٥ك)^{٢} + (١٢ك)^{٢} = ٢٥ك^{٢} + ١٤٤ك^{٢} = ١٦٩ك^{٢}

ب جـ = ١٣ك

جاθ = $\frac{١٢\text{ك}}{١٣\text{ك}}$ = $\frac{١٢}{١٣}$،

جتاθ = $\frac{٥\text{ك}}{١٣\text{ك}}$ = $\frac{٥}{١٣}$

حاول أن تحل

٣ بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظاθ = $\frac{٢٤}{٧}$، جتاθ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

١١٠

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

١ ∵ جا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٢}\theta$ = ١ ومنها جتاθ = $\frac{٤}{٥}$ ،

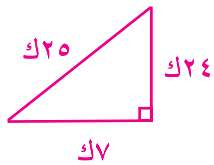
ظاθ = $\frac{٣}{٤}$

٢ ١ + ظا$^{٢}\theta$ = قا$^{٢}\theta$ ومنها

قاθ = $\frac{-٥}{٤}$ ، جتاθ = $\frac{-٤}{٥}$

جاθ = $-\frac{٣}{٥}$

٣ جتاθ = $\frac{٧}{٢٥}$ ، جاθ = $\frac{٢٤}{٢٥}$



يمكن استخدام العلاقة ١ + ظا$^{٢}\theta$ = قا$^{٢}\theta$

٤ جاθ = $\frac{٨}{\sqrt{٨٩}}$ = $\frac{٨\sqrt{٨٩}}{٨٩}$

٥ جتا^{٢}س (جتا^{٢}س + جا^{٢}س) = جتا^{٢}س

العلاقة بين ظتاθ، قتاθ — Relation Between cot θ, csc θ

١ + ظتا$^{٢}\theta$ = ١ + $\frac{\text{جتا}^{٢}\theta}{\text{جا}^{٢}\theta}$

١ + ظتا$^{٢}\theta$ = $\frac{\text{جا}^{٢}\theta}{\text{جا}^{٢}\theta}$ + $\frac{\text{جتا}^{٢}\theta}{\text{جا}^{٢}\theta}$

١ + ظتا$^{٢}\theta$ = $\frac{\text{جا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\theta}{\text{جا}^{٢}\theta}$ المقام المشترك

١ + ظتا$^{٢}\theta$ = $\frac{١}{\text{جا}^{٢}\theta}$ = قتا$^{٢}\theta$ جا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٢}\theta$ = ١

∴ ١ + ظتا$^{٢}\theta$ = قتا$^{٢}\theta$

مثال (٤)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جاθ = $\frac{٣}{٧}$ ، جتاθ > ٠ فأوجد ظتاθ، ظاθ.

الحل:

١ + ظتا$^{٢}\theta$ = $\frac{١}{\text{جا}^{٢}\theta}$

١ + ظتا$^{٢}\theta$ = $\frac{١}{\left(\frac{٣}{٧}\right)^{٢}}$ = $\frac{١}{\frac{٩}{٤٩}}$ = $\frac{٤٩}{٩}$

ظتا$^{٢}\theta$ = $\frac{٤٩}{٩}$ − ١ = $\frac{٤٠}{٩}$

ظتاθ = $\frac{\sqrt{٤٠}}{٣}$ أو ظتاθ = $-\frac{\sqrt{٤٠}}{٣}$

∵ جاθ، جتاθ لهما الإشارة نفسها (موجبة)

∴ ظتاθ > ٠ وبالتالي ظتاθ = $\frac{\sqrt{٤٠}}{٣}$

ظاθ = $\frac{١}{\text{ظتا}\,\theta}$ = $\frac{١}{\frac{\sqrt{٤٠}}{٣}}$ = $\frac{٣}{\sqrt{٤٠}}$ ≃ ٠,٤٧٤.

ملاحظة: يمكن حل المثال ٤ باستخدام متطابقة فيثاغورث: جا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٢}\theta$ = ١.
أو رسم مثلث قائم الزاوية واستخدام نظرية فيثاغورث. حاول ذلك.

حاول أن تحل

٤ بدون استخدام الآلة الحاسبة،
إذا كان ظتاθ = $\frac{٥}{٨}$، جتاθ > ٠ فأوجد جاθ.

١١١

مثال (٥)

أثبت صحة المتطابقة التالية: جا^{٣}س + جاس × جتا^{٢}س = جاس.

الحل:

جا^{٣}س + جاس × جتا^{٢}س = جا س (جا^{٢}س + جتا^{٢}س)

= جا س × ١ جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١

= جاس.

حاول أن تحل

٥ أثبت صحة المتطابقة: جتا^{٤}س + جا^{٢}س × جتا^{٢}س = جتا^{٢}س.

مثال (٦)

أثبت صحة المتطابقة التالية: $\frac{(\text{قا}\theta + ١)(\text{قا}\theta - ١)}{\text{جا}^{٢}\theta}$ = قا$^{٢}\theta$. حيث المقام ≠ ٠

الحل:

$\frac{(\text{قا}\theta + ١)(\text{قا}\theta - ١)}{\text{جا}^{٢}\theta}$ = $\frac{\text{قا}^{٢}\theta - ١}{\text{جا}^{٢}\theta}$ (أ + ب)(أ − ب) = أ^{٢} − ب^{٢}

= $\frac{\text{ظا}^{٢}\theta}{\text{جا}^{٢}\theta}$ ١ + ظا$^{٢}\theta$ = قا$^{٢}\theta$

= $\frac{\text{جا}^{٢}\theta}{\text{جتا}^{٢}\theta}$ × $\frac{١}{\text{جا}^{٢}\theta}$ ظاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

= $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\theta}$

= قا$^{٢}\theta$

حاول أن تحل

٦ أثبت صحة المتطابقة: (قا$^{٢}\theta$ + قتا$^{٢}\theta$) − (ظا$^{٢}\theta$ + ظتا$^{٢}\theta$) = ٢.

١١٢

مثال (٧) إثرائي

حلّ المعادلة: $\frac{\text{جتا}^{٣}\theta}{\text{جا}\theta}$ = ظتاθ، حيث θ ∈ (٠، ٢π). شرط أن تكون جاθ ≠ ٠

الحل:

$\frac{\text{جتا}^{٣}\theta}{\text{جا}\theta}$ = ظتاθ

$\frac{\text{جتا}^{٣}\theta}{\text{جا}\theta}$ = $\frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$

∵ جاθ ≠ ٠

∴ جتا$^{٣}\theta$ = جتاθ

جتا$^{٣}\theta$ − جتاθ = ٠

جتاθ (جتا$^{٢}\theta$ − ١) = ٠

جتاθ (− جا$^{٢}\theta$) = ٠ متطابقة فيثاغورث

جتاθ = ٠ أو جا$^{٢}\theta$ = ٠

جتاθ = ٠ أو جاθ = ٠ مرفوضة

قيم θ على الفترة (٠، ٢π) التي تحقق جتاθ = ٠ هي θ = $\frac{\pi}{٢}$ أو θ = $\frac{٣\pi}{٢}$.

حاول أن تحل

٧ حلّ المعادلة: ٢جا س جتا س − جتا س = ٠ حيث س ∈ [٠، ٢π)

١١٣

٦) $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\theta} + \frac{١}{\text{جا}^{٢}\theta} - \frac{\text{جا}^{٢}\theta}{\text{جتا}^{٢}\theta} - \frac{\text{جتا}^{٢}\theta}{\text{جا}^{٢}\theta} =$

$\frac{١ - \text{جا}^{٢}\theta}{\text{جتا}^{٢}\theta} + \frac{١ - \text{جتا}^{٢}\theta}{\text{جا}^{٢}\theta} = ١ + ١ = ٢$

٧) جتاس(٢جاس − ١) = ٠ ؛ جتاس = ٠ أو جاس = $\frac{١}{٢}$

جتاس = ٠ فإن س = $\frac{\pi}{٢} \in [٠، ٢\pi)$

أو س = $\frac{٣\pi}{٢} \in [٠، ٢\pi)$

جاس = $\frac{١}{٢}$ فإن س = $\frac{\pi}{٦} \in [٠، ٢\pi)$

أو س = $\pi - \frac{\pi}{٦} = \frac{٥\pi}{٦} \in [٠، ٢\pi)$

«تدريب»

جاθ = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، جتاθ = $\frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}$

ظاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} = \frac{\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}}}{\frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}} = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}}$

في التمارين (٤–٧)، أوجد قيمة كلّ مما يلي:

(٤) (جاθ + جتاθ)^{٢} − ٢جاθ جتاθ.

(٥) (ظا^{٢}θ + ١)جتا^{٢}θ.

(٦) ١ + ظا^{٢}(−θ) − قا^{٢}θ.

(٧) ٩قا^{٢}θ − ٥ظا^{٢}θ − $\frac{٤}{\text{جتا}^{٢}\theta}$

في التمارين (٨–١١)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

(٨) ١ + ظتا^{٢}(−θ) = قتا^{٢}θ.

(٩) قا^{٤}θ − قا^{٢}θ = ظا^{٤}θ + ظا^{٢}θ.

(١٠) (١ − جتا^{٢}θ)(١ + ظتا^{٢}θ) = ١.

(١١) ٣جا^{٢}θ + ٤جتا^{٢}θ = ٣ + جتا^{٢}θ.

٦٦

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٨–٣

العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

Relations Between Trigonometric Functions (2)

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) إذا كانت جاθ = $\frac{١}{٥}$ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$.

فأوجد قيمة النسب المثلثية الأخرى للزاوية θ.

(٢) إذا كانت ظاθ = $\sqrt{٨}$ ، جتاθ < ٠

أوجد جاθ، جتاθ.

(٣) إذا كانت جتاθ = $\frac{١}{٣}$ ، جاθ < ٠

أوجد جاθ، ظتاθ.

٦٥

المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

في التمارين (١–٦)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

(١) قتاθ × جتاθ − ظتاθ = ٠ (أ) (ب)

(٢) ظتا^{٢}(−θ) − قتا^{٢}θ = −١ (أ) (ب)

(٣) (قاθ + ظاθ)(قاθ − ظاθ) = ١ (أ) (ب)

(٤) جاθ قتاθ − جتا^{٢}θ − جا^{٢}θ = ٠ (أ) (ب)

(٥) $\frac{\text{جا}^{٢}\theta}{١ - \text{جتا}\theta}$ − جتاθ = −١ (أ) (ب)

(٦) ظاθ + ظتاθ − قاθ قتاθ = ٠ (أ) (ب)

في التمرينين (٧–٨)، اختر الإجابة الصحيحة:

(٧) إذا كانت جتاθ = $-\frac{٥}{٧}$ ، θ تقع في الربع الثالث. فإن جا θ =

(أ) $\frac{-٧}{٢\sqrt{٦}}$ (ب) $\frac{٢\sqrt{٦}}{٧}$

(جـ) $\frac{-٢\sqrt{٦}}{٧}$ (د) $\frac{٧}{٢\sqrt{٦}}$

(٨) إذا كانت قاθ = $\frac{٣}{٢}$ ، θ تقع في الربع الرابع. فإن ظا θ =

(أ) $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

(جـ) $\frac{-٢}{\sqrt{٥}}$ (د) $\frac{-\sqrt{٥}}{٢}$

في التمرينين (٩–١٠)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

(٩) جاθ (ظتاθ + ظاθ) = قاθ

(١٠) $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جا}\theta - \text{جتا}\theta} = \frac{١}{١ - \text{ظتا}\theta}$.

٦٧

المرشد لحل المسائل

إجابة «تطبيق»

نعتمد الشكل المرسوم كجزء مكمل للعمل

ب د = ٥(١ − جتا٣٠°) + ١,٢

ب د ≃ ١,٨٧

أي يرتفع سلطان ١,٨٧ متر عن سطح الأرض تقريبًا.

إجابة «مسألة إضافية»

١١,٧ = ٦(١ − جتاθ) + ١,٥

θ ≃ ٤٦°

أو θ ≃ ١٨٠° − ٤٦° = ١٣٤°


المرشد لحل المسائل

في مدينة الملاهي، ركب سلطان الدوارة.

دارت الدوارة عكس اتجاه دوران عقارب الساعة وتوقفت لتقل راكبًا آخر.

تساءل محمد: ما ارتفاع سلطان عن الأرض؟

كيف فكر محمد؟

بداية، سوف ارسم مخططًا.

تمثل النقطة أ موقع سلطان عند توقف الدوارة.

جـ د = ١,٢ متر (الارتفاع عن الأرض)

زاوية الدوران = ٢π − θ

عليّ إيجاد طول القطعة أز. | أز = ب د

سأستخدم ما تعلمته في الوحدة عن النسب المثلثية. | المثلث أب و قائم الزاوية ب

جتا(٢π − θ) = وب / وأ

جتاθ = وب / نق

∴ وب = نق × جتاθ

سأستخدم خواص القطع المستقيمة. | ب د = ب جـ + جـ د

ولكن ب جـ = وجـ − وب

∴ ب د = وجـ − وب + جـ د

ب د = نق − نق × جتاθ + جـ د

ب د = نق(١ − جتاθ) + ١,٢

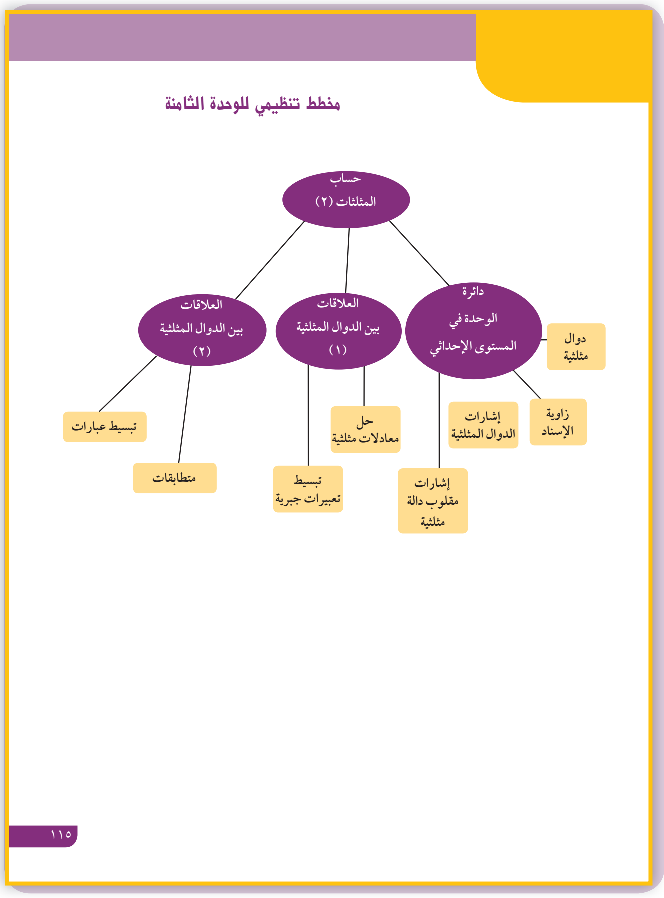
استنتاج محمد: عليّ معرفة طول نصف قطر الدوارة وزاوية الدوران لإيجاد ارتفاع سلطان عن الأرض.

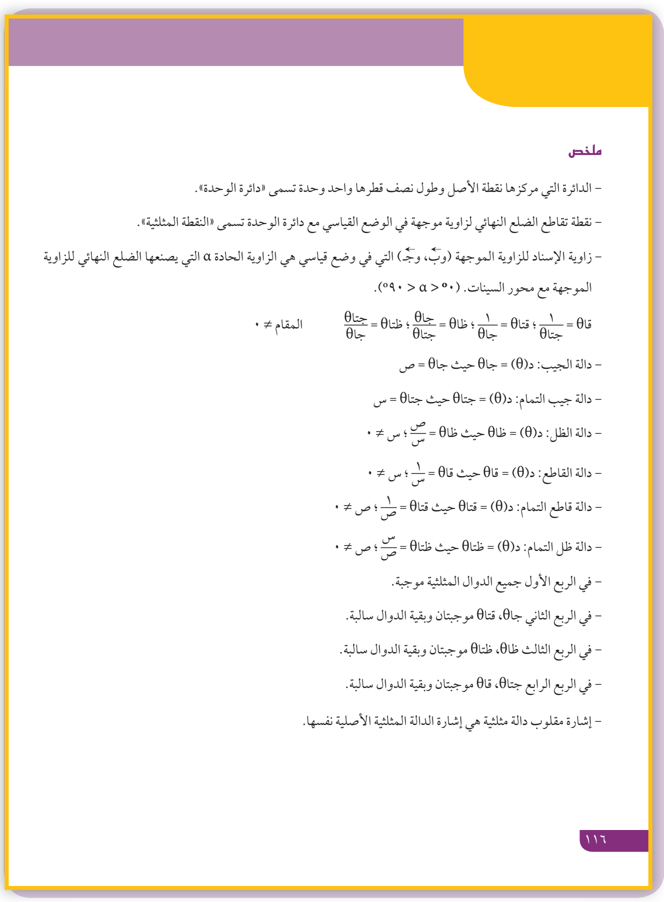
تطبيق

في المسألة أعلاه، أوجد ارتفاع سلطان عن الأرض إذا كان طول نصف قطر الدوارة ٥ أمتار وقياس الزاوية التي يصنعها مقعد سلطان مع المحور الرأسي للدوارة ٣٠°.

مسألة إضافية

ركب سالم دوارة طول نصف قطرها ٦ أمتار وترتفع قاعدتها ١,٥ متر عن الأرض. أوجد الزاوية التي يصنعها مقعد سالم مع المحور الرأسي للدوارة إذا كان سالم على ارتفاع ١١,٧ مترًا.


مخطط تنظيمي للوحدة الثامنة


ملخص

– الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها واحد وحدة تسمى «دائرة الوحدة».

– نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة تسمى «النقطة المثلثية».

– زاوية الإسناد للزاوية الموجهة (وبَ، وجـَ) التي في وضع قياسي هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات. (٠° < α < ٩٠°).

قاθ = ١ / جتاθ ؛ قتاθ = ١ / جاθ ؛ ظاθ = جاθ / جتاθ ؛ ظتاθ = جتاθ / جاθ المقام ≠ ٠

– دالة الجيب: د(θ) = جاθ حيث جاθ = ص

– دالة جيب التمام: د(θ) = جتاθ حيث جتاθ = س

– دالة الظل: د(θ) = ظاθ حيث ظاθ = ص / س ؛ س ≠ ٠

– دالة القاطع: د(θ) = قاθ حيث قاθ = ١ / س ؛ س ≠ ٠

– دالة قاطع التمام: د(θ) = قتاθ حيث قتاθ = ١ / ص ؛ ص ≠ ٠

– دالة ظل التمام: د(θ) = ظتاθ حيث ظتاθ = س / ص ؛ ص ≠ ٠

– في الربع الأول جميع الدوال المثلثية موجبة.

– في الربع الثاني جاθ، قتاθ موجبتان وبقية الدوال سالبة.

– في الربع الثالث ظاθ، ظتاθ موجبتان وبقية الدوال سالبة.

– في الربع الرابع جتاθ، قاθ موجبتان وبقية الدوال سالبة.

– إشارة مقلوب دالة مثلثية هي إشارة الدالة المثلثية الأصلية نفسها.

– العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية:

جا(–θ) = –جاθ؛ جتا(–θ) = جتاθ؛ ظا(–θ) = –ظاθ

جا(π – θ) = جاθ؛ جتا(π – θ) = –جتاθ؛ ظا(π – θ) = –ظاθ

جا(π + θ) = –جاθ؛ جتا(π + θ) = –جتاθ ؛ ظا(π + θ) = ظاθ

جا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جتاθ؛ جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جاθ

جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = جتاθ؛ جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = –جاθ

جا(θ + ٢ك π) = جاθ؛ جتا(θ + ٢ك π) = جتاθ حيث ك عدد صحيح

جا^{٢} θ + جتا^{٢} θ = ١ تسمى متطابقة فيثاغورث

قا^{٢} θ = ١ + ظا^{٢} θ = $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\,\theta}$ حيث المقام ≠ ٠

قتا^{٢} θ = ١ + ظتا^{٢} θ = $\frac{١}{\text{جا}^{٢}\,\theta}$ حيث المقام ≠ ٠

١١٧

(٥) أثبت صحّة ما يلي:

(أ) قا^{٢} θ – ٢ظا^{٢} θ + $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\,(-\theta)}$ = ٢

(ب) جتاθ + $\frac{\text{جا}^{٢}\,\theta}{١ + \text{جتا}\theta}$ = ١

(٦) أثبت صحّة المتطابقات التالية:

(أ) جتا^{٤} θ – جا^{٤} θ = جتا^{٢} θ – جا^{٢} θ

(ب) جتاθ (ظاθ + ظتاθ) = قتاθ

(٧) أوجد مجموعة حل المعادلات المثلثية التالية:

(أ) جتا س = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

(ب) ٢جا س – $\sqrt{٣}$ = ٠

(جـ) ظا س = ١

٦٩

مراجعة الوحدة الثامنة

(١) في أيّ ربع أو على أيّ محور يقع الضلع النهائي لـ θ في الحالات التالية:

(أ) جاθ = $\frac{١}{٣}$.

(ب) قاθ = –١.

(جـ) ظاθ = –٣.

(د) جتاθ = –$\frac{٧}{٨}$.

(٢) إذا كان ظاθ = ٤ فأوجد:

(أ) قا$^{٢}\theta$.

(ب) ظتاθ.

(جـ) ظتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$.

(د) قتا^{٢} θ.

(٣) إذا كان جا ٣٨° ≃ ٦٢ , ٠، بدون استخدام الآلة الحاسبة بطريقة مباشرة أوجد قيمة كل من:

(أ) جتا٣٨°.

(ب) جا(–٥٢°).

(جـ) ظا(١٤٢°) – جتا(٢١٨°) + ظتا(–٣٨°).

(٤) أوجد قيمة كل مما يلي:

(أ) قا(–٦٠°) + ظا(٦٠°) – ظتا(٢١٠°) + قتا(٣٠°).

(ب) جتا$\left(\frac{٣\pi}{٢}\right)$ + ٢جا(–π) + جتا(– ٨π) + جا$\left(-\frac{٧\pi}{٢}\right)$.

٦٨

تمارين إثرائية

(١) **تفكير ناقد:** افترض أن θ زاوية في الوضع القياسي،

حيث جتا θ = $\frac{-١}{٢}$ ، جا θ = –$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$.

هل من الممكن أن تكون θ = ٦٠° أو θ = –١٢٠°؟

(٢) أوجد قيمة كل مما يلي:

(أ) جا١٣٥° + جتا٢٢٥° – ٢ظا(– ٢٢٥°) + ٣جا٣٣٠°.

(ب) ظتا٣٠° + ٢ظا١٢٠° – ٣ظا٢١٠° + ٣ظتا(– ٣٣٠°).

(جـ) جتا $\frac{١٧\pi}{٣}$ + جا$\left(-\frac{١٥\pi}{٦}\right)$ + ٣جتا$\left(-\frac{٢٥\pi}{٣}\right)$.

(د) ظا $\frac{٩\pi}{٤}$ + ظتا $\frac{١٧\pi}{٤}$ + قا$\left(-\frac{٥\pi}{٤}\right)$ + قتا $\frac{١٩\pi}{٤}$.

(٣) أوجد قيمة:

(أ) جا١° + جا٢° + جا٣° + ... + جا٣٥٨° + جا٣٥٩°.

(ب) جتا١° + جتا٢° + جتا٣° + ... + جتا٣٥٨° + جتا٣٥٩°.

٧٠

(٤) حلّ المعادلات التالية:

(أ) $\text{جتا}\left(٢\text{س} + \frac{\pi}{٤}\right) = \text{جتا}\left(\text{س} - \frac{٣\pi}{٤}\right)$

(ب) $\text{جا}\left(\frac{\pi}{٦} - \text{س}\right) = \text{جا}\left(٢\text{س} - \frac{٢\pi}{٣}\right)$

(جـ) $\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٨} + \text{س}\right) = ١$

(د) $\text{ظا}(٣\pi + ٢\text{س}) = \text{ظتا}(٢\text{س})$

(٥) أثبت صحة المتطابقة التالية:

$$\frac{١ - \text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} + \frac{\text{جتا}\theta}{١ - \text{جا}\theta} = ٢\,\text{قا}\theta$$

(٦) أوجد مجموعة حل المعادلة المثلثية التالية، ثمّ مثّلها على دائرة الوحدة، حيث $\theta \in [٠، ٢\pi)$.

$٢\,\text{جا}^٢\theta = ٤ - ٧\,\text{جا}\theta$.

في التمرينين (٧–٨)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

(٧) $\frac{\text{جا}\theta + \text{جتا}\theta}{\text{جتا}\theta} - \frac{\text{جا}\theta + \text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta} = \text{قا}\theta\ \text{قتا}\theta$

(٨) $\frac{\text{جتا}^٢\theta - \text{جا}^٢\theta}{١ - \text{ظا}^٢\theta} = \text{جتا}^٢\theta$

في التمرينين (٩–١٠)، حل المعادلات المثلثية التالية:

(٩) $\text{ظتا}^٢\text{س} + \text{ظتا}\,\text{س} = ٠$

(١٠) $\text{قا}^٢\text{س} = ٣\,\text{قا}\,\text{س} - ٢$

٧١

في التمارين (١١–١٥)، حل المعادلات التالية حيث $\theta \in (٠، ٢\pi)$ حيث المقام ≠ ٠:

*(١١) $\frac{\text{جا}^٣\theta}{\text{جتا}\theta} = \text{ظا}\theta$

*(١٢) $\frac{\text{جا}^٢\theta}{\text{جتا}\theta} \times \text{قا}\theta = \text{ظا}\theta$

*(١٣) $\frac{\text{قا}\theta}{\text{ظتا}\theta} = -\,\text{قتا}\theta$

*(١٤) $٢\,\text{جتا}^٢\theta + \text{جتا}\theta - ١ = ٠$ حيث $\text{جتا}\theta > ٠$

*(١٥) $\text{ظتا}^٢\theta = ١$

٧٢

الوحدة التاسعة: الهندسة التحليلية

Analytic Geometry

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

٩ – ١ : المستوى الإحداثي

جزء ١ : المسافة بين نقطتين.

جزء ٢ : نقطة المنتصف.

٩ – ٢ : تقسيم قطعة مستقيمة

جزء ١ : التقسيم من الداخل.

جزء ٢ : التقسيم من الخارج.

٩ – ٣ (أ): ميل الخط المستقيم

جزء ١ : معدل التغير.

جزء ٢ : إيجاد الميل.

جزء ٣ : العلاقة بين ميل المستقيم وظل الزاوية.

٩ – ٣ (ب): معادلة الخط المستقيم

جزء ١ : كتابة معادلة الخط المستقيم.

جزء ٢ : الصورة العامة لمعادلة المستقيم.

٩ – ٤ : البعد بين نقطة ومستقيم

جزء ١ : إيجاد البعد بين نقطة ومستقيم.

٩ – ٥ : معادلة الدائرة

جزء ١ : معادلة الدائرة.

جزء ٢ : الصورة القياسية لمعادلة الدائرة.

جزء ٣ : الصورة العامة لمعادلة الدائرة.

جزء ٤ : معادلة المماس على الدائرة.

جزء ٥ : العلاقة بين دائرتين في المستوي.

مقدمة الوحدة

بعد أن أوجد رينيه ديكارت (Rene Descartes) تلك العلاقة الشهيرة بين الهندسة والهندسة التحليليّة، بدأت هذه العلاقة بالتطور حتى أصبح بإمكاننا حل مسائل كان من الصعب إيجاد حلول لها باستخدام الطرائق التقليدية. كما وبدأت التطبيقات الحياتية مع الهندسة التحليليّة تأخذ طريقها بشكل سريع بعد التوسع في استخدام الحاسوب والأجهزة الخلوية.

تستخدم البرامج على الحاسوب بشكل أساسي الإحداثيات الهندسية لتوجد أشكالًا مختلفة من الصور والتصاميم، حيث ترى صورًا ثلاثية الأبعاد على شاشة التلفاز.

وقد استخدمت أيضًا في مجال الترفيه والتسلية، الإحداثيات الهندسية لإنتاج رسوم متحركة وألعاب فيديو متعددة ومتنوعة للكبار والصغار.

ومن المهم أن للإحداثيات الهندسية الأثر الكبير في نمذجة تصاميم الذرات والنجوم والحيوانات والمنشآت الكبيرة. وقد اعتمدت كل الرسوم والصور الموجودة في هذا الكتاب بالدرجة الأولى على الإحداثيات الهندسية.

على سبيل المثال: يسكن خالد على بعد ٦ كم غربًا و٣ كم شمالًا بالنسبة إلى مدرسته.

أما صالح فيسكن على بعد ٥ كم جنوبًا بالنسبة إلى مدرسته.

كم كيلومتر يوجد بين مسكن خالد ومسكن صالح؟

يمكن نمذجة هذه المسألة باستخدام المستوى الإحداثي على أن تكون نقطة الأصل بناء المدرسة.


الوحدة التاسعة

الهندسة التحليليّة
Analytic Geometry

مشروع الوحدة: اختيار وظيفة

١ مقدمة المشروع: هل لديك عمل ما؟ إذا لم يكن لديك عمل، فما الوظيفة التي تفضلها؟ ما المصاريف المتوقعة؟ ما المبلغ الذي ستتقاضاه؟ كيف يمكنك المقارنة بين وظيفتين أو بين دخلين؟ إن معادلات المستقيم تساعدك على الإجابة عن هذه الأسئلة كلها.

خلال عملكم على هذا المشروع، سوف ترسمون الخطوط المستقيمة وتكتبون المعادلات التي تنمذج مختلف الأعمال أو الوظائف وسوف تستخدمون هذه النماذج لتوقع الدخل.

٢ الهدف: محادثة شخص ما حول أول عمل قام به. اختيار العمل أو الوظيفة المفضلة مع تبرير الاختيار.

٣ اللوازم: أوراق رسم مليمترية وآلة حاسبة.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أوجد قيمة الأجر في الساعة لوظيفتين تفضلهما. ارسم تمثيلًا بيانيًا بالخطوط تبيّن فيه مدخول كل وظيفة. يكون عدد الساعات بين ٠ و١٠ على المحور الأفقي وقيمة المدخول على المحور الرأسي. على افتراض أنك عملت ٨ ساعات، اشرح كيف يفسر التمثيل البياني فرق المدخول بين الوظيفتين.

على افتراض أنك تنال ٤٠٠ فلس في الساعة لقاء عملك في أحد أفران الحلويات ويحسم من أجرك ١٠٠ فلس ضريبة أسبوعية، إذا كنت تعمل س ساعة خلال ٥ أيام في الأسبوع وتدفع يوميًا ٢٥٠ فلسًا ثمن وجبة:

أ اكتب معادلة تبيّن فيها ربحك في أسبوع واحد بعد احتساب الضريبة والمصاريف.

ب في هذه الحالة ماذا يمثّل الميل (معامل س)؟ وماذا يمثل التقاطع مع محور الصادات؟

جـ كم ساعة عمل يلزمك كي يساوي ربحك الصافي ١٤ دينارًا و ٦٥٠ فلسًا بعد احتساب الضريبة والمصاريف؟

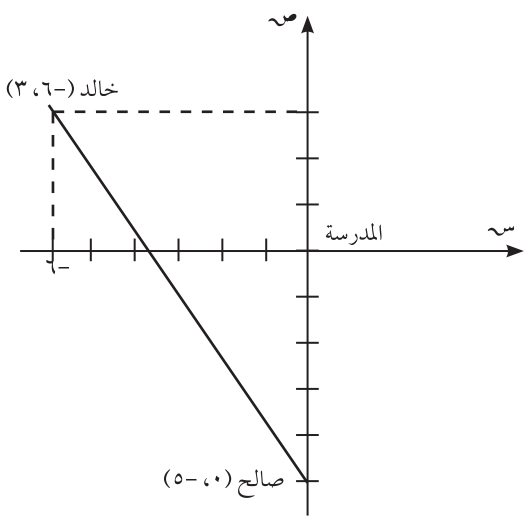
د حاور رجلًا مسنًّا حول وظيفته. اسأله عن إيجابيات هذه الوظيفة وسلبياتها من حيث الراتب والمصاريف. اكتب معادلة تبيّن فيها دخله الأسبوعي بعد احتساب المصاريف.

٥ التقرير: ضع تقريرًا مفصلًا حول مقارنة دخل كل وظيفة وكيفية رسم التمثيلات البيانية والاستفادة منها للإجابة عن الأسئلة.

دروس الوحدة

المستوى الإحداثي	تقسيم قطعة مستقيمة	ميل الخط المستقيم	معادلة الخط المستقيم	البعد بين نقطة ومستقيم	معادلة الدائرة
٩-١	٩-٢	٩-٣ (أ)	٩-٣(ب)	٩-٤	٩-٥

١١٨



$$\text{المسافة} = \sqrt{(-٦ - ٠)^٢ + (٣ - (-٥))^٢}$$

$$= \sqrt{٣٦ + ٦٤}$$

$$= \sqrt{١٠٠} = ١٠$$

أي يوجد ١٠ كم بين مسكن خالد ومسكن صالح.

ملاحظة:

يمكن استخدام نظرية فيثاغورث.

مشروع الوحدة

ماذا سأفعل بعد التخرج؟ كيف سيكون مستقبلي؟

هل كان اختياري للتخصص سليمًا؟

هل ستتحقق طموحاتي؟

أسئلة كثيرة ومتنوعة تدور في رأس كل طالب:

وظيفة؟ رجل أعمال؟ مهنة حرة؟ تاجر؟ مزارع؟

يساعدك العمل في هذا المشروع على تحديد جزء من خياراتك المستقبلية.

سوف تستخدم رسومًا بيانية لتقارن بين الوظائف وتختار منها الأفضل.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(أ) ص = ٤, ٠ س − ١,٣٥.

(ب) يمثل الميل أجر الساعة لقاء العمل. يمثل التقاطع مع محور الصادات القيمة الثابتة للمصاريف الأسبوعية إضافة إلى الضريبة.

(جـ) نحل المعادلة: ١٤,٦٥ = ٤, ٠ س − ١,٣٥
فنحصل على س = ٤٠. لتحصل على ١٤ دينارًا ٦٥٠ فلسًا يتوجب عليك أن تعمل ٤٠ ساعة أسبوعيًّا.

(د) تتنوّع الإجابات.

التقرير

قدم تقريرًا مفصلًا بالنتائج والأبحاث التي توصلت إليها، بالنسبة إلى الوظيفة المفضلة لديك أو أي مجال عمل آخر لمستقبلك.

ناقش مع زملائك هذا التقرير، واستمع إلى ملاحظاتهم باهتمام، ثم أعد النظر ببعض النقاط إذا كان ذلك ضروريًّا.

الوحدة التاسعة

اين انت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت كيف تضع النقاط على المستوى الإحداثي.
- تعلمت كيفية تطبيق نظرية فيثاغورث.
- تعلمت كيف توجد القيم المطلقة والجذور التربيعية.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف توجد المسافة بين نقطتين.
- سوف توجد طول قطعة مستقيمة.
- سوف تحدد إحداثيات نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة.
- سوف تحدد إحداثيات نقطة تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل ومن الخارج.
- سوف تقوم بحساب ميل خط مستقيم.
- سوف تقوم برسم خط مستقيم عندما تعرف نقطة منه وتعرف ميله.
- سوف تتعرف العلاقة بين ميل المستقيم وظل الزاوية.
- سوف تكتب معادلة المستقيمات المتوازية أو المتعامدة.
- سوف تتعرف صورة معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل ونقطة أو نقطتين.
- سوف تتعرف البعد بين نقطة ومستقيم.
- سوف تتعرف الدائرة ومعادلتها.
- سوف تتعرف الصورة العامة لمعادلة الدائرة وتوظيفها.
- سوف توجد مركز الدائرة وطول نصف قطرها.
- سوف تكتب معادلة المماس لدائرة.
- سوف تتعرف العلاقة بين دائرتين في المستوي.

أضف إلى معلوماتك

ديكارت والهندسة التحليليَّة
(١٥٩٦ – ١٦٥٠م)

رينيه ديكارت **Descartes** الرياضي والفيلسوف الفرنسي، هو الذي ربط بين العدد والنقطة وهذا ما أنتجَ لنا الهندسة التحليلية، حيث ابتكر النظام الإحداثي المكوَّن من محورين متعامدين متقاطعين (محور السينات ومحور الصادات)، والذي بواسطته يمكن التعبير عن كل نقطة في المستوى بعددين حقيقيين (س، ص). وباستخدام النظام الإحداثي، استطاع ديكارت أن يثبت صحة كل خواصّ الهندسة الإقليديَّة، معبرًا عن المستقيمات والمنحنيات بمعادلات جبرية باعتبارها مسارات لنقطة عامة تتحرك بشروط تحكم العلاقة بين(س، ص).

رينيه ديكارت

المصطلحات الأساسية

طول القطعة المستقيمة – المسافة بين نقطتين – البعد بين نقطة ومستقيم – نقطة المنتصف – ميل المستقيم – ظل الزاوية – ميلا مستقيمين متوازيين – ميلا مستقيمين متعامدين – معادلة الخط المستقيم – الدائرة – معادلة الدائرة – مركز الدائرة – نصف قطر الدائرة – مماس الدائرة.

١١٩

سلّم التقييم	
٤.	الحسابات صحيحة بالكامل. الرسوم البيانية واضحة ومعبرة. التقرير مفصل ودقيق.
٣.	معظم الحسابات صحيحة. الرسوم البيانية واضحة ويمكن قراءتها. التقرير بحاجة إلى بعض التفاصيل.
٢.	بعض الحسابات صحيحة. الرسوم البيانية مقبولة مع بعض الأخطاء. التقرير إلى حد ما مقبول.
١.	معظم عناصر المشروع ناقصة وغير مقبولة.

٩ـ١ : المستوى الإحداثي

١ الأهداف

- يوجد المسافة بين نقطتين.
- يوجد منتصف قطعة مستقيمة.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

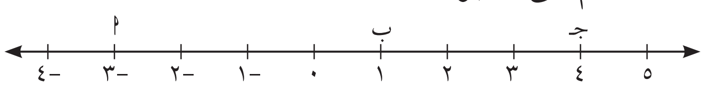
المسافة بين نقطتين – نقطة المنتصف.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة – ورق رسم بياني – آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

(١) ارسم على السبورة خط الأعداد.



اسأل الطلاب:

إيجاد المسافات:

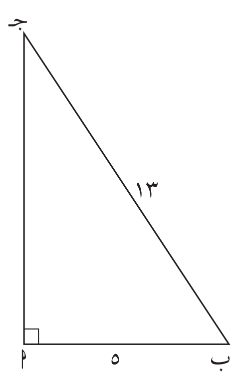
- من ﺃ إلى ب.
- من جـ إلى ﺃ.

اطلب إليهم إيجاد نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{ﺃب}}$.

(٢) في المثلث ﺃب جـ قائم الزاوية ﺃ، حيث:

ﺃب = ٥، ب جـ = ١٣

- أوجد ﺃجـ.



(٣) في المستوى الإحداثي، حيث و نقطة الأصل للمحورين نأخذ ﺃ(س، ٣).

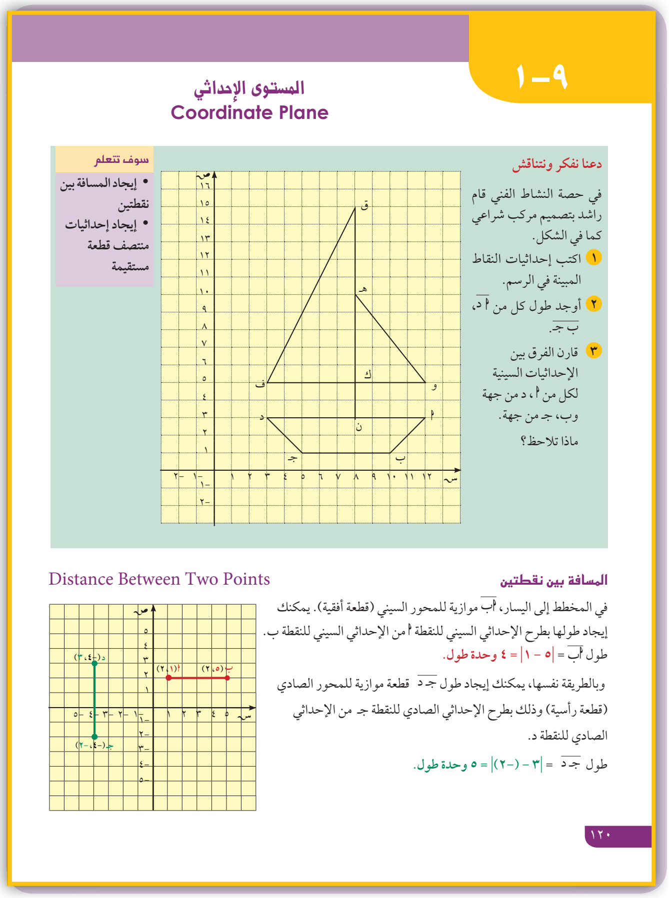
حدد موقع ﺃ إذا كان (وﺃ)^{٢} = ٢٥.

ناقش كل الحلول الممكنة.

٥ التدريس

من المهم جدًّا التركيز على المستوى الإحداثي، كي يتمكن الطالب من تحديد موقع نقطة من خلال الإحداثيات، فهذا سوف يساعد كثيرًا على التطبيق في مواقف حياتية تواجه الطالب في المستقبل.

ساعد الطلاب على التعامل بواقعية مع فقرة «دعنا نفكر ونتناقش». أخبرهم أن إنجاز تصاميم كثيرة مثل المراكب، والطائرات والسيارات... تبدأ أولًا بفكرة من هذا النوع.



٩ـ١

المستوى الإحداثي
Coordinate Plane

دعنا نفكر ونتناقش

في حصة النشاط الفني قام راشد بتصميم مركب شراعي كما في الشكل.

١ اكتب إحداثيات النقاط المبينة في الرسم.

٢ أوجد طول كل من $\overline{\text{ﺃد}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$.

٣ قارن الفرق بين الإحداثيات السينية لكل من ﺃ، د من جهة وب، جـ من جهة. ماذا تلاحظ؟

سوف تتعلم

- إيجاد المسافة بين نقطتين
- إيجاد إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة

المسافة بين نقطتين — Distance Between Two Points

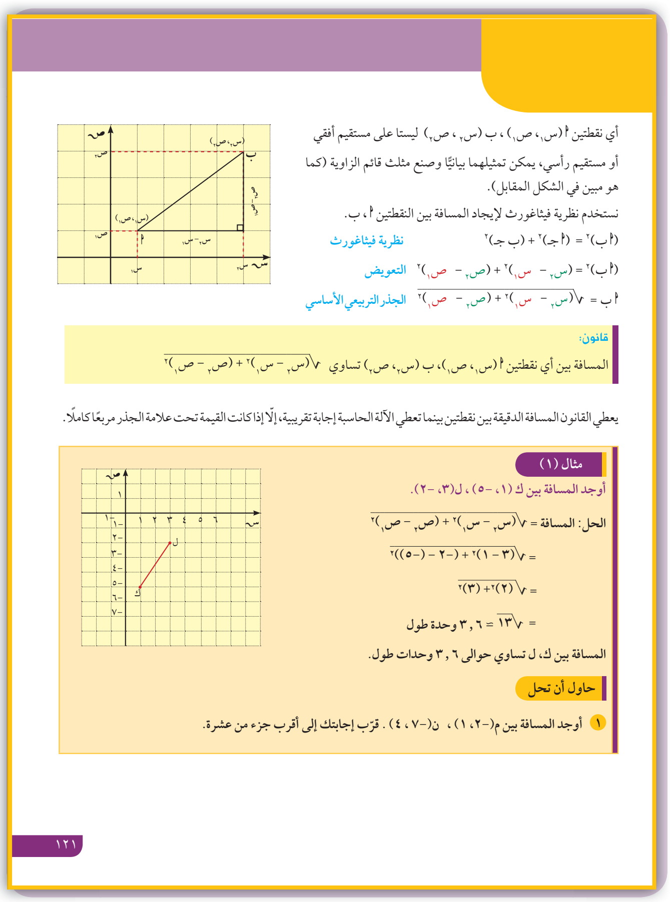
في المخطط إلى اليسار، $\overline{\text{ﺃب}}$ موازية للمحور السيني (قطعة أفقية). يمكنك إيجاد طولها بطرح الإحداثي السيني للنقطة ﺃ من الإحداثي السيني للنقطة ب.

طول $\overline{\text{ﺃب}}$ = |٥ – ١| = ٤ وحدة طول.

وبالطريقة نفسها، يمكنك إيجاد طول $\overline{\text{جـ د}}$ قطعة موازية للمحور الصادي (قطعة رأسية) وذلك بطرح الإحداثي الصادي للنقطة جـ من الإحداثي الصادي للنقطة د.

طول $\overline{\text{جـ د}}$ = |٣ – (–٢)| = ٥ وحدة طول.

١٢٠



أي نقطتين ﺃ(س$_{١}$، ص$_{١}$)، ب(س$_{٢}$، ص$_{٢}$) ليستا على مستقيم أفقي أو مستقيم رأسي، يمكن تمثيلهما بيانيًا وصنع مثلث قائم الزاوية (كما هو مبين في الشكل المقابل).

نستخدم نظرية فيثاغورث لإيجاد المسافة بين النقطتين ﺃ، ب.

(ﺃب)^{٢} = (ﺃجـ)^{٢} + (ب جـ)^{٢} — نظرية فيثاغورث

(ﺃب)^{٢} = (س$_{٢}$ – س$_{١}$)^{٢} + (ص$_{٢}$ – ص$_{١}$)^{٢} — التعويض

ﺃب = $\sqrt{(\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١})^{٢}}$ — الجذر التربيعي الأساسي

قانون:

المسافة بين أي نقطتين ﺃ(س$_{١}$، ص$_{١}$)، ب(س$_{٢}$، ص$_{٢}$) تساوي $\sqrt{(\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١})^{٢}}$

يعطي القانون المسافة الدقيقة بين نقطتين بينما تعطي الآلة الحاسبة إجابة تقريبية، إلّا إذا كانت القيمة تحت علامة الجذر مربعًا كاملًا.

مثال (١)

أوجد المسافة بين ك(١، –٥)، ل(٣، –٢).

الحل: المسافة = $\sqrt{(\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١})^{٢}}$

= $\sqrt{(٣ - ١)^{٢} + (-٢ - (-٥))^{٢}}$

= $\sqrt{(٢)^{٢} + (٣)^{٢}}$

= $\sqrt{١٣}$ = ٣,٦ وحدة طول

المسافة بين ك، ل تساوي حوالى ٣,٦ وحدات طول.

حاول أن تحل

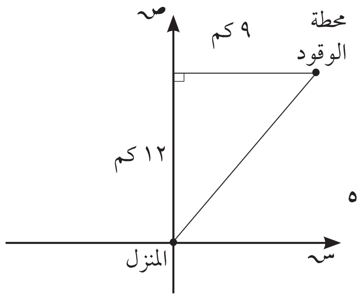
١ أوجد المسافة بين م(–٢، ١)، ن(–٧، ٤). قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

١٢١

اشرح جيدًا قانون المسافة بين نقطتين، وكيف أن نظرية فيثاغورث ساعدت كثيرًا على وضع هذا القانون. أشر إلى أن إيجاد المسافات بين النقاط يساعد على إيجاد محيط مضلع.

تأكد من أنهم فهموا جيدًا إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة، وأنهم تمكنوا من إيجاد الفرق بين قاعدة المسافة بين نقطتين وقاعدة منتصف القطعة المستقيمة، بخاصة إذا كان هناك حاجة في حالة معينة لاستخدام كلتا القاعدتين.

٦ الربط



خرج أحمد من منزله وقاد سيارته شمالًا، فاجتاز مسافة ١٢ كم، ثم انحرف يمينًا باتجاه الشرق وتوقف عند محطة وقود بعد أن اجتاز ٩ كم.
ساعد أحمد على معرفة أقصر مسافة تفصله الآن عن منزله كخط مستقيم. (١٥ كم)

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تحديد نقطة في مستوى الإحداثيات وفي تحديد نقطة البداية ونقطة النهاية في قاعدة المسافة بين نقطتين.

ساعدهم على ترميز النقاط حتى يتمكنوا من التطبيق بشكل صحيح.

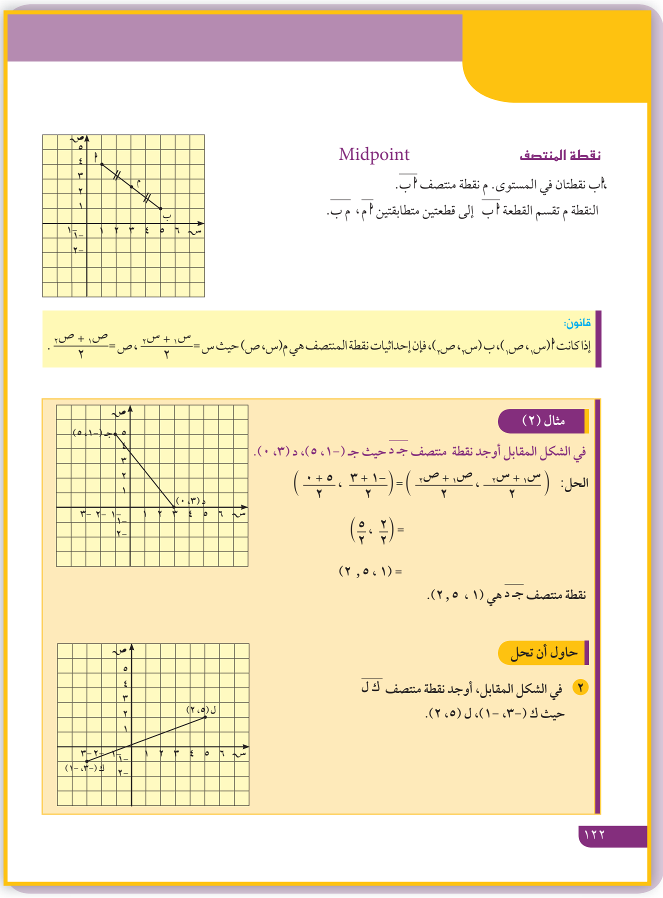
٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتدرك مدى استيعابهم مفاهيم هذا الدرس ومهاراته.

اختبار سريع

١ إذا كان أ(٧، ١١)، ب (١٣، ٧)، جـ (٣، ٥).
فأوجد أب، أجـ، ب جـ.
ثم أثبت أن Δأب جـ قائم الزاوية أ ومتطابق الضلعين.

أب = $\sqrt{٥٢}$ ≃ ٧,٢١ ، أجـ = $\sqrt{٥٢}$ ≃ ٧,٢١ ،
ب جـ = $\sqrt{١٠٤}$ ≃ ١٠,٢ .
(أب)^{٢} + (أجـ)^{٢} = ٥٢ + ٥٢ = ١٠٤ = (ب جـ)^{٢}
إذًا أب جـ قائم الزاوية أ ومتطابق الضلعين.



نقطة المنتصف Midpoint

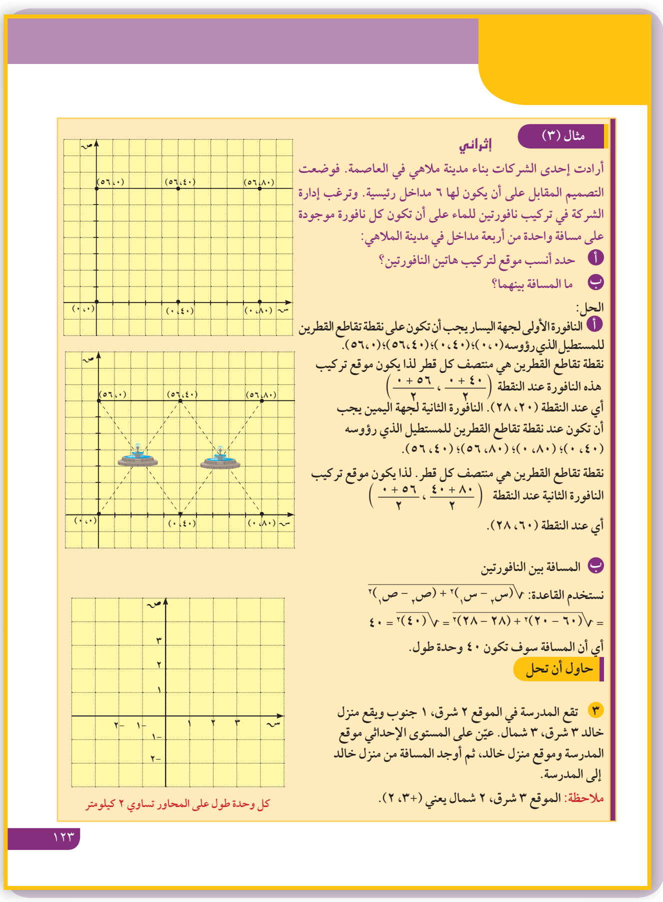
أ، ب نقطتان في المستوى. م نقطة منتصف $\overline{أب}$.
النقطة م تقسم القطعة $\overline{أب}$ إلى قطعتين متطابقتين $\overline{أم}$، $\overline{م ب}$.

قانون:
إذا كانت أ(س$_{١}$، ص$_{١}$)، ب (س$_{٢}$، ص$_{٢}$)، فإن إحداثيات نقطة المنتصف هي م(س، ص) حيث س = $\frac{س_{١} + س_{٢}}{٢}$ ، ص = $\frac{ص_{١} + ص_{٢}}{٢}$.

مثال (٢)
في الشكل المقابل أوجد نقطة منتصف $\overline{جـ د}$ حيث جـ (–١، ٥)، د (٣، ٠).
الحل: $\left(\frac{س_{١} + س_{٢}}{٢} ، \frac{ص_{١} + ص_{٢}}{٢}\right) = \left(\frac{-١ + ٣}{٢} ، \frac{٥ + ٠}{٢}\right)$
$= \left(\frac{٢}{٢} ، \frac{٥}{٢}\right)$
= (١ ، ٢,٥)
نقطة منتصف $\overline{جـ د}$ هي (١ ، ٢,٥).

حاول أن تحل
٢ في الشكل المقابل، أوجد نقطة منتصف $\overline{ك ل}$ حيث ك (–٣، –١)، ل (٥، ٢).

١٢٢



مثال (٣)
إثرائي
أرادت إحدى الشركات بناء مدينة ملاهي في العاصمة. فوضعت التصميم المقابل على أن يكون لها ٦ مداخل رئيسية. وترغب إدارة الشركة في تركيب نافورتين للماء على أن تكون كل نافورة موجودة على مسافة واحدة من أربعة مداخل في مدينة الملاهي:
أ حدد أنسب موقع لتركيب هاتين النافورتين؟
ب ما المسافة بينهما؟
الحل:
أ النافورة الأولى لجهة اليسار يجب أن تكون على نقطة تقاطع القطرين للمستطيل الذي رؤوسه (٠، ٠)؛ (٤٠، ٠)؛ (٤٠، ٥٦)؛ (٠، ٥٦).
نقطة تقاطع القطرين هي منتصف كل قطر لذا يكون موقع تركيب هذه النافورة عند النقطة $\left(\frac{٤٠ + ٠}{٢} ، \frac{٥٦ + ٠}{٢}\right)$
أي عند النقطة (٢٠، ٢٨). النافورة الثانية لجهة اليمين يجب أن تكون عند نقطة تقاطع القطرين للمستطيل الذي رؤوسه (٤٠، ٠)؛ (٨٠، ٠)؛ (٨٠، ٥٦)؛ (٤٠، ٥٦).
نقطة تقاطع القطرين هي منتصف كل قطر. لذا يكون موقع تركيب النافورة الثانية عند النقطة $\left(\frac{٨٠ + ٤٠}{٢} ، \frac{٥٦ + ٠}{٢}\right)$
أي عند النقطة (٦٠، ٢٨).
ب المسافة بين النافورتين
نستخدم القاعدة: $\sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$
$= \sqrt{(٦٠ - ٢٠)^{٢} + (٢٨ - ٢٨)^{٢}} = \sqrt{(٤٠)^{٢}} = ٤٠$
أي أن المسافة سوف تكون ٤٠ وحدة طول.

حاول أن تحل
٣ تقع المدرسة في الموقع ٢ شرق، ١ جنوب ويقع منزل خالد ٣ شرق، ٣ شمال. عيّن على المستوى الإحداثي موقع المدرسة وموقع منزل خالد، ثم أوجد المسافة من منزل خالد إلى المدرسة.
ملاحظة: الموقع ٣ شرق، ٢ شمال يعني (+٣، ٢).
كل وحدة طول على المحاور تساوي ٢ كيلومتر

١٢٣

٩ إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

١ أ(١٢، ٣)؛ ب(١٠، ١)؛ جـ(٥، ١)؛ د(٣، ٣)؛ هـ(٨، ١٠)؛ و(١٢، ٥)؛ ك(٨، ٥)؛ ن(٨، ٣)؛ ف(٣، ٥)؛ ق(٨، ١٥).

٢ أد = ٩ وحدات؛ ب جـ = ٥ وحدات.

٣ $س_{أ} - س_{د} = ١٢ - ٣ = ٩$؛

$س_{ب} - س_{جـ} = ١٠ - ٥ = ٥$

نلاحظ أن: أد = $س_{أ} - س_{د}$ ، ب جـ = $س_{ب} - س_{جـ}$.

«حاول أن تحل»

١ م ن = $\sqrt{(-٧ + ٢)^{٢} + (٤ - ١)^{٢}} = \sqrt{٢٥ + ٩}$

$= \sqrt{٣٤} \simeq ٥,٨٣$ وحدات طول.

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرّن ٩-١

المستوى الإحداثي
Coordinate Plane

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمرينين (١-٢)، أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط التالية.

(١) (٧، −٣)(−٢، ٩)

(٢) (−٢، ٧)(−٢، −٧)

في التمرينين (٣-٤)، أوجد إحداثيي نقطة المنتصف لكل من القطع المستقيمة التالية، بمعلومية إحداثيات طرفي القطعة المستقيمة.

(٣) أ(٢، ٥)، ب(٠، ٧)

(٤) س(−٣، ١٤)، ص(١، ١٠)

في التمرينين (٥-٦)، أوجد أطوال أضلاع كل من المثلثات التالية بمعلومية إحداثيات رؤوسها. قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

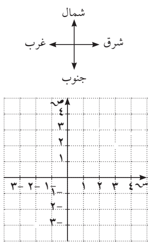
(٥) أ(٢، ٢) ، ب(٦، ٣) ، جـ(٥، ٦)

(٦) م(−١، −٥) ، ن(٤، −٤) ، ك(٢، −١)

٧٣

(٧) يقع منزل فيصل ٤ شرق ٢ شمال، ويقع نادي الرماية الذي ينتسب إليه فيصل ٢ غرب ٣ جنوب.

(أ) عيّن على المستوى الإحداثي موقع منزل فيصل وموقع نادي الرماية.



كل وحدة طول على المحاور تساوي ٢,٥ كيلومتر

(ب) أوجد إحداثيي نقطة المنتصف بين النادي ومنزل فيصل.

(جـ) أوجد المسافة بين منزل فيصل والنادي.

(٨) **تفكير ناقد.** إذا كانت نقطة الأصل هي منتصف قطعة مستقيمة، فما هي الصفة التي سوف تتمتع بها إحداثيات طرفي القطعة المستقيمة؟

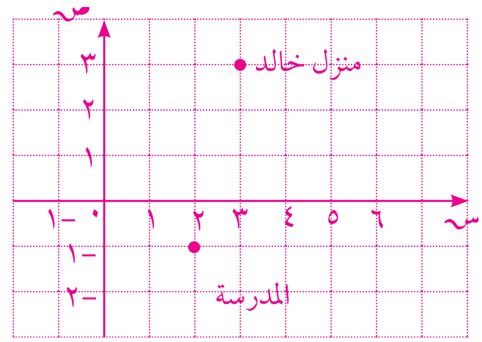
(٩) (أ) ما المسافة بين نقطة الأصل والنقطة (٣، ٤)؟

(ب) أوجد ثلاث نقاط أخرى تكون على المسافة نفسها من نقطة الأصل.

٧٤

٢ م منتصف $\overline{\text{كـ ل}}$ فتكون م $\left(١ ،\ \frac{١}{٢}\right)$.

٣

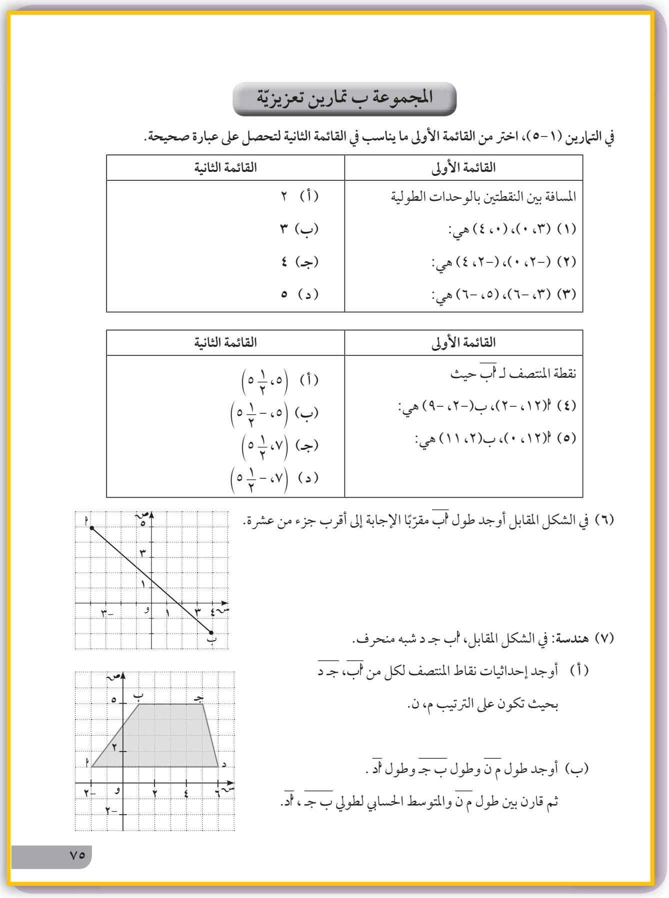


المسافة في المستوى الإحداثي = $\sqrt{١٧}$ وحدة طول.

المسافة = ٢ × $\sqrt{١٧}$ تبين المسافة بين منزل خالد والمدرسة

≃ ٨,٢٥ كم

لأن كل وحدة طول على المحاور تساوي ٢ كم.



المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

في التمارين (١-٥)، اختر من القائمة الأولى ما يناسب في القائمة الثانية لتحصل على عبارة صحيحة.

القائمة الأولى	القائمة الثانية
المسافة بين النقطتين بالوحدات الطولية	(أ) ٢
(١) (٣، ٠)، (٠، ٤) هي:	(ب) ٣
(٢) (-٢، ٠)، (-٢، ٤) هي:	(جـ) ٤
(٣) (٣، -٦)، (٥، -٦) هي:	(د) ٥

القائمة الأولى	القائمة الثانية
نقطة المنتصف لـ $\overline{\text{أب}}$ حيث	(أ) $\left(٥ ،\ ٥\frac{١}{٢}\right)$
(٤) أ(١٢، -٢)، ب(-٢، -٩) هي:	(ب) $\left(٥ ،\ -٥\frac{١}{٢}\right)$
(٥) أ(١٢، ٠)، ب(٢، ١١) هي:	(جـ) $\left(٧ ،\ ٥\frac{١}{٢}\right)$
	(د) $\left(٧ ،\ -٥\frac{١}{٢}\right)$

(٦) في الشكل المقابل أوجد طول $\overline{\text{أب}}$ مقرّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

(٧) **هندسة:** في الشكل المقابل، أب جـ د شبه منحرف.

(أ) أوجد إحداثيات نقاط المنتصف لكل من $\overline{\text{أب}}$، $\overline{\text{جـ د}}$

بحيث تكون على الترتيب م، ن.

(ب) أوجد طول $\overline{\text{م ن}}$ وطول $\overline{\text{ب جـ}}$ وطول $\overline{\text{أد}}$.

ثم قارن بين طول $\overline{\text{م ن}}$ والمتوسط الحسابي لطولي $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{أد}}$.

٧٥

٩ـ٢ تقسيم قطعة مستقيمة

١ الأهداف

- يوجد إحداثيات نقطة تقسيم قطعة مستقيمة بنسبة معينة من الداخل.
- يوجد إحداثيات نقطة تقسيم قطعة مستقيمة بنسبة معينة من الخارج.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل – تقسيم قطعة مستقيمة من الخارج.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة – ورق رسم بياني – آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اسأل الطلاب عن النسبة والتناسب والضرب التقاطعي.

(١) شجرة ارتفاعها ١٥ مترًا وطول ظلها في فترة من النهار ٦ أمتار. ما نسبة طول الشجرة إلى ظلها؟ أو ما نسبة ظل الشجرة إلى ارتفاعها؟

(٢) ناطحة سحاب ارتفاعها ١٧٤ مترًا، يوجد بناء إلى جانبها ارتفاعه ٣٦ مترًا. فما نسبة ارتفاع البناء إلى ارتفاع ناطحة السحاب؟

(٣) في فقرة «فلنعمل معًا»، ما نسبة طول قطعة الخشب الصغرى إلى طول قطعة الخشب الكبرى.

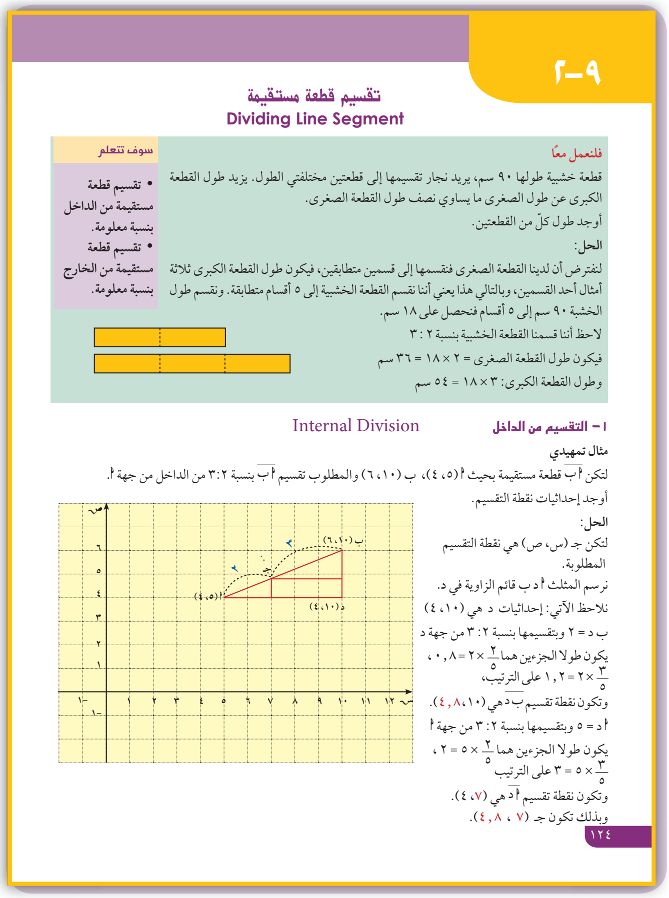
(٤) حدد على مستوى إحداثي موقع النقطتين: أ(–٤، ٦)، ب(٣، –٢).

(٥) حل التناسب التالي: $\frac{٥}{٩} = \frac{\text{س}}{٢٧}$.

٥ التدريس

قد يجد الطلاب صعوبة في هذا الدرس لجهة الحفظ ومن ثم التذكر، وبخاصة مع قاعدة تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل وقاعدة تقسيم قطعة مستقيمة من الخارج بنسبة معينة.

دعهم يتعاملون بروية مع الدرس ليتمكنوا من تطبيق المخطط وفهم مجريات الشرح.


٩ـ٢

تقسيم قطعة مستقيمة
Dividing Line Segment

سوف تتعلم
- تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل بنسبة معلومة.
- تقسيم قطعة مستقيمة من الخارج بنسبة معلومة.

فلنعمل معًا

قطعة خشبية طولها ٩٠ سم، يريد نجار تقسيمها إلى قطعتين مختلفتي الطول. يزيد طول القطعة الكبرى عن طول الصغرى ما يساوي نصف طول القطعة الصغرى.
أوجد طول كلّ من القطعتين.

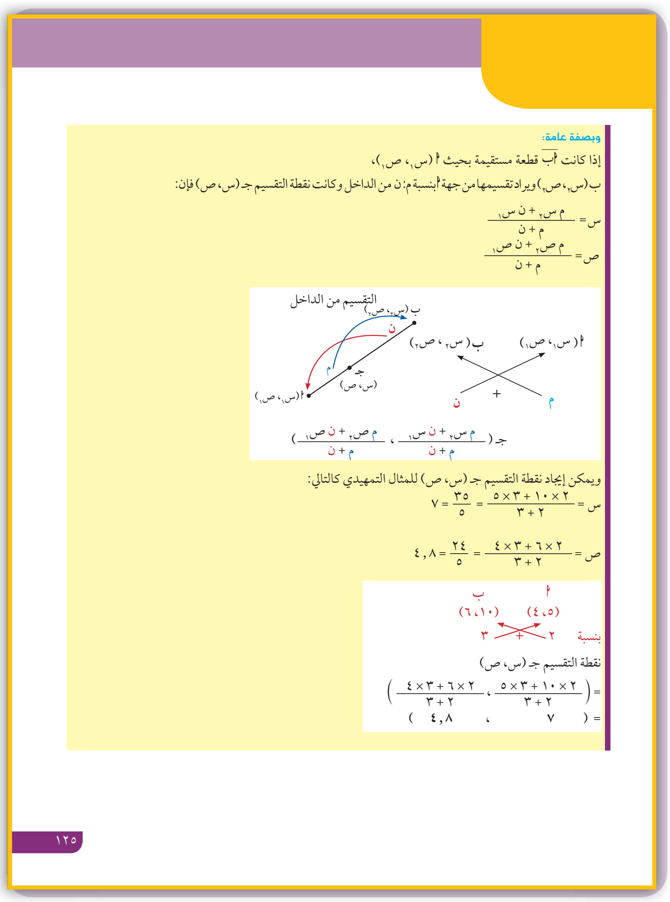
الحل:
لنفترض أن لدينا القطعة الصغرى فنقسمها إلى قسمين متطابقين، فيكون طول القطعة الكبرى ثلاثة أمثال أحد القسمين، وبالتالي هذا يعني أننا نقسم القطعة الخشبية إلى ٥ أقسام متطابقة. ونقسم طول الخشبة ٩٠ سم إلى ٥ أقسام فنحصل على ١٨ سم.
لاحظ أننا قسمنا القطعة الخشبية بنسبة ٢ : ٣
فيكون طول القطعة الصغرى = ٢ × ١٨ = ٣٦ سم
وطول القطعة الكبرى: ٣ × ١٨ = ٥٤ سم

١ – التقسيم من الداخل Internal Division

مثال تمهيدي
لتكن أب قطعة مستقيمة بحيث أ(٥، ٤)، ب (١٠، ٦) والمطلوب تقسيم أب بنسبة ٢:٣ من الداخل من جهة أ.
أوجد إحداثيات نقطة التقسيم.

الحل:
لتكن جـ (س، ص) هي نقطة التقسيم المطلوبة.
نرسم المثلث أ د ب قائم الزاوية في د.
نلاحظ الآتي: إحداثيات د هي (١٠، ٤)
ب د = ٢ وبتقسيمها بنسبة ٢: ٣ من جهة د
يكون طولا الجزءين هما $\frac{٢}{٥}$ × ٢ = ٠,٨ ، $\frac{٣}{٥}$ × ٢ = ١,٢ على الترتيب،
وتكون نقطة تقسيم ب د هي (١٠، ٤,٨).
أ د = ٥ وبتقسيمها بنسبة ٢: ٣ من جهة أ
يكون طولا الجزءين هما $\frac{٢}{٥}$ × ٥ = ٢ ، $\frac{٣}{٥}$ × ٥ = ٣ على الترتيب
وتكون نقطة تقسيم أ د هي (٧، ٤).
وبذلك تكون جـ (٧ ، ٤,٨).

١٢٤


وبصفة عامة:
إذا كانت أب قطعة مستقيمة بحيث أ (س١، ص١)،
ب(س٢، ص٢) ويراد تقسيمها من جهة أ بنسبة م: ن من الداخل وكانت نقطة التقسيم جـ (س، ص) فإن:

$$\text{س} = \frac{\text{م س}_٢ + \text{ن س}_١}{\text{م} + \text{ن}}$$

$$\text{ص} = \frac{\text{م ص}_٢ + \text{ن ص}_١}{\text{م} + \text{ن}}$$

التقسيم من الداخل

$$\text{جـ}\left(\frac{\text{م س}_٢ + \text{ن س}_١}{\text{م} + \text{ن}} ، \frac{\text{م ص}_٢ + \text{ن ص}_١}{\text{م} + \text{ن}}\right)$$

ويمكن إيجاد نقطة التقسيم جـ (س، ص) للمثال التمهيدي كالتالي:

$$\text{س} = \frac{٢ \times ١٠ + ٣ \times ٥}{٢ + ٣} = \frac{٣٥}{٥} = ٧$$

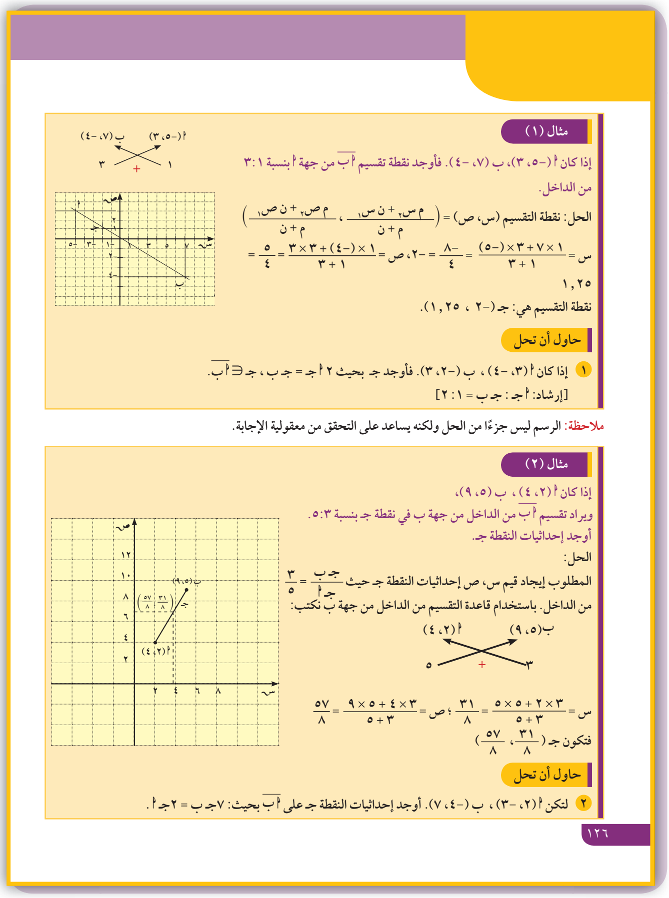
$$\text{ص} = \frac{٢ \times ٦ + ٣ \times ٤}{٢ + ٣} = \frac{٢٤}{٥} = ٤,٨$$

نقطة التقسيم جـ (س، ص)

$$= \left(\frac{٢ \times ١٠ + ٣ \times ٥}{٢ + ٣} ، \frac{٢ \times ٦ + ٣ \times ٤}{٢ + ٣}\right)$$

= (٧ ، ٤,٨)

١٢٥


مثال (١)

إذا كان أ (−٥، ٣)، ب (٧، −٤). فأوجد نقطة تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من جهة أ بنسبة ١:٣ من الداخل.

الحل: نقطة التقسيم (س، ص) = $\left(\frac{\text{م س}_2 + \text{ن س}_1}{\text{م} + \text{ن}} ، \frac{\text{م ص}_2 + \text{ن ص}_1}{\text{م} + \text{ن}}\right)$

س = $\frac{١ \times ٧ + ٣ \times (-٥)}{١ + ٣} = \frac{-٨}{٤} = -٢$، ص = $\frac{١ \times (-٤) + ٣ \times ٣}{١ + ٣} = \frac{٥}{٤} =$ ١,٢٥

نقطة التقسيم هي: جـ (−٢ ، ١,٢٥).

حاول أن تحل

١ إذا كان أ (٣، −٤) ، ب (−٢، ٣). فأوجد جـ بحيث ٢ أجـ = جـ ب ، جـ ∋ $\overline{\text{أب}}$.
[إرشاد: أجـ : جـ ب = ١ : ٢]

ملاحظة: الرسم ليس جزءًا من الحل ولكنه يساعد على التحقق من معقولية الإجابة.

مثال (٢)

إذا كان أ (٢، ٤) ، ب (٥، ٩)،
ويراد تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل من جهة ب في نقطة جـ بنسبة ٣:٥.
أوجد إحداثيات النقطة جـ.

الحل:

المطلوب إيجاد قيم س، ص إحداثيات النقطة جـ حيث $\frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ أ}} = \frac{٣}{٥}$ من الداخل. باستخدام قاعدة التقسيم من الداخل من جهة ب نكتب:

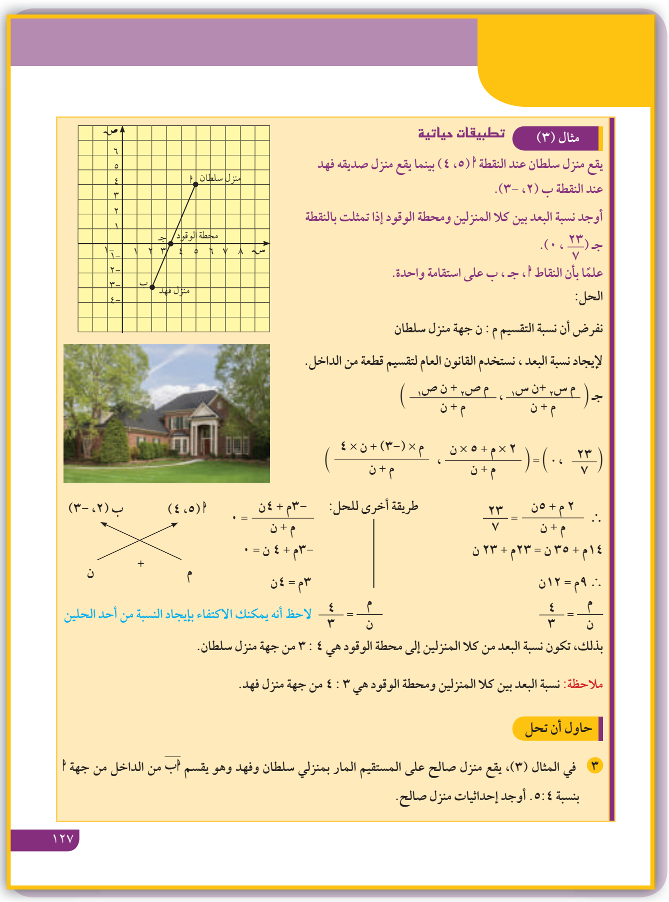
س = $\frac{٣ \times ٢ + ٥ \times ٥}{٣ + ٥} = \frac{٣١}{٨}$ ؛ ص = $\frac{٣ \times ٤ + ٥ \times ٩}{٣ + ٥} = \frac{٥٧}{٨}$

فتكون جـ ($\frac{٣١}{٨}$ ، $\frac{٥٧}{٨}$)

حاول أن تحل

٢ لتكن أ (٢، −٣) ، ب (−٤، ٧). أوجد إحداثيات النقطة جـ على $\overline{\text{أب}}$ بحيث: ٧جـ ب = ٢جـ أ .

١٢٦


مثال (٣) تطبيقات حياتية

يقع منزل سلطان عند النقطة أ (٥، ٤) بينما يقع منزل صديقه فهد عند النقطة ب (٢، −٣).

أوجد نسبة البعد بين كلا المنزلين ومحطة الوقود إذا تمثلت بالنقطة جـ ($\frac{٢٣}{٧}$ ، ٠).

علمًا بأن النقاط أ، جـ ، ب على استقامة واحدة.

الحل:

نفرض أن نسبة التقسيم م : ن جهة منزل سلطان

لإيجاد نسبة البعد ، نستخدم القانون العام لتقسيم قطعة من الداخل.

جـ $\left(\frac{\text{م س}_2 + \text{ن س}_1}{\text{م} + \text{ن}} ، \frac{\text{م ص}_2 + \text{ن ص}_1}{\text{م} + \text{ن}}\right)$

$\left(\frac{٢٣}{٧} ، ٠\right) = \left(\frac{٢ \times \text{م} + ٥ \times \text{ن}}{\text{م} + \text{ن}} ، \frac{\text{م} \times (-٣) + \text{ن} \times ٤}{\text{م} + \text{ن}}\right)$

∴ $\frac{٢\text{م} + ٥\text{ن}}{\text{م} + \text{ن}} = \frac{٢٣}{٧}$

١٤م + ٣٥ن = ٢٣م + ٢٣ن

∴ ٩م = ١٢ن

$\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \frac{٤}{٣}$

طريقة أخرى للحل:

$\frac{-٣\text{م} + ٤\text{ن}}{\text{م} + \text{ن}} = ٠$

−٣م + ٤ن = ٠

٣م = ٤ن

$\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \frac{٤}{٣}$ لاحظ أنه يمكنك الاكتفاء بإيجاد النسبة من أحد الحلين

بذلك، تكون نسبة البعد من كلا المنزلين إلى محطة الوقود هي ٤ : ٣ من جهة منزل سلطان.

ملاحظة: نسبة البعد بين كلا المنزلين ومحطة الوقود هي ٣ : ٤ من جهة منزل فهد.

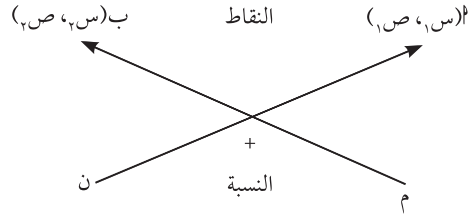
حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، يقع منزل صالح على المستقيم المار بمنزلي سلطان وفهد وهو يقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل من جهة أ بنسبة ٤:٥. أوجد إحداثيات منزل صالح.

١٢٧

في التقسيم من الداخل، اطلب إليهم التمرن على استخدام المخطط كما هو. ركّز على فكرة «التقسيم من جهة أي نقطة» ليعرفوا كيف يكتبون المخطط.

من جهة أ مثلًا نكتب:



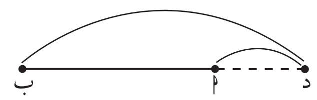
وهكذا نجد إحداثيات النقطة د هي:

$$\left(\frac{\text{م س}_2 + \text{ن س}_1}{\text{م} + \text{ن}} ، \frac{\text{م ص}_2 + \text{ن ص}_1}{\text{م} + \text{ن}}\right)$$

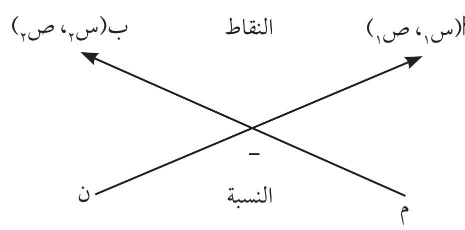
في المثال (١)، أكّد لهم أن الرسم البياني يساعد كثيرًا على الإيضاح وعلى التحقق من صحة النتائج.

أما في التقسيم من الخارج فيجب الانتباه أيضًا لجهة أي نقطة سوف يتم التقسيم بنسبة معينة، وبالتالي الاعتماد على القاعدة يمكن أن يوقعنا في أخطاء، لذا يستحسن الاعتماد على المثال (٢) للعودة إلى التقسيم من الداخل. قد يكون رسم صورة لتحديد النقاط على المستوى الإحداثي ضروريًّا جدًّا، للتأكد في ما بعد من النتائج التي حصلوا عليها.

أما لجهة القاعدة فيمكن استخدامها إذا كان التقسيم، مثلًا، لجهة أ.



فيكون د هي:



$$\left(\frac{\text{م س}_2 - \text{ن س}_1}{\text{م} - \text{ن}} ، \frac{\text{م ص}_2 - \text{ن ص}_1}{\text{م} - \text{ن}}\right)$$

٦ الربط

يعبر المثال (٣) عن عملية ربط بموقف حياتي يستخدم فيه كيفية إيجاد نسبة تقسيم قطعة مستقيمة بواسطة نقطة.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطىء الطلاب في كلتا القاعدتين في تطبيق إحداثيات النقاط وحدّي النسبة. ساعدهم من خلال عدة أمثلة على استخدام المخططات وتحديد النسبة لأي جهة من النقاط.

٨ التقييم

كن حريصًا على متابعة عمل كل طالب في فقرات «حاول أن تحل»، للتأكد من كونهم يضعون المخطط أولًا ثم يوجدون إحداثيات نقطة التقسيم.

اختبار سريع

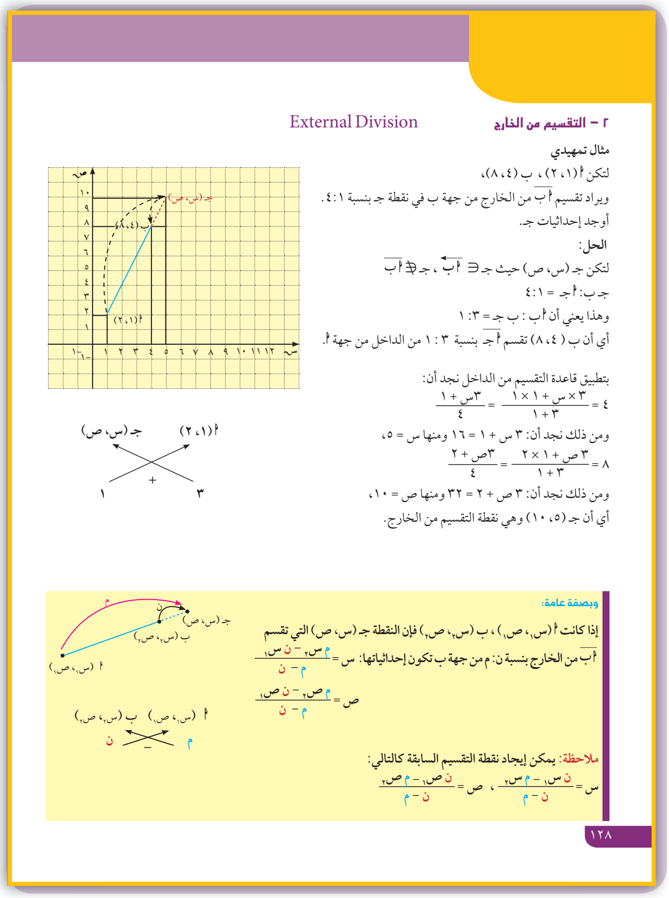
لتكن أ(٢، −٣)، ب (٤، ٢)

١ أوجد نقطة تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل من جهة ب بنسبة $\frac{٢}{٥}$.

$\left(\frac{٢٤}{٧} ، \frac{٤}{٧} \right)$

٢ أوجد نقطة تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج من جهة أ بنسبة $\frac{١}{٣}$.

(١، −٥ , ٥)


٢ – التقسيم من الخارج External Division

مثال تمهيدي

لتكن أ(١، ٢)، ب (٤، ٨)،
ويراد تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج من جهة ب في نقطة جـ بنسبة ٤:١.
أوجد إحداثيات جـ.

الحل:

لتكن جـ (س، ص) حيث جـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، جـ ∉ $\overline{\text{أب}}$

جـ ب: أجـ = ٤:١

وهذا يعني أن أب : ب جـ = ٣:١

أي أن ب (٤، ٨) تقسم $\overline{\text{أجـ}}$ بنسبة ٣ : ١ من الداخل من جهة أ.

بتطبيق قاعدة التقسيم من الداخل نجد أن:

$٤ = \frac{٣ \times س + ١ \times ١}{٣ + ١} = \frac{٣س + ١}{٤}$

ومن ذلك نجد أن: ٣ س + ١ = ١٦ ومنها س = ٥،

$٨ = \frac{٣ ص + ١ \times ٢}{٣ + ١} = \frac{٣ص + ٢}{٤}$

ومن ذلك نجد أن: ٣ ص + ٢ = ٣٢ ومنها ص = ١٠،

أي أن جـ (٥، ١٠) وهي نقطة التقسيم من الخارج.

وبصفة عامة:

إذا كانت أ (س١، ص١) ، ب (س٢، ص٢) فإن النقطة جـ (س، ص) التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج بنسبة ن: م من جهة ب تكون إحداثياتها: $س = \frac{م س_٢ - ن س_١}{م - ن}$

$ص = \frac{م ص_٢ - ن ص_١}{م - ن}$

ملاحظة: يمكن إيجاد نقطة التقسيم السابقة كالتالي:

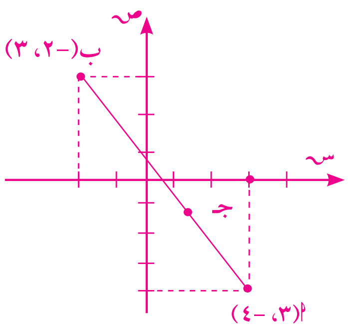
$س = \frac{ن س_١ - م س_٢}{ن - م}$ ، $ص = \frac{ن ص_١ - م ص_٢}{ن - م}$

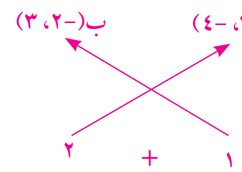
١٢٨

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ $\frac{\text{أجـ}}{\text{جـب}} = \frac{١}{٢}$

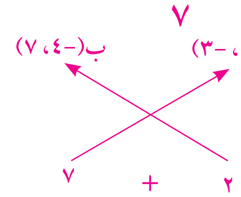




جـ$\left(\frac{٤}{٣} ، -\frac{٥}{٣} \right)$

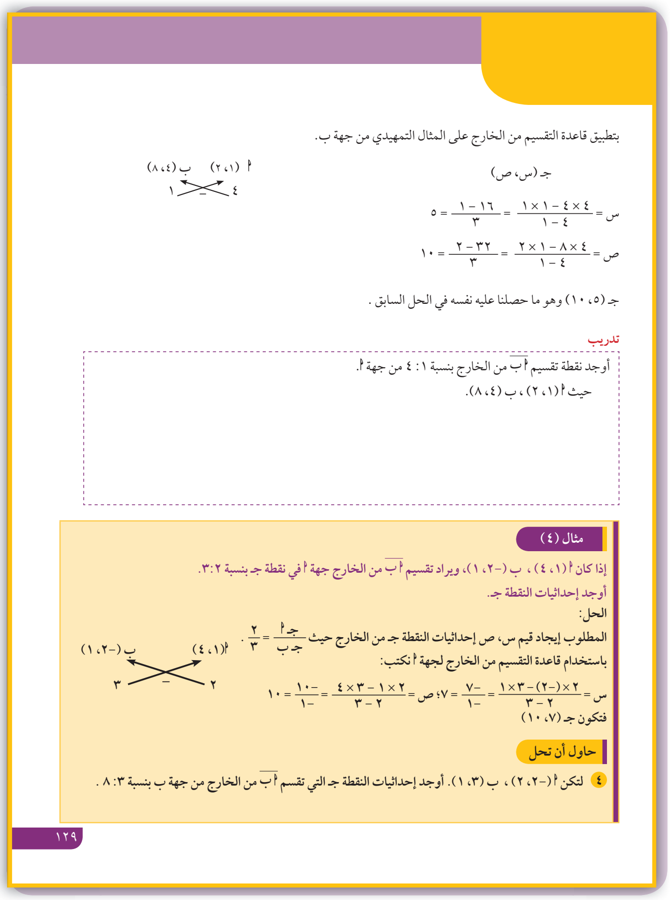
التقسيم من جهة أ

٢ $\frac{\text{جـب}}{\text{جـأ}} = \frac{٢}{٧}$



جـ$\left(-\frac{٨}{٣} ، \frac{٤٣}{٩} \right)$

التقسيم من جهة ب.


بتطبيق قاعدة التقسيم من الخارج على المثال التمهيدي من جهة ب.

جـ (س، ص)

$س = \frac{٤ \times ٤ - ١ \times ١}{٤ - ١} = \frac{١٦ - ١}{٣} = ٥$

$ص = \frac{٤ \times ٨ - ١ \times ٢}{٤ - ١} = \frac{٣٢ - ٢}{٣} = ١٠$

جـ (٥، ١٠) وهو ما حصلنا عليه نفسه في الحل السابق .

تدريب

أوجد نقطة تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج بنسبة ١ : ٤ من جهة أ.
حيث أ (١، ٢) ، ب (٤، ٨).

مثال (٤)

إذا كان أ (١، ٤) ، ب (−٢، ١)، ويراد تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج جهة أ في نقطة جـ بنسبة ٢:٣.
أوجد إحداثيات النقطة جـ.

الحل:

المطلوب إيجاد قيم س، ص إحداثيات النقطة جـ من الخارج حيث $\frac{\text{جـأ}}{\text{جـب}} = \frac{٢}{٣}$.

باستخدام قاعدة التقسيم من الخارج لجهة أ نكتب:

$س = \frac{٢ \times (-٢) - ٣ \times ١}{٢ - ٣} = \frac{-٧}{-١} = ٧$؛ $ص = \frac{٢ \times ١ - ٣ \times ٤}{٢ - ٣} = \frac{-١٠}{-١} = ١٠$

فتكون جـ (٧، ١٠)

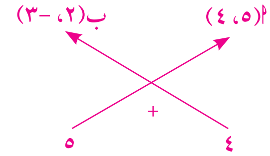
حاول أن تحل

٤ لتكن أ (−٢، ٢) ، ب (٣، ١). أوجد إحداثيات النقطة جـ التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج من جهة ب بنسبة ٣:٨ .

١٢٩

٣ لتكن جـ تمثل منزل صالح

$\frac{\text{جـ أ}}{\text{جـ ب}} = \frac{٤}{٥}$



جـ(س، ص)

$س = \frac{١١}{٣}$

$ص = \frac{٨}{٩}$

جـ$\left(\frac{١١}{٣}، \frac{٨}{٩}\right)$، حيث هي إحداثيات منزل صالح.

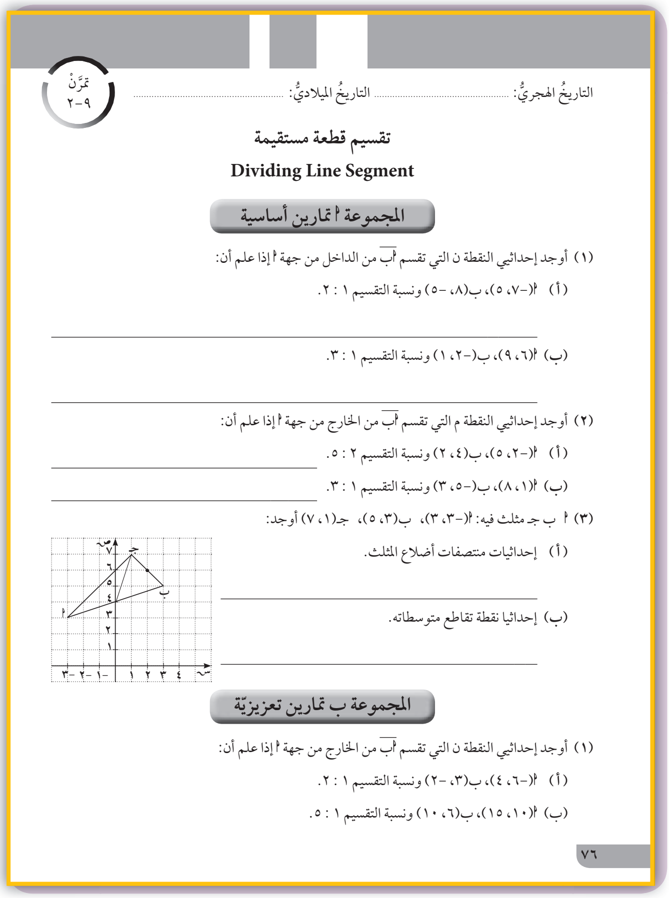
٤ جـ(٦، ٤، ٠)

٥ (أ) $\frac{٤\ ٦٧٥}{٤\ ٦٨٧}$

(ب) (٦,٩٨، ١٠,٩٧) تقريبًا.

«تدريب»

جـ(٠، ٠)



تمرَّنْ ٩-٢

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تقسيم قطعة مستقيمة

Dividing Line Segment

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أوجد إحداثيي النقطة ن التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل من جهة أ إذا علم أن:

(أ) أ(-٧، ٥)، ب(٨، -٥) ونسبة التقسيم ١ : ٢.

(ب) أ(٦، ٩)، ب(-٢، ١) ونسبة التقسيم ١ : ٣.

(٢) أوجد إحداثيي النقطة م التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج من جهة أ إذا علم أن:

(أ) أ(-٢، ٥)، ب(٤، ٢) ونسبة التقسيم ٢ : ٥.

(ب) أ(١، ٨)، ب(-٥، ٣) ونسبة التقسيم ١ : ٣.

(٣) أ ب جـ مثلث فيه: أ(-٣، ٣)، ب(٣، ٥)، جـ(١، ٧) أوجد:

(أ) إحداثيات منتصفات أضلاع المثلث.

(ب) إحداثيا نقطة تقاطع متوسطاته.

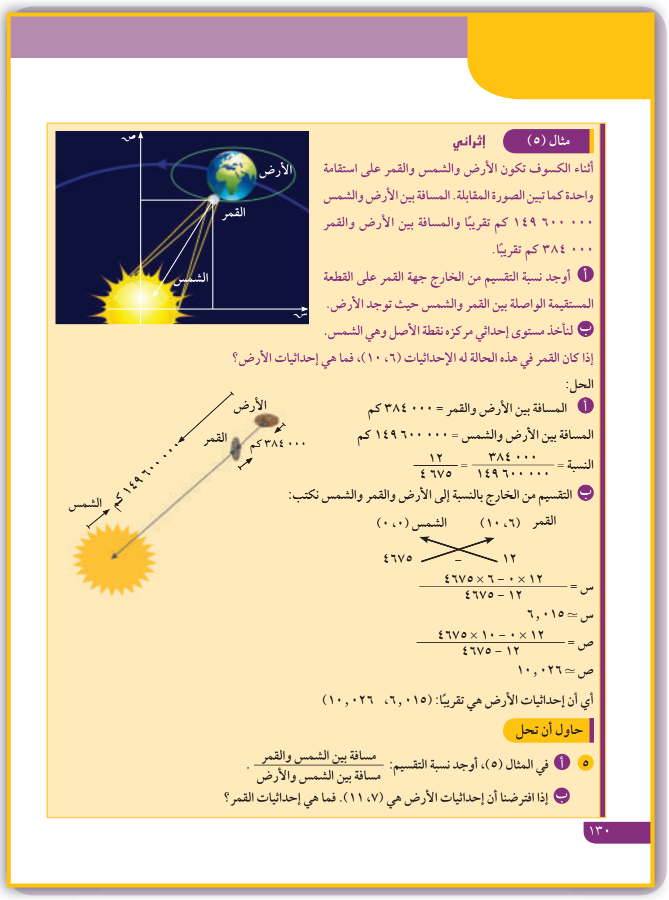
المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

(١) أوجد إحداثيي النقطة ن التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج من جهة أ إذا علم أن:

(أ) أ(-٦، ٤)، ب(٣، -٢) ونسبة التقسيم ١ : ٢.

(ب) أ(١٠، ١٥)، ب(٦، ١٠) ونسبة التقسيم ١ : ٥.

٧٦



مثال (٥) إثرائي

أثناء الكسوف تكون الأرض والشمس والقمر على استقامة واحدة كما تبين الصورة المقابلة. المسافة بين الأرض والشمس ١٤٩ ٦٠٠ ٠٠٠ كم تقريبًا والمسافة بين الأرض والقمر ٣٨٤ ٠٠٠ كم تقريبًا.

أ أوجد نسبة التقسيم من الخارج جهة القمر على القطعة المستقيمة الواصلة بين القمر والشمس حيث توجد الأرض.

ب لنأخذ مستوى إحداثي مركزه نقطة الأصل وهي الشمس.

إذا كان القمر في هذه الحالة له الإحداثيات (٦، ١٠)، فما هي إحداثيات الأرض؟

الحل:

أ المسافة بين الأرض والقمر = ٣٨٤ ٠٠٠ كم

المسافة بين الأرض والشمس = ١٤٩ ٦٠٠ ٠٠٠ كم

النسبة = $\frac{٣٨٤\ ٠٠٠}{١٤٩\ ٦٠٠\ ٠٠٠} = \frac{١٢}{٤\ ٦٧٥}$

ب التقسيم من الخارج بالنسبة إلى الأرض والقمر والشمس نكتب:

القمر (٦، ١٠) الشمس (٠، ٠)

١٢ ٤٦٧٥

$س = \frac{١٢ \times ٠ - ٦ \times ٤٦٧٥}{١٢ - ٤٦٧٥}$

$س \simeq ٦,٠١٥$

$ص = \frac{١٢ \times ٠ - ١٠ \times ٤٦٧٥}{١٢ - ٤٦٧٥}$

$ص \simeq ١٠,٠٢٦$

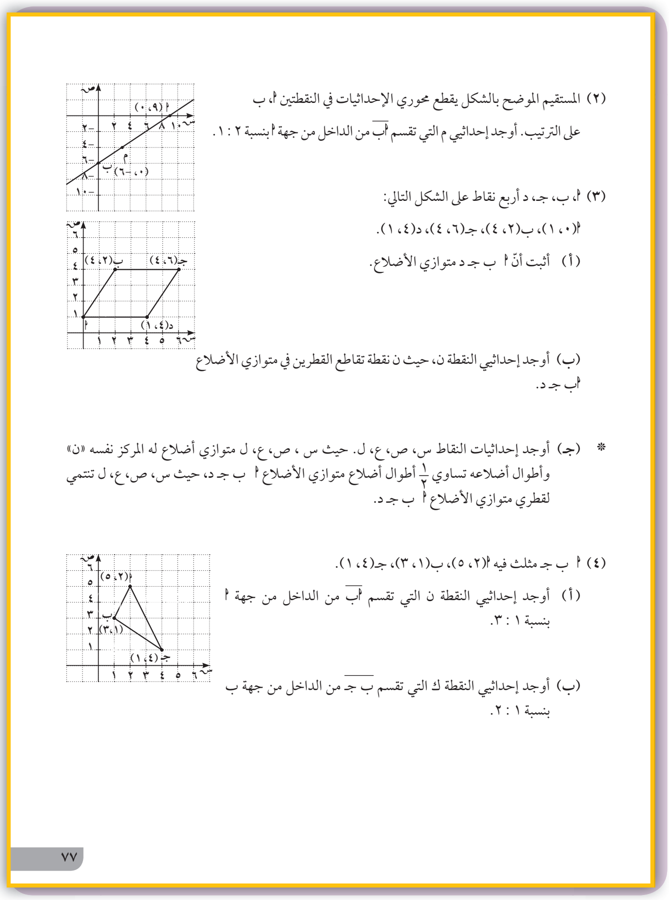
أي أن إحداثيات الأرض هي تقريبًا: (٦,٠١٥، ١٠,٠٢٦)

حاول أن تحل

٥ أ في المثال (٥)، أوجد نسبة التقسيم: $\frac{\text{مسافة بين الشمس والقمر}}{\text{مسافة بين الشمس والأرض}}$.

ب إذا افترضنا أن إحداثيات الأرض هي (٧، ١١). فما هي إحداثيات القمر؟

١٣٠



(٢) المستقيم الموضح بالشكل يقطع محوري الإحداثيات في النقطتين أ، ب على الترتيب. أوجد إحداثيي م التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل من جهة أ بنسبة ٢ : ١.

(٣) أ، ب، جـ، د أربع نقاط على الشكل التالي:

أ(٠، ١)، ب(٢، ٤)، جـ(٦، ٤)، د(٤، ١).

(أ) أثبت أنّ أ ب جـ د متوازي الأضلاع.

(ب) أوجد إحداثيي النقطة ن، حيث ن نقطة تقاطع القطرين في متوازي الأضلاع أب جـ د.

* (جـ) أوجد إحداثيات النقاط س، ص، ع، ل. حيث س ، ص، ع، ل متوازي أضلاع له المركز نفسه «ن» وأطوال أضلاعه تساوي $\frac{١}{٢}$ أطوال أضلاع متوازي الأضلاع أ ب جـ د، حيث س، ص، ع، ل تنتمي لقطري متوازي الأضلاع أ ب جـ د.

(٤) أ ب جـ مثلث فيه أ(٢، ٥)، ب(١، ٣)، جـ(٤، ١).

(أ) أوجد إحداثيي النقطة ن التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل من جهة أ بنسبة ١ : ٣.

(ب) أوجد إحداثيي النقطة ك التي تقسم $\overline{\text{ب جـ}}$ من الداخل من جهة ب بنسبة ١ : ٢.

٧٧

٩-٣[أ] ميل الخط المستقيم

١ الأهداف

- يوجد معدل التغير لكميتين مختلفتين.
- يوجد ميل الخط المستقيم.
- يكتب العلاقة بين ميل المستقيم وظل الزاوية التي يصنعها الاتجاه الموجب لمحور السينات مع الخط المستقيم.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

معدل التغير – التغير الرأسي – التغير الأفقي – الميل.

٣ الأدوات والوسائل

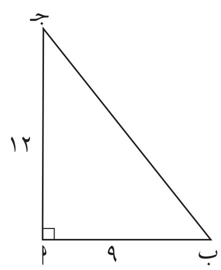
مسطرة – ورق رسم بياني – آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

أسأل الطلاب:

(١) كيف تجد المسافة بين نقطتين على محور السينات وعلى مستقيم موازٍ لمحور السينات بدلالة إحداثياتها؟

- كيف تجد المسافة بين نقطتين على محور الصادات أو على مستقيم موازٍ لمحور الصادات بدلالة إحداثياتها؟
- كيف تجد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي بدلالة إحداثياتها؟



(٢) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية أ.

أوجد ظاجـ ، ظاب.

(٣) إذا كان ظا ٦٠° = $\sqrt{3}$ ،

فأوجد ظا(١٢٠°).

٥ التدريس

اعرض أمام الطلاب أمثلة متعددة لترسيخ فكرة المعدل ومعدل التغير، كي يتعرفوا الفرق بين معدل التغير والنسبة.

مثل: سرعة السيارة بالساعة، ثمن سلعة معينة بالدينار، وزن جسم معين بالكيلوجرام...

قد يساعد المثال (١) بشكل كبير على فهم فكرة معدل التغير، وبخاصة عندما نستخدم كميتين مختلفتين.

٩-٣ (أ)

ميل الخط المستقيم
Slope of a Straight Line

سوف تتعلم
- معدل التغير
- إيجاد الميل
- العلاقة بين ميل المستقيم وظل الزاوية

دعنا نفكر ونتناقش

يمثل المخطط مسار أحد مصاعد التزلج.

١ ما التغير الرأسي من أ إلى ب؟ من ب إلى جـ؟ من جـ إلى د؟

٢ ما التغير الأفقي من أ إلى ب؟ من ب إلى جـ؟ من جـ إلى د؟

٣ ما نسبة التغير الرأسي إلى التغير الأفقي لكل قطعة؟

٤ أي مرحلة هي الأكثر ارتفاعًا؟ فسّر.

معدل التغير Rate of Change

في المخطط أعلاه، أب، ب جـ لهما معدلا تغير مختلفان. يسمح معدل التغير بمتابعة العلاقة بين كميتين تتغيران باستمرار. يكون ما يلي صحيحًا إذا ارتبطت إحدى الكميتين بالأخرى فإن:

معدل التغير = التغير في المتغير التابع ص / التغير في المتغير المستقل س

معلومة رياضية: المعدل هو مقارنة بين كميتين بوحدات قياس مختلفة.

مثال (١)

باستخدام البيانات في الجدول أدناه أوجد معدل التغير. هل معدل التغير لكل يومين متتاليين هو نفسه؟

عدد الأيام	كلفة تأجير الحاسوب
١	٦ دنانير
٢	٧,٥ دنانير
٣	٩ دنانير
٤	١٠,٥ دنانير
٥	١٢ دينارًا

الحل:

معدل التغير = التغير في الكلفة / التغير في عدد الأيام — ترتبط الكلفة بعدد الأيام

$\frac{7{,}5-6}{2-1} = \frac{1{,}5}{1}$ ، $\frac{9-7{,}5}{3-2} = \frac{1{,}5}{1}$

$\frac{10{,}5-9}{4-3} = \frac{1{,}5}{1}$ ، $\frac{12-10{,}5}{5-4} = \frac{1{,}5}{1}$

١٣١

معدل التغير لكل يومين متتاليين هو $\frac{1{,}5}{1}$

وبالتالي، معدل التغير هو نفسه في كل بيانات الجدول.

∴ كلفة تأجير الحاسوب تزداد ١,٥ دينار لكل يوم بعد اليوم الأول.

تذكر: معدل التغير يمكن أن يكون موجبًا أو سالبًا أو صفرًا.

حاول أن تحل

١ أوجد معدل التغير مستخدمًا اليوم الخامس واليوم الثاني.

تفكير ناقد: هل إيجاد معدل التغير لزوج واحد من الأيام المتتالية يعني أن معدل التغير هو نفسه في كل بيانات الجدول؟ فسّر إجابتك.

استخدام الرسم البياني لإيجاد معدل التغير

يبين الرسم البياني أن الأزواج المرتبة (عدد الأيام، الكلفة) في المثال (١) موجودة على خط مستقيم.

∴ بيانات الجدول هي خطية.

∴ يمكن استخدام الرسم البياني لإيجاد معدل التغير.

يتم تعيين المتغير المستقل على المحور الأفقي ويتم تعيين المتغير التابع على المحور الرأسي.

إيجاد الميل Finding The Slope

درست في ما سبق أن ميل المستقيم يمكن إيجاده باستخدام العلاقة:

الميل = التغير الرأسي / التغير الأفقي

فمثلًا ميل المستقيم الموضح بالشكل المقابل

الميل = التغير الرأسي / التغير الأفقي $= \frac{2-5}{4-(-1)}$

$= \frac{-3}{5}$

ميل الخط المستقيم يساوي $\frac{-3}{5}$.

١٣٢

ركز على القاعدة: معدل التغير $= \dfrac{\text{التغير في المتغير التابع ص}}{\text{التغير في المتغير المستقل س}}$

اشرح لهم معنى المتغير التابع والمتغير المستقل بأمثلة حسية.

حفّز الطلاب على فهم كيفية إيجاد ميل الخط المستقيم وفهم معناه الحقيقي وتطبيقاته على الواقع، وبخاصة بالنسبة إلى شق الطرق...

في المثال (٣)

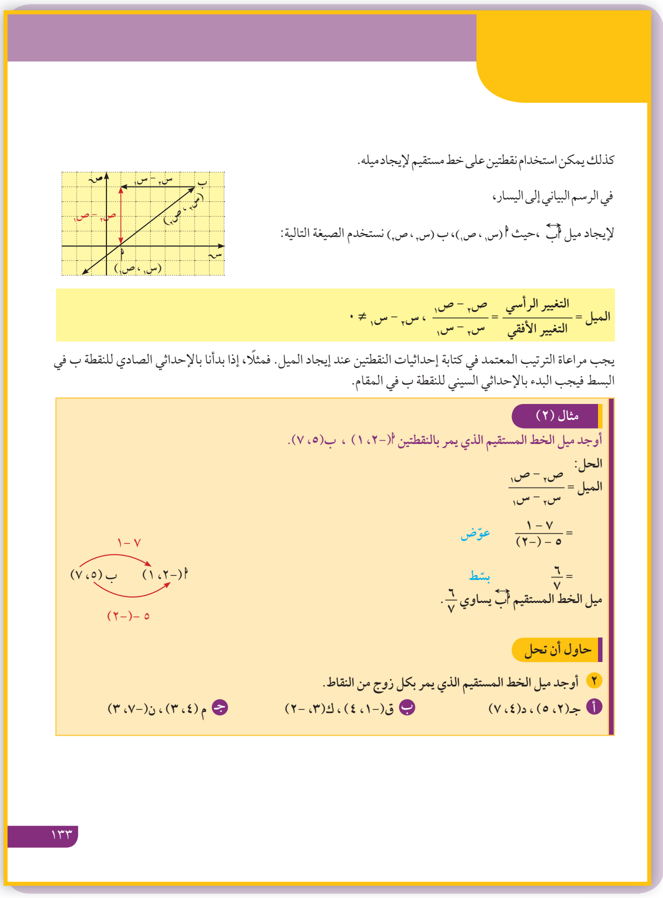
أهمية هذا المثال أنه يعطي الطلاب طريقة لأثبات أن ٣ نقاط هي على استقامة واحدة.

توسع في العلاقة التي تربط ميل المستقيم بظل الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

اشرح لهم أن الزاوية المنفرجة يكون ظلها حتمًا قيمة سالبة بحسب ما سبق أن تعلموه في دائرة الوحدة. وهذا يتفق تمامًا مع الميل السالب للخط المستقيم.

ذكرهم بالقاعدة: ظا$(\pi - \alpha')$ = −ظاα' أو

ظا$(١٨٠^\circ - \alpha^\circ)$ = − ظاα°.



كذلك يمكن استخدام نقطتين على خط مستقيم لإيجاد ميله.

في الرسم البياني إلى اليسار،

لإيجاد ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ،حيث أ(س$_١$ ، ص$_١$)، ب (س$_٢$ ، ص$_٢$) نستخدم الصيغة التالية:

الميل $= \dfrac{\text{التغيير الرأسي}}{\text{التغيير الأفقي}} = \dfrac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$ ، س$_٢$ − س$_١$ ≠ ٠

يجب مراعاة الترتيب المعتمد في كتابة إحداثيات النقطتين عند إيجاد الميل. فمثلًا، إذا بدأنا بالإحداثي الصادي للنقطة ب في البسط فيجب البدء بالإحداثي السيني للنقطة ب في المقام.

مثال (٢)

أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ(−٢، ١) ، ب(٥، ٧).

الحل:

الميل $= \dfrac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

$= \dfrac{٧ - ١}{٥ - (-٢)}$ عوّض

$= \dfrac{٦}{٧}$ بسّط

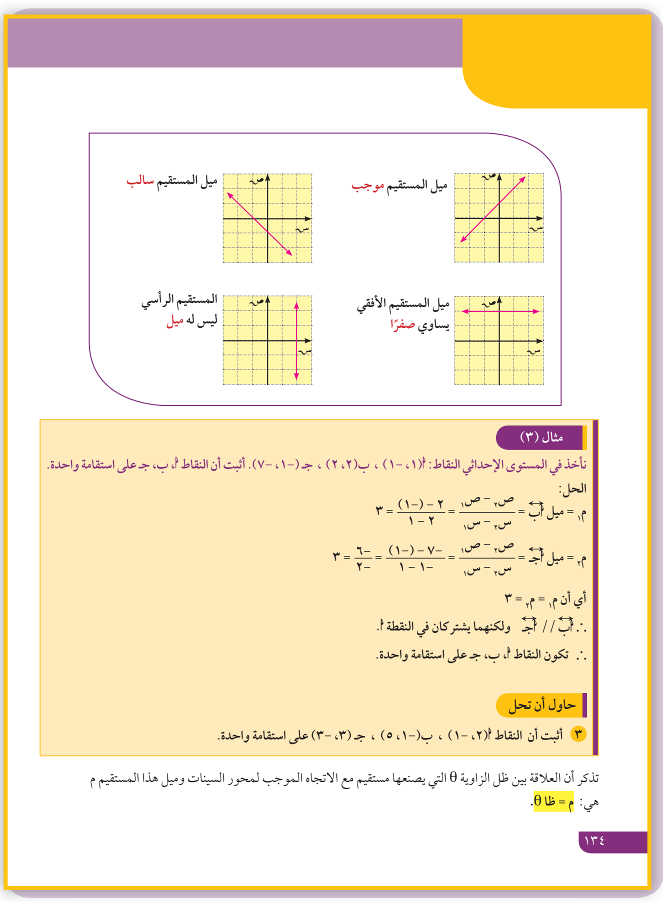
ميل الخط المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يساوي $\dfrac{٦}{٧}$.

حاول أن تحل

٢ أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بكل زوج من النقاط.

أ جـ(٢، ٥) ، د(٤، ٧) ب ق(−١، ٤) ، ك(٣، −٢) جـ م (٤، ٣) ، ن(−٧، ٣)

١٣٣



مثال (٣)

نأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: أ(١، −١) ، ب(٢، ٢) ، جـ (−١، −٧). أثبت أن النقاط أ، ب، جـ على استقامة واحدة.

الحل:

م$_١$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ $= \dfrac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \dfrac{٢ - (-١)}{٢ - ١} = ٣$

م$_٢$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ $= \dfrac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \dfrac{-٧ - (-١)}{-١ - ١} = \dfrac{-٦}{-٢} = ٣$

أي أن م$_١$ = م$_٢$ = ٣

∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ ولكنهما يشتركان في النقطة أ.

∴ تكون النقاط أ، ب، جـ على استقامة واحدة.

حاول أن تحل

٣ أثبت أن النقاط أ(٢، −١) ، ب(−١، ٥) ، جـ (٣، −٣) على استقامة واحدة.

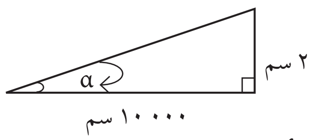
تذكر أن العلاقة بين ظل الزاوية θ التي يصنعها مستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وميل هذا المستقيم م هي: م = ظا θ.

١٣٤

٦ الربط

أراد أحد مهندسي الطرق معرفة ميل طريق غالبًا ما يجتازه، فلاحظ أنه كلما اجتاز مسافة ١٠٠ متر أفقيًّا يرتفع عن مستوى الأفق ٢٠ سم. ما ميل هذا الطريق؟

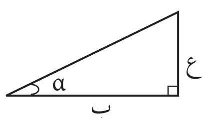
الميل = ظاα = ٠,٠٠٢



٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يكتب الطلاب الميل $= \dfrac{\text{التغير الأفقي}}{\text{التغير الرأسي}}$.

ساعدهم على ربط الميل بظل الزاوية في المثلث قائم الزاوية.



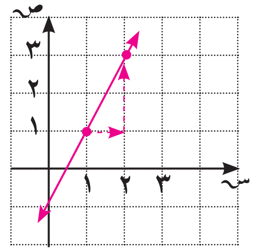
٨ التقييم

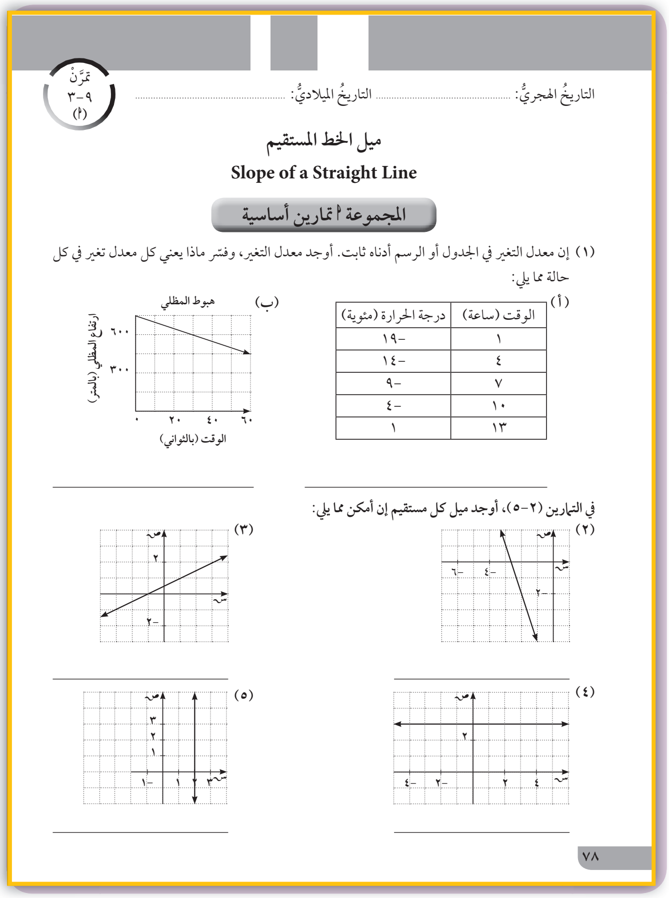
تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من حسن استخدامهم مفاهيم هذا الدرس ومهاراته.

اختبار سريع

١ أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين أ(٣، ٥)، ب (٢، ٤) ١

٢ ارسم المستقيم المار بنقطة (١، ١) وميله ٢.




التاريخ الهجري: .... التاريخ الميلادي: ....

تمرّن ٣-٩ (أ)

ميل الخط المستقيم

Slope of a Straight Line

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) إن معدل التغير في الجدول أو الرسم أدناه ثابت. أوجد معدل التغير، وفسّر ماذا يعني كل معدل تغير في كل حالة مما يلي:

(أ)

الوقت (ساعة)	درجة الحرارة (مئوية)
١	−١٩
٤	−١٤
٧	−٩
١٠	−٤
١٣	١

(ب) هبوط المظلي

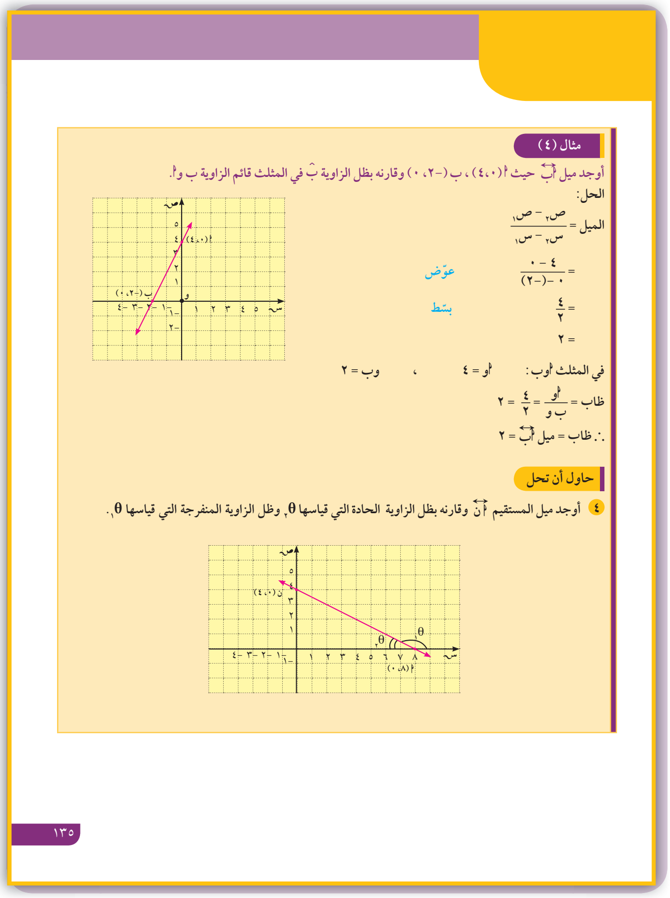
ارتفاع المظلي (بالمتر) ٦٠٠ ٣٠٠

٠ ٢٠ ٤٠ ٦٠ الوقت (بالثواني)

في التمارين (٢-٥)، أوجد ميل كل مستقيم إن أمكن مما يلي:

(٢) (٣) (٤) (٥)

٧٨


مثال (٤)

أوجد ميل $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ(٠، ٤)، ب(−٢، ٠) وقارنه بظل الزاوية $\hat{ب}$ في المثلث قائم الزاوية ب و أ.

الحل:

$$\text{الميل} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{٤ - ٠}{٠ - (-٢)}$$ عوّض

$$= \frac{٤}{٢}$$ بسّط

$$= ٢$$

في المثلث أوب: أو = ٤ ، وب = ٢

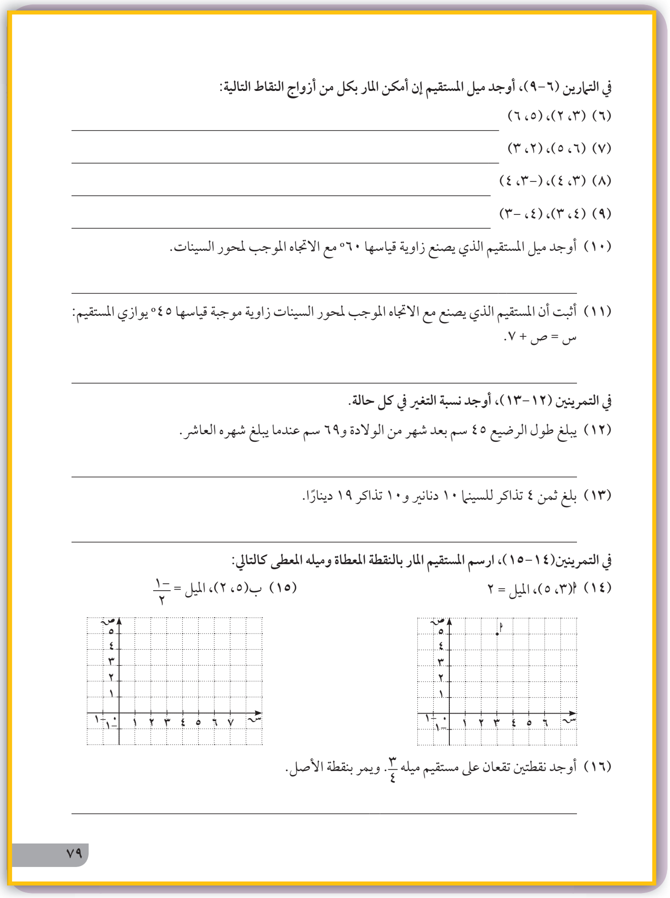
$$\text{ظا}ب = \frac{أو}{ب و} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

$\therefore$ ظاب = ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ٢

حاول أن تحل

٤ أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أن}$ وقارنه بظل الزاوية الحادة التي قياسها $\theta_٢$ وظل الزاوية المنفرجة التي قياسها $\theta_١$.

١٣٥


في التمارين (٦-٩)، أوجد ميل المستقيم إن أمكن المار بكل من أزواج النقاط التالية:

(٦) (٣، ٢)، (٥، ٦)

(٧) (٦، ٥)، (٢، ٣)

(٨) (٣، ٤)، (−٣، ٤)

(٩) (٤، ٣)، (٤، −٣)

(١٠) أوجد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(١١) أثبت أن المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° يوازي المستقيم: س = ص + ٧.

في التمرينين (١٢-١٣)، أوجد نسبة التغير في كل حالة.

(١٢) يبلغ طول الرضيع ٤٥ سم بعد شهر من الولادة و٦٩ سم عندما يبلغ شهره العاشر.

(١٣) بلغ ثمن ٤ تذاكر للسينما ١٠ دنانير و١٠ تذاكر ١٩ دينارًا.

في التمرينين(١٤-١٥)، ارسم المستقيم المار بالنقطة المعطاة وميله المعطى كالتالي:

(١٤) أ(٣، ٥)، الميل = ٢

(١٥) ب(٥، ٢)، الميل = $\frac{-١}{٢}$

(١٦) أوجد نقطتين تقعان على مستقيم ميله $\frac{٣}{٤}$ ويمر بنقطة الأصل.

٧٩

٩ إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

١ – ٤ تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

١ (أ) معدل التغير: $\frac{١٢ - ٧,٥}{٥ - ٢} = ١,٥$

(ب) لا، لأنه عندما نتحدث عن معدل التغير، يجب أن يكون ثابتًا في جميع البيانات.

٢ (أ) $\frac{٥ - ٧}{٢ - ٤} = \frac{-٢}{-٢} = ١$

(ب) $\frac{٤ - (-٢)}{-١ - ٣} = \frac{٦}{-٤} = -\frac{٣}{٢}$

(جـ) صفر (٠)

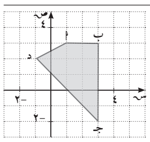
في التمارين (١٧–١٩)، أوجد قيمة كل من س، ص إذا كانت النقطتان على المستقيم مع المعطيات التالية:

(١٧) (س، ٣)، (٢، ٨)، الميل = $\frac{-٥}{٢}$.

(١٨) (–٤، ص)، (٢، ٤ص)، الميل = ٦.

(١٩) (٣، ٥)، (س، ٢)، الميل غير معرّف.

(٢٠) **هندسة:** أوجد ميل كل ضلع في الشكل المقابل إن أمكن.



في التمارين (٢١–٢٤)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و (ب) إذا كانت العبارة خطأ.

(٢١) من الممكن أن يكون لمستقيمين مختلفين الميل نفسه. (أ) (ب)

(٢٢) إن ميل المستقيم الذي يمر بالربع الثالث ونقطة الأصل هو دائمًا سالب. (أ) (ب)

(٢٣) لا يمر المستقيم الذي ميله يساوي صفرًا بنقطة الأصل. (أ) (ب)

(٢٤) نقطتين لديهما الإحداثي السيني نفسه، فإنهما ينتميان إلى المستقيم الرأسي نفسه. (أ) (ب)

(٢٥) **تحليل الخطأ:** وجد سالم أن ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (١، ٧)، (٣، ٩) يساوي: $\frac{١ - ٣}{٧ - ٩}$.
ما هو خطأ سالم؟

(٢٦) أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (س، –ص)، (–س، –ص).

في التمرينين (٢٧–٢٨)، حدِّد إن كانت مجموعة النقاط التالية تقع على استقامة واحدة.

(٢٧) أ(١، ٣)، ب(٤، ٢)، جـ(–٢، ٤).

(٢٨) أ(–٢، ٣)، ب(٠، –١)، جـ(٢، ١).

٨٠

(٢٩) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (–١، –١)، (–٤، ٥) عمودي على المستقيم المار بالنقطتين (٠، ١)، (٤، ٣).

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) (أ) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين أ(٤، –٣)، ب(١، –٥) مستخدمًا أ(س٢، ص٢)، ب (س١، ص١).

(ب) أوجد ميل المستقيم في (أ) مستخدمًا أ(س١، ص١)، ب(س٢، ص٢).

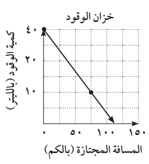
(جـ) ماذا تلاحظ؟

(٢) إذا كان معدل التغير في الجدول أو الرسم أدناه ثابتًا. أوجد معدل التغير وفسّر ماذا يعني كل معدل تغير في كل حالة مما يلي:

(أ)

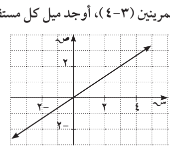
عدد الأشخاص	سعر الوجبة (بالدينار)
٢	٤
٣	٦
٤	٨
٥	١٠
٦	١٢

(ب)

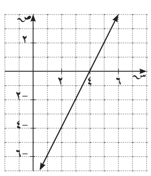


في التمرينين (٣–٤)، أوجد ميل كل مستقيم مما يلي:

(٣)



(٤)



٨١

٣ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}} = \dfrac{٥ - (-١)}{-١ - ٢} = \dfrac{٦}{-٣} = -٢$

ميل $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}} = \dfrac{-٣ - ٥}{٣ - (-١)} = \dfrac{-٨}{٤} = -٢$

ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ويشتركان في النقطة ب

∴ أ، ب، جـ على استقامة واحدة.

٤ ميل $\overleftrightarrow{\text{أن}} = \dfrac{٤ - ٠}{٠ - ٨} = -\dfrac{١}{٢}$

= ظل الزاوية التي يصنعها مع $\overleftrightarrow{\text{أن}}$ الاتجاه

الموجب لمحور السينات

ميل $\overleftrightarrow{\text{أن}}$ = ظا $\theta_{١}$

= − ظا $\theta_{٢}$

في التمرينين (٥-٦)، أوجد ميل المستقيم المار بكل من أزواج النقاط التالية:

(٥) (−٤، ٤)، (٢، −٥)

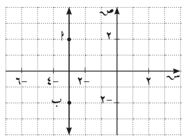
(٦) (−٢، ١)، (١، −٢)

(٧) أوجد ميل مستقيم موازٍ لمحور السينات.

(٨) أوجد ميل مستقيم يصنع مع محور السينات زاوية قياسها ٤٥° ويمر بنقطة الأصل.

في التمارين (٩-١١)، حدِّد ما إذا كان ميل المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يساوي صفرًا أم هو غير معرّف.

(٩)



(١٠) أ(−٥، $\frac{١}{٢}$)، ب (−٥، ٣)

(١١) أ(−٥، ١)، ب (−٤، ١)

(١٢) أوجد نقطتين تقعان على مستقيم ميله $\frac{-١}{٢}$، ويمر بنقطة الأصل.

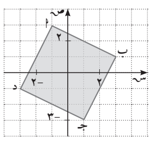
في التمارين (١٣-١٥)، أوجد قيمة س إذا مر المستقيم المعطى ميله بالنقطتين.

(١٣) (٢، ٤)، (س، ٨)، الميل = −٢.

(١٤) (٢، ٤)، (س، ٨)، الميل = $\frac{-١}{٢}$.

(١٥) (٤، ٣)، (س، ٧)، الميل = ٢.

(١٦) **هندسة:** في الشكل المقابل أوجد ميل كل ضلع.



ميل $\overline{\text{أب}}$ =

ميل $\overline{\text{ب جـ}}$ =

ميل $\overline{\text{جـ د}}$ =

ميل $\overline{\text{أد}}$ =

في التمارين (١٧-١٩)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة وظلّل (ب) إذا كانت العبارة خطأ.

(١٧) معدل التغير دائمًا موجبًا أو يساوي صفر. (أ) (ب)

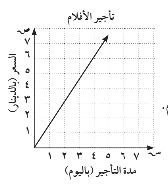
(١٨) كل المستقيمات الأفقية لها الميل نفسه. (أ) (ب)

(١٩) المستقيم الذي ميله يساوي ١ دائمًا يمر بنقطة الأصل. (أ) (ب)

(٢٠) يمثل الشكل المقابل رسم تأجير الأفلام نسبة إلى مدة التأجير.

(أ) أوجد ميل المستقيم. ماذا يمثل هذا العدد؟

(ب) أوجد المبلغ الذي سيدفعه الشخص لاستئجار فيلم مدة عشرة أيام.



(٢١) أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (−س، ص)، (٣س، −ص)

في التمرينين (٢٢-٢٣)، هل النقاط المعطاة تقع على استقامة واحدة؟

(٢٢) أ(٤، ٢)، ب(−٣، ٢)، جـ(٢، ٥).

(٢٣) أ(١، −٢)، ب(−١، −٥)، جـ(٥، ٤).

(٢٤) أوجد ميل مستقيم متعامد مع المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٩-٣[ب] معادلة الخط المستقيم

١ الأهداف

- يوجد معادلة الخط المستقيم متى علم ميله ونقطة عليه.
- يوجد معادلة الخط المستقيم متى علم نقطتين عليه.
- يتعرف الصورة العامة لمعادلة المستقيم.
- يتعرف العلاقة بين ميل المستقيم ومعدل التغير.
- يتعرف معادلة المستقيم الأفقي ومعادلة المستقيم الرأسي.
- يوجد معدل التغير لكميتين مختلفتين.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

معدل التغير - معادلة - توازٍ - تعامد - معادلة محور السينات - معادلة محور الصادات.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة - ورق رسم بياني - آلة حاسبة - حاسوب - جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

(أ) ما هو ميل الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين ﺃ(٢، ٥)، ب(-٣، -١)؟

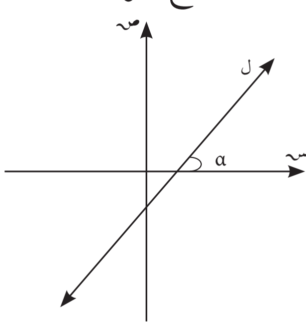
(ب) كيف تكون الخطوط المستقيمة متوازية؟

(ج) كيف تكون الخطوط المستقيمة متعامدة؟

(د) إذا كان الخط المستقيم ل يصنع زاوية α مع محور السينات، وكان ظاα = $\sqrt{٣}$.

فما قياس هذه الزاوية بالدرجات؟

وما هو ميل هذا المستقيم؟



٥ التدريس

يتطرق هذا الدرس إلى أشكال متعددة من معادلة الخط المستقيم، وذلك بحسب موقعة في المستوى الإحداثي. لقد رأينا في الدرس السابق أن بإمكان الخط المستقيم أن يكون موازيًا

٩-٣ (ب)

معادلة الخط المستقيم
Equation of a Straight Line

دعنا نفكر ونتناقش

تُمثَّل المعادلة: ص = م س + ن بيانيًا بخط مستقيم.

إذا كانت م = ٠ فإن معادلة المستقيم تصبح ص = ن وهي تمثل مستقيمًا موازيًا للمحور السيني (مستقيم أفقي).

إذا كانت ن = ٠ فإن المستقيم يمر بنقطة الأصل ومعادلته ص = م س.

سوف تتعلم

- كتابة معادلة الخط المستقيم
- الصورة العامة لمعادلة المستقيم
- إيجاد معدل التغيير

ملاحظة:

١ لكتابة معادلة خط مستقيم ليس رأسيًا نحن بحاجة إلى معرفة:

- الميل (م).
- نقطة من نقاط المستقيم ولتكن ($س_١$، $ص_١$).

تكون معادلة المستقيم: ص - $ص_١$ = م(س - $س_١$).

٢ معادلة المستقيم الرأسي هي س = ﺃ (وهذا المستقيم ليس له ميل)

مثال (١)

اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{٣}{٢}$ و يمر بالنقطة (٤، -١).

الحل:

ص - (-١) = $\frac{٣}{٢}$ (س - ٤) بالتعويض

ص + ١ = $\frac{٣}{٢}$ س - ٦

ص = $\frac{٣}{٢}$ س - ٧ بالتبسيط

∴ المعادلة: ص = $\frac{٣}{٢}$ س - ٧.

حاول أن تحل

١ اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{-٢}{٣}$ ويمر بالنقطة (-٦، ٥).

تذكر:

معادلة محور السينات هي: ص = ٠
معادلة محور الصادات هي: س = ٠
وبالتالي إحداثيات نقاط محور السينات (س، ٠) وإحداثيات نقاط محور الصادات (٠، ص).

معلومة رياضية:

معدل درجة الحرارة بالفهرنهايت يرتبط بمعدل الدرجة المئوية (سيليزية) بالعلاقة:
ف° = $\frac{٩}{٥}$ م° + ٣٢ ويمكن كتابتها:
ص = $\frac{٩}{٥}$ س + ٣٢ وهي معادلة خط مستقيم ميله = $\frac{٩}{٥}$
أو ص = ١,٨ س + ٣٢.

١٣٦

مثال (٢)

اكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين ﺃ(١، ٣)، ب(-٢، ٠).

الحل:

نوجد الميل

م = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٣ - ٠}{١ - (-٢)}$

م = $\frac{٣}{٣}$ = ١

المعادلة: ص - $ص_١$ = م(س - $س_١$)

ص - ٣ = ١ (س - ١) بالتعويض في المعادلة

ص = ٣ + س - ١ بالتبسيط

ص = س + ٢

وبالتالي معادلة المستقيم هي: ص - س - ٢ = ٠ أو س - ص + ٢ = ٠ وهي الصورة العامة لمعادلة المستقيم.

معلومة مفيدة:

الصورة العامة لمعادلة المستقيم هي:
ﺃس + ب ص + جـ = ٠
حيث ﺃ، ب لا يساويان الصفر معًا.

حاول أن تحل

٢ أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين جـ(٣، -١)، د(٢، -٢).

لأي مستقيمين غير رأسيين ومتوازيين الميل نفسه. أما إذا كان المستقيمان متعامدين وليس أحدهما رأسيًا، فناتج ضرب ميليهما يساوي -١. وبالتالي إذا علمنا ميل أحد المستقيمات فيمكننا إيجاد ميل المستقيمات المتوازية معه أو ميل المستقيمات المتعامدة معه، كذلك يمكننا إيجاد معادلته بمعرفة نقطة على هذا المستقيم.

مثال (٣)

إذا كان المستقيم ل: ص = ٢س + ١، فأوجد:

ﺃ معادلة المستقيم هـ الموازي للمستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٢، -٣).

ب معادلة المستقيم ف العمودي على المستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٤، -٣).

الحل:

ﺃ ∵ المستقيمان ل، هـ متوازيان، ميل المستقيم هـ = ميل المستقيم ل

∴ ميل المستقيم هـ = ٢

وبالتالي، معادلة المستقيم هـ تكتب على الشكل:

ص - $ص_١$ = م(س - $س_١$)

ص - (-٣) = ٢ (س - ٢) بالتعويض في المعادلة

ص = -٣ + ٢س - ٤ بالتبسيط

ص = ٢س - ٧

وبالتالي معادلة هـ: ص - ٢س + ٧ = ٠

أو ٢س - ص - ٧ = ٠ وهي الصورة العامة لمعادلة المستقيم.

١٣٧

لمحور السينات أو لمحور الصادات أو يمر بنقطة الأصل أو ليس أيًّا مما سبق.

لذا كان من الضروري إيجاد معادلة للخط المستقيم في كل حالة وردت. كما يتطرق هذا الدرس إلى وضعية الخطوط المستقيمة مع بعضها بعضًا إذا كانت متوازية أو متقاطعة أو متقاطعة متعامدة.

والأهم في كتابة معادلة الخط المستقيم هو إيجاد الميل وتحديد إحداثيات نقطة واحدة يمر بها كما في المثال (١).

إذا كان يمر بنقطتين نوجد الميل أولًا، ثم نستخدم واحدة من النقطتين كما في المثال (٢).

ركّز مع الطلاب على شرط توازي مستقيمين:

ميل المستقيم الأول = ميل المستقيم الثاني حيث الميل معرف

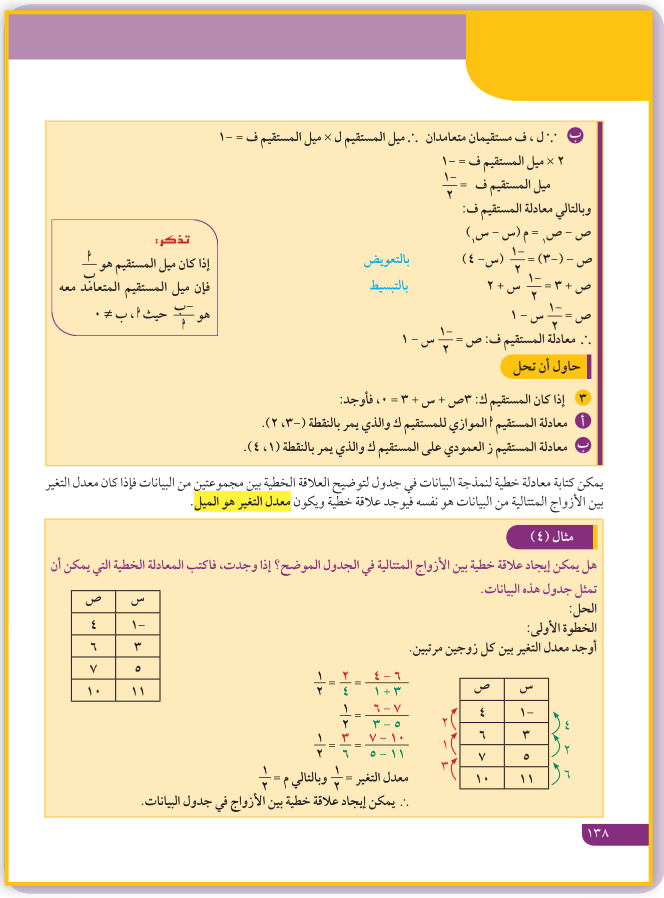
وعلى شروط تعامد مستقيمين:

ميل المستقيم الأول × ميل المستقيم الثاني = −١، مثال (٣).

وضّح للطلاب أن بيانات كثيرة من المسائل الحياتية يمكن نمذجتها بمعادلات خطية، نستطيع من خلالها وضع توقعات واتخاذ قرارات تساعد كثيرًا في حركة البيع والشراء والمعاملات في مجالات مختلفة.

ضرورة الاهتمام بالصورة العامة لمعادلة المستقيم حتى يستطيع الطالب توظيفها في البند التالي (البعد بين نقطة ومستقيم)

وهي على شكل: ٵس + ب ص + جـ = ٠


ب ∵ ل، ف مستقيمان متعامدان ∴ ميل المستقيم ل × ميل المستقيم ف = −١

٢ × ميل المستقيم ف = −١

ميل المستقيم ف = $\frac{-١}{٢}$

وبالتالي معادلة المستقيم ف:

ص − ص$_١$ = م (س − س$_١$)

ص − (−٣) = $\frac{-١}{٢}$ (س − ٤) بالتعويض

ص + ٣ = $\frac{-١}{٢}$ س + ٢ بالتبسيط

ص = $\frac{-١}{٢}$ س − ١

∴ معادلة المستقيم ف: ص = $\frac{-١}{٢}$ س − ١

تذكر: إذا كان ميل المستقيم هو $\frac{ٵ}{ب}$ فإن ميل المستقيم المتعامد معه هو $\frac{-ب}{ٵ}$ حيث ٵ، ب ≠ ٠

حاول أن تحل

٣ إذا كان المستقيم ك: ٣ص + س + ٣ = ٠، فأوجد:

أ معادلة المستقيم ٵ الموازي للمستقيم ك والذي يمر بالنقطة (−٣، ٢).

ب معادلة المستقيم ز العمودي على المستقيم ك والذي يمر بالنقطة (١، ٤).

يمكن كتابة معادلة خطية لنمذجة البيانات في جدول لتوضيح العلاقة الخطية بين مجموعتين من البيانات فإذا كان معدل التغير بين الأزواج المتتالية من البيانات هو نفسه فيوجد علاقة خطية ويكون **معدل التغير هو الميل**.

مثال (٤)

هل يمكن إيجاد علاقة خطية بين الأزواج المتتالية في الجدول الموضح؟ إذا وجدت، فاكتب المعادلة الخطية التي يمكن أن تمثل جدول هذه البيانات.

س	ص
−١	٤
٣	٦
٥	٧
١١	١٠

الحل:

الخطوة الأولى:

أوجد معدل التغير بين كل زوجين مرتبين.

س	ص
−١	٤
٣	٦
٥	٧
١١	١٠

٤، ٢، ٦ — ٢، ١، ٣

$\frac{٦ - ٤}{٣ + ١} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

$\frac{٧ - ٦}{٥ - ٣} = \frac{١}{٢}$

$\frac{١٠ - ٧}{١١ - ٥} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

معدل التغير = $\frac{١}{٢}$ وبالتالي م = $\frac{١}{٢}$

∴ يمكن إيجاد علاقة خطية بين الأزواج في جدول البيانات.

١٣٨


الخطوة الثانية:

استخدم صيغة الميل والنقطة لكتابة المعادلة:

ص − ص$_١$ = م (س − س$_١$)

ص − ٧ = $\frac{١}{٢}$ (س − ٥) عوض (س$_١$، ص$_١$) بـ (٥، ٧) وم بـ $\frac{١}{٢}$.

ص = $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{٩}{٢}$

حاول أن تحل

٤ هل يمكن إيجاد علاقة خطية بين الأزواج المتتالية في جدول البيانات المرسوم؟

في حال وجود تلك العلاقة، اكتب المعادلة الخطية التي يمكن أن تمثل جدول هذه البيانات.

س	ص
−١١	−٧
−١	−٣
٤	−١
١٩	٥

مثال (٥) إثرائي

يبين الجدول التالي النسبة المئوية ص لتناقص الطاقة الكهربائية بدلالة س عدد ساعات عند استخدام البطارية في الحاسوب المحمول.

عدد ساعات استهلاك الطاقة الكهربائية (س)	١	٢	٣
النسبة المئوية للطاقة المتبقية (ص)	٪٨٠	٪٦٠	٪٤٠

أ اكتب معادلة خطية يمكن أن تنمذج العلاقة بين عدد الساعات والنسبة المئوية للطاقة المتبقية.

ب بعد كم ساعة تصبح الطاقة المتبقية في البطارية ٥٪؟

الحل:

أ معدل التغير = $\frac{٠,٦ - ٠,٨}{٢ - ١}$ = −٠,٢

$\frac{٠,٤ - ٠,٦}{٣ - ٢}$ = −٠,٢ فيكون معدل التغير ثابت

نستخدم المعادلة:

ص − ص$_١$ = م (س − س$_١$) معادلة المستقيم

ص − ٠,٦ = −٠,٢ (س − ٢) بالتعويض

ص = −٠,٢ س + ١ بالتبسيط

ب المعادلة: ص = −٠,٢ س + ١

ص = ٠,٠٥ بالتعويض نكتب ٠,٠٥ = −٠,٢ س + ١

٠,٢ س = ١ − ٠,٠٥

١٣٩

٦ الربط

يوفر مثال (٥) فرصة كبيرة للربط بين المسائل الحياتية ونمذجتها بمعادلات خطية لإيجاد توقعات واتخاذ قرارات مناسبة.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام قاعدة المسافة بين نقطتين فيكتبوا $\sqrt{أ^٢ + ب^٢} = أ + ب$. أعط أمثلة تبيّن خطأ هذه المعادلة. مثال $\sqrt{٣^٢ + ٤^٢} \neq ٣ + ٤ = ٧$. أشر إلى أن هذه المعادلة صحيحة فقط في حالة الضرب:

$\sqrt{أ^٢ \times ب^٢} = \sqrt{أ^٢} \times \sqrt{ب^٢}$:

$= أ \times ب$ شرط $أ \times ب > ٠$

٨ التقييم

راقب عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لأنها تعطيك فكرة واضحة عن تمكنهم مما ورد في الدرس.

اختبار سريع

١ اكتب معادلة المستقيم ل الذي يمر بالنقطتين: أ(٣، ٥)، ب(-١، ٤). $ص = \frac{١}{٤} س + \frac{١٧}{٤}$

٢ أوجد معادلة المستقيم هـ الموازي للمستقيم ل والمار بنقطة الأصل. $ص = \frac{١}{٤} س$

٣ في الجدول ، هل العلاقة يمكن أن تكون خطية؟ في حال الإيجاب اكتب المعادلة الخطية.

س	ص
٢	٦
٣	٨,٥
٥	١٣,٥
٦	١٦

نعم، $ص = \frac{٥}{٢} س + ١$

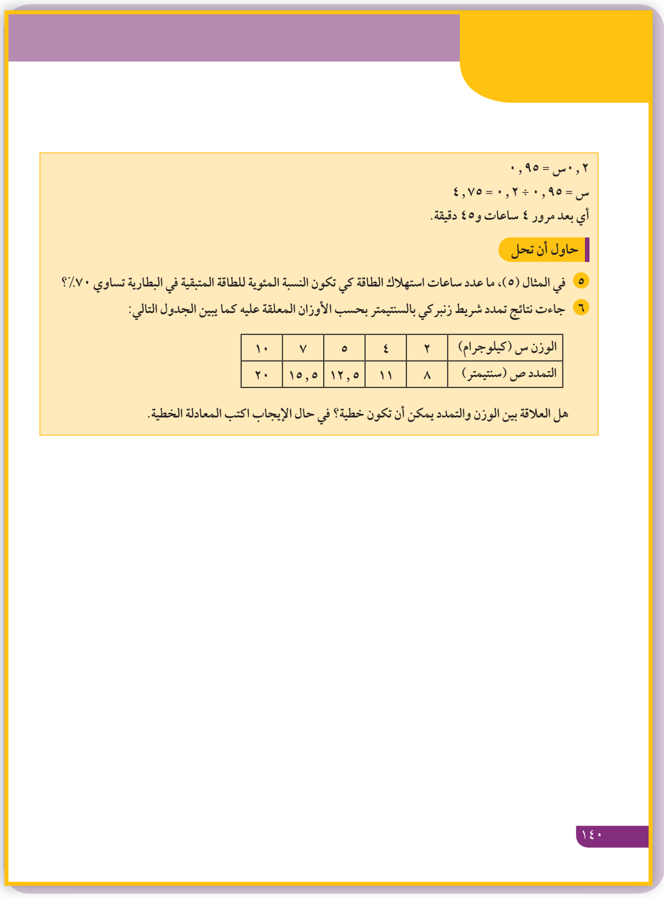
٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ باستخدام: $ص - ص_١ = م (س - س_١)$

$ص - ٥ = -\frac{٢}{٣} (س + ٦)$

ومنه: $ص = -\frac{٢}{٣} س + ١$



$٠,٢ س = ٠,٩٥$

$س = ٠,٩٥ \div ٠,٢ = ٤,٧٥$

أي بعد مرور ٤ ساعات و٤٥ دقيقة.

حاول أن تحل

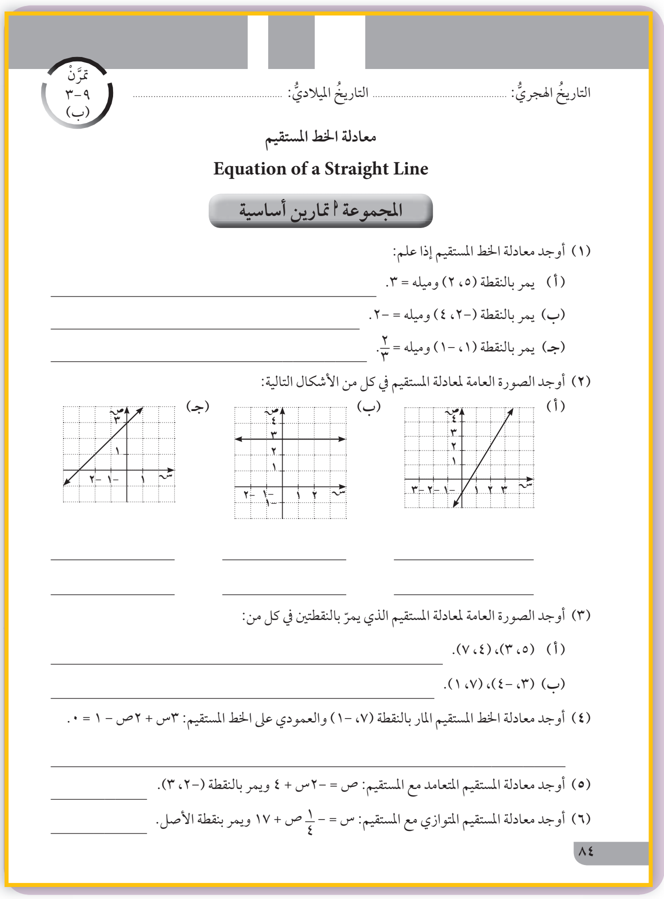
٥ في المثال (٥)، ما عدد ساعات استهلاك الطاقة كي تكون النسبة المئوية للطاقة المتبقية في البطارية تساوي ٧٠٪؟

٦ جاءت نتائج تمدد شريط زنبركي بالسنتيمتر بحسب الأوزان المعلقة عليه كما يبين الجدول التالي:

الوزن س (كيلوجرام)	٢	٤	٥	٧	١٠
التمدد ص (سنتيمتر)	٨	١١	١٢,٥	١٥,٥	٢٠

هل العلاقة بين الوزن والتمدد يمكن أن تكون خطية؟ في حال الإيجاب اكتب المعادلة الخطية.

١٤٠



تمرَّنْ ٩-٣ (ب)

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

معادلة الخط المستقيم

Equation of a Straight Line

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أوجد معادلة الخط المستقيم إذا علم:

(أ) يمر بالنقطة (٥، ٢) وميله = ٣.

(ب) يمر بالنقطة (-٢، ٤) وميله = -٢.

(جـ) يمر بالنقطة (١، -١) وميله = $\frac{٢}{٣}$.

(٢) أوجد الصورة العامة لمعادلة المستقيم في كل من الأشكال التالية:

(أ) (ب) (جـ)

(٣) أوجد الصورة العامة لمعادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين في كل من:

(أ) (٥، ٣)، (٤، ٧).

(ب) (٣، -٤)، (٧، ١).

(٤) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٧، -١) والعمودي على الخط المستقيم: ٣س + ٢ص - ١ = ٠.

(٥) أوجد معادلة المستقيم المتعامد مع المستقيم: ص = -٢س + ٤ ويمر بالنقطة (-٢، ٣).

(٦) أوجد معادلة المستقيم المتوازي مع المستقيم: $س = -\frac{١}{٤} ص + ١٧$ ويمر بنقطة الأصل.

٨٤

٢ الميل = $\frac{-٢ - (-١)}{٢ - ٣}$ = +١، $ص - ص_١ = م\,(س - س_١)$

نأخذ إحدى النقاط فيكون $س - ص - ٤ = ٠$

٣ (أ) ميل المستقيم ك = $-\frac{١}{٣}$

لذا يكون ميل المستقيم ﻝ = $-\frac{١}{٣}$

نأخذ المعادلة: $ص - ص_١ = م\,(س - س_١)$

$ص - ٢ = -\frac{١}{٣}\,(س + ٣)$

ومنه $ص = -\frac{١}{٣}\,س + ١$

(ب) ميل المستقيم ز العمودي على ك يساوي ٣

نأخذ المعادلة: $ص - ص_١ = م\,(س - س_١)$

$ص - ٤ = ٣\,(س - ١)$

ومنه $ص = ٣س + ١$

٤ $\frac{-٣ - (-٧)}{-١ - (-١١)} = \frac{٤}{١٠} = \frac{٢}{٥}$

$\frac{-١ - (-٣)}{٤ - (-١)} = \frac{٢}{٥}$

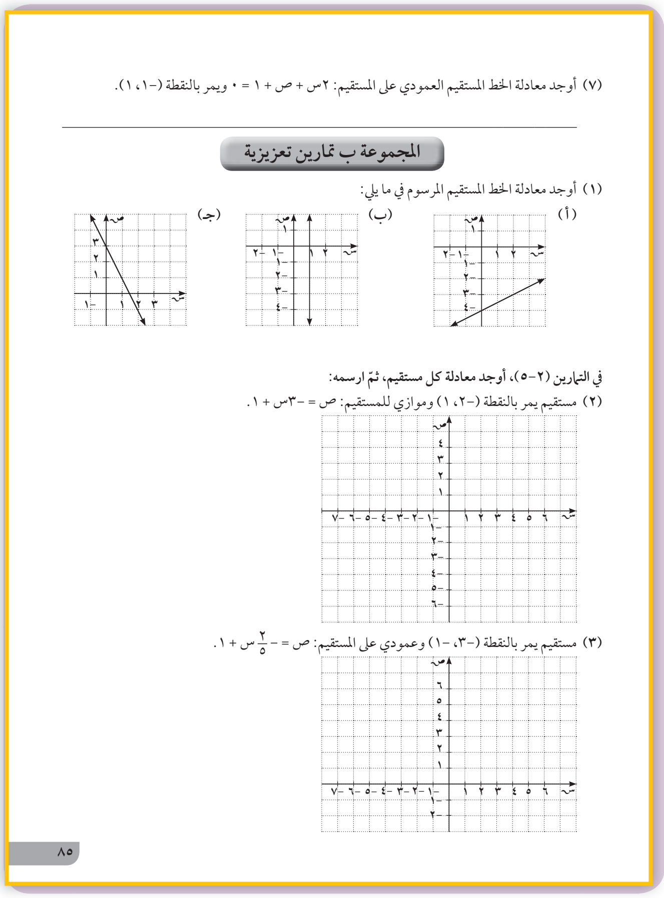
$\frac{٥ - (-١)}{١٩ - ٤} = \frac{٦}{١٥} = \frac{٢}{٥}$ من الممكن أن توجد علاقة خطية

المعادلة: $ص = \frac{٢}{٥}\,س - \frac{١٣}{٥}$.

٥ ساعة ونصف

٦ نعم من الممكن أن تكون العلاقة خطية

$ص = \frac{٣}{٢}\,س + ٥$


(٧) أوجد معادلة الخط المستقيم العمودي على المستقيم: ٢س + ص + ١ = ٠ ويمر بالنقطة (−١، ١).

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) أوجد معادلة الخط المستقيم المرسوم في ما يلي:

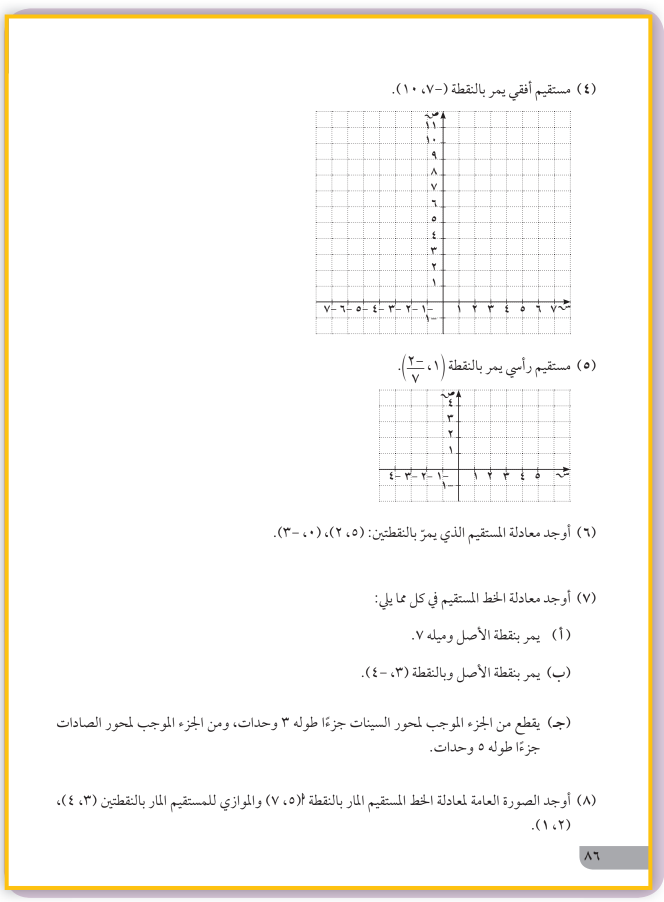
(أ) (ب) (جـ)

في التمارين (٢−٥)، أوجد معادلة كل مستقيم، ثمّ ارسمه:

(٢) مستقيم يمر بالنقطة (−٢، ١) وموازي للمستقيم: ص = −٣س + ١.

(٣) مستقيم يمر بالنقطة (−٣، −١) وعمودي على المستقيم: ص = $-\frac{٢}{٥}$س + ١.

٨٥


(٤) مستقيم أفقي يمر بالنقطة (−٧، ١٠).

(٥) مستقيم رأسي يمر بالنقطة $\left(١، \frac{-٢}{٧}\right)$.

(٦) أوجد معادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين: (٥، ٢)، (٠، −٣).

(٧) أوجد معادلة الخط المستقيم في كل مما يلي:

(أ) يمر بنقطة الأصل وميله ٧.

(ب) يمر بنقطة الأصل وبالنقطة (٣، −٤).

(جـ) يقطع من الجزء الموجب لمحور السينات جزءًا طوله ٣ وحدات، ومن الجزء الموجب لمحور الصادات جزءًا طوله ٥ وحدات.

(٨) أوجد الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة ﺃ(٥، ٧) والموازي للمستقيم المار بالنقطتين (٣، ٤)، (٢، ١).

٨٦

٩ـ٤ البعد بين نقطة ومستقيم

١ الأهداف

• إيجاد البعد بين نقطة ومستقيم.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

البعد بين نقطة ومستقيم.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة – آلة حاسبة – مثلث قائم الزاوية خشبي أو بلاستيكي – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

ارسم على السبورة مستقيمين (غير متوازيين) ونقطة أ لا تنتمي لأي منهما.

اسأل الطلاب...

أي من المستقيمين هو أقرب إلى النقطة أ؟ وكيف يمكنكم معرفة ذلك؟ أشر إلى إمكانية استخدام المثلث قائم الزاوية الخشبي لمعرفة ذلك. ضع على أحد المستقيمين عدة نقاط. اسألهم: أي من هذه النقاط هو الأقرب إلى أ؟

٥ التدريس

راجع مع الطلاب كيفية التحقق من انتماء نقطة إلى مستقيم. أعطهم أمثلة على ذلك. استفد من المناسبة لتذكير الطلاب بنقطتي التقاطع بين المستقيم وكل من محوري الإحداثيات.

أشر إلى أن البعد بين نقطة ومستقيم هو أصغر مسافة بين النقطة وأي نقطة تنتمي إلى المستقيم.

ركّز على الصيغة $\text{ف} = \dfrac{|\text{أس}_{١} + \text{ب ص}_{١} + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}}$.

أشر إلى ضرورة استخدام القيمة المطلقة لأن البعد هو عدد غير سالب. أخبر الطلاب أن قاعدة البعد بين نقطة ومستقيم مختلفة تمامًا عن قاعدة المسافة بين نقطتين.

٩–٤

البعد بين نقطة ومستقيم

Distance Between a Point and a Straight Line

دعنا نفكر ونتناقش

رأينا سابقًا المسافة بين النقطتين (س١، ص١)، (س٢، ص٢) والقاعدة التي توجد هذه المسافة ل على الشكل التالي:

$\text{ل} = \sqrt{(\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١})^{٢}}$.

ومعادلة المستقيم هي على الصورة ص = م س + ن، حيث م هي ميل المستقيم.

في هذا الدرس سوف نوجد البعد بين نقطة ومستقيم حيث هو طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة على المستقيم، ولكي نجد هذا البعد

نحن بحاجة إلى كتابة معادلة المستقيم على الصورة:

أ س + ب ص + جـ = ٠، حيث أ، ب لا يساويان الصفر معًا.

سوف تتعلم

• إيجاد البعد بين نقطة ومستقيم

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة ل: أ س + ب ص + جـ = ٠، فإن البعد ف بين النقطة د (س١، ص١) والمستقيم ل تعطى بالصيغة: $\text{ف} = \dfrac{|\text{أس}_{١} + \text{ب ص}_{١} + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}}$.

إذا كانت النقطة د تنتمي إلى المستقيم ل فالبعد بينهما يساوي صفرًا.

مثال (١)

أثبت أن النقطة هـ(٢، ١) لا تنتمي إلى المستقيم ل الذي معادلته: ص = ٣ س – ٤، ثمّ أوجد البعد بين المستقيم ل والنقطة هـ.

الحل:

بالتعويض عن (س، ص) بـ (٢، ١) في المعادلة: ص = ٣س – ٤

نحصل على ١ ≟ ٣ × ٢ – ٤

١ ≠ ٢ ∴ هـ لا تنتمي إلى المستقيم ل.

لإيجاد البعد بين هـ، المستقيم ل يجب كتابة معادلة المستقيم ل على الصورة:

أ س + ب ص + جـ = ٠

∴ ل: ٣س – ص – ٤ = ٠

أ = ٣ ب = –١ جـ = –٤

س١ = ٢ ص١ = ١

$\text{البعد ف} = \dfrac{|\text{أس}_{١} + \text{ب ص}_{١} + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}}$

$= \dfrac{|٣ \times ٢ - ١ - ٤|}{\sqrt{٣^{٢} + (-١)^{٢}}} = \dfrac{|٦ - ٥|}{\sqrt{١٠}} = \dfrac{١}{\sqrt{١٠}}$

ملاحظة: بعد نقطة عن مستقيم هو طول القطعة العمودية المرسومة من النقطة على الخط المستقيم.

أ د هي أقصر مسافة بين النقطة أ والمستقيم ل.

١٤١

∴ البعد يساوي $\dfrac{\sqrt{١٠}}{١٠}$ وحدة طول.

حاول أن تحل

١ أوجد البعد بين المستقيم ل: ص = –س + ٣ والنقطة د(٢، ٥).

مثال (٢)

أوجد البعد من النقطة د(–٤، –٣) إلى المستقيم ل: ٢ص = ٣ س – ٧.

الحل:

نكتب أولًا معادلة المستقيم ل على الصورة: أ س + ب ص + جـ = ٠

ل: ٣س – ٢ص – ٧ = ٠

أ = ٣ ب = –٢ جـ = –٧

س١ = –٤ ص١ = –٣

$\text{البعد ف} = \dfrac{|\text{أس}_{١} + \text{ب ص}_{١} + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}}$

$\text{ف} = \dfrac{|٣(-٤) - ٢(-٣) - ٧|}{\sqrt{(٣)^{٢} + (-٢)^{٢}}} = \dfrac{|-١٣|}{\sqrt{٩ + ٤}} = \dfrac{١٣}{\sqrt{١٣}} = \sqrt{١٣}$.

أي أن البعد من النقطة د إلى المستقيم ل يساوي $\sqrt{١٣}$ وحدة طول.

ملاحظة: إذا كانت المسافة بين نقطة ومستقيم تساوي صفرًا تكون النقطة تنتمي للمستقيم.

حاول أن تحل

٢ أوجد البعد من النقطة ط(٣، –٤) إلى المستقيم ل: $\text{ص} = -\dfrac{٤}{٣} + \dfrac{\text{س}}{٦}$.

١٤٢

أعط الطلاب المعادلة: ٢س − ص + ٤ = ٠ والنقطتين ﺃ(١، ٥)، ب(−٣، ٢) واطلب إليهم العمل أزواجًا لإيجاد البعد بين كل من النقطتين ﺃ، ب والمستقيم. تحقق من صحة التعويض عن س، ص في المعادلة.

٦ الربط

لا يوجد.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام صيغة البعد بين نقطة ومستقيم باعتماد الصيغة ص = ﺃس + ب لمعادلة المستقيم.
أشر إلى أن صيغة البعد تعتمد على المعادلة:
ﺃس + ب ص + جـ = ٠. وأعطهم أمثلة تبين كيفية الانتقال من ص = ﺃس + ب إلى ﺃس + ب ص + جـ = ٠

٨ التقييم

راقب عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لأنها تعطيك فكرة واضحة عن تمكنهم من الصيغة المطلوبة والتعويض الصحيح لقيم س، ص.

اختبار سريع

١ أثبت أن النقطة ك (١، ٢) لا تنتمي إلى المستقيم ل الذي معادلته ص = −٢س + ١.

٢ = −٢(١) + ١ ؛ ٢ ≠ −١.

٢ أوجد البعد بين النقطة ك والمستقيم ل.

$\frac{٣}{\sqrt{٥}}$ وحدة طول

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ البعد = ٢ $\sqrt{٢}$ وحدة طول.

٢ يفضل وضع المعادلة على الصورة العامة بعد ضرب طرفي المعادلة في ٦ فتصبح −س + ٦ص + ٨ = ٠

ويكون البعد = $\frac{١٩}{\sqrt{٣٧}}$ وحدة طول.

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٩-٤

البعد بين نقطة ومستقيم

Distance Between a Point and a Straight Line

المجموعة ﺃ تمارين أساسية

في التمارين (١−٤)، معادلة المستقيم ل: ٢س − ص + ٣ = ٠

بيّن ما إذا كانت النقطة تنتمي إلى المستقيم ل أم لا.

(١) م(−٢، −١) ____ (٢) ب(٠، −٢) ____

(٣) جـ(٤، ٠) ____ (٤) د(٢، −١) ____

(٥) أوجد البعد بين النقطة جـ(٢، ١) والمستقيم: ٣س − ص − ١ = ٠

(٦) أوجد البعد بين نقطة الأصل والمستقيم: ٢ص = ٣س + ٤

(٧) أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و(٢، −١) إذا كان المستقيم: ٣س − ٤ص + ٧ = ٠ مماس لها.

(٨) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢، −٣) على المستقيم: −٢س + ص − ٤ = ٠

(٩) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (−٤، ٧) على المستقيم: ص = −٥س + ١

(١٠) أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على المستقيم المار بالنقطتين (٧، ٣)، (−٥، ١)

٨٧

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١−٣)، معادلة المستقيم ل: ٣ص − س + ١ = ٠

بيّن ما إذا كانت النقطة تنتمي إلى المستقيم ل أم لا.

(١) (٣، ٣)

(٢) (٢، ٠)

(٣) (٤، ١)

(٤) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٤، ٥) على المستقيم: ٣س + ٤ص = ٠

(٥) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٨، ٠) على المستقيم: ٥س + ١٢ص = ٠

(٦) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢، ٧) على المستقيم المار بالنقطتين: (٣، ١)، (٥، ٣).

(٧) أوجد بعد النقطة (٤، ٤) عن المستقيم المار بنقطة الأصل وميله $\frac{٣}{٤}$.

(٨) أوجد أقصر مسافة من النقطة (٤، ٤) إلى المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٠)، (٠، ٢).

٨٨

٩_٥ معادلة الدائرة

١ الأهداف

- يكتب معادلة الدائرة بالصورة القياسية.
- يكتب معادلة الدائرة بالصورة العامة.
- يعين المركز وطول نصف القطر من الصورة العامة لمعادلة الدائرة.
- يكتب معادلة مماس على الدائرة.
- يوجد العلاقة بين دائرتين في المستوي.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

معادلة دائرة بالصورة القياسية – معادلة دائرة بالصورة العامة – معادلة مماس على الدائرة – شروط تقاطع دائرتين في المستوي – تماس الدائرتين – تداخل الدائرتين – تباعد دائرتين.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة – فرجار – ورق رسم بياني – آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

(أ) ما هي الدائرة؟

(ب) ما قياس الزاوية بين المماس ونصف القطر عن نقطة تقاطعهما على الدائرة؟

(جـ) ما قاعدة المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي؟

(د) ما قاعدة البعد بين نقطة ومستقيم في المستوى الإحداثي؟

(هـ) اكتب المعادلتين: س^{٢} − ١٠س + ٢٥ = ٠ ،

٤س^{٢} + ١٢س + ٩ = ٠ على صورة مربعين كاملين.

٥ التدريس

تعتبر معادلة الدائرة بالصورة القياسية:

(س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢} ، بسيطة إذ لا يحتاج الطالب سوى إلى إحداثيات المركز (د، هـ) وطول نصف قطر الدائرة

٩_٥

معادلة الدائرة
Equation of a Circle

دعنا نفكر ونتناقش

إذا كان لديك قطعة من الحبل طولها ٦ أمتار، وأردت أن ترسم دائرة في فناء المدرسة، فما الذي تفعله؟ فكر مع زملائك.

هذا سيقودنا إلى تعريف الدائرة

الدائرة هي مجموعة النقاط في المستوي التي تكون على بعد ثابت من نقطة معلومة، والنقطة المعلومة تسمى مركز الدائرة.

والبعد الثابت هو طول نصف قطر الدائرة ويرمز له بالرمز نق.

سوف تتعلم
- معادلة الدائرة
- الصورة العامة لمعادلة الدائرة
- إيجاد مركز الدائرة وطول نصف قطرها
- معادلة مماس الدائرة
- العلاقة بين دائرتين في المستوي

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة:

لأي دائرة مركزها م(د، هـ) وطول نصف قطرها نق فإن المسافة بين مركز الدائرة وأي نقطة أ(س، ص) على الدائرة يمكن إيجادها باستخدام قانون المسافة بين نقطتين.

المسافة = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

نق = $\sqrt{(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢}$

نق^{٢} = (س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢}

وعلى ذلك، تكون معادلة الدائرة التي مركزها (د، هـ) وطول نصف قطرها نق على الصورة:

(س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}

وتسمّى هذه الصورة القياسية لمعادلة الدائرة بمعلومية المركز م(د، هـ) وطول نصف القطر نق.

مثال (١)

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣، −٢) وطول نصف قطرها ٧ وحدات.

الحل:

معادلة الدائرة على الصورة القياسية: (س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢} ، حيث (د، هـ) مركزها

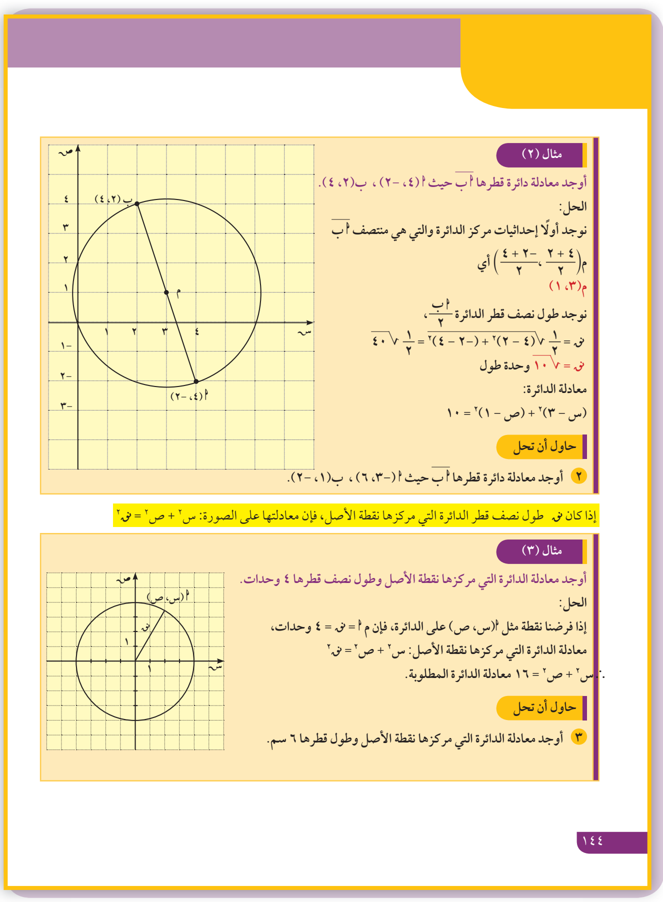
(س − ٣)^{٢} + [ص − (−٢)]^{٢} = ٤٩ بالتعويض عن (د، هـ) بـ (٣، −٢)

(س − ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٤٩

حاول أن تحل

١ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٥، −٣) وطول نصف قطرها ٥ وحدات.

١٤٣



مثال (٢)

أوجد معادلة دائرة قطرها $\overline{أب}$ حيث أ(٤، −٢) ، ب(٢، ٤).

الحل:

نوجد أولًا إحداثيات مركز الدائرة والتي هي منتصف $\overline{أب}$

م$\left(\frac{٤ + ٢}{٢}، \frac{-٢ + ٤}{٢}\right)$ أي

م(٣، ١)

نوجد طول نصف قطر الدائرة $\frac{أب}{٢}$،

نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{(٤ - ٢)^٢ + (-٢ - ٤)^٢} = \frac{١}{٢}\sqrt{٤٠}$

نق = $\sqrt{١٠}$ وحدة طول

معادلة الدائرة:

(س − ٣)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ١٠

حاول أن تحل

٢ أوجد معادلة دائرة قطرها $\overline{أب}$ حيث أ(−٣، ٦) ، ب(١، −٢).

إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة التي مركزها نقطة الأصل، فإن معادلتها على الصورة: س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}

مثال (٣)

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٤ وحدات.

الحل:

إذا فرضنا نقطة مثل أ(س، ص) على الدائرة، فإن م أ = نق = ٤ وحدات،

معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل: س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}

∴ س^{٢} + ص^{٢} = ١٦ معادلة الدائرة المطلوبة.

حاول أن تحل

٣ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول قطرها ٦ سم.

١٤٤

نحو، ثم إلى تطبيق قاعدة المسافة بين نقطتين، واحدة (س، ص) متحركة أينما كانت على الدائرة ومركز الدائرة الذي هو نقطة ثابتة كما في المثالين (١) و(٢). وبالعكس، إذا كان لدينا الصورة القياسية لمعادلة الدائرة. كما ويمكن أيضًا ببساطة إيجاد إحداثيات مركزها وطول نصف قطرها كما في المثال (٤).

شدّد على الصورة العامة لمعادلة الدائرة حيث يجب الانتباه إلى تحويل كل من التعبيرين س، ص إلى مربع كامل للحصول على الصورة القياسية. قدم أمثلة متنوعة ومتعددة لربط الصورة العامة بالصورة القياسية.

اشرح لهم أن س^{٢} + ل س هو التعبير الذي سيأخذ الشكل (س − د)^{٢}، وأن ص^{٢} + ك ص هو التعبير الذي سيأخذ الشكل (ص − هـ)^{٢}. أخبرهم أنهم قد يواجهون مشاكل في الصورة، بحيث إنهم لن يحصلوا على معادلة دائرة إذا كانت القيمة بعد المساواة سالبة عند تحويلها إلى الصورة القياسية.

رسّخ لدى الطلاب فكرة أن معاملي س^{٢}، ص^{٢} يجب أن تكون متساوية ، كما أنه لا يجب أن يكون في الصورة العامة حدًّا يشمل س × ص.

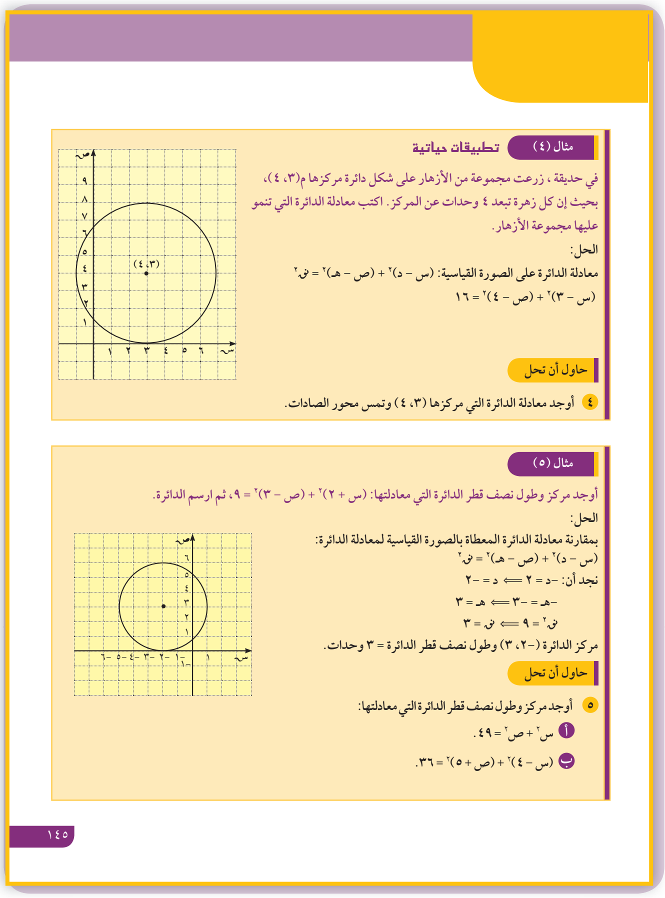
اشرح لهم أن معادلة عامة على شكل: م س^{٢} + م ص^{٢} + ل س + ك ص + ب = ٠ (م ≠ ٠)، يمكن أن تكون معادلة دائرة، وذلك بالقسمة على م فنحصل على المعادلة:

$$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + \frac{\text{ل}}{\text{م}}\text{س} + \frac{\text{ك}}{\text{م}}\text{ص} + \frac{\text{ب}}{\text{م}} = ٠.$$

تعامل مع الطلاب بروية في المثال (٥)، لأنه يحقق شروط كثيرة من المعادلة بالصورة العامة وصولاً إلى المعادلة بالصورة القياسية.

في المثال (٨)، أكد للطلاب أن معادلة المماس للدائرة سوف تتناول في هذا الدرس حالة واحدة، وهي عندما تكون نقطة على الدائرة، نرسم من هذه النقطة المماس، وهو سوف يكون عموديًّا على نصف القطر المار بهذه النقطة، لذا يمكن تطبيق شروط المستقيمين المتعامدين.

لدراسة تقاطع دائرتين في المستوى الإحداثي، أوجد المسافة بين مركزي الدائرتين باستخدام قاعدة المسافة بين نقطتين، ثم قارن هذه المسافة بمجموع طولي نصف القطر للدائرتين، كما هو موضح في الجدول من كتاب الطالب ص ١٥١.



مثال (٤) **تطبيقات حياتية**

في حديقة ، زرعت مجموعة من الأزهار على شكل دائرة مركزها م(٣، ٤)، بحيث إن كل زهرة تبعد ٤ وحدات عن المركز. اكتب معادلة الدائرة التي تنمو عليها مجموعة الأزهار.

الحل:

معادلة الدائرة على الصورة القياسية: (س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}

(س − ٣)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ١٦

حاول أن تحل

٤ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣، ٤) وتمس محور الصادات.

مثال (٥)

أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها: (س + ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٩، ثم ارسم الدائرة.

الحل:

بمقارنة معادلة الدائرة المعطاة بالصورة القياسية لمعادلة الدائرة:

(س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}

نجد أن: −د = ٢ ⟸ د = −٢

−هـ = −٣ ⟸ هـ = ٣

نق^{٢} = ٩ ⟸ نق = ٣

مركز الدائرة (−٢، ٣) وطول نصف قطر الدائرة = ٣ وحدات.

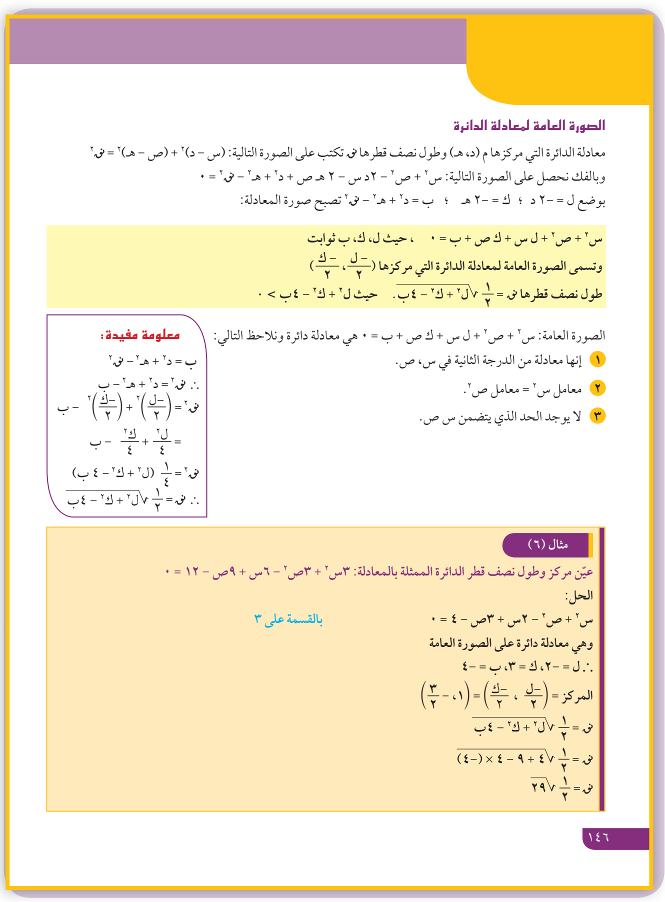
حاول أن تحل

٥ أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:

أ س^{٢} + ص^{٢} = ٤٩.

ب (س − ٤)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٣٦.

١٤٥



الصورة العامة لمعادلة الدائرة

معادلة الدائرة التي مركزها م (د، هـ) وطول نصف قطرها نق تكتب على الصورة التالية: (س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}

وبالفك نحصل على الصورة التالية: س^{٢} + ص^{٢} − ٢د س − ٢ هـ ص + د^{٢} + هـ^{٢} − نق^{٢} = ٠

بوضع ل = −٢ د ؛ ك = −٢ هـ ؛ ب = د^{٢} + هـ^{٢} − نق^{٢} تصبح صورة المعادلة:

س^{٢} + ص^{٢} + ل س + ك ص + ب = ٠ ، حيث ل، ك، ب ثوابت

وتسمى الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها $\left(\frac{-\text{ل}}{٢}، \frac{-\text{ك}}{٢}\right)$

طول نصف قطرها نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - ٤\text{ب}}$. حيث ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب > ٠

الصورة العامة: س^{٢} + ص^{٢} + ل س + ك ص + ب = ٠ هي معادلة دائرة ونلاحظ التالي:

١ إنها معادلة من الدرجة الثانية في س، ص.

٢ معامل س^{٢} = معامل ص^{٢}.

٣ لا يوجد الحد الذي يتضمن س ص.

معلومة مفيدة:

ب = د^{٢} + هـ^{٢} − نق^{٢}

∴ نق^{٢} = د^{٢} + هـ^{٢} − ب

نق^{٢} = $\left(\frac{-\text{ل}}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{-\text{ك}}{٢}\right)^{٢}$ − ب

= $\frac{\text{ل}^{٢}}{٤} + \frac{\text{ك}^{٢}}{٤}$ − ب

نق^{٢} = $\frac{١}{٤}$ (ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ ب)

∴ نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - ٤\text{ب}}$

مثال (٦)

عيّن مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: ٣س^{٢} + ٣ص^{٢} − ٦س + ٩ص − ١٢ = ٠

الحل:

س^{٢} + ص^{٢} − ٢س + ٣ص − ٤ = ٠ بالقسمة على ٣

وهي معادلة دائرة على الصورة العامة

∴ ل = −٢، ك = ٣، ب = −٤

المركز = $\left(\frac{-\text{ل}}{٢}، \frac{-\text{ك}}{٢}\right) = \left(١، -\frac{٣}{٢}\right)$

نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - ٤\text{ب}}$

نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{٤ + ٩ - ٤ \times (-٤)}$

نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{٢٩}$

١٤٦

الدائرة مركزها $\left(١، -\frac{٣}{٢}\right)$ وطول نصف قطرها نق $= \frac{١}{٢}\sqrt{٢٩}$ وحدة طول.

حاول أن تحل

٦ عيّن مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: ٢س^{٢} + ٢ص^{٢} − ١٢س − ٤ص − ٣٠ = ٠

ملاحظة

عندما يكون لدينا معادلة على الصورة العامة التالية: س^{٢} + ص^{٢} + ل س + ك ص + ب = ٠
يمكننا معرفة ما تمثله بيانيًّا هذه المعادلة بمجرد مقارنة
ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب مع الصفر.

١ عندما ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب < ٠ فإن المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.
٢ عندما ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب = ٠ فإن المعادلة تمثل نقطة.
٣ عندما ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب > ٠ فإن المعادلة تمثل دائرة.

مثال (٧)

هل كل معادلة مما يلي تمثل معادلة دائرة؟ فسّر.

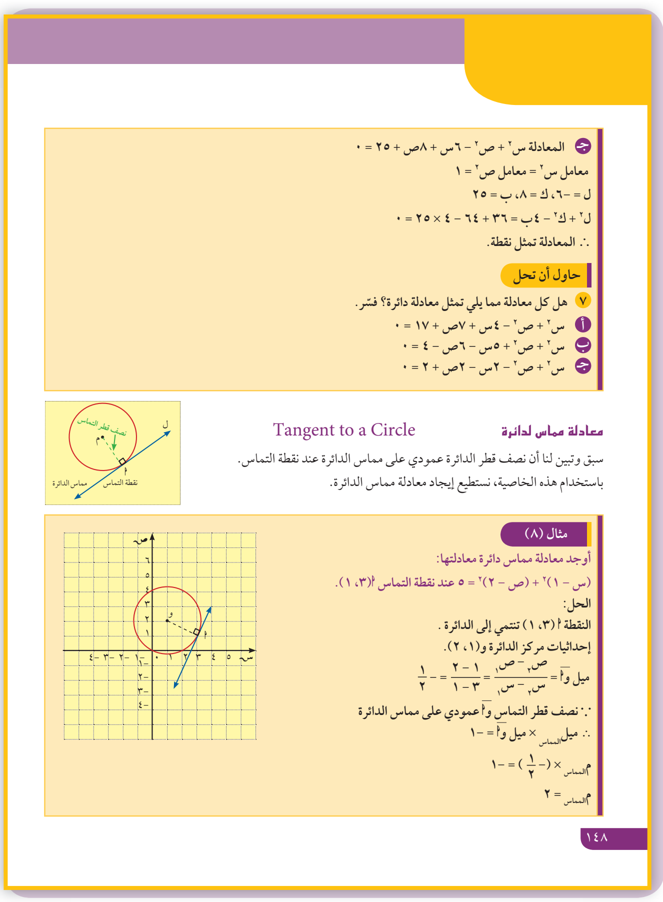
أ س^{٢} + ص^{٢} − ٣س + ٥ص − $\frac{١٥}{٤}$ = ٠
ب س^{٢} + ص^{٢} + ٤س − ٧ص + ٢٠ = ٠
جـ س^{٢} + ص^{٢} − ٦س + ٨ص + ٢٥ = ٠

الحل:

أ المعادلة: س^{٢} + ص^{٢} − ٣س + ٥ص − $\frac{١٥}{٤}$ = ٠
معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١
ل = −٣، ك = ٥، ب = $\frac{-١٥}{٤}$
ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب = ٩ + ٢٥ −٤ $\left(\frac{-١٥}{٤}\right)$ = ٩ + ٢٥ + ١٥ = ٤٩ > ٠
٤٩ > ٠ ∴ المعادلة تمثل معادلة دائرة.

ب المعادلة: س^{٢} + ص^{٢} + ٤س − ٧ص + ٢٠ = ٠
معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١
ل = ٤، ك = −٧، ب = ٢٠
ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب = ١٦ + ٤٩ − ٤ × ٢٠ = −١٥ < ٠
∴ المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.

١٤٧



جـ المعادلة س^{٢} + ص^{٢} − ٦س + ٨ص + ٢٥ = ٠
معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١
ل = −٦، ك = ٨، ب = ٢٥
ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب = ٣٦ + ٦٤ − ٤ × ٢٥ = ٠
∴ المعادلة تمثل نقطة.

حاول أن تحل

٧ هل كل معادلة مما يلي تمثل معادلة دائرة؟ فسّر.
أ س^{٢} + ص^{٢} − ٤س + ٧ص + ١٧ = ٠
ب س^{٢} + ص^{٢} + ٥س − ٦ص − ٤ = ٠
جـ س^{٢} + ص^{٢} − ٢س − ٢ص + ٢ = ٠

معادلة مماس لدائرة Tangent to a Circle

سبق وتبين لنا أن نصف قطر الدائرة عمودي على مماس الدائرة عند نقطة التماس.
باستخدام هذه الخاصية، نستطيع إيجاد معادلة مماس الدائرة.

مثال (٨)

أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها:
(س − ١)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٥ عند نقطة التماس أ(٣، ١).

الحل:

النقطة أ (٣، ١) تنتمي إلى الدائرة .
إحداثيات مركز الدائرة و(١، ٢).
ميل $\overline{وأ}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{١ - ٢}{٣ - ١}$ = $-\frac{١}{٢}$
∵ نصف قطر التماس $\overline{وأ}$ عمودي على مماس الدائرة
∴ ميل$_{المماس}$ × ميل $\overline{وأ}$ = −١
م$_{المماس}$ × $\left(-\frac{١}{٢}\right)$ = −١
م$_{المماس}$ = ٢

١٤٨

٦ الربط

يوفر المثال (٤) فرصة كبيرة للربط بين الدائرة واستخداماتها، كما أن الدواليب في الدراجات الهوائية والنارية خير أمثلة على الربط بالدائرة.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في التحقق من انتماء النقطة على الدائرة.
قد يخطئ الطلاب في الشروط الواجب توافرها في الصورة العامة لمعادلة الدائرة.
ساعدهم بأمثلة تبيّن تحقيق المساواة في معادلة الدائرة عند التعويض بقيم س، ص.

٨ التقييم

لاحظ بعناية ما يقوم به الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» وما إذا كانوا قادرين على الإجابة بطريقة توضح مدى فهمهم لها.

اختبار سريع

١ هل المعادلة س^{٢} + ص^{٢} − ٤س + ٢ص − ٤ = ٠.
تمثل معادلة دائرة؟ في حالة الإيجاب عيّن مركزها وطول نصف قطرها.
نعم المركز (٢، −١)، نق = ٣

٢ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (١، ٢) وتمر بالنقطة (٥، ٣) (س − ١)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ١٧

٣ أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها:
(س − ٤)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ١٠ عند نقطة التماس م(٣، ٥) س − ٣ص + ١٢ = ٠

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ (س − ٥)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٢٥

٢ إحداثيات مركز الدائرة: (−١ ، ٢)

نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{١٦ + ٦٤}$ = $\frac{١}{٢}\sqrt{٨٠}$

معادلة الدائرة: (س + ١)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٢٠

٣ س^{٢} + ص^{٢} = ٩

٤ (س − ٣)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٩

٥ (أ) المركز (٠، ٠)، نق = ٧

(ب) (٤، −٥)، نق = ٦

٦ المركز (٣، ١)، نق = ٥

نعرف أن نصف قطر التماس و$\overline{أ}$ هو عمودي على المماس عند النقطة أ

ليكن م' ميل المماس: م × م' = −١

أي $\frac{-٣}{٤}$ × م' = −١ ومنه م' = $\frac{٤}{٣}$

نأخذ المعادلة: ص − ص$_{١}$ = م' (س − س$_{١}$)

ص − (−٤) = $\frac{٤}{٣}$ (س − ٦)

ص = $\frac{٤}{٣}$ س − ١٢

∴ معادلة المماس ص = $\frac{٤}{٣}$ س − ١٢

حاول أن تحل

٩ أثبت أن النقطة أ (١، ١) تنتمي إلى الدائرة التي مركزها و ، معادلتها: س^{٢} + ص^{٢} + ٦س + ٨ص − ١٦ = ٠، ثم أوجد معادلة المماس لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

١٥٠

معادلة المماس و$\overline{أ}$ الذي ميله ٢ ويمر بالنقطة (٣، ١) هي:

ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)

ص − ١ = ٢ (س − ٣)

ص − ١ = ٢س − ٦

∴ معادلة المماس ص = ٢س − ٥

حاول أن تحل

٨ أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها (س − ٢)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ٢٥ عند النقطة أ(٦، ٤).

مثال (٩)

أثبت أن النقطة أ (٦، −٤) تنتمي إلى الدائرة التي مركزها و، معادلتها: س^{٢} + ص^{٢} − ٤س + ٢ص − ٢٠ = ٠، ثم أوجد معادلة المماس لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

الحل:

س^{٢} + ص^{٢} − ٤س + ٢ص − ٢٠ = ٠

المعادلة على شكل الصورة العامة لمعادلة الدائرة حيث ل = −٤، ك = ٢ ، ب = −٢٠

بالتعويض عن النقطة (٦، −٤)

(٦)^{٢} + (−٤)^{٢} − ٤(٦) + ٢(−٤) − ٢٠

= ٣٦ + ١٦ − ٢٤ − ٨ − ٢٠ = ٠ ✓

∴ النقطة أ(٦، −٤) تنتمي إلى الدائرة.

مركز الدائرة و (٢، −١)، طول نصف قطرها: نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب}$

نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{١٠٠}$ = ٥

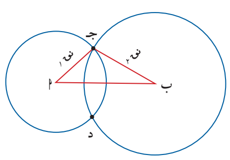
ميل نصف قطر التماس و$\overline{أ}$ = م = $\frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$ = $\frac{-٤ - (-١)}{٦ - ٢}$ = $\frac{-٣}{٤}$

١٤٩

الربط بالتعلم السابق

العلاقة بين دائرتين في المستوي

Intersection of Two Circles



في الشكل، الدائرتان (أ ، نق$_{١}$) ، (ب ، نق$_{٢}$) تتقاطعان في جـ ، د.

لدراسة العلاقة بين دائرتين، نستخدم متباينة المثلث.

إن مقارنة البعد بين مركزي الدائرتين وطولي نصفي قطري الدائرتين يحدد موقع الدائرتين كما هو مبيّن في الجدول التالي:

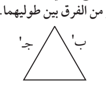
معلومة:

عندما نكتب: الدائرة (أ، نق) فهذا يعني أن أ مركز الدائرة ونق نصف قطرها.

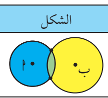
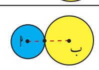
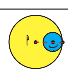
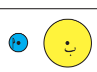
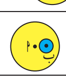
معلومة رياضية:

متباينة المثلث

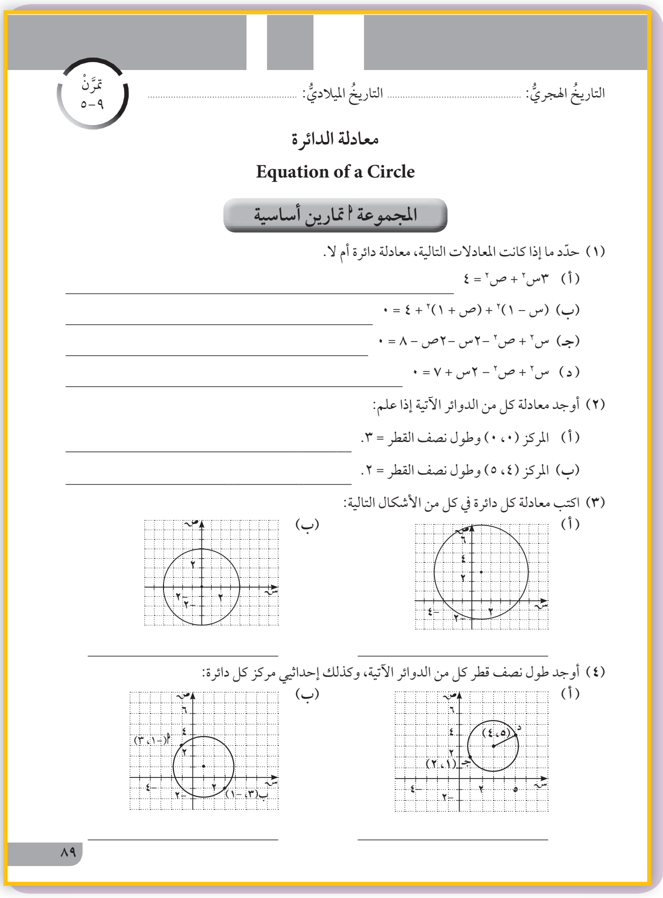
في كل مثلث، طول أي ضلع أصغر من مجموع طولي الضلعين الآخرين وأكبر من الفرق بين طوليهما.



|ب' − جـ'| < أ' < ب' + جـ'

العلاقة بين أب وطولي نصفي القطرين	العلاقة بين الدائرتين	الشكل	ملاحظة
|نق$_{١}$ − نق$_{٢}$| < أب < نق$_{١}$ + نق$_{٢}$	الدائرتان تتقاطعان في نقطتين مختلفتين		البعد بين المركزين أصغر من مجموع طولي نصفي القطرين وأكبر من الفرق بينهما.
أب = نق$_{١}$ + نق$_{٢}$	الدائرتان متماستان خارجيًّا		− البعد بين المركزين يساوي مجموع طولي نصفي القطرين − مركزا الدائرتين ونقطة التماس هي على استقامة واحدة.
أب = |نق$_{١}$ − نق$_{٢}$|	الدائرتان متماستان داخليًّا		− البعد بين المركزين يساوي الفرق بين طولي نصف القطرين. − مركزا الدائرتين ونقطة التماس هي على استقامة واحدة.
أب > نق$_{١}$ + نق$_{٢}$	الدائرتان لا تتقاطعان (متباعدتان)		− البعد بين المركزين أكبر من مجموع طولي نصف قطري الدائرتين.
أب < |نق$_{١}$ − نق$_{٢}$|	الدائرتان لا تتقاطعان (متداخلتان)		− البعد بين المركزين أصغر من الفرق بين طولي نصفي القطرين.

١٥١



التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٩-٥

معادلة الدائرة

Equation of a Circle

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) حدّد ما إذا كانت المعادلات التالية، معادلة دائرة أم لا.

(أ) ٣س^{٢} + ص^{٢} = ٤

(ب) (س − ١)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + ٤ = ٠

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} −٢س −٢ص − ٨ = ٠

(د) س^{٢} + ص^{٢} − ٢س + ٧ = ٠

(٢) أوجد معادلة كل من الدوائر الآتية إذا علم:

(أ) المركز (٠، ٠) وطول نصف القطر = ٣.

(ب) المركز (٤، ٥) وطول نصف القطر = ٢.

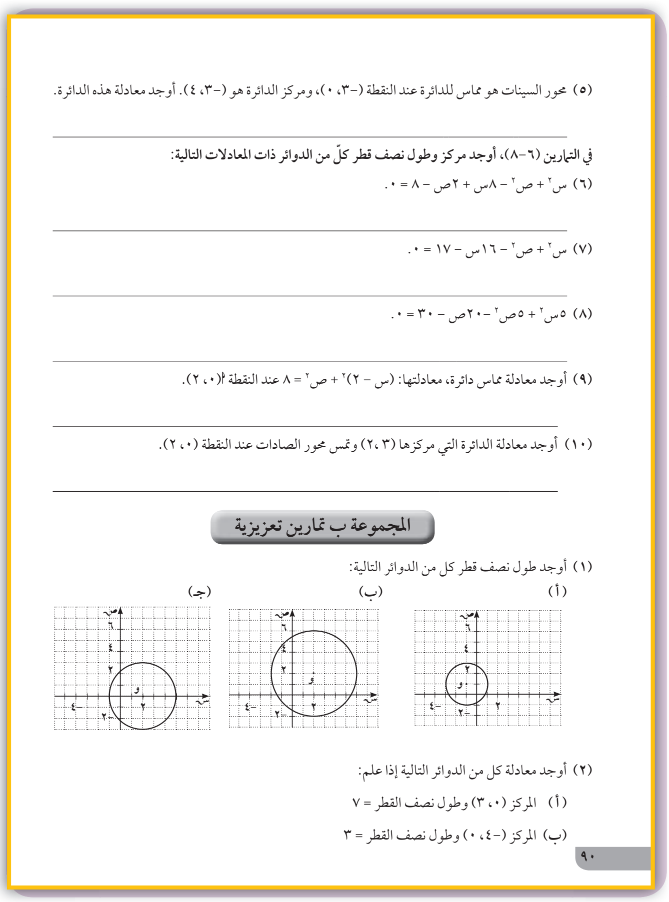
(٣) اكتب معادلة كل دائرة في كل من الأشكال التالية:

(أ) (ب)

(٤) أوجد طول نصف قطر كل من الدوائر الآتية، وكذلك إحداثيي مركز كل دائرة:

(أ) (ب)

٨٩



(٥) محور السينات هو مماس للدائرة عند النقطة (−٣، ٠)، ومركز الدائرة هو (−٣، ٤). أوجد معادلة هذه الدائرة.

في التمارين (٦-٨)، أوجد مركز وطول نصف قطر كلّ من الدوائر ذات المعادلات التالية:

(٦) س^{٢} + ص^{٢} − ٨س + ٢ص − ٨ = ٠.

(٧) س^{٢} + ص^{٢} − ١٦س − ١٧ = ٠.

(٨) ٥س^{٢} + ٥ص^{٢} −٢٠ص − ٣٠ = ٠.

(٩) أوجد معادلة مماس دائرة، معادلتها: (س − ٢)^{٢} + ص^{٢} = ٨ عند النقطة أ(٠، ٢).

(١٠) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣، ٢) وتمس محور الصادات عند النقطة (٠، ٢).

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) أوجد طول نصف قطر كل من الدوائر التالية:

(أ) (ب) (جـ)

(٢) أوجد معادلة كل من الدوائر التالية إذا علم:

(أ) المركز (٠، ٣) وطول نصف القطر = ٧

(ب) المركز (−٤، ٠) وطول نصف القطر = ٣

٩٠

٧ (أ) معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

ل = −٤، ك = ٧، ب = ١٧

ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب = −٣ < ٠

المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.

(ب) معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

ل = ٥، ك = −٦، ب = −٤

ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب = ٢٥ + ٣٦ + ١٦ = ٧٧ > ٠

المعادلة تمثل معادلة دائرة.

(جـ) معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

ل = −٢، ك = −٢، ب = ٢

ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب = ٤ + ٤ − ٨ = ٠

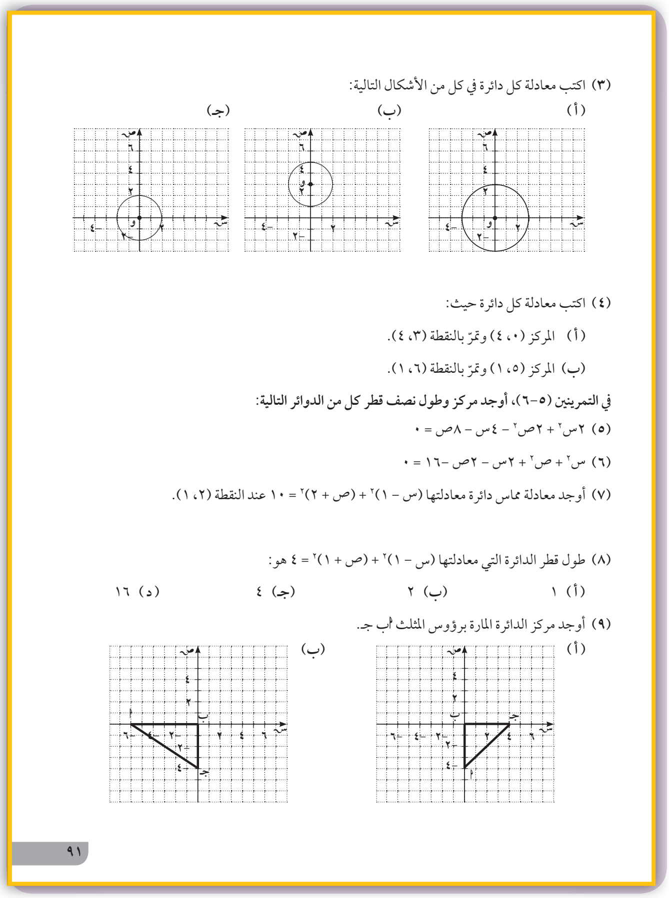
إذًا المعادلة تمثل نقطة.

٨ ٤س + ٣ص − ٣٦ = ٠

٩ ١^{٢} + ١^{٢} + ٦ × ١ + ٨ × ١ − ١٦ = ٠

∴ أ تنتمي إلى الدائرة.

معادلة المماس: ٤س + ٥ص − ٩ = ٠



(٣) اكتب معادلة كل دائرة في كل من الأشكال التالية:

(أ) (ب) (جـ)

(٤) اكتب معادلة كل دائرة حيث:

(أ) المركز (٠، ٤) وتمرّ بالنقطة (٣، ٤).

(ب) المركز (٥، ١) وتمرّ بالنقطة (٦، ١).

في التمرينين (٥–٦)، أوجد مركز وطول نصف قطر كل من الدوائر التالية:

(٥) ٢س^{٢} + ٢ص^{٢} − ٤س − ٨ص = ٠

(٦) س^{٢} + ص^{٢} + ٢س − ٢ص −١٦ = ٠

(٧) أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها (س − ١)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ١٠ عند النقطة (٢، ١).

(٨) طول قطر الدائرة التي معادلتها (س − ١)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٤ هو:

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ١٦

(٩) أوجد مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث أب جـ.

(أ) (ب)

٩١

المرشد لحل المسائل

إجابة «مسألة إضافية»

مركز الحوض (١، ٢)، نصف قطره نق = ٣ م.

نصف القطر مع الرمل ٣,٥ م.

المعادلة: (س − ١)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ١٢,٢٥


المرشد لحل المسائل

وجد جاسم هذه المسألة:

أدى قذف حصاة في بركة مياه إلى تشكل موجات دائرية يتزايد طول نصف قطرها بمعدل ٦ سم/ ثانية.

بعد كم ثانية تصل هذه الموجات إلى مركب صغير كان على مسافة ٢ متر شرقًا ومترًا واحدًا شمالًا من مركز الموجة الأولى.

أوجد معادلة الدائرة التي تصل إلى المركب.

كيف فكر جاسم لحل المسألة؟

سوف أضع مخططًا للمسألة:

ليكن و مركز الموجة ، النقطة أ تبعد ٢ متر شرق المركز ، النقطة ب تبعد مترًا واحدًا إلى شمال النقطة أ.

لكي أحصل على الزمن:

أجد المسافة وب من مركز الموجة الأولى إلى المركب.

أقسم المسافة على السرعة (٦ سم/ ثانية).

أستخدم قاعدة الدائرة لأجد معادلتها.

التطبيق:

سأستخدم نظرية فيثاغورث على المثلث وأب القائم في أ ، (وب)^{٢} = (وأ)^{٢} + (أب)^{٢}

(وب)^{٢} = ٢^{٢} + ١^{٢}

(وب)^{٢} = ٥

وب = $\sqrt{٥}$ م

سأستخدم قاعدة الزمن = $\frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$

الزمن = $\frac{\sqrt{٥}\ \text{م}}{\text{٦ سم/ ثانية}} = \frac{\sqrt{٥} \times ١٠٠\ \text{سم}}{\text{٦ سم/ ثانية}}$

الزمن = ٣٧ ثانية.

معادلة الدائرة التي مركزها و(٠، ٠) ونصف قطرها $\sqrt{٥}$ هي:

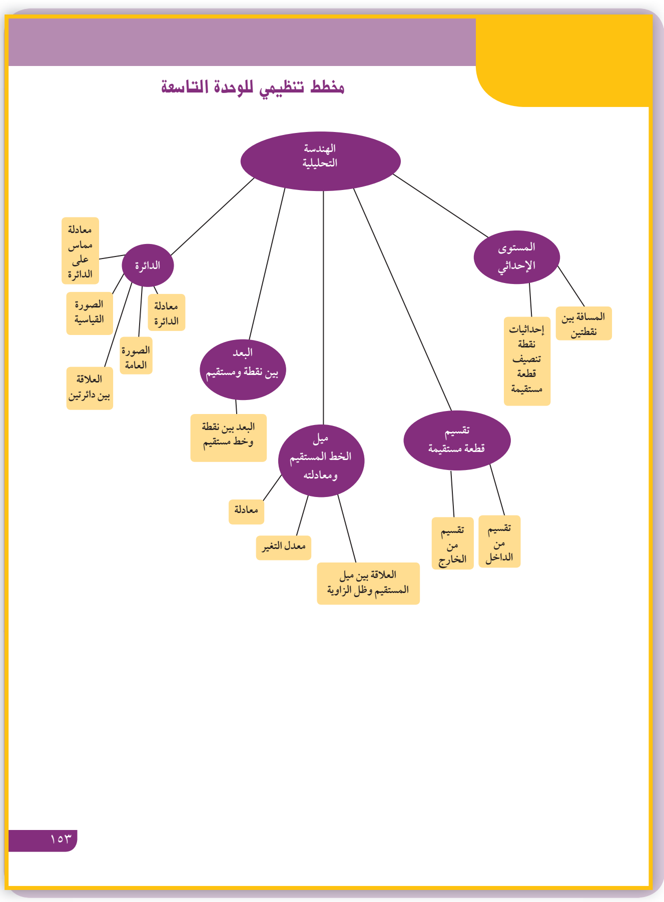
س^{٢} + ص^{٢} = ٥

مسألة إضافية

حوض زهور دائري الشكل، تنمذج دائرته بالمعادلة: (س − ١)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٩ (طول نصف القطر بالأمتار).

إذا أحطنا الحوض بالرمل بسماكة منتظمة ٥٠ سم، فأوجد طول نصف قطر الشكل الجديد ومعادلته.

١٥٢



ملخص

– المسافة بين نقطتين أ، ب على محور السينات تساوي القيمة المطلقة للفرق بين إحداثيات النقطتين.

– المسافة المائلة بين نقطتين أ(س١، ص١)، ب(س٢، ص٢): أب = $\sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$.

– إذا كانت $\overline{\text{أب}}$ قطعة مستقيمة بحيث أ(س١، ص١)، ب(س٢، ص٢) فإن نقطة منتصف $\overline{\text{أب}}$ هي

جـ $\left(\frac{\text{س}_١ + \text{س}_٢}{٢} ، \frac{\text{ص}_١ + \text{ص}_٢}{٢}\right)$.

– تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل من جهة أ بنسبة م: ن ، جـ (س، ص) نقطة التقسيم حيث:

س = $\frac{\text{م س}_٢ + \text{ن س}_١}{\text{م} + \text{ن}}$ ، ص = $\frac{\text{م ص}_٢ + \text{ن ص}_١}{\text{م} + \text{ن}}$.

– تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج من جهة أ بنسبة م: ن ، جـ (س، ص) نقطة التقسيم حيث:

س = $\frac{\text{م س}_٢ - \text{ن س}_١}{\text{م} - \text{ن}}$ ، ص = $\frac{\text{م ص}_٢ - \text{ن ص}_١}{\text{م} - \text{ن}}$.

– ميل الخط المستقيم = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$.

– ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ حيث أ(س١، ص١)، ب(س٢، ص٢):

م = $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$ شرط أن: س١ $\neq$ س٢.

– ميل المستقيم م يساوي ظل الزاوية θ التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات: م = ظاθ.

– إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يساوي ميل $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ وبالعكس.

– إذا كانا $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ متعامدين فإن ناتج ضرب ميليهما يساوي –١ وبالعكس.

– معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل (م) والجزء المقطوع من محور الصادات ص = م س + ن .

– طول العمود النازل من النقطة م (س١، ص١) على المستقيم (ل) ومعادلته أس + ب ص + جـ = ٠ هو:

ف = $\frac{|\text{أس}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}$.

– معادلة الدائرة التي مركزها م (د، هـ) وطول نصف قطرها نق: (س – د)^٢ + (ص – هـ)^٢ = نق^٢.

– الصورة العامة لمعادلة الدائرة: س^٢ + ص^٢ + ل س + ك ص + ب = ٠ حيث ل، ك، ب ثوابت

وحيث إن مركز الدائرة $\left(-\frac{\text{ل}}{٢} ، -\frac{\text{ك}}{٢}\right)$ ، نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{\text{ل}^٢ + \text{ك}^٢ - ٤\text{ب}}$ حيث ل^٢ + ك^٢ – ٤ب > ٠

– لدراسة العلاقة بين دائرتين متقاطعتين نستخدم متباينة المثلث.

– لإيجاد ميل المماس عند نقطة على دائرة نستخدم العلاقة: ميل المماس × ميل نق = –١ .

مراجعة الوحدة التاسعة

(١) أوجد قيمة ص إذا كانت النقطة (١، ص) تبعد وحدة واحدة عن النقطة (٠، ١).

(٢) أوجد النقاط (١، ص) التي تبعد $\sqrt{١٧}$ وحدة عن النقطة (٠، ١).

(٣) إذا كان المستقيمان: ٤س – أ ص = ٦، حيث أ ثابت ، ٦س + ٣ص + ٢ = ٠ متعامدين. فما هي قيمة أ؟

(٤) يمر مستقيم بالنقطتين: (–٣، ٩)، (٤، ٤) ومستقيم آخر بالنقطتين: (٩، –١)، (٤، –٨). هل المستقيمان متوازيان أم متعامدان؟

(٥) إذا كان المستقيم ٢س – ٣ص = ١٠ مماس لدائرة مركزها (–٢، ٤). أوجد معادلة هذه الدائرة.

(٦) أب جـ مثلث فيه أ (٢، ٣)، ب(٧، ٨)، جـ(–٢، ٥). د يقسم $\overline{\text{ب جـ}}$ من الداخل من جهة ب بنسبة ١ : ٢.

(أ) أوجد إحداثيي د.

(ب) أوجد معادلة $\overleftrightarrow{\text{أد}}$.

(٧) لتكن معادلة $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ هي: ٥س – ص + ٢ = ٠، اختر نقطة تقع على $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ولتكن جـ (٠، ٢).

أوجد معادلة المستقيم العمودي على $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ويمر بالنقطة جـ.

(٨) أب جـ مثلث فيه أ (٤، ٣)، ب(٨، ٥)، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ يوازي محور السينات، $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ يوازي محور الصادات.

(أ) أوجد إحداثيي النقطة جـ .

(ب) في السؤال (أ)، أثبت أن Δأب جـ قائم الزاوية في جـ.

(٩) أب جـ مثلث، إحداثيات رؤوسه على الترتيب هي: (٨، ١١)، (١٢، ٥)، (٣، ٥)، ق منتصف $\overline{\text{أب}}$، ك منتصف $\overline{\text{أجـ}}$.

(أ) أوجد إحداثيات ق، ك.

(ب) أثبت أن $\overline{\text{ق ك}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$.

(جـ) أثبت أن ق ك = $\frac{١}{٢}$ ب جـ.

(د) أثبت أن $\overline{\text{أب}}$ ليس عموديًّا على $\overline{\text{ب جـ}}$.

تمارين إثرائية

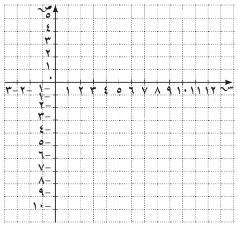
(١) لنأخذ النقاط و(٠، ٠)، أ(٣، ١)، ب(–٣، ٣) أوجد:

(أ) معادلة المنصف العمودي لـ $\overline{\text{و ب}}$ ، لـ $\overline{\text{أ ب}}$.

(ب) معادلة الدائرة التي تمرّ بالنقاط أ، و، ب.

(جـ) معادلة المماس على الدائرة في النقطة ب.

(٢) د دائرة معادلتها: س^{٢} + ص^{٢} – ٦س – ٢ص – ١٥ = ٠، م مستقيم معادلته: ٤س + ٣ ص = ٠.



(أ) ارسم الدائرة والمستقيم في المستوى الإحداثي نفسه.

(ب) ارسم المماسين م$_{١}$ ، م$_{٢}$ للدائرة د والمتوازيان مع المستقيم م.

(جـ) أوجد معادلة المستقيم م$_{٣}$ الذي يمرّ بمركز الدائرة د ومتعامد مع المستقيم م.

(د) أوجد إحداثيات نقاط التقاطع أ، ب للدائرة د والمستقيم م$_{٣}$.

(هـ) أوجد معادلتي المماسين م$_{١}$ ، م$_{٢}$.

(٣) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وتمس المستقيم: ٣س – ٤ص + ١٦ = ٠.

(٤) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (–١، ٣) وتمس المستقيم: ٣س – ٦ص + ١٠ = ٠.

(٥) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٢، ٠) وتمس المستقيم الذي معادلته ص = – $\frac{٣}{٤}$ س + $\frac{١١}{٤}$.

(٦) أوجد معادلة الدائرة التي تمس المستقيمين: س = ٢، ص = –١ و طول نصف قطرها وحدتان.

(٧) أثبت أن المستقيمين أس + ب ص + جـ = ٠، أ د س + ب د ص + جـ = ٠ متوازيان، حيث (د $\neq$ ٠).

*(٨) لتغطية أحد التجمعات الرياضيّة من الجو، حلقت طوافتان تابعتان لمحطتي تلفزة على الارتفاع نفسه. بحيث موقع الطوافة أ على بعد ٢٠ كم غرب التجمع وموقع الطوافة ب على بعد ١٥ كم جنوب التجمع و١٥ كم شرق التجمع.

أوجد المسافة بين الطوافتين حيث نقطة التجمع تمثل نقطة الأصل.

الوحدة العاشرة: الإحصاء والاحتمال Statistic and Probability

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

١٠ - ١: تحليل البيانات

جزء ١: إيجاد مقاييس النزعة المركزية: المتوسط الحسابي - الوسيط - المنوال.

جزء ٢: استخدام هذه المقاييس في تحليل البيانات.

١٠ - ٢: الأرباعيات

جزء ١: المدى.

جزء ٢: الأرباعيات: الأدنى، الأوسط، الأعلى، مجمل الأعداد الخمسة.

جزء ٣: الصندوق ذو العارضتين.

١٠ - ٣: الانحراف المعياري

جزء ١: التباين والانحراف المعياري.

١٠ - ٤: طرق العد

جزء ١: حل مسائل العد - الشجرة البيانية.

جزء ٢: استخدام قوانين التباديل أو التوافيق.

١٠ - ٥: الاحتمال المشروط

جزء ١: الحدث المستقل.

جزء ٢: الحدث التابع.

جزء ٣: إيجاد الاحتمال المشروط.

مقدمة الوحدة

يعتبر علم الإحصاء من أهم العلوم التطبيقية في عصرنا الحاضر. إذا نظرت حولك تجد أنه لا يمكن القيام بأي خطوة تنفيذية في أي مجال دون الأخذ بعين الاعتبار نتائج الإحصاء.

تريد معرفة مدى انتشار البرامج التلفزيونية ...

تريد الترويج لمنتج معين ومعرفة ما إذا تحققت الغاية ...

تريد الاستقصاء عن توجه الناخبين في عملية انتخاب لمجلس الأمة أو انتخاب رئيس جمهورية ...

في المحصلة انكب العاملون في مجال الإحصاء على إيجاد أسس وقوانين يتوقعون من خلالها الحصول على نتائج علمية تساعد على توقعات محددة واتخاذ قرارات سليمة.

لقد كان علم الإحصاء يهتم في البدء بعملية العد والحصر للأشياء، لذا سمي بالعربية «إحصاء» وهي مشتقة من كلمة أحصى، وكان الاهتمام محصورًا فقط بتعداد السكان لجهة عدد المواليد والوفيات لمعرفة الموارد البشرية الموجودة في الدولة، ومن هنا جاءت التسمية بالأجنبية «Statistics» حيث هي مشتقة من "State" وتعني الدولة.

وقد عُرف قديمًا الإحصاء بأنه جمع معلومات وترتيبها في جداول وتمثيلها في رسوم بيانية. ولكن تطور هذا المفهوم ليصبح علمًا متقدمًا بحيث تحول إلى جمع البيانات وتنظيمها وعرضها ووصفها وتحليلها، واستخلاص النتائج وإيجاد التوقعات واتخاذ القرارات المناسبة.

يعتبر علم الإحصاء في عصرنا الحاضر، أداة للتخطيط، حيث أصبحت البيانات هي القاعدة المتينة التي تُبنى عليها سياسة الدول في كل المجالات.

في الاقتصاد: يستخدم علم الإحصاء في تفسير الحركة الاقتصادية من حيث العرض والطلب وتأثير الأسعار والعلاقة بين الدخل والإنفاق، ومراقبة الإنتاج في المؤسسات الصناعية لجهة كمية ودرجة وجوده، ومدى ملاءمة كل ذلك لاحتياجات السوق وأذواق المستهلكين.

أما في العلوم الطبية،فيستخدم لمقارنة الأمراض وسبل معالجتها وتحديد العلاقة بين بعض الأمراض ومسبباتها وقياس كفاءة الأدوية المستخدمة ...

الوحدة العاشرة

الإحصاء والاحتمال

Statistic and Probability

مشروع الوحدة: اختيار وظيفة

١ مقدمة المشروع: هل تحلم بمتابعة دراستك الجامعية؟ أو بشراء سيارة؟ أو امتلاك منزل؟ أو تنفيذ مشروع يؤمن لك مستقبلًا زاهرًا؟

أسئلة كثيرة تعبر حتمًا في مخيلتك، ولكن كيف تجيب عنها؟

إن التفكير بادخار مبلغ من المال لفترات معينة يُمكّن أي شخص من تحقيق أجزاء مهمة من أحلامه.

٢ الهدف: إن البدء بوضع موازنة صغيرة لمدخولك ومصروفك واستخدام برنامج **Excel** على الحاسوب وصنع قرارات عن كيفية إدارة الأموال سوف يكون الهدف الأساسي لهذا المشروع، حيث ستجد سبيلًا إلى ادخار مبلغ محدد خلال فترات من أسابيع أو من أشهر.

٣ اللوازم: حاسوب – آلة حاسبة.

٤ المتابعة:

شجع الطلاب على الإجابة عن الأسئلة التالية:

أ ما المبلغ الذي يحصل عليه الطالب؟ (من الأهل – راتب – مقابل عمل ...)

ب ما المبلغ الذي يصرفه الطالب في أسبوع؟ (طعام، نقليات، ...)

ج ما المبلغ غير المتوقع الذي يصرفه الطالب؟ (سينما، ألعاب، مجلات، ...)

د ما المبلغ الذي ادخره الطالب؟ (أسبوعيًّا، شهريًّا، ....)

٥ التقرير: حفّز الطلاب على كتابة تقرير مفصل يبين خطوات تنفيذ المشروع مرفقًا بجدولة واضحة للدخل والمصاريف والادخار. شجعهم على تبادل الأفكار ومراجعة حساباتهم إذا كان ذلك ضروريًّا.

دروس الوحدة

تحليل البيانات	الأرباعيات	الانحراف المعياري	طرق العد	الاحتمال المشروط
١٠-١	١٠-٢	١٠-٣	١٠-٤	١٠-٥

١٥٦

مشروع الوحدة

يقدم هذا المشروع فرصة أمام الطلاب ليختبروا إمكاناتهم في عملية إحصاء بسيطة تهدف من خلالها إلى تكوين فكرة عن مدخولهم، مصروفهم، كيف سينظمون هذه المعلومات، كيف سيعرضونها، كيف سيحللونها ليضعوا توقعات ويتخذوا قرارات سليمة، وأكثر من ذلك كيف سيدافعون عن هذه القرارات عند كتابة التقرير.

شجع الطلاب على العمل بجدية في هذا المشروع، لأنه يؤمن خطوة أولى عن كيفية وضع ميزانية مصغرة، وهي مهمة جدًّا في بناء شخصية مخطِّطة قادرة على المواجهة في المستقبل.

اشرح لهم بالتفصيل الأسئلة الموجودة في فقرة «المتابعة» وكيفية استخدام أوراق جدولة الانتشار.

سلّم التقييم	
٤.	الجداول مفصلة. الحسابات دقيقة. التقرير واضح يبيّن أرقام ميزانية صحيحة ومقبولة.
٣.	معظم الجداول مفصلة. بعض الأخطاء في الحسابات. التقرير واضح مع أخطاء طفيفة في عرض الميزانية.
٢.	بعض الجداول مفصلة. أخطاء كثيرة في الحسابات. التقرير غير مفصل مع أخطاء متعددة في الميزانية.
١.	معظم عناصر المشروع غير كاملة.

الوحدة العاشرة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت عرض البيانات (تمثيل بياني مصور – تمثيل بياني بالأعمدة – تمثيل بياني بالنقاط المجمعة – تمثيل بياني بالخطوط – تمثيل بياني بالدائرة).
- تعلمت وصف البيانات (المتوسط الحسابي – الوسيط – المنوال – مخطط الساق والأوراق).
- استخدمت الشجرة البيانية.
- طبقت طرق العد في حالات يكون فيها الترتيب مهمًا التباديل (التراتيب) وحالات يكون فيها الترتيب غير مهم (التوافيق).
- تعلمت حساب الاحتمال.
- استخدمت التجارب لإيجاد الاحتمالات.

ماذا سوف تتعلم؟

- حساب مقاييس النزعة المركزية جبريًّا وباستخدام التكنولوجيا.
- استخدام هذه المقاييس في تحليل البيانات.
- تحديد الأرباعيات ومجمل الأعداد الخمسة في البيانات وتمثيلها بواسطة الصندوق ذو العارضتين وتفسيرها.
- دراسة تشتت البيانات من خلال علاقتها بالانحراف المعياري.
- تفسير البيانات الإحصائية.
- حل مسائل باستخدام مبدأ العد.
- حل مسائل باستخدام قوانين التوافيق والتباديل.
- الاحتمال المشروط.

المصطلحات الأساسية

تحليل البيانات – مقاييس النزعة المركزية – مجمل الأعداد الخمسة – التشتت – الأرباعيات – الصندوق ذو العارضتين – الانحراف المعياري – التباين – مبدأ العد – التباديل – التوافيق – الأحداث المستقلة – الاحتمال المشروط.

أضف إلى معلوماتك

أحداث نادرة

إن استباق خطر حدوث عطل في حاسوب أو في صاروخ يحمل قمرًا اصطناعيًّا أو في مفاعل نووي، يحتسبه العلماء آخذين بالاعتبار احتمال الخلل في كل من مكوناته.

يهدف العلماء للوصول إلى احتمالات تقرب من ١ : ١٠$^{-٦}$ أي أن احتمال حدوث عطل هو قريب من النسبة ١ إلى مليون خلال عام في مفاعل نووي. ولكن إذا كان هناك مجمع لمئة مفاعل نووي؟؟؟

في بعض الصواريخ التي تحمل أقمارًا اصطناعية يقترب احتمال حدوث عطل من $\frac{١}{١٠}$ ولكن هذه النسبة تقل كثيرًا في الرحلات المأهولة.

١٥٧

١٠-١: تحليل البيانات

١ الأهداف

- يوجد مقاييس النزعة المركزية جبريًّا وبيانيًّا.
- يوجد مقاييس النزعة المركزية تقنيًّا.
- يستخدم هذه المقاييس في تحليل البيانات.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

مقاييس النزعة المركزية: المتوسط الحسابي، الوسيط، المنوال.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة – آلة حاسبة علمية – حاسوب (اختياري) – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اكتب على السبورة البيانات التالية:

٧، ٨، ٦، ٧، ٩، ٥، ٧، ١٠، ٤، ٣، ٣، ٤.

اطلب إلى الطلاب:

- ترتيب هذه البيانات تصاعديًّا.
- إيجاد الوسيط.
- إيجاد المتوسط الحسابي.
- إيجاد المنوال.
- تنظيم هذه البيانات في جدول يبيّن التكرارات.

٥ التدريس

يتطرق هذا الدرس إلى قيم النزعة المركزية (المتوسط الحسابي، الوسيط، المنوال) عندما تتضمن البيانات قيمًا بأعداد كبيرة، فنحتاج عندها إلى استخدام الفئات.

ولكن من المهم جدًّا في البدء إيضاح مميزات كل قيمة من قيم النزعة المركزية وسلبياتها.

- **المتوسط الحسابي**: من مميزاته، أنه يوفر طريقة نستخدم من خلالها قيمة واحدة لتمثيل هذه البيانات.
  من سلبياته، أنه يعطي فكرة مضللة عن البيانات وخاصة إذا كان هناك قيم متطرفة.
- **الوسيط**: من مميزاته، أنه لا يتأثر بالقيم المتطرفة.
  لا توجد سلبيات مباشرة في استخدامه.
- **المنوال**: من مميزاته، أنه يعطي فكرة عن القيم الأكثر تكرارًا في البيانات.

١٠-١

تحليل البيانات
Data Analysis

عمل تعاوني

يبين الجدول التالي أطوال القامات بالسنتيمتر عند ٣٠ طالبًا في المرحلة الثانوية.

١٧٠	١٥٨	١٦٤	١٧١	١٧٥	١٦٩	١٦٧	١٦٨	١٦٣	١٧٢
١٧٤	١٥٩	١٦٩	١٧٧	١٦٤	١٦٢	١٦٦	١٦٠	١٦٩	١٥٥
١٧٩	١٧٤	١٧١	١٧٥	١٧٠	١٧٣	١٧٥	١٦٨	١٦٥	١٦٨

أ) استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد المتوسط الحسابي لأطوال هؤلاء الطلاب.
ما الوسيط لهذه البيانات؟

ب) أكمل الجدول التالي:

الفئة	١٥٥-	١٦٠-	١٦٥-	١٧٠-	١٧٥-
التكرار					
مركز الفئة					

ج) ما الفئة التي تتضمن الوسيط؟
د) ما الفئة التي تتضمن التكرار الأكبر؟
هـ) استخدم مراكز الفئات والتكرار لتجد المتوسط الحسابي لأطوال قامات هؤلاء الطلاب.
و) قارن بين النتيجة في السؤال أ والنتيجة في السؤال هـ . ماذا تلاحظ؟

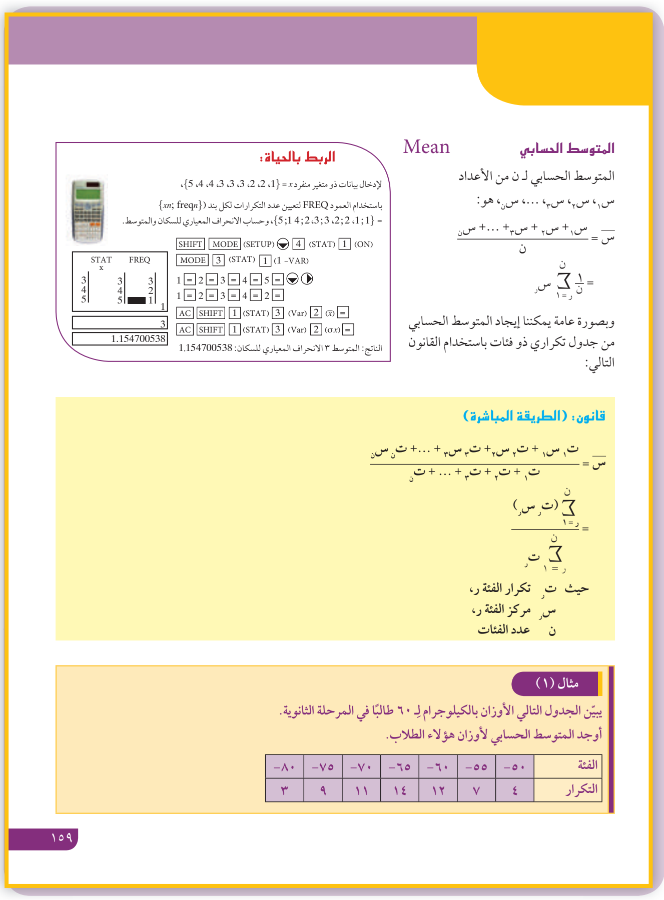
سوف تتعلم
- إيجاد مقاييس النزعة المركزية جبريًّا وباستخدام التكنولوجيا
- استخدام مقاييس النزعة المركزية في تحليل البيانات

معلومة رياضية:
مركز الفئة [١٥٥، ١٦٠) هو $\frac{١٥٥ + ١٦٠}{٢} = ١٥٧,٥$

مقاييس النزعة المركزية Measure of Central Tendency

على افتراض أن مدير شركة أو مؤسسة يريد إجراء دراسة حول رواتب الموظفين لعدة أعوام متتالية ويريد عددًا واحدًا يبيّن له متوسط الرواتب في عام معين. فما الذي يحتاج إليه؟

١٥٨



المتوسط الحسابي Mean

المتوسط الحسابي لـ ن من الأعداد س١، س٢، س٣، ...، سن، هو:

$$\bar{س} = \frac{س_١ + س_٢ + س_٣ + ... + س_ن}{ن} = \frac{١}{ن}\sum_{ر=١}^{ن} س_ر$$

وبصورة عامة يمكننا إيجاد المتوسط الحسابي من جدول تكراري ذو فئات باستخدام القانون التالي:

الربط بالحياة:

لإدخال بيانات ذو متغير منفرد x = {1، 2، 2، 3، 3، 3، 4، 4، 5}، باستخدام العمود FREQ لتعيين عدد التكرارات لكل بند ({xn; freqn} = {1;1، 2;2، 3;3، 4;2، 5;1}، وحساب الانحراف المعياري للسكان والمتوسط.

SHIFT MODE (SETUP) ⊙ 4 (STAT) 1 (ON)
MODE 3 (STAT) 1 (1 -VAR)
1 = 2 = 3 = 4 = 5 = ⊙ ◑
1 = 2 = 3 = 4 = 2 =
AC SHIFT 1 (STAT) 3 (Var) 2 ($\bar{x}$) =
AC SHIFT 1 (STAT) 3 (Var) 2 (σx) =

الناتج: المتوسط ٣ الانحراف المعياري للسكان: 1,154700538

STAT FREQ x
3
1.154700538

قانون: (الطريقة المباشرة)

$$\bar{س} = \frac{ت_١ س_١ + ت_٢ س_٢ + ت_٣ س_٣ + ... + ت_ن س_ن}{ت_١ + ت_٢ + ت_٣ + ... + ت_ن} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن}(ت_ر س_ر)}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر}$$

حيث $ت_ر$ تكرار الفئة ر،
$س_ر$ مركز الفئة ر،
ن عدد الفئات

مثال (١)

يبيّن الجدول التالي الأوزان بالكيلوجرام لِـ ٦٠ طالبًا في المرحلة الثانوية.
أوجد المتوسط الحسابي لأوزان هؤلاء الطلاب.

الفئة	٥٠-	٥٥-	٦٠-	٦٥-	٧٠-	٧٥-	٨٠-
التكرار	٤	٧	١٢	١٤	١١	٩	٣

١٥٩

من سلبياته أننا لا نستفيد شيئًا إذا كانت كل قيمة من البيانات لا تظهر سوى لمرة واحدة، أي أنه لا يوجد منوال في هذه الحالة في فقرة «عمل تعاوني». تابع بدقة النتائج التي يحصل عليها الطلاب لأنها سوف تكون الأساس بالنسبة إلى مجريات الدرس. ناقش معهم معنى الفئة، وما هي القيم الموجودة في كل فئة وكيفية فرز القيم واستخدام علامات التكرار.

اشرح لهم كيفية إيجاد مركز الفئة.

في **المتوسط الحسابي**، ساعدهم على فهم الرموز المستخدمة في القاعدة:

$$\overline{\text{س}} = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ت}_{\text{ر}}\,\text{س}_{\text{ر}}}{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ت}_{\text{ر}}}$$

وأن هذه القاعدة هي متقدمة أكثر عما درسوه سابقًا.

أخبرهم أن تنظيم جدول يبيّن الفئة ومركز الفئة أو $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ت}_{\text{ر}}$ (مجموع التكرارات)، وأخيرًا $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ت}_{\text{ر}}\,\text{س}_{\text{ر}}$ (مجموع ناتج ضرب التكرارات في القيم المناظرة في البيانات) يساعد كثيرًا على استخدام الآلة الحاسبة أو عدم استخدامها في إيجاد المتوسط الحسابي كما في المثال (١).

يمكن تبسيط فكرة القيمة الفرضية من قبل المعلم باستخدام مثال أولي:

كانت درجات صالح في امتحان الرياضيات حيث النهاية العظمى ١٠٠ درجة كما يلي: ٨٢، ٧٥، ٨٨، ٨٠، ٧٨، ٨٦.

وجد صالح المتوسط الحسابي لهذه الدرجات بالحساب الذهني باختيار درجة مناسبة قريبة جدًّا من الوسط وهي ٨٠ واستنتج ما يلي بالمقارنة مع ٨٠:

٨٢	٧٥	٨٨	٨٠	٧٨	٨٦
↑	↑	↑	↑	↑	↑
+٢	−٥	+٨	٠	−٢	+٦

وعند جمع هذه القيم، نحصل على:

+٢ − ٥ + ٨ + ٠ − ٢ + ٦ = ٩.

وبالتالي المتوسط الحسابي = ٨٠ + $\frac{٩}{٦}$ أي $\overline{\text{س}}$ = ٨١,٥.

علمًا أنه باستخدام الحساب العادي نجد أن:

$$\overline{\text{س}} = \frac{٨٢ + ٧٥ + ٨٨ + ٨٠ + ٧٨ + ٨٦}{٦} = ٨١,٥$$

والنتيجة هي نفسها.

ويمكن ايضًا استخدام المثال التالي لإيجاد قيمة تقريبية

الحل:

يمكن تكوين الجدول التالي: (استخدم الآلة الحاسبة)

الفئة	مركز الفئة $\text{س}_{\text{ر}}$	التكرار $\text{ت}_{\text{ر}}$	$\text{ت}_{\text{ر}}\,\text{س}_{\text{ر}}$
٥٠−	٥٢,٥	٤	٢١٠
٥٥−	٥٧,٥	٧	٤٠٢,٥
٦٠−	٦٢,٥	١٢	٧٥٠
٦٥−	٦٧,٥	١٤	٩٤٥
٧٠−	٧٢,٥	١١	٧٩٧,٥
٧٥−	٧٧,٥	٩	٦٩٧,٥
٨٠−	٨٢,٥	٣	٢٤٧,٥
		$\sum_{\text{ر}=1}^{٧} \text{ت}_{\text{ر}} = ٦٠$	$\sum_{\text{ر}=1}^{٧} \text{ت}_{\text{ر}}\,\text{س}_{\text{ر}} = ٤٠٥٠$

$$\overline{\text{س}} = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{٧} (\text{ت}_{\text{ر}}\,\text{س}_{\text{ر}})}{\sum_{\text{ر}=1}^{٧} \text{ت}_{\text{ر}}} = \frac{٤٠٥٠}{٦٠} = ٦٧,٥$$

أي أن المتوسط الحسابي لأوزان ٦٠ طالبًا هو ٦٧,٥ كيلوجرامًا.

حاول أن تحل

١ يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات ٧٠ طالبًا في مادة الرياضيات حيث النهاية العظمى ١٠٠ درجة.
أوجد المتوسط الحسابي لهذه الدرجات.

الفئة	٢٠−	٣٠−	٤٠−	٥٠−	٦٠−	٧٠−	٨٠−	٩٠−
التكرار	٤	٨	١٤	١٥	١٣	٩	٤	٣

يمكن تبسيط الحسابات وإيجاد قيمة تقريبية أيضًا للمتوسط الحسابي.

نأخذ وسطًا فرضيًّا ف (من المستحسن أن يكون مركز الفئة الذي يقابل أكبر تكرار للبيانات).

١٦٠

الوسيط Median

الوسيط لعدد ن من القيم المرتبة تصاعديًّا أو تنازليًّا هو:

أ العدد الذي يتوسط القيم إذا كان العدد ن فرديًّا.

ب المتوسط الحسابي للعددين في منتصف القيم إذا كان العدد ن زوجيًّا.

أي أن الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $\frac{\text{ن}+١}{٢}$ من الأعداد إذا كان العدد ن فرديًّا ومتوسط القيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{\text{ن}}{٢}$، $\frac{\text{ن}}{٢}+١$ من الأعداد إذا كان العدد ن زوجيًّا.

يمكن إيجاد الوسيط باستخدام التمثيل البياني للتكرار المتجمع الصاعد وللتكرار المتجمع النازل أو لكليهما.

مثال (٢)

يوضح الجدول التالي التوزيع التكراري لأطوال قامات ٥٥ طالبًا في المرحلة الثانوية.

أكمل الجدول لإيجاد الوسيط باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار المتجمع الصاعد.

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
١٥٠−	٣		
١٥٥−	٧		
١٦٠−	٩		
١٦٥−	١٢		
١٧٠−	١٠		
١٧٥−	٨		
١٨٠−	٤		
١٨٥−	٢		

الحل:

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
١٥٠−	٣	أقل من ١٥٥	٣
١٥٥−	٧	أقل من ١٦٠	١٠
١٦٠−	٩	أقل من ١٦٥	١٩
١٦٥−	١٢	أقل من ١٧٠	٣١
١٧٠−	١٠	أقل من ١٧٥	٤١
١٧٥−	٨	أقل من ١٨٠	٤٩
١٨٠−	٤	أقل من ١٨٥	٥٣
١٨٥−	٢	أقل من ١٩٠	٥٥

١٦١

للمتوسط الحسابي فنأخذ وسطًا فرضيًا ف، نطبق القاعدة:

$$\overline{\text{س}} = \text{ف} + \frac{\sum \text{ت}_\text{ر} \text{ح}_\text{ر}}{\sum \text{ت}_\text{ر}}$$ علمًا أن: $\text{ح}_\text{ر} = \text{س}_\text{ر} - \text{ف}$

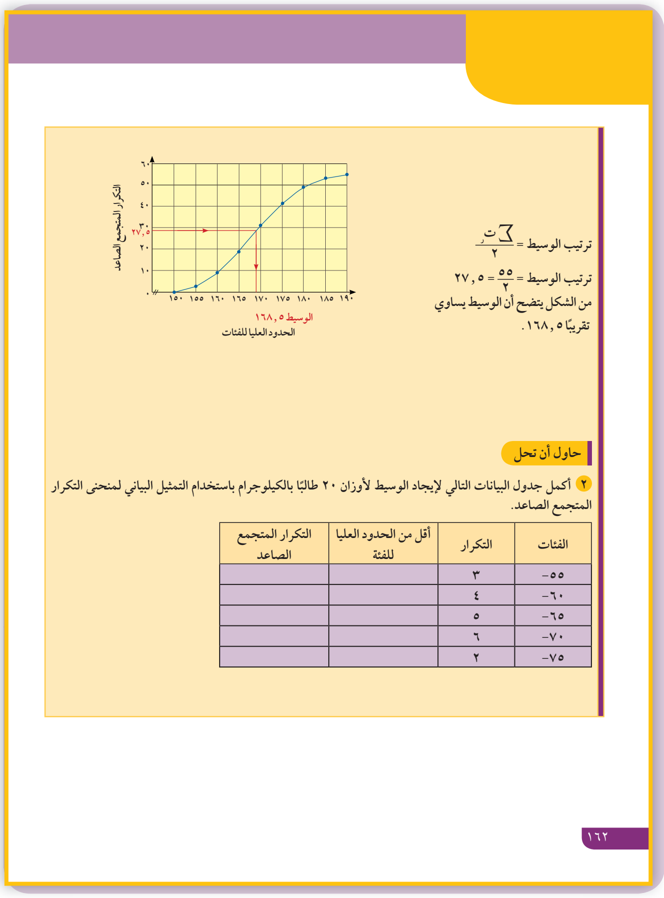
يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لمعدل الكوليسترول عند ٣٠ شخصًا.

أوجد قيمة تقريبية للمتوسط الحسابي لمعدل الكوليسترول عند هؤلاء الأشخاص باستخدام وسطًا فرضيًّا.

الفئة	١٩٥–	٢٠٠–	٢٠٥–	٢١٠–	٢١٥–	٢٢٠–
التكرار	٥	٣	٤	٩	٦	٣

الحل: نأخذ وسطًا فرضيًّا ف = ٢١٢,٥

نأخذ ف = ٢١٢,٥ لأنه يقابل أكبر تكرار. نكوّن الجدول التالي:


ترتيب الوسيط = $\frac{\sum \text{ت}_\text{ر}}{٢}$

ترتيب الوسيط = $\frac{٥٥}{٢}$ = ٢٧,٥

من الشكل يتضح أن الوسيط يساوي تقريبًا ١٦٨,٥.

حاول أن تحل

٢ أكمل جدول البيانات التالي لإيجاد الوسيط لأوزان ٢٠ طالبًا بالكيلوجرام باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار المتجمع الصاعد.

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
٥٥–	٣		
٦٠–	٤		
٦٥–	٥		
٧٠–	٦		
٧٥–	٢		

١٦٢

الفئة	١٩٥–	٢٠٠–	٢٠٥–	٢١٠–	٢١٥–	٢٢٠–
مركز الفئة	١٩٧,٥	٢٠٢,٥	٢٠٧,٥	٢١٢,٥	٢١٧,٥	٢٢٢,٥
التكرار $\text{ت}_\text{ر}$	٥	٣	٤	٩	٦	٣
الانحراف عن ف $\text{ح}_\text{ر} = \text{س}_\text{ر} - \text{ف}$	١٥–	١٠–	٥–	٠	٥	١٠
$\text{ت}_\text{ر} \times \text{ح}_\text{ر}$	٧٥–	٣٠–	٢٠–	٠	٣٠	٣٠

نحصل على: $\sum_{\text{ر}=١}^{٦} \text{ت}_\text{ر} = ٣٠$ ، $\sum_{\text{ر}=١}^{٦} \text{ت}_\text{ر} \text{ح}_\text{ر} = -٦٥$

فيكون: $\overline{\text{س}} = ٢١٢,٥ + \frac{-٦٥}{٣٠} \simeq ٢١٠,٣٣$

أي أن المتوسط الحسابي لمعدل الكوليسترول عند ٣٠ شخصًا هو ٢١٠,٣٣ مليجرامات تقريبًا.

لإيجاد «**الوسيط**» يقدم الدرس ثلاث طرق:
الأولى باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد، والثانية باستخدام منحنى التكرار المتجمع النازل، والثالثة باستخدام الرسم البياني للتكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل. ومن تقاطع الرسمين البيانيين، نرسم عمودًا نازلًا على المحور الأفقي ونقرأ على هذا المحور قيمة الوسيط تقريبًا.

قدّم للطلاب تمارين متعددة لتساعدهم على تطبيق القاعدة أو على استخدام الرسم البياني كما في الأمثلة (٢)، (٣)، (٤).
في **المنوال** نستخدم قانون الرافعة كما هو مبين في المثال (٦) كما يمكن أيضًا استخدام القاعدة أو استخدام المدرج التكراري كما هو مبين في المثال (٧).

في المثال (٧)، يبيّن المدرج التكراري الفئة التي تسبق فئة المنوال، ثم فئة المنوال، وبعد ذلك الفئة التالية لفئة المنوال بمستطيلات تختلف أطوالها بحسب تكرار كل فئة.
أما القطع المستقيمة التي تربط بين الرؤوس المتقابلة في المستطيلات فتتقاطع في نقطة، والعمود المرسوم من هذه النقطة عموديًّا على المحور الأفقي يحدد قيمة المنوال تقريبًا.

٦ الربط

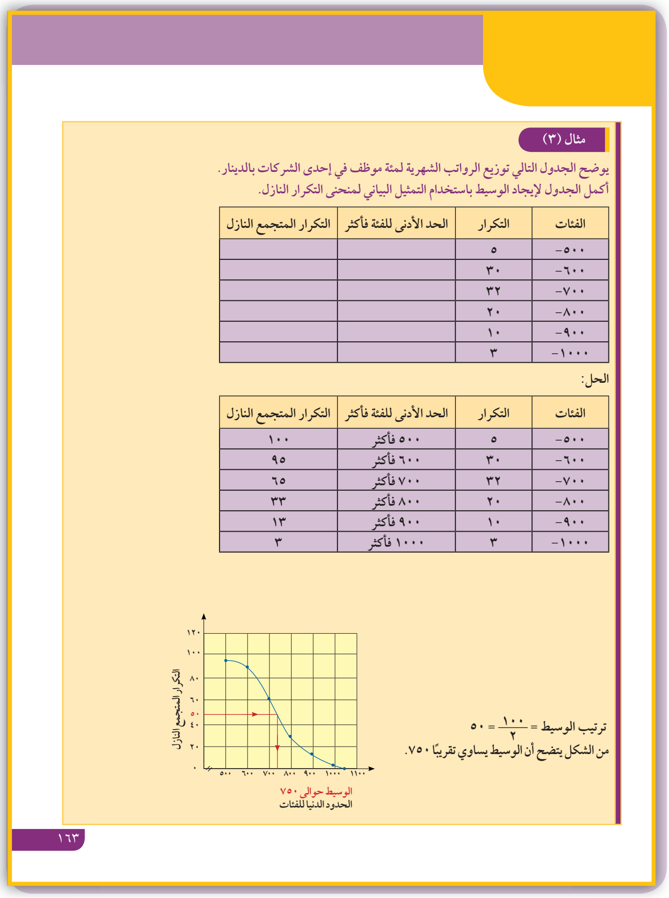
تربط الأمثلة في هذا الدرس بين المفاهيم والمهارات وبين المواقف الحياتية.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تحديد الفئة الوسيطية.
ساعدهم في البدء على تحديد ترتيب الوسيط، ثم أخبرهم أن هذا الناتج يجب أن يتواجد في الفئة المناسبة عند تكوين جدول التكرار المتجمع الصاعد.

٨ التقييم

راقب الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من أنهم قد فهموا جيّدًا ما ورد في هذا الدرس.



مثال (٣)

يوضح الجدول التالي توزيع الرواتب الشهرية لمئة موظف في إحدى الشركات بالدينار.
أكمل الجدول لإيجاد الوسيط باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار النازل.

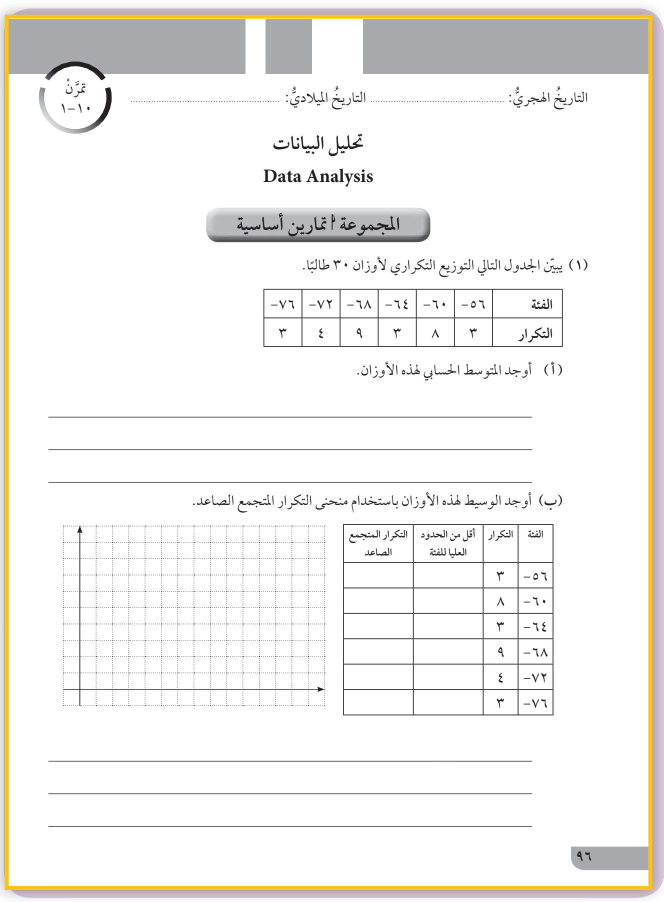
الفئات	التكرار	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٥٠٠-	٥		
٦٠٠-	٣٠		
٧٠٠-	٣٢		
٨٠٠-	٢٠		
٩٠٠-	١٠		
١٠٠٠-	٣		

الحل:

الفئات	التكرار	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٥٠٠-	٥	٥٠٠ فأكثر	١٠٠
٦٠٠-	٣٠	٦٠٠ فأكثر	٩٥
٧٠٠-	٣٢	٧٠٠ فأكثر	٦٥
٨٠٠-	٢٠	٨٠٠ فأكثر	٣٣
٩٠٠-	١٠	٩٠٠ فأكثر	١٣
١٠٠٠-	٣	١٠٠٠ فأكثر	٣

ترتيب الوسيط $= \frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$
من الشكل يتضح أن الوسيط يساوي تقريبًا ٧٥٠.

١٦٣



التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمَرَّنْ ١٠-١

تحليل البيانات
Data Analysis

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان ٣٠ طالبًا.

الفئة	٥٦-	٦٠-	٦٤-	٦٨-	٧٢-	٧٦-
التكرار	٣	٨	٣	٩	٤	٣

(أ) أوجد المتوسط الحسابي لهذه الأوزان.

(ب) أوجد الوسيط لهذه الأوزان باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد.

الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
٥٦-	٣		
٦٠-	٨		
٦٤-	٣		
٦٨-	٩		
٧٢-	٤		
٧٦-	٣		

٩٦

اختبار سريع

يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات طلاب الصف العاشر في الاختبار النهائي لمادة الرياضيات حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة.

الفئة	٤−	٨−	١٢−	١٦−
التكرار	٦	٨	٩	٢

❶ أكمل الجدول لتبين التكرار المتجمع الصاعد ومركز الفئة.

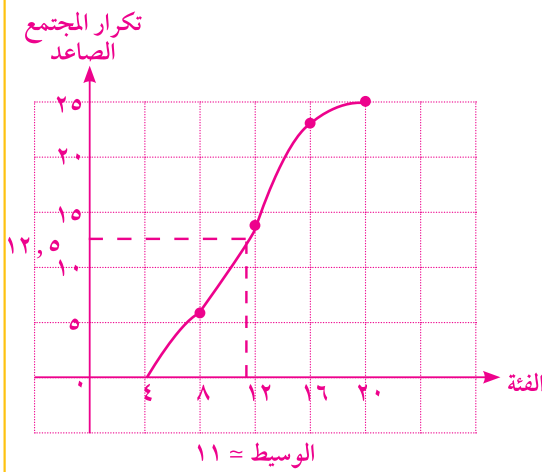
الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	مركز الفئة سر	سر × تر
٤−	٦	أقل من ٨	٦	٦	٣٦
٨−	٨	أقل من ١٢	١٤	١٠	٨٠
١٢−	٩	أقل من ١٦	٢٣	١٤	١٢٦
١٦−	٢	أقل من ٢٠	٢٥	١٨	٣٦

❷ أوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$. $\overline{س}$ = ١١,١٢

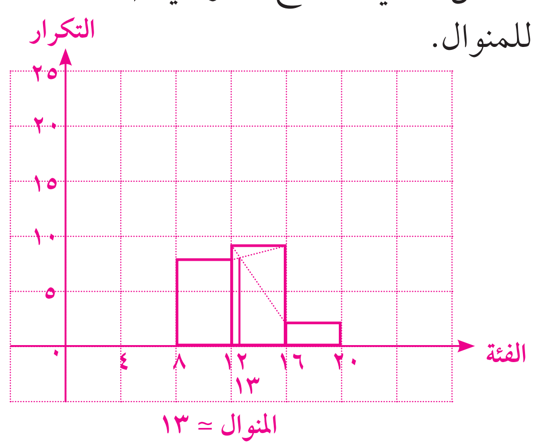
❸ ارسم منحنى المتجمع الصاعد

واستنتج وسيط قيم البيانات.

الوسيط ≈ ١١,٥



❹ استخدم التمثيل البياني للمدرج التكراري لإيجاد قيمة تقريبية للمنوال.



حاول أن تحل

❸ أكمل الجدول التالي لإيجاد الوسيط لدرجات ٢٥ طالبًا باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار المتجمع النازل.

الفئة	التكرار	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٥−	٢		
٨−	٥		
١١−	٨		
١٤−	٦		
١٧−	٤		

يمكن إيجاد قيمة تقريبية للوسيط باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار المتجمع الصاعد ولمنحنى التكرار المتجمع النازل معًا.

مثال (٤)

يوضح الجدول التالي الرواتب الشهرية لمئة موظف في إحدى الشركات بالدينار.

أكمل الجدول التالي لتبين التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل، ثم استخدم التمثيل البياني لهما معًا لإيجاد الوسيط.

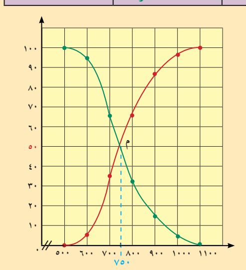
الفئات	٥٠٠−	٦٠٠−	٧٠٠−	٨٠٠−	٩٠٠−	١٠٠٠−
التكرار	٥	٣٠	٣٢	٢٠	١٠	٣

١٦٤

الحل:

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٥٠٠−	٥	أقل من ٦٠٠	٥	٥٠٠ فأكثر	١٠٠
٦٠٠−	٣٠	أقل من ٧٠٠	٣٥	٦٠٠ فأكثر	٩٥
٧٠٠−	٣٢	أقل من ٨٠٠	٦٧	٧٠٠ فأكثر	٦٥
٨٠٠−	٢٠	أقل من ٩٠٠	٨٧	٨٠٠ فأكثر	٣٣
٩٠٠−	١٠	أقل من ١٠٠٠	٩٧	٩٠٠ فأكثر	١٣
١٠٠٠−	٣	أقل من ١١٠٠	١٠٠	١٠٠٠ فأكثر	٣

يتقاطع منحنى تكرار المتجمع الصاعد مع منحنى تكرار المتجمع النازل عند نقطة م.
العمود المرسوم من النقطة م على المحور الأفقي يعطي العدد ٧٥٠ تقريبًا.
الوسيط يساوي ٧٥٠ دينارًا تقريبًا.



حاول أن تحل

❹ أكمل الجدول التالي لدرجات ٦٠ طالبًا في اختبار الرياضيات حيث النهاية العظمى ١٠٠ درجة لتبين التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل، ثم استخدم التمثيل البياني لهما معًا لإيجاد الوسيط.

الفئات	٤٠−	٥٠−	٦٠−	٧٠−	٨٠−	٩٠−
التكرار	٧	١٠	١٧	١٢	٨	٦

١٦٥

المنوال Mode

المنوال هو القيمة الأكثر تكرارًا في البيانات.

مثال (٥)

أوجد المنوال في ما يلي:

أ ٥، ٨، ٩، ٧، ٤، ٥، ٦، ١٠، ٥

ب ١٢، ١٨، ١١، ١٢، ٢٠، ١١، ١٥، ١٦، ١٧، ٢٣

ج ٧، ٧، ٧، ٧، ٧

د ٥، ٦، ٥، ٦، ٥، ٦، ٧

الحل:

أ المنوال = ٥ (الأكثر تكرارًا)

ب يوجد منوالان: ١١، ١٢

ج لا يوجد منوال

د يوجد منوالان: ٥، ٦

الربط بالحياة:

استخدم الآلة الحاسبة (Casio Classpad 300)

لإيجاد وسيط ومنوال البيانات التالية:

٢، ٣، ٥، ٤، ٣، ٦، ٥، ٧، ٣، ٨، ١، ٧، ٥، ٥، ٩

انقر Statistics (في قائمة التطبيقات).

استخدم list 1؛ تأكد من أن المؤشر في الموضع الأول من list 1.

أدخل ٢ في المركز الأول، وهذا سوف يظهر في الجزء السفلي من الشاشة كما [١] = ٢.

المفتاح EXE للانتقال إلى الموضع التالي في القائمة.

اكتب قيم البيانات المتبقية في لائحة القائمة ١ اضغط على EXE بعد كل إدخال. تظهر الشاشة كافة البيانات التي يتم إدخالها في list 1.

العثور على الإحصاء الوصفي للبيانات

انقر على Calc في شريط القوائم للحصول على الإحصاء الوصفي.

نحن نتعامل مع متغير واحد لذا انقر على One–Variable

فإن نافذة Set Calculation تتيح لك اختيار القائمة التي تحتوي على البيانات ذات الصلة.

اضغط OK

جميع الإحصاءات المتوفرة وصفيًّا لهذا المتغير تظهر على الشاشة:

القيمة الأولى، ••، تعني. المتوسط الحسابي the mean

أي ٤,٨٦٧ (إلى ٣ منازل عشرية)

القيمة الثانية تعني: ΣX =73 أي مجموع البيانات 73

n=15 تعني أن عدد قيم مجموعة البيانات ١٥.

نتجه إلى الأسفل لإيجاد كل من الوسيط والمنوال

Med = 5 يعني الوسيط يساوي ٥

Mode = 5 يعني المنوال يساوي ٥

حاول أن تحل

٥ أوجد المنوال في ما يلي:

أ ٧، ٥، ١٢، ٦، ٧، ١٤

ب ١٥، ٨، ٩، ١٢، ١٥، ٨، ٧، ١٠

ج ١، ١، ١، ١، ١

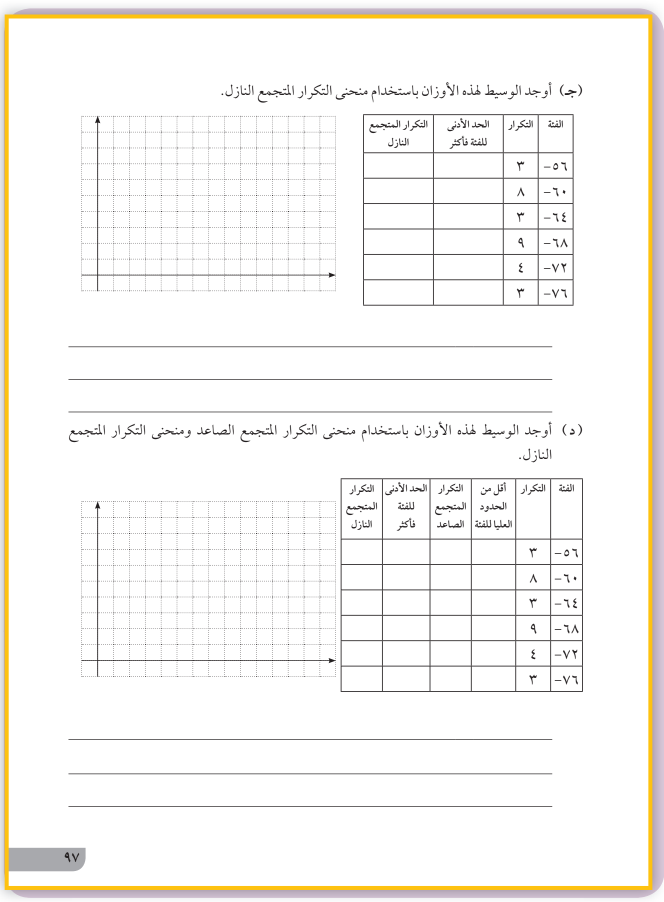
د ٣، ٨، ٣، ٨، ٨، ٣، ٤، ٤

ملاحظة:

إذا لم يوجد تكرار في البيانات فلا يوجد منوال لها.

ويمكن أن يوجد أكثر من منوال لمجموعة القيم.

١٦٦



(جـ) أوجد الوسيط لهذه الأوزان باستخدام منحنى التكرار المتجمع النازل.

الفئة	التكرار	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٥٦–	٣		
٦٠–	٨		
٦٤–	٣		
٦٨–	٩		
٧٢–	٤		
٧٦–	٣		

(د) أوجد الوسيط لهذه الأوزان باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد ومنحنى التكرار المتجمع النازل.

الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٥٦–	٣				
٦٠–	٨				
٦٤–	٣				
٦٨–	٩				
٧٢–	٤				
٧٦–	٣				

٩٧

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

(أ) المتوسط الحسابي = $\overline{س}$ = $\frac{٥٠٥٠}{٣٠}$ = ١٦٨,$\overline{٣}$

ترتيب البيانات تصاعديًّا: ١٥٥، ١٥٨، ١٥٩، ١٦٠، ١٦٢، ١٦٣، ١٦٤، ١٦٤، ١٦٥، ١٦٦، ١٦٧، ١٦٨، ١٦٨، ١٦٨، ١٦٩، ١٦٩، ١٦٩، ١٧٠، ١٧٠، ١٧١، ١٧١، ١٧٢، ١٧٣، ١٧٤، ١٧٤، ١٧٥، ١٧٥، ١٧٥، ١٧٧، ١٧٩

الوسيط = ١٦٩

(ب)

الفئة	١٥٥–	١٦٠–	١٦٥–	١٧٠–	١٧٥–
التكرار	٣	٥	٩	٨	٥
مركز الفئة	١٥٧,٥	١٦٢,٥	١٦٧,٥	١٧٢,٥	١٧٧,٥

(جـ) فئة الوسيط هي: ١٦٥–

(د) فئة التكرار الأكبر هي: ١٦٥–

(هـ) $\overline{س}$ = $\frac{٣ \times ١٥٧,٥ + ٥ \times ١٦٢,٥ + ٩ \times ١٦٧,٥ + ٨ \times ١٧٢,٥ + ٥ \times ١٧٧,٥}{٣٠}$ = $\frac{٥٠٦٠}{٣٠}$

$\overline{س}$ = ١٦٨,$\overline{٦}$

(و) في السؤال (أ) $\overline{س}$ = ١٦٨,$\overline{٣}$، في السؤال (هـ) $\overline{س}$ = ١٦٨,$\overline{٦}$ أي أن النتائج متقاربة.

«حاول أن تحل»

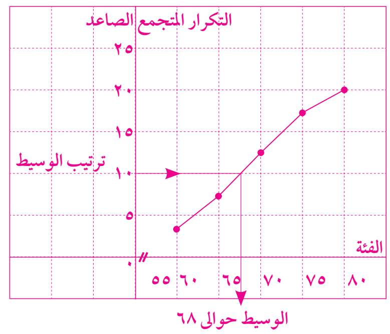
١

الفئة	٢٠–	٣٠–	٤٠–	٥٠–	٦٠–	٧٠–	٨٠–	٩٠–
التكرار	٤	٨	١٤	١٥	١٣	٩	٤	٣
مركز الفئة	٢٥	٣٥	٤٥	٥٥	٦٥	٧٥	٨٥	٩٥

$\overline{س}$ = ٥٦,٨٦

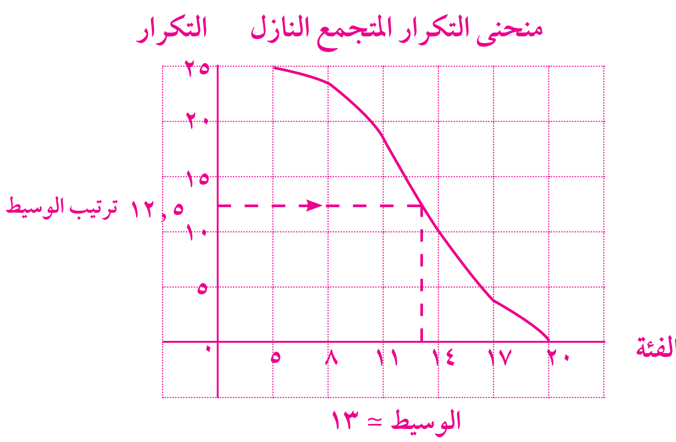
٢

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
−٥٥	٣	أقل من ٦٠	٣
−٦٠	٤	أقل من ٦٥	٧
−٦٥	٥	أقل من ٧٠	١٢
−٧٠	٦	أقل من ٧٥	١٨
−٧٥	٢	أقل من ٨٠	٢٠



٣

الفئات	التكرار	الحد الأدنى فأكثر	التكرار المتجمع النازل
−٥	٢	٥ فأكثر	٢٥
−٨	٥	٨ فأكثر	٢٣
−١١	٨	١١ فأكثر	١٨
−١٤	٦	١٤ فأكثر	١٠
−١٧	٤	١٧ فأكثر	٤



إيجاد المنوال للتوزيع التكراري باستخدام قانون الرافعة:

نحدد الفئة المنوالية وهي الفئة التي يقابلها أكبر تكرار.

نحدد التكرار للفئتين السابقة مباشرة واللاحقة مباشرة للفئة المنوالية على الترتيب $ك_{١}$، $ك_{٢}$.

المنوال يقسم الفئة المنوالية كما في الشكل بحيث إن:

$ك_{١} \times س = ك_{٢} \times (ف - س)$

ف = طول الفئة المنوالية

المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + س

هذا ما يعرف «بطريقة الرافعة» لحساب المنوال.

ويمكن وضع صيغة رياضية لقانون الرافعة على الشكل التالي:

$$المنوال = الحد\ الأدنى\ للفئة\ المنوالية + \frac{ك_{٢}}{ك_{١} + ك_{٢}} \times ف$$

طول الفئة المنوالية

ف ، س ، (ف − س) ، المنوال ، $ك_{١}$ ، $ك_{٢}$

التكرار السابق مباشرة للفئة المنوالية

التكرار اللاحق مباشرة للفئة المنوالية

مثال (٦)

يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لعدد ساعات الدراسة الأسبوعية عند ٥٠ طالبًا.

أوجد المنوال لعدد ساعات الدراسة الأسبوعية عند الطلاب.

الفئة	−٣٥	−٤٠	−٤٥	−٥٠	−٥٥
التكرار	٧	٢٠	١٥	٦	٢

الحل:

باستخدام قانون الرافعة

الحد الأدنى للفئة المنوالية = ٤٠

ف: طول الفئة المنوالية = ٥

$ك_{١}$: تكرار الفئة السابقة للفئة المنوالية = ٧

$ك_{٢}$: تكرار الفئة اللاحقة للفئة المنوالية = ١٥

$ك_{١} \times س = ك_{٢} \times (ف - س)$

$٧ \times س = ١٥ \times (٥ - س)$

٧ س = ٧٥ − ١٥ س

٢٢ س = ٧٥

$\therefore س = \frac{٧٥}{٢٢}$

س ≃ ٣,٤١

معلومة مفيدة:

قانون الرافعة:

القوة × طول ذراعها = المقاومة × طول ذراعها.

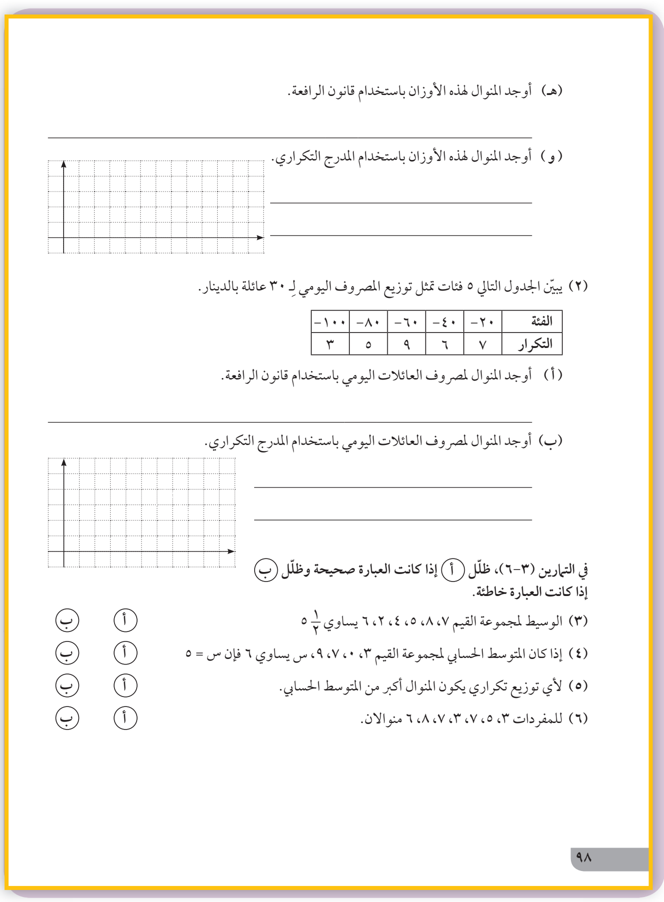
المقاومة ، ذراع القوة ، ذراع المقاومة ، القوة

المنوال

س ، ٥ − س

$ك_{١} = ٧$ ، $ك_{٢} = ١٥$

١٦٧



(هـ) أوجد المنوال لهذه الأوزان باستخدام قانون الرافعة.

(و) أوجد المنوال لهذه الأوزان باستخدام المدرج التكراري.

(٢) يبيّن الجدول التالي ٥ فئات تمثل توزيع المصروف اليومي لِـ ٣٠ عائلة بالدينار.

الفئة	−٢٠	−٤٠	−٦٠	−٨٠	−١٠٠
التكرار	٧	٦	٩	٥	٣

(أ) أوجد المنوال لمصروف العائلات اليومي باستخدام قانون الرافعة.

(ب) أوجد المنوال لمصروف العائلات اليومي باستخدام المدرج التكراري.

في التمارين (٣-٦)، ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة وظلّل (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

(٣) الوسيط لمجموعة القيم ٧، ٨، ٥، ٤، ٢، ٦ يساوي $٥\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(٤) إذا كان المتوسط الحسابي لمجموعة القيم ٣، ٠، ٧، ٩، س يساوي ٦ فإن س = ٥ (أ) (ب)

(٥) لأي توزيع تكراري يكون المنوال أكبر من المتوسط الحسابي. (أ) (ب)

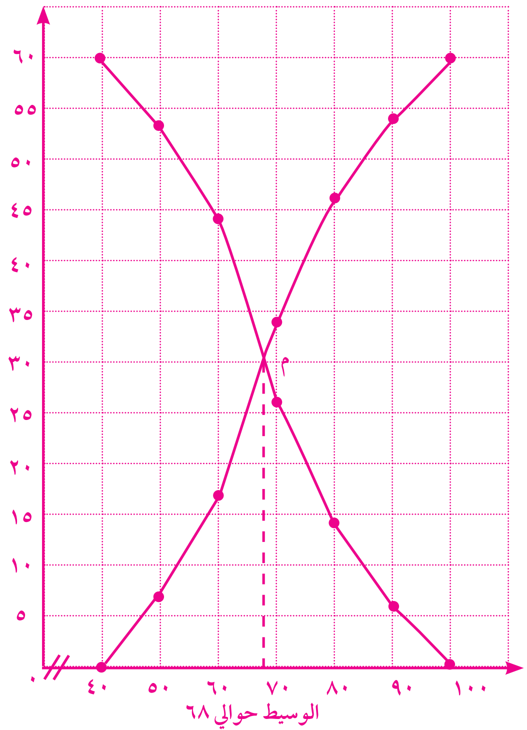
(٦) للمفردات ٣، ٥، ٧، ٣، ٧، ٨، ٦ منوالان. (أ) (ب)

٩٨

٤

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأدنى فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٤٠–	٧	أقل من ٥٠	٧	أكثر من ٤٠	٦٠
٥٠–	١٠	أقل من ٦٠	١٧	أكثر من ٥٠	٥٣
٦٠–	١٧	أقل من ٧٠	٣٤	أكثر من ٦٠	٤٣
٧٠–	١٢	أقل من ٨٠	٤٦	أكثر من ٧٠	٢٦
٨٠–	٨	أقل من ٩٠	٥٤	أكثر من ٨٠	١٤
٩٠–	٦	أقل من ١٠٠	٦٠	أكثر من ٩٠	٦

يساوي الوسيط تقريبًا ٦٨ .



٥ (أ) المنوال = ٧ . (ب) يوجد منوالان: ٨، ١٥ .

(جـ) لا يوجد منوال. (د) يوجد منوالان: ٣، ٨ .

المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + س

∴ المنوال ≃ ٤٠ + ٣,٤١

≃ ٤٣,٤١

وبذلك يكون منوال ساعات الدراسة أسبوعيًّا عند الطلاب ٤٣ ساعة و٢٥ دقيقة تقريبًا.

حاول أن تحل

٦ يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لمعدل الكوليسترول عند ٢٠ شخصًا.

أوجد المنوال لمعدل الكوليسترول عند هؤلاء الأشخاص باستخدام الصيغة الرياضية لقانون الرافعة.

الفئة	٥,٠٤–	٥,١٧–	٥,٣٠–	٥,٤٣–	٥,٥٦–	٥,٦٩–
التكرار	١	٣	٤	٧	٤	١

معلومة صحية:
المعدل الطبيعي للكوليسترول في الدم في دولة الكويت:
CHOL ... 3.10 ⟶ 5.20
HDL.D ... 1.04 ⟶ 1.68

يمكن إيجاد قيمة تقريبية للمنوال بيانيًّا باستخدام المدرج التكراري من خلال تحديد فئة المنوال والفئة السابقة مباشرة والفئة اللاحقة مباشرة.

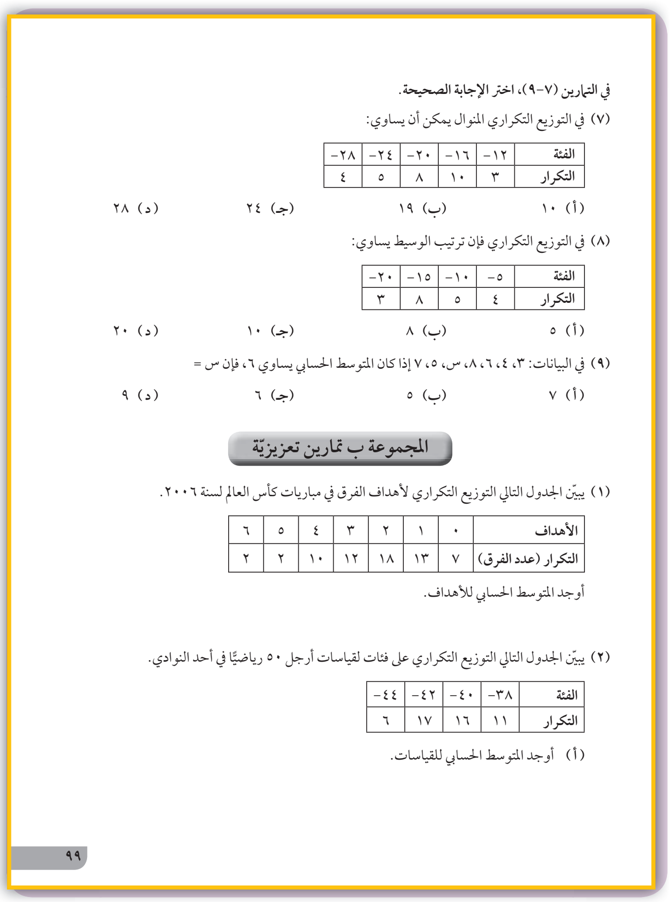
مثال (٧)

يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لرواتب الموظفين بالدينار في إحدى المؤسسات.

استخدم التمثيل البياني للمدرج التكراري لايجاد قيمة تقريبية لمنوال رواتب الموظفين.

الفئة	٢٠٠–	٣٠٠–	٤٠٠–	٥٠٠–	٦٠٠–	٧٠٠–
التكرار	٥	٢٧	٣٥	٢٠	١٠	٣

١٦٨



في التمارين (٧–٩)، اختر الإجابة الصحيحة.

(٧) في التوزيع التكراري المنوال يمكن أن يساوي:

الفئة	١٢–	١٦–	٢٠–	٢٤–	٢٨–
التكرار	٣	١٠	٨	٥	٤

(أ) ١٠ (ب) ١٩ (جـ) ٢٤ (د) ٢٨

(٨) في التوزيع التكراري فإن ترتيب الوسيط يساوي:

الفئة	٥–	١٠–	١٥–	٢٠–
التكرار	٤	٥	٨	٣

(أ) ٥ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(٩) في البيانات: ٣، ٤، ٦، ٨، س، ٥، ٧ إذا كان المتوسط الحسابي يساوي ٦، فإن س =

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٩

المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

(١) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لأهداف الفرق في مباريات كأس العالم لسنة ٢٠٠٦.

الأهداف	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
التكرار (عدد الفرق)	٧	١٣	١٨	١٢	١٠	٢	٢

أوجد المتوسط الحسابي للأهداف.

(٢) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري على فئات لقياسات أرجل ٥٠ رياضيًّا في أحد النوادي.

الفئة	٣٨–	٤٠–	٤٢–	٤٤–
التكرار	١١	١٦	١٧	٦

(أ) أوجد المتوسط الحسابي للقياسات.

٩٩

٦ الفئة المنوالية: ٤٣, ٥–

الحد الأدنى للفئة المنوالية = ٤٣, ٥

$ك_1 \times س = ك_2 \times (ف - س)$

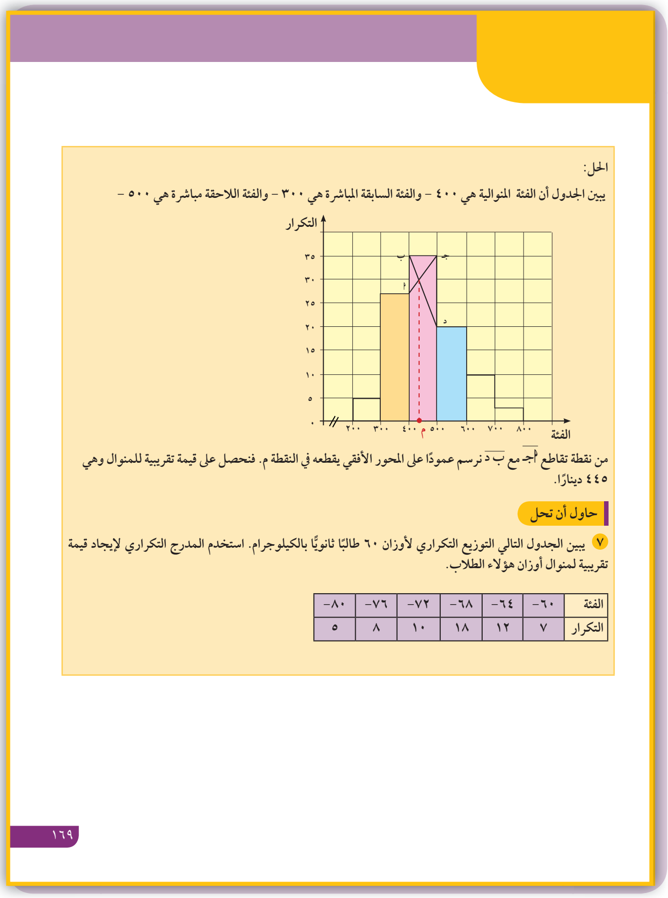
$٤ \times س = ٤ \times (٠,١٣ - س)$

س = ٠,٠٦٥

المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + س

= ٥,٤٣ + ٠,٠٦٥ = ٥,٤٩٥

المنوال = ٥,٤٩٥



الحل:

يبين الجدول أن الفئة المنوالية هي ٤٠٠ – والفئة السابقة المباشرة هي ٣٠٠ – والفئة اللاحقة مباشرة هي ٥٠٠ –

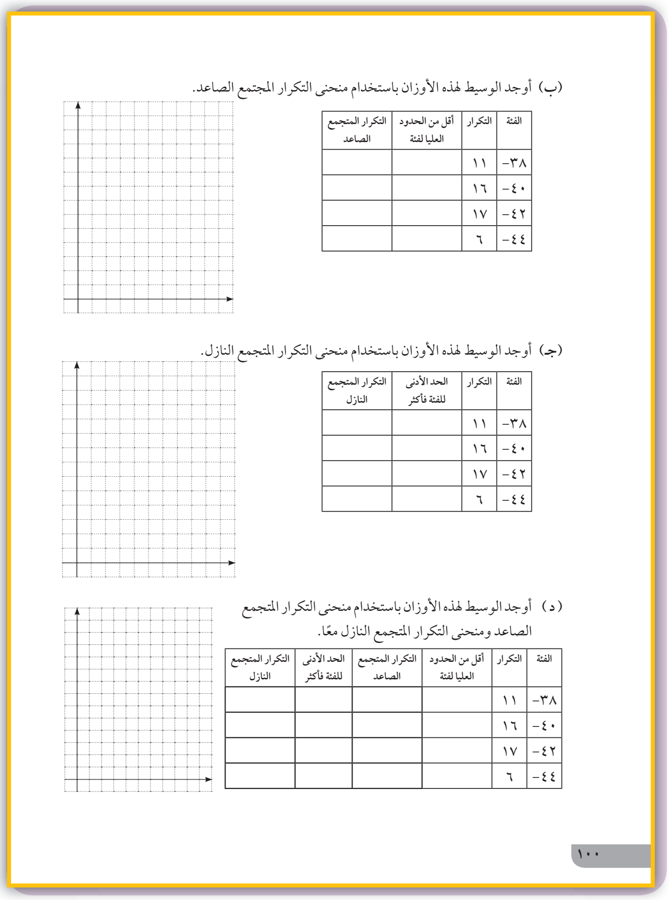
من نقطة تقاطع أجـ مع ب د نرسم عمودًا على المحور الأفقي يقطعه في النقطة م. فنحصل على قيمة تقريبية للمنوال وهي ٤٤٥ دينارًا.

حاول أن تحل

٧ يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان ٦٠ طالبًا ثانويًا بالكيلوجرام. استخدم المدرج التكراري لإيجاد قيمة تقريبية لمنوال أوزان هؤلاء الطلاب.

الفئة	٦٠–	٦٤–	٦٨–	٧٢–	٧٦–	٨٠–
التكرار	٧	١٢	١٨	١٠	٨	٥

١٦٩



(ب) أوجد الوسيط لهذه الأوزان باستخدام منحنى التكرار المجتمع الصاعد.

الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا لفئة	التكرار المتجمع الصاعد
٣٨–	١١		
٤٠–	١٦		
٤٢–	١٧		
٤٤–	٦		

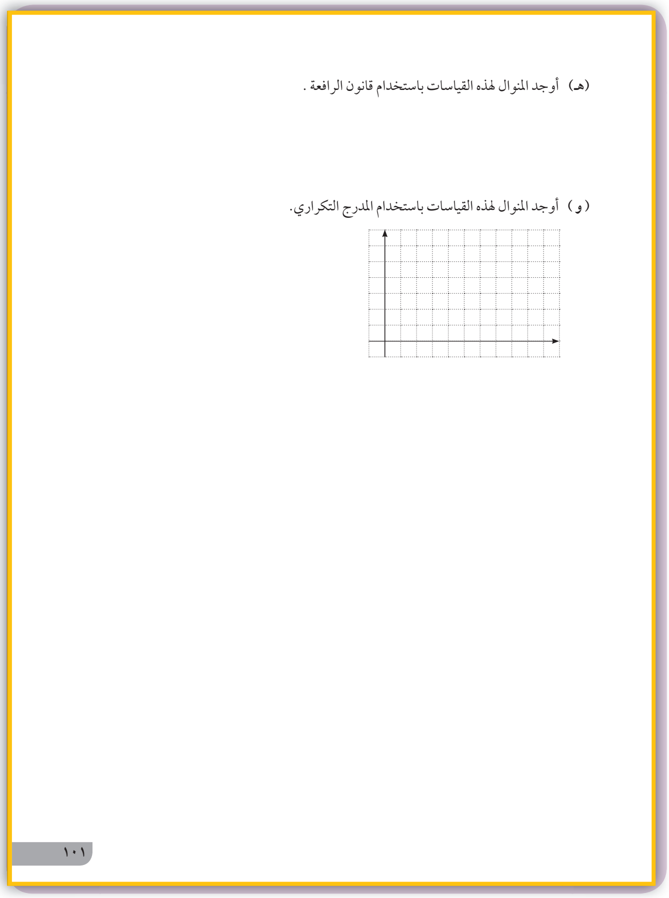
(جـ) أوجد الوسيط لهذه الأوزان باستخدام منحنى التكرار المتجمع النازل.

الفئة	التكرار	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٣٨–	١١		
٤٠–	١٦		
٤٢–	١٧		
٤٤–	٦		

(د) أوجد الوسيط لهذه الأوزان باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد ومنحنى التكرار المتجمع النازل معًا.

الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا لفئة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٣٨–	١١				
٤٠–	١٦				
٤٢–	١٧				
٤٤–	٦				

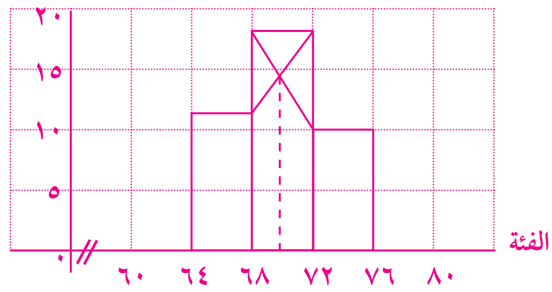
١٠٠


(هـ) أوجد المنوال لهذه القياسات باستخدام قانون الرافعة .

(و) أوجد المنوال لهذه القياسات باستخدام المدرج التكراري.

١٠١

٧ فئة المنوال: ٦٨–



المنوال:
٦٩,٥ تقريبًا

١٠-٢: الأرباعيات

١ الأهداف

- يتعرف مفهوم مقاييس التشتت.
- يتعرف المدى للبيانات.
- يتعرف الأرباعيات: الأدنى، الأوسط، الأعلى.
- يتعرف على مجمل الأعداد الخمسة.
- يرسم الصندوق ذو العارضتين.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

مدى – أرباعي أدنى – أرباعي أوسط (الوسيط)– أرباعي أعلى – صندوق ذو العارضتين – مجمل الأعداد الخمسة.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة – آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اكتب على السبورة البيانات التالية: ٧، ٥، ٨، ٩، ٦، ١٠، ٤.

اطلب إلى الطلاب:

- ترتيب هذه البيانات تصاعديًّا.
- إيجاد القيمة الصغرى والقيمة العظمى ثم الفرق بينهما.
- إيجاد الوسيط لهذه البيانات.
- إيجاد المنوال.
- إيجاد المتوسط الحسابي.
- إيجاد وسيط الأعداد: ٤، ٥، ٦، ثم إيجاد وسيط الأعداد: ٨، ٩، ١٠.

٥ التدريس

تأكد من أن الطلاب يتفاعلون باهتمام كبير مع فقرة «عمل تعاوني»، لأن هذه الفقرة سوف تساعدهم في فهم ما سوف يأتي في سياق الدرس وخاصة في إيجاد الأرباعيات والمدى للبيانات.

ركز مع الطلاب على أهمية إيجاد مجمل الأعداد الخمسة بعد ترتيب البيانات تصاعديًّا، لأن ذلك سوف يساعدهم على رسم مخطط الصندوق.

اشرح بإسهاب دور كل أرباعي في البيانات، وأهمية المدى الأرباعي.

اطلب إليهم، من خلال استخدام أمثلة متعددة، إيجاد النسبة المئوية للبيانات، الموجودة في المدى الأرباعي $ر_3 - ر_1$.

شجع الطلاب على رسم مخطط الصندوق بشكل دقيق حتى

١٠-٢

الأرباعيات
Quartiles

سوف تتعلم

من مقاييس التشتت
- المدى
- الأرباعيات
- الصندوق ذو العارضتين

عمل تعاوني

كانت درجات الطلاب في مادة الرياضيات حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة كما يلي:

١٤، ١٥، ١٧، ٩، ٨، ١٠، ١٣، ١٤، ١٦، ١٧،

٧، ٥، ٦، ٩، ١٤، ١٩، ١٥، ١٠، ١١،

١٤، ١٠، ١٧، ١٦، ١٨، ١٠، ٦، ١٢، ١٠.

١ أوجد الفرق بين أعلى قيمة وأدنى قيمة.
٢ رتب قيم هذه البيانات تصاعديًّا.
٣ أوجد الوسيط لهذه البيانات.
٤ يقسم الوسيط قيم البيانات إلى قسمين متساويين:
أ أوجد الوسيط الأدنى لمجموعة القيم التي هي أصغر من الوسيط الذي حصلت عليه في السؤال (٣).
ب أوجد الوسيط الأعلى لمجموعة القيم التي هي أكبر من الوسيط الذي حصلت عليه في السؤال (٣).
٥ رتب تصاعديًّا القيم التالية:
القيمة الصغرى للبيانات، الوسيط الأدنى، الوسيط، الوسيط الأعلى، القيمة العظمى للبيانات.

تذكر:
الوسيط: هو القيمة من البيانات التي تأتي في المنتصف بعد ترتيبها تصاعديًّا أو تنازليًّا.

إن **مقاييس النزعة المركزية** تعطينا فكرة عن قرب أو بعد قيم البيانات عن المتوسط الحسابي أو عن الوسيط ولكنها لا توضح كيفية توزيع هذه القيم وانتشارها.

تصف مقاييس الانتشار (التشتت) مدى التغير في البيانات.

يكون التشتت صغيرًا عندما تكون مفردات البيانات متقاربة من بعضها ويكون كبيرًا عندما تكون المفردات متباعدة

فأهمية دراسة التشتت تكمن في معرفة مدى تجانس قيم هذه البيانات .

إذا كان لدينا مجموعتان من البيانات لديهما نفس المتوسط الحسابي.

فإن المجموعة التي قيم بياناتها قريبة أكثر من المتوسط الحسابي تكون الأكثر تجانسًا وانسجامًا في ما بينها.

أبسط مقاييس الانتشار هو معرفة المدى.

المدى = القيمة العظمى – القيمة الصغرى.

يوضح المدى الانتشار الكامل لقيم البيانات والذي يمكن أن يتضمن القيمة المتطرفة والتي قد تزيد المدى بشكل كبير، وبالتالي تعطي فكرة خاطئة عن انتشار قيم البيانات.

١٧٠

مثال (١)

أوجد المدى لقيم البيانات التالية:
أ ٧، ٨، ١٠، ١٢، ٦، ٩، ١١، ١٤
ب ١٢، ١٥، ١٠، ١١، ٢٠، ١٨، ٤٧

الحل:
أ المدى = ١٤ – ٦ = ٨
ب المدى = ٤٧ – ١٠ = ٣٧. القيمة المتطرفة ٤٧ أعطت مدًى كبيرًا جدًّا لانتشار القيم.

حاول أن تحل

١ أوجد المدى لقيم البيانات التالية:
أ ٥٧، ٥٣، ٤٠، ٤٥، ٤٨، ٥٩
ب ١٢٥، ١٧٦، ١٢٨، ١٣٠، ١٣٢، ١٢٤

لكي نتجاهل المدى الكبير الناتج عن القيمة المتطرفة في قيم البيانات نستخدم الأرباعيات والمدى الأرباعي.

الأرباعيات Quartiles

يقسم الوسيط قيم البيانات إلى نصفين وتقسم الأرباعيات قيم البيانات إلى ٤ أرباع ومنها نستنتج:

أ الأرباعي الأول $ر_1$ وهو وسيط النصف الأدنى من قيم البيانات ويسمى **الأرباعي الأدنى**.
ب الأرباعي الثاني $ر_2$ وهو وسيط قيم البيانات ويسمى **الوسيط**.
ج الأرباعي الثالث $ر_3$ وهو وسيط النصف الأعلى من قيم البيانات ويسمى **الأرباعي الأعلى**.
د المدى الأرباعي = $ر_3 - ر_1$.

تسمى (القيمة الصغرى، الأرباعي الأدنى، الوسيط، الأرباعي الأعلى، القيمة العظمى) "مجمل الأعداد الخمسة".

مثال (٢)

يبين الجدول التالي نتائج الدوري الكويتي الممتاز لكرة القدم ٢٠١١ – ٢٠١٢.

الفريق	القادسية	الكويت	العربي	السالمية	الجهراء	كاظمة	النصر	الشباب
النقاط	٥١	٤٠	٣٣	٢٥	٢٤	٢٢	١٧	١٤

أ رتب هذه القيم تصاعديًّا.
ب أوجد قيمة المدى.
ج أوجد قيم الوسيط والأرباعيات (الأدنى والأعلى والمدى الأرباعي).
د اكتب "مجمل الأعداد الخمسة".

١٧١

يلاحظوا جيّدًا انتشار البيانات داخل الصندوق وخارجه وكيفية اقترابهم من الوسيط أو بعدهم عنه.
اطلب إليهم إيجاد النسب المئوية من البيانات بين الأرباعي الأدنى والوسيط وبين الأرباعي الأعلى والوسيط وفي كل مرة اسألهم عن ملاحظاتهم. مثال (٣).
في المثال (٤)، إن مقارنة البيانات عن طريق رسم مخططات الصناديق جنبًا إلى جنب تساعد كثيرًا على مقارنة هذه البيانات وكيفية انتشارها.

٦ الربط

الأمثلة (٢)، (٣)، (٤) تربط بين البيانات والمفاهيم والمهارات في هذا الدرس.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تحديد الأرباعي الأدنى والأرباعي الأعلى. أكّد لهم أن الوسيط يقسم البيانات إلى قسمين متساويين، واطلب إليهم تلوين قيمة الوسيط، ثم تحديد وسيط النصف الأدنى ووسيط النصف الأعلى.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يجيبون عن الأسئلة في فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من حسن أدائهم ومن فهمهم لكل ماورد.

اختبار سريع

تبين من دراسة لأعمار الصغار في إحدى مراكز الحضانة بالسنوات ما يلي: ٣، ٤، ٣، ٥، ٥، ٤، ٤، ٣، ٢، ٣، ٥، ٣.

١ رتب قيم البيانات تصاعديًّا.

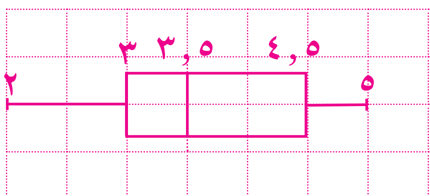
٢، ٣، ٣، ٣، ٣، ٣، ٤، ٤، ٤، ٥، ٥، ٥.

٢ أوجد قيم الوسيط، الوسيط الأدنى، الوسيط الأعلى ثم اكتب القيم الخمس.

الوسيط = ٣,٥، الوسيط الأدنى = ٣، الوسيط الأعلى = ٤,٥ القيم الخمس: ٢، ٣، ٣,٥، ٤,٥، ٥

٣ مثل هذه البيانات بالصندوق ذي العارضتين. ماذا تلاحظ؟

التمثيل بالصندوق



يلاحظ أن الأعمار بالسنوات في مركز الحضانة تتقارب أكثر بين ٣ سنوات و ٣,٥ سنة أي بين الوسيط الأدنى والوسيط.

الحل:

أ ١٤، ١٧، ٢٢، ٢٤، ٢٥، ٣٣، ٤٠، ٥١

ب المدى: ٥١ − ١٤ = ٣٧ (نلاحظ أن المدى كبير)

ج الوسيط ($ر_٢$) = $\frac{٢٤ + ٢٥}{٢}$ = ٢٤,٥

البيانات مع الوسيط: ١٤، ١٧، ٢٢، ٢٤، $ر_٢$ = ٢٤,٥، ٢٥، ٣٣، ٤٠، ٥١

الأرباعي الأدنى هو وسيط القيم: ١٤، ١٧، ٢٢، ٢٤

$ر_١$ = $\frac{١٧ + ٢٢}{٢}$ = ١٩,٥

الأرباعي الأعلى هو وسيط القيم: ٢٥، ٣٣، ٤٠، ٥١

$ر_٣$ = $\frac{٣٣ + ٤٠}{٢}$ = ٣٦,٥

المدى الأرباعي = ٣٦,٥ − ١٩,٥ = ١٧

د مجمل الأعداد الخمسة: (١٤، ١٩,٥، ٢٤,٥، ٣٦,٥، ٥١)

ملاحظة: يمكن ترتيب قيم البيانات على الشكل التالي:

١٤، ١٧، $ر_١$ = ١٩,٥، ٢٢، ٢٤، الوسيط $ر_٢$ = ٢٤,٥، ٢٥، ٣٣، $ر_٣$ = ٣٦,٥، ٤٠، ٥١

حاول أن تحل

٢ يبين الجدول التالي نتائج الدوري الكويتي لكرة القدم ٢٠١٠− ٢٠١١.

الفريق	القادسية	الكويت	العربي	كاظمة	الجهراء	النصر	السالمية	الشباب
النقاط	٥١	٤٧	٣٩	٣٨	١٩	١٦	١٤	١٢

أ أوجد الوسيط والمدى والأرباعيات والمدى الأرباعي لقيم هذه البيانات.

ب اكتب "مجمل الأعداد الخمسة".

منطط الصندوق Box Plot

هو تمثيل بياني يصف مجمل الأعداد الخمسة لقيم البيانات وهو يتكون من مستطيل مركزي (الصندوق) يمثل الأرباعي الأدنى $ر_١$ والوسيط $ر_٢$ والأرباعي الأعلى $ر_٣$ وقطعتين مستقيمتين من الجهتين تمثلان القيمة الصغرى والقيمة العظمى ونسميهما **العارضتين**.

١٧٢

التاريخُ الهجريُّ:............ التاريخُ الميلاديُّ:............

تمرّنْ ١٠-٢

الأرباعيات

Quartiles

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أوجد المدى لقيم البيانات التالية:

(أ) ٧، ٤، ٦، ٨، ٩، ١٠، ٥، ٤، ٣.

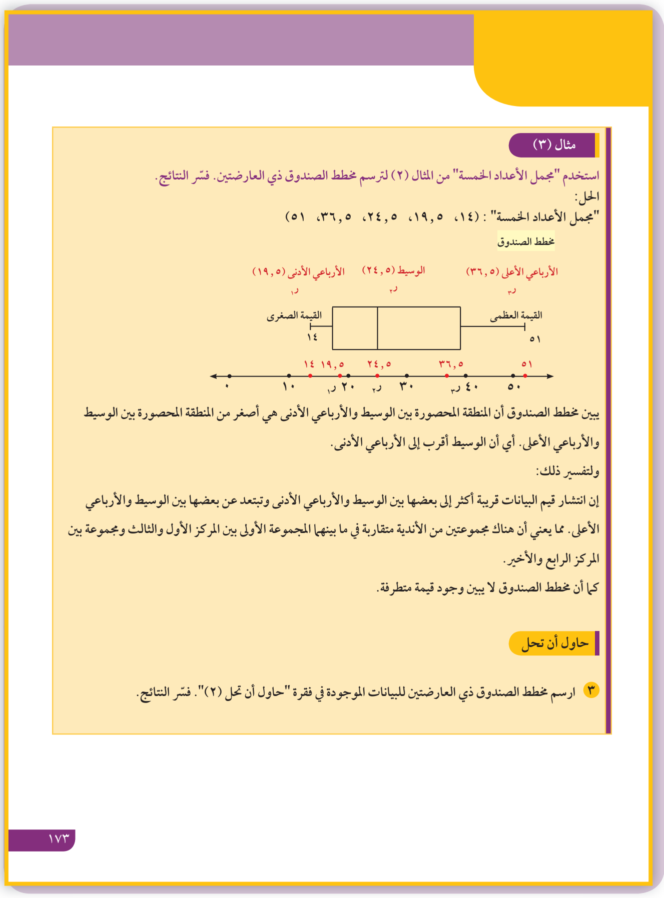
(ب) ١٧، ٢٠، ١١، ٢٣، ١٥، ١٨، ١٩، ١٢، ١٦.

(٢) أوجد مجمل الأعداد الخمسة للبيانات: ٥٢، ٦٠، ٥٠، ٥٤، ٥٩، ٦٥، ٦٦، ٦٤، ٩٥، ٦٢.

(٣) (أ) أوجد مجمل الأعداد الخمسة للقيم التالية التي تمثل أوزان أكياس من الأرز: ١١، ١٢، ١٣، ١٧، ٢٣، ٢٦، ٢٧، ٥٠.

(ب) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين لقيم البيانات في (أ). ماذا تستنتج؟ اشرح.

١٠٢



مثال (٣)

استخدم "مجمل الأعداد الخمسة" من المثال (٢) لترسم مخطط الصندوق ذي العارضتين. فسّر النتائج.

الحل:

"مجمل الأعداد الخمسة" : (١٤، ١٩,٥، ٢٤,٥، ٣٦,٥، ٥١)

يبين مخطط الصندوق أن المنطقة المحصورة بين الوسيط والأرباعي الأدنى هي أصغر من المنطقة المحصورة بين الوسيط والأرباعي الأعلى. أي أن الوسيط أقرب إلى الأرباعي الأدنى.

ولتفسير ذلك:

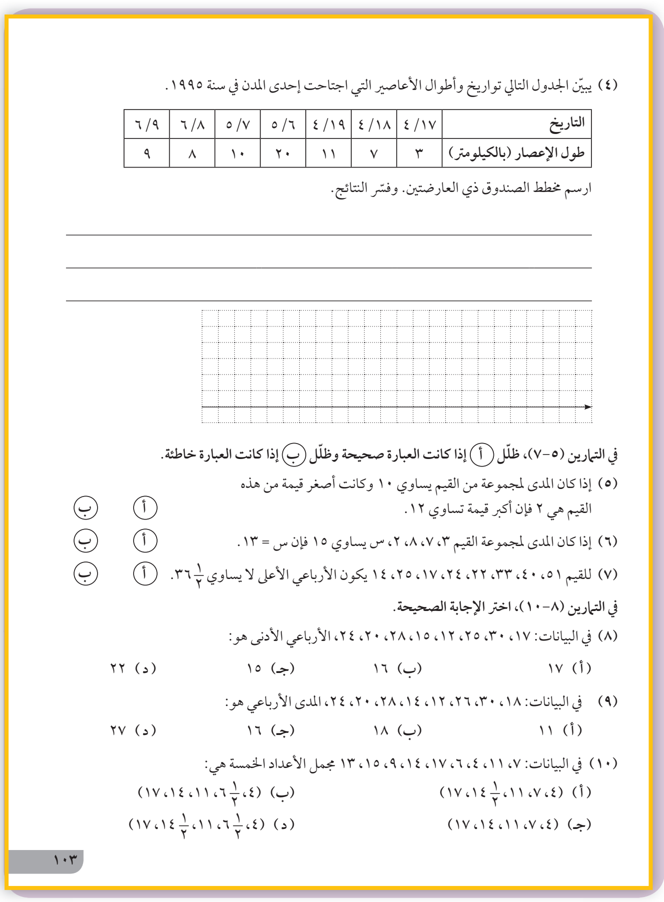
إن انتشار قيم البيانات قريبة أكثر إلى بعضها بين الوسيط والأرباعي الأدنى وتبتعد عن بعضها بين الوسيط والأرباعي الأعلى. مما يعني أن هناك مجموعتين من الأندية متقاربة في ما بينهما المجموعة الأولى بين المركز الأول والثالث ومجموعة بين المركز الرابع والأخير.

كما أن مخطط الصندوق لا يبين وجود قيمة متطرفة.

حاول أن تحل

٣ ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين للبيانات الموجودة في فقرة "حاول أن تحل (٢)". فسّر النتائج.

١٧٣



(٤) يبيّن الجدول التالي تواريخ وأطوال الأعاصير التي اجتاحت إحدى المدن في سنة ١٩٩٥.

التاريخ	٤/١٧	٤/١٨	٤/١٩	٥/٦	٥/٧	٦/٨	٦/٩
طول الإعصار (بالكيلومتر)	٣	٧	١١	٢٠	١٠	٨	٩

ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين. وفسّر النتائج.

في التمارين (٥–٧)، ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة وظلّل (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

(٥) إذا كان المدى لمجموعة من القيم يساوي ١٠ وكانت أصغر قيمة من هذه القيم هي ٢ فإن أكبر قيمة تساوي ١٢. (أ) (ب)

(٦) إذا كان المدى لمجموعة القيم ٣، ٧، ٨، ٢، س يساوي ١٥ فإن س = ١٣. (أ) (ب)

(٧) للقيم ٥١، ٤٠، ٣٣، ٢٢، ٢٤، ١٧، ٢٥، ١٤ يكون الأرباعي الأعلى لا يساوي $٣٦\frac{١}{٢}$. (أ) (ب)

في التمارين (٨–١٠)، اختر الإجابة الصحيحة.

(٨) في البيانات: ١٧، ٣٠، ٢٥، ١٢، ١٥، ٢٨، ٢٠، ٢٤، الأرباعي الأدنى هو:

(أ) ١٧ (ب) ١٦ (جـ) ١٥ (د) ٢٢

(٩) في البيانات: ١٨، ٣٠، ٢٦، ١٢، ١٤، ٢٨، ٢٠، ٢٤، المدى الأرباعي هو:

(أ) ١١ (ب) ١٨ (جـ) ١٦ (د) ٢٧

(١٠) في البيانات: ٧، ١١، ٤، ٦، ١٧، ١٤، ٩، ١٥، ١٣ مجمل الأعداد الخمسة هي:

(أ) (٤، ٧، ١١، $١٤\frac{١}{٢}$، ١٧) (ب) (٤، $٦\frac{١}{٢}$، ١١، ١٤، ١٧)

(جـ) (٤، ٧، ١١، ١٤، ١٧) (د) (٤، $٦\frac{١}{٢}$، ١١، $١٤\frac{١}{٢}$، ١٧)

١٠٣

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

١ ١٩ − ٥ = ١٤

٢ ٥، ٦، ٦، ٧، ٨، ٩، ٩، ١٠، ١٠، ١٠، ١٠، ١٠، ١٠، ١١، ١٢، ١٣، ١٤، ١٤، ١٤، ١٤، ١٥، ١٥، ١٦، ١٦، ١٧، ١٧، ١٧، ١٨، ١٩.

٣ $\frac{١٢ + ١٣}{٢}$ = ١٢,٥ (الوسيط).

٤ (أ) الوسيط الأدنى = $\frac{٩ + ١٠}{٢}$ = ٩,٥

(ب) الوسيط الأعلى = $\frac{١٥ + ١٦}{٢}$ = ١٥,٥

٥ القيمة الصغرى (٥)، الوسيط الأدنى (٩,٥)، الوسيط (١٢,٥)، الوسيط الأعلى (١٥,٥)، القيمة العظمى (١٩).

«حاول أن تحل»

١ (أ) ٥٩ − ٤٠ = ١٩

(ب) ١٧٦ − ١٢٤ = ٥٢

٢ (أ) ترتيب البيانات: ١٢، ١٤، ١٦، ١٩، ٣٨، ٣٩، ٤٧، ٥١

الوسيط = $\frac{١٩ + ٣٨}{٢}$ = ٢٨,٥

المدى = ٥١ − ١٢ = ٣٩

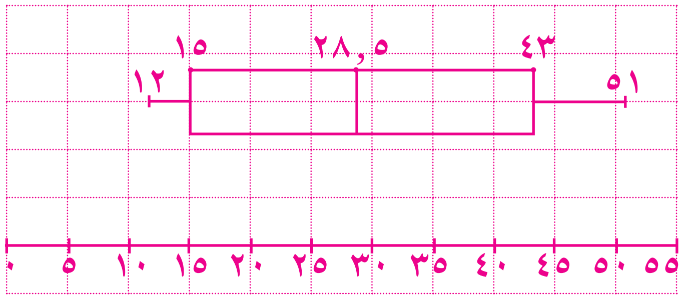
الأرباعي الأدنى = $\frac{١٤ + ١٦}{٢}$ = ١٥

الأرباعي الأعلى = $\frac{٣٩ + ٤٧}{٢}$ = ٤٣

المدى الأرباعي = ٤٣ − ١٥ = ٢٨

(ب) مجمل الأعداد الخمسة = (١٢، ١٥، ٢٨,٥، ٤٣، ٥١).

❸ مخطط الصندوق للبيانات الموجودة في فقرة «حاول أن تحل (٢)»



نلاحظ توزيع متقارب بين الوسيط والوسيط الأدنى والوسيط الأعلى وذلك لنقاط الفرق.

يمكن رسم مخططين لصندوقين لمقارنة النتائج.

مثال (٤)

تمثل المجموعة الأولى بيانات معدل مصروف المنزل الشهري على الطعام بالدولار الأمريكي في ١٢ بلدًا أوروبيًّا:

٣١٠، ٤٢٠، ٧٥٠، ٤٥٠، ٥٢٠، ٦٨٠، ٤٧٠، ٤٩٠، ٥٩٠، ٥٦٠، ٣٨٠، ٣٥٠ .

تمثل المجموعة الثانية بيانات معدل مصروف المنزل الشهري على الطعام بالدولار الأمريكي في ١٢ بلدًا عربيًّا:

١٠٥٠، ٦٥٠، ٧٠٠، ٣٧٠، ٩٠٠، ٨٠٠، ٢٢٠، ٨٣٠، ١١٠٠، ١١٩٠، ١٩٠، ٧٦٠.

❶ رتب البيانات بطريقة تصاعدية.

❷ أوجد الوسيط والأرباعي الأدنى والأعلى لكل مجموعة من البيانات بالإضافة إلى القيمة الأصغر والقيمة الأكبر لكل مجموعة من البيانات.

❸ ارسم مخططين لصندوقين مستخدمًا البيانات المرتبة تصاعديًّا لكل من المجموعتين الأولى والثانية.

❹ فسّر النتائج.

الحل:

❶ المجموعة الأولى بحسب الترتيب التصاعدي:

٣١٠، ٣٥٠، ٣٨٠، ٤٢٠، ٤٥٠، ٤٧٠، ٤٩٠، ٥٢٠، ٥٦٠، ٥٩٠، ٦٨٠، ٧٥٠.

المجموعة الثانية بحسب الترتيب التصاعدي:

١٩٠، ٢٢٠، ٣٧٠، ٦٥٠، ٧٠٠، ٧٦٠، ٨٠٠، ٨٣٠، ٩٠٠، ١٠٥٠، ١١٠٠، ١١٩٠.

❷ القيمة الصغرى = ٣١٠، وسيط المجموعة الأولى = $\frac{٤٧٠ + ٤٩٠}{٢}$ = ٤٨٠ ،

الأرباعي الأدنى = ٤٠٠، الأرباعي الأعلى = ٥٧٥،

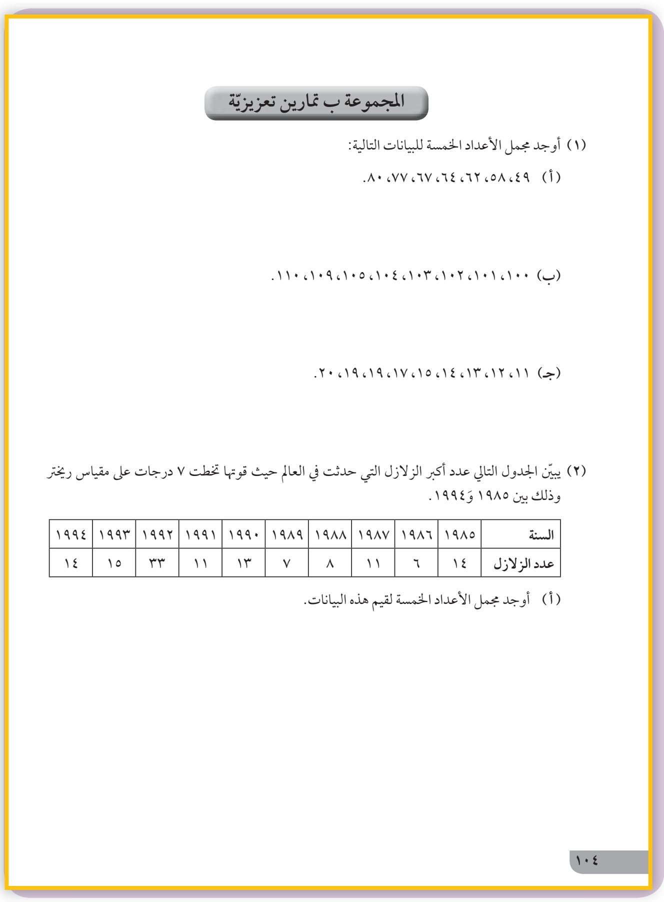
القيمة الكبرى = ٧٥٠.

القيمة الصغرى = ١٩٠، وسيط المجموعة الثانية = $\frac{٧٦٠ + ٨٠٠}{٢}$ = ٧٨٠ ،

الأرباعي الأدنى = ٥١٠ ، الأرباعي الأعلى = ٩٧٥،

القيمة الكبرى = ١١٩٠ .

١٧٤



المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

(١) أوجد مجمل الأعداد الخمسة للبيانات التالية:

(أ) ٤٩، ٥٨، ٦٢، ٦٤، ٦٧، ٧٧، ٨٠.

(ب) ١٠٠، ١٠١، ١٠٢، ١٠٣، ١٠٤، ١٠٥، ١٠٩، ١١٠.

(جـ) ١١، ١٢، ١٣، ١٤، ١٥، ١٧، ١٩، ١٩، ٢٠.

(٢) يبيّن الجدول التالي عدد أكبر الزلازل التي حدثت في العالم حيث قوتها تخطت ٧ درجات على مقياس ريختر وذلك بين ١٩٨٥ وَ١٩٩٤.

السنة	١٩٨٥	١٩٨٦	١٩٨٧	١٩٨٨	١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤
عدد الزلازل	١٤	٦	١١	٨	٧	١٣	١١	٣٣	١٥	١٤

(أ) أوجد مجمل الأعداد الخمسة لقيم هذه البيانات.

١٠٤

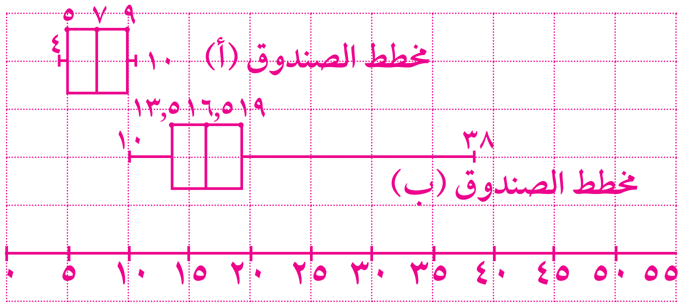
٤ (أ) ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠

الأعداد الخمسة = (٤، ٥، ٧، ٩، ١٠)

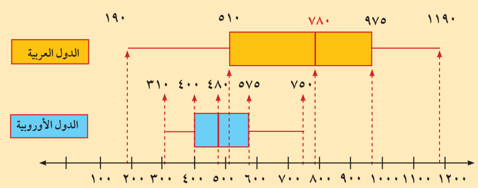
(ب) ١٠، ١٢، ١٥، ١٦، ١٧، ١٨، ٢٠، ٣٨

الأعداد الخمسة = (١٠، ١٣,٥، ١٦,٥، ١٩، ٣٨)

مخططا الصندوقين جنبًا إلى جنب.



٣



٤ الصندوق الذي يمثل الدول العربية أطول من الصندوق الذي يمثل الدول الأوروبية ما معناه أن هناك تباعد في المصروف الشهري بين الدول العربية والدول الأوروبية على الطعام. ففي الدول الأوروبية نجد أن الوسيط أقرب إلى الأرباعي الأدنى وهو أبعد من الأرباعي الأعلى مما يدل على أن المصروف على الطعام أقرب إلى ٤٥٠ دولارًا شهريًّا علمًا أنه لا يوجد قيمًا متطرفة لأن المدى يساوي:

٧٥٠−٣١٠ = ٤٤٠.

أما في مجموعة الدول العربية الوسيط أقرب إلى الأرباعي الأعلى من الأرباعي الأدنى مما يعني أن المجتمعات العربية تنفق كثيرًا على الطعام حوالى ٧٨٠ دولارًا شهريًّا، ولكن نجد أيضًا أن هناك تفاوت كبيرفي المجتمعات العربية لأن المدى يساوي:

١١٩٠−١٩٠ = ١٠٠٠ ما يدل على التفاوت الاجتماعي في الدول العربية.

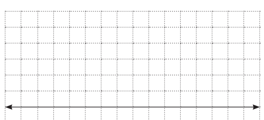
حاول أن تحل

٤ ارسم مخططين لصندوقين لقيم البيانات التالية وفسّر النتائج:

أ ٧، ٨، ٤، ٥، ٩، ١٠، ٦

ب ١٢، ١٠، ١٥، ١٦، ٢٠، ١٧، ١٨، ٣٨

(ب) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين لقيم هذه البيانات بدون القيمة المتطرفة.



(٣) يبيّن الجدول التالي معدل دخل الفرد السنوي في بعض الدول العربية بالدولار الأميركي بحسب البنك الدولي (أعداد تقريبية).

الدولة	الإمارات العربية المتحدة	المملكة العربية السعودية	دولة الكويت	سلطنة عمان	دولة قطر	لبنان	الأردن	تونس	سورية	مملكة البحرين
معدل الدخل بآلاف الدولارات	٢٤	١٠	٢٢	٩	٢٩	٦	٢	٣	١	١٤

(أ) أوجد مجمل الأعداد الخمسة لقيم هذه البيانات.

(ب) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين لقيم هذه البيانات. ماذا تستنتج؟ اشرح.

١٠-٣: الانحراف المعياري

١ الأهداف

- يوجد التباين لمجموعة من البيانات.
- يستنتج الانحراف المعياري.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

تباين - انحراف معياري .

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية - حاسوب - جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اكتب على السبورة البيانات التالية:

٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢، ١٣

اطلب إلى الطلاب:

- إيجاد المتوسط الحسابي لهذه البيانات.
- إيجاد الوسيط لهذه البيانات.
- إيجاد: $\sqrt{٢٢٥}$ ، $\sqrt{١٣٤}$.
- اسأله الفرق بين $|٧ - ٩|$ و $|٩ - ٧|$.
- اسأله الفرق بين $(أ - جـ)^٢$ و $(جـ - أ)^٢$.

٥ التدريس

يعتبر الانحراف المعياري من أهم المؤشرات المستخدمة في علم الإحصاء كونه يعطينا فكرة واضحة عن تشتت البيانات بالنسبة إلى المتوسط الحسابي.

ركز مع الطلاب على فقرة «عمل تعاوني»، إذ إنها توضح كيف أن مجموعتين من البيانات لهما المتوسط الحسابي نفسه، علمًا بأن الشعبتين مختلفتين والدرجات مختلفة إذ يوجد في الجدول الثاني قيمتان ١١، ١٦ من الدرجات.

لذا، وجد الإحصائيون أن مقاييس النزعة المركزية لا تعطي فكرة شاملة عن تشتت البيانات، ما جعلهم يبحثون عن مقاييس أكثر دقة، فكان الانحراف المعياري.

يجب تنبيه الطلاب إلى ضرورة تكوين جداول كما في الأمثلة (١)، (٢)، (٣) للحصول على معطيات صحيحة يمكن إدخالها إلى برنامج الإحصاء في الآلة الحاسبة المستخدمة.

١٠-٣

الانحراف المعياري
Standard Deviation

سوف تتعلم

من مقاييس التشتت:
- التباين
- الانحراف المعياري

عمل تعاوني

أراد معلم الفصل مقارنة درجات ٨ طلاب الأوائل من الشعبة (أ) والشعبة (ب) للصف العاشر حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة.

درجات الشعبة أ: ١٠، ١٢، ١٣، ١٤، ١٥، ١٧، ١٩، ١٢.

درجات الشعبة ب: ١١، ١٢، ١٣، ١٤، ١٤، ١٥، ١٦، ١٧.

أ أوجد $\overline{س}$ المتوسط الحسابي لدرجات طلاب الشعبة أ.

ب أوجد $\overline{ص}$ المتوسط الحسابي لدرجات طلاب الشعبة ب.

جـ استنادًا إلى قيم $\overline{س}$، $\overline{ص}$؛ هل يستطيع معلم الفصل أن يقرر أي مجموعة من الطلاب درجاتهم هي الأفضل؟

د أكمل الجدولين التاليين:

شعبة (أ)

$س_ر$	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^٢$
١٠		
١٢		
١٢		
١٣		
١٤		
١٥		
١٧		
١٩		
	المجموع	

شعبة (ب)

$ص_ر$	$ص_ر - \overline{ص}$	$(ص_ر - \overline{ص})^٢$
١١		
١٢		
١٣		
١٤		
١٤		
١٥		
١٦		
١٧		
	المجموع	

سوف تتعلم في هذا البند مؤشرات أخرى من مقاييس التشتت وهي التباين $ع^٢$ والانحراف المعياري ع.

التباين والانحراف المعياري Variance and Standard Deviation

إذا كانت $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، ... ، $س_ن$ مجموعة من القيم عددها ن حيث متوسطها الحسابي $\overline{س}$ فإن:

$$\text{التباين} = ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢}{ن}$$

$$\text{ومنه الانحراف المعياري} = ع = \sqrt{ع^٢}$$

١٧٦

إذا كانت $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، ...، $س_ن$ هي قيم بيانات؛ $ت_١$، $ت_٢$، $ت_٣$، ....، $ت_ن$ هي تكرار هذه القيم على الترتيب فيكون التباين لهذه القيم هو:

$$ع^٢ = \frac{ت_١(س_١ - \overline{س})^٢ + ت_٢(س_٢ - \overline{س})^٢ + ... + ت_ن(س_ن - \overline{س})^٢}{ت_١ + ت_٢ + ... + ت_ن}$$

$$= \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر (س_ر - \overline{س})^٢}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر}$$

$$\text{والانحراف المعياري} = ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر (س_ر - \overline{س})^٢}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر}}$$

معلومة رياضية:

- $(س_ر - \overline{س})$ هي انحراف $س_ر$ عن المتوسط الحسابي.
- المتوسط الحسابي: هو ناتج قسمة مجموع قيم البيانات على عدد هذه القيم.

مثال (١)

أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم البيانات:

٤، ٦، ٨، ٥، ٣، ٧، ٢

الحل:

نوجد أولًا المتوسط الحسابي:

$$\overline{س} = \frac{٤ + ٦ + ٨ + ٥ + ٣ + ٧ + ٢}{٧} = \frac{٣٥}{٧} = ٥$$

نكون الجدول التالي:

القيمة $س_ر$	الانحراف عن المتوسط الحسابي $س_ر - \overline{س}$	مربع الانحراف عن المتوسط الحسابي $(س_ر - \overline{س})^٢$
٤	١-	١
٦	١	١
٨	٣	٩
٥	٠	٠
٣	٢-	٤
٧	٢	٤
٢	٣-	٩
		المجموع = ٢٨

$$\text{التباين } ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢}{ن} = \frac{٢٨}{٧} = ٤$$

١٧٧

ونتيجة لذلك، يساعد الانحراف المعياري لمجموعتين من البيانات على مقارنتها لتحديد الأفضل بينهما، وهذه العملية تستخدم في الإنتاج بين عدة مصانع لسلعة واحدة كما في المثال (٢).

٦ الربط

يربط المثالان (٢) ، (٣) بين التباين والانحراف المعياري والمواقف الحياتية، حيث تظهر أهمية استخدام هذا المؤشر في عملية الإحصاء لتوقع نتائج واتخاذ قرارات مناسبة.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام الآلة الحاسبة عند إدخال البيانات، ساعدهم على فهم برنامج كل آلة حاسبة وكيفية استخدامها ليحصلوا على نتائج صحيحة.

٨ التقييم

إن متابعة الطلاب وهم يجيبون عن الأسئلة في فقرات «حاول أن تحل» توضح للمعلم قدرة الطلاب على التفاعل مع مفاهيم هذا الدرس ومهاراته.

اختبار سريع

أخذت عينة من الطلاب في القسم الثانوي لدراسة الأعمار بالسنوات فكانت النتائج كما يلي: ١٥، ١٦، ١٧، ١٨، ١٥، ١٨، ١٧، ١٥، ١٥، ١٤

١ أوجد المتوسط الحسابي لأعمار الطلاب $\overline{س}$.

$$\overline{س} = \frac{١٤ + ٤ \times (١٥) + ١٦ + ٢ \times (١٧) + ٢ \times (١٨)}{١٠}$$

$$= \frac{١٦٠}{١٠} = ١٦$$

٢ كوّن جدولًا يبيّن $ت_ر (س_ر - \overline{س})^٢$ والمجموع.

$س_ر$	$ت_ر$	$س_ر - \overline{س}$	$ت_ر (س_ر - \overline{س})^٢$
١٤	١	−٢	$١(-٢)^٢ = ٤$
١٥	٤	−١	$٤(-١)^٢ = ٤$
١٦	١	٠	٠
١٧	٢	١	$٢(١)^٢ = ٢$
١٨	٢	٢	$٢(٢)^٢ = ٨$
			المجموع = ١٨

التباين $ع^٢ = ٤$

الانحراف المعياري $ع = \sqrt{٤} = ٢$.

حاول أن تحل

١ أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم البيانات:
٩، ٧، ٨، ٦، ٤، ٢

مثال (٢)

يمكن استخدام الآلة الحاسبة

يبين الجدول التالي عدد الساعات القصوى لعمر ٧ مصابيح كهربائية بالساعات من إنتاجين مختلفين.

إنتاج (أ)	١٠٥٠	٩١٠	١٠٠٠	١٠٣٠	٩٤٠	٩٦٠	٩٧٠
إنتاج (ب)	١١٣٠	٧٠٠	٩٧٠	٩٦٠	١٠٥٠	١١٨٠	٨٧٠

أ أوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$ للإنتاج (أ) والمتوسط الحسابي $\overline{ص}$ للإنتاج (ب).

ب أوجد وسيط الإنتاج (أ) ثم وسيط الإنتاج (ب).

جـ ستبين الحسابات في السؤالين (أ)، (ب) أن المتوسط الحسابي في الإنتاجين هو نفسه وأن الوسيط في الإنتاجين هو نفسه. أوجد الانحراف المعياري $ع_١$ في الإنتاج (أ) والانحراف المعياري $ع_٢$ في الإنتاج (ب). ماذا تستنتج؟ أي إنتاج هو الأفضل؟

الحل:

أ $\overline{س} = \frac{١٠٥٠ + ٩١٠ + ١٠٠٠ + ١٠٣٠ + ٩٤٠ + ٩٦٠ + ٩٧٠}{٧} = ٩٨٠$

$\overline{ص} = \frac{١١٣٠ + ٧٠٠ + ٩٧٠ + ٩٦٠ + ١٠٥٠ + ١١٨٠ + ٨٧٠}{٧} = ٩٨٠$

١٧٨

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ١٠-٣

الانحراف المعياري

Standard Deviation

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أوجد الانحراف المعياري لقيم البيانات التالية (يمكن استخدام الآلة الحاسبة):

(أ) ٥٢، ٦٣، ٥٤، ٧٠، ٦٦.

(ب) ١، ٢، ١٧، ١٢، ١٥، ٨، ١٠، ١٥.

١٠٦

٣ استنتج التباين والانحراف المعياري.

التباين $\text{ع}^{٢} = \frac{١٨}{١٠} = ١,٨$

الانحراف المعياري $\text{ع} = \sqrt{١,٨} \simeq ١,٣٤$

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

(أ) المتوسط الحسابي في الجدول الأول: $\bar{\text{س}} = ١٤$.

(ب) المتوسط الحسابي في الجدول الثاني: $\bar{\text{ص}} = ١٤$.

(ج) إن الطلاب الأوائل في الشعبتين لديهم نفس معدل الدرجات لذا لا يمكن تحديد الشعبة الأفضل من خلال $\bar{\text{س}}$ و $\bar{\text{ص}}$

(د) شعبة (أ)

س	$\text{س}_\text{ر} - \bar{\text{س}}$	$(\text{س}_\text{ر} - \bar{\text{س}})^{٢}$
١٠	−٤	١٦
١٢	−٢	٤
١٢	−٢	٤
١٣	−١	١
١٤	٠	٠
١٥	١	١
١٧	٣	٩
١٩	٥	٢٥
		المجموع = ٦٠

شعبة (ب)

$\text{ص}_\text{ر}$	$\text{ص}_\text{ر} - \bar{\text{ص}}$	$(\text{ص}_\text{ر} - \bar{\text{ص}})^{٢}$
١١	−٣	٩
١٢	−٢	٤
١٣	−١	١
١٤	٠	٠
١٤	٠	٠
١٥	١	١
١٦	٢	٤
١٧	٣	٩
		المجموع = ٢٨

ب إنتاج (أ): ٩١٠، ٩٤٠، ٩٦٠، ٩٧٠، ١٠٠٠، ١٠٣٠، ١٠٥٠

الوسيط = ٩٧٠

إنتاج (ب): ٧٠٠، ٨٧٠، ٩٦٠، ٩٧٠، ١٠٥٠، ١١٣٠، ١١٨٠

الوسيط = ٩٧٠

جـ

القيمة $\text{س}_\text{ر}$	$\text{س}_\text{ر} - \bar{\text{س}}$	$(\text{س}_\text{ر} - \bar{\text{س}})^{٢}$
١٠٥٠	٧٠	٤٩٠٠
٩١٠	−٧٠	٤٩٠٠
١٠٠٠	٢٠	٤٠٠
١٠٣٠	٥٠	٢٥٠٠
٩٤٠	−٤٠	١٦٠٠
٩٦٠	−٢٠	٤٠٠
٩٧٠	−١٠	١٠٠
		المجموع = ١٤٨٠٠

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{س}_\text{ر} - \bar{\text{س}})^{٢}}{\text{ن}}}$$

الانحراف المعياري في الإنتاج (أ)

$\text{ع}_{١} = \sqrt{٢١١٤,٢٨٦} = ٤٥,٩٨$

$\text{ص}_\text{ر}$	$\text{ص}_\text{ر} - \bar{\text{ص}}$	$(\text{ص}_\text{ر} - \bar{\text{ص}})^{٢}$
١١٣٠	١٥٠	٢٢٥٠٠
٧٠٠	−٢٨٠	٧٨٤٠٠
٩٧٠	−١٠	١٠٠
٩٦٠	−٢٠	٤٠٠
١٠٥٠	٧٠	٤٩٠٠
١١٨٠	٢٠٠	٤٠٠٠٠
٨٧٠	−١١٠	١٢١٠٠
		المجموع = ١٥٨٤٠٠

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{س}_\text{ر} - \bar{\text{س}})^{٢}}{\text{ن}}}$$

الانحراف المعياري في الإنتاج (ب)

$\text{ع}_{٢} = \sqrt{٢٢٦٢٨,٥٧} = ١٥٠,٤٣$

١٧٩

نلاحظ أن $\text{ع}_{٢}$ يساوي $٣\text{ع}_{١}$ تقريبًا.

لذا في الإنتاج (ب) التشتت عن المتوسط الحسابي كبير وبالتالي المصابيح الكهربائية في الإنتاج (أ) هي الأفضل.

حاول أن تحل

٢ لتكن (أ)، (ب) مجموعتين من البيانات

(أ): ١٢، ١٠، ٧، ١٥، ٨، ١٩، ٢٠

(ب): ١٤، ١٨، ١٢، ٩، ٨، ١١، ١٩

أ أوجد المتوسط الحسابي $\bar{\text{س}}$ لقيم (أ) والمتوسط الحسابي $\bar{\text{ص}}$ لقيم (ب). ماذا تلاحظ؟

ب أوجد وسيط قيم المجموعة (أ)، ثم وسيط قيم المجموعة (ب). ماذا تلاحظ؟

جـ أوجد الانحراف المعياري $\text{ع}_{١}$ لقيم المجموعة (أ) والانحراف المعياري $\text{ع}_{٢}$ لقيم المجموعة (ب). أي القيم أقل تشتتًا عن متوسطها الحسابي؟ اشرح إجابتك.

معلومة:

من المتعارف عليه عند الإحصائيين أنه كلما كان الانحراف المعياري صغيرًا كلما كان تشتت قيم البيانات أقرب إلى المتوسط الحسابي، وكلما كان كبيرًا كان تشتت قيم البيانات بعيدًا عن المتوسط الحسابي.

ملاحظة: لحساب التباين لقيم بيانات في جدول تكراري ذو فئات نعتبر $\text{س}_\text{ر}$ هي مركز الفئة.

مثال (٣)

يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات ٦٠ طالبًا في امتحان نهاية العام الدراسي حيث النهاية العظمى ١٠٠ درجة.

الفئة (درجات)	٠−	٢٠−	٤٠−	٦٠−	٨٠−
التكرار	٤	٦	١٦	٢٤	١٠

أوجد المتوسط الحسابي $\bar{\text{س}}$ والتباين $\text{ع}^{٢}$ والانحراف المعياري ع لقيم هذه البيانات.

١٨٠

«حاول أن تحل»

① نوجد أولًا المتوسط الحسابي $\overline{\text{س}} = ٦$

نكوّن الجدول:

$\text{س}_ر$	$\text{س}_ر - \overline{\text{س}}$	$(\text{س}_ر - \overline{\text{س}})^٢$
٩	٣	٩
٧	١	١
٨	٢	٤
٦	٠	٠
٤	−٢	٤
٢	−٤	١٦

المجموع = ٣٤

$\text{ع}^٢ = \frac{٣٤}{٦} = ٥,\overline{٦}$

الانحراف المعياري ع $\simeq$ ٢,٣٨.

② (أ): ٧، ٨، ١٠، ١٢، ١٥، ١٩، ٢٠.

(ب): ٨، ٩، ١١، ١٢، ١٤، ١٨، ١٩.

(أ) $\overline{\text{س}} = ١٣$ ، $\overline{\text{ص}} = ١٣$.

البيانات (أ) و (ب) لهما المتوسط الحسابي نفسه وهو ١٣.

(ب) وسيط قيم (أ) = ١٢

وسيط قيم (ب) = ١٢

ولهما أيضًا الوسيط نفسه وهو ١٢.

(جـ) للمجموعة (أ)

$\text{س}_ر$	$\text{س}_ر - \overline{\text{س}}$	$(\text{س}_ر - \overline{\text{س}})^٢$
١٢	−١	١
١٠	−٣	٩
٧	−٦	٣٦
١٥	٢	٤
٨	−٥	٢٥
١٩	٦	٣٦
٢٠	٧	٤٩

$\text{ع}_١^٢ = \frac{١٦٠}{٧}$

$\text{ع}_١ = \sqrt{\frac{١٦٠}{٧}}$

$\text{ع}_١ \simeq ٤,٨$

الحل:

المتوسط الحسابي: $\frac{\sum \text{س}_ر \text{ت}_ر}{\sum \text{ت}_ر} = \frac{٣٦٠٠}{٦٠} = ٦٠$

$\therefore \overline{\text{س}} = ٦٠$

الفئة	مركز الفئة $\text{س}_ر$	التكرار $\text{ت}_ر$	$\text{س}_ر \text{ت}_ر$	$(\text{س}_ر - \overline{\text{س}})$	$(\text{س}_ر - \overline{\text{س}})^٢$	$(\text{س}_ر - \overline{\text{س}})^٢ \times \text{ت}_ر$
٠−	١٠	٤	٤٠	−٥٠	٢٥٠٠	١٠٠٠٠
٢٠−	٣٠	٦	١٨٠	−٣٠	٩٠٠	٥٤٠٠
٤٠−	٥٠	١٦	٨٠٠	−١٠	١٠٠	١٦٠٠
٦٠−	٧٠	٢٤	١٦٨٠	١٠	١٠٠	٢٤٠٠
٨٠−	٩٠	١٠	٩٠٠	٣٠	٩٠٠	٩٠٠٠
		المجموع: ٦٠	المجموع: ٣٦٠٠			المجموع: ٢٨٤٠٠

التباين = $\frac{\sum (\text{س}_ر - \overline{\text{س}})^٢ \text{ت}_ر}{\sum \text{ت}_ر} = \frac{٢٨٤٠٠}{٦٠} = ٤٧٣\frac{١}{٣}$

التباين = $\text{ع}^٢ = ٤٧٣,\overline{٣}$

الانحراف المعياري: $\text{ع} = \sqrt{٤٧٣,\overline{٣}} \simeq ٢١,٧٥٦$

حاول أن تحل

③ يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان ١٠٠ طالب ثانوي (الوزن بالكيلوجرام).

الفئة	٦٠−	٦٤−	٦٨−	٧٢−	٧٦
التكرار	٥	١٨	٤٢	٢٧	٨

أوجد المتوسط الحسابي $\overline{\text{س}}$ والانحراف المعياري ع لهذه الأوزان.

١٨١

(٢) يبيّن الجدول التالي الطاقة الكهربائية المستهلكة بالميغاواط/ ساعة خلال خمسة أيام متتالية في إحدى المدن.

اليوم	١	٢	٣	٤	٥
الطاقة المستهلكة	٤٨,٠	٥٣,٢	٥٢,٣	٤٦,٦	٤٩,٩

أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم هذه البيانات.

(٣) يمثّل الجدول التالي الاستهلاك الأسبوعي من البنزين لعينة مكوّنة من ٥٠ سيارة لأقرب لتر.

الفئة	٢٠−	٢٥−	٣٠−	٣٥−	٤٠−	٤٥−
عدد السيارات	٦	٦	٨	١٠	١٤	٦

أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لاستهلاك السيارات من البنزين.

(٤) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات ٢٠ طالبًا في أحد الاختبارات حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة.

الفئة	٤−	٨−	١٢−	١٦−
التكرار	٥	٧	٦	٢
مركز الفئة	٦	١٠	١٤	١٨

أوجد الانحراف المعياري لدرجات الطلاب.

١٠٧

للمجموعة (ب)

$ص_ر$	$ص_ر - \overline{ص}$	$(ص_ر - \overline{ص})^٢$
١٤	١	١
١٨	٥	٢٥
١٢	١−	١
٩	٤−	١٦
٨	٥−	٢٥
١١	٢−	٤
١٩	٦	٣٦

$ع_ر^٢ = \frac{١٠٨}{٧}$ ، $ع_ر = \sqrt{\frac{١٠٨}{٧}}$ $\therefore$ $ع_ر \simeq ٣,٩$

يعتبر تشتت القيم في المجموعة الثانية أفضل من تشتت القيم في المجموعة الأولى.

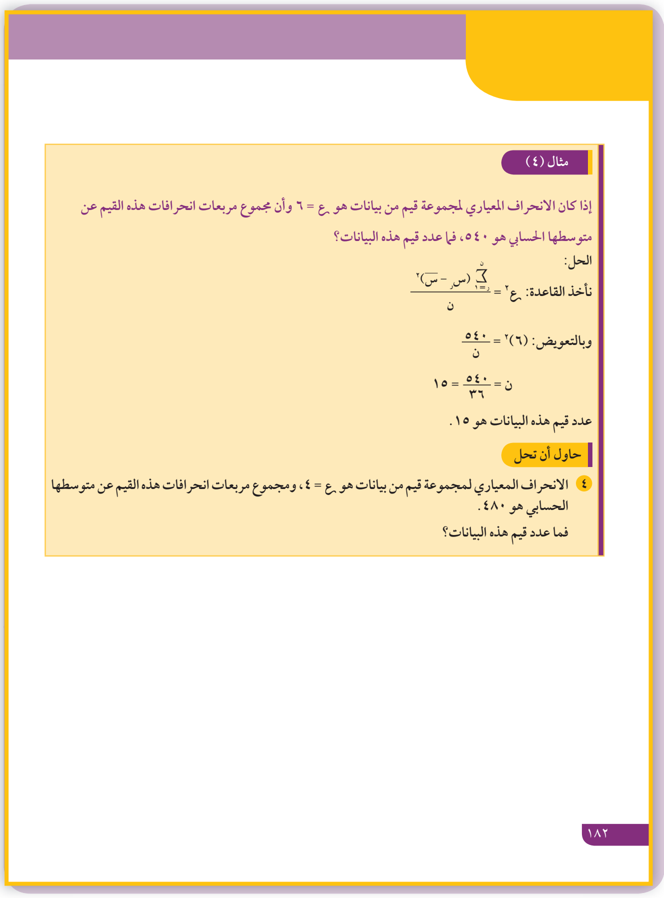
٣ $\overline{س} = ٧٠,٦$ كم.

$$ع^٢ = \frac{٥(٦٢ - ٧٠,٦)^٢ + ١٨(٦٦ - ٧٠,٦)^٢ + ٤٢(٧٠ - ٧٠,٦)^٢}{١٠٠}$$

$$+ \frac{٢٧(٧٤ - ٧٠,٦)^٢ + ٨(٧٨ - ٧٠,٦)^٢}{١٠٠} = ١٥,١٦$$

$ع = ٣,٩$

الانحراف المعياري ٣,٩ صغير، وبالتالي أوزان هؤلاء الطلاب متقاربة جدًّا من المتوسط الحسابي ٧٠,٦.


مثال (٤)

إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم من بيانات هو $ع = ٦$ وأن مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو ٥٤٠، فما عدد قيم هذه البيانات؟

الحل:

نأخذ القاعدة: $ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢}{ن}$

وبالتعويض: $(٦)^٢ = \frac{٥٤٠}{ن}$

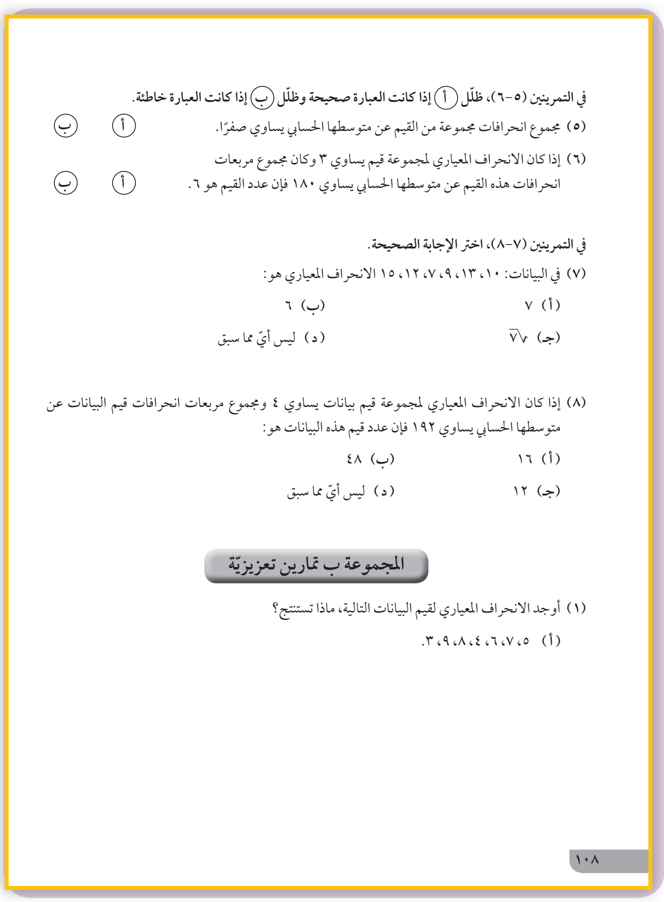
$ن = \frac{٥٤٠}{٣٦} = ١٥$

عدد قيم هذه البيانات هو ١٥.

حاول أن تحل

٤ الانحراف المعياري لمجموعة قيم من بيانات هو $ع = ٤$، ومجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو ٤٨٠.
فما عدد قيم هذه البيانات؟

١٨٢


في التمرينين (٥−٦)، ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة وظلّل (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

(٥) مجموع انحرافات مجموعة من القيم عن متوسطها الحسابي يساوي صفرًا. (أ) (ب)

(٦) إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم يساوي ٣ وكان مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي يساوي ١٨٠ فإن عدد القيم هو ٦. (أ) (ب)

في التمرينين (٧−٨)، اختر الإجابة الصحيحة.

(٧) في البيانات: ١٠، ١٣، ٩، ٧، ١٢، ١٥ الانحراف المعياري هو:

(أ) ٧ (ب) ٦

(جـ) $\sqrt{٧}$ (د) ليس أيّ مما سبق

(٨) إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم بيانات يساوي ٤ ومجموع مربعات انحرافات قيم البيانات عن متوسطها الحسابي يساوي ١٩٢ فإن عدد قيم هذه البيانات هو:

(أ) ١٦ (ب) ٤٨

(جـ) ١٢ (د) ليس أيّ مما سبق

المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

(١) أوجد الانحراف المعياري لقيم البيانات التالية، ماذا تستنتج؟

(أ) ٥، ٧، ٦، ٤، ٨، ٩، ٣.

١٠٨

٤ $ع = ٤$ لذا $ع^٢ = ١٦$

القاعدة: $ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢}{ن}$

بالتعويض: $١٦ = \frac{٤٨٠}{ن}$

ومنه $ن = \frac{٤٨٠}{١٦} = ٣٠$

عدد قيم هذه البيانات هو ٣٠.

(ب) ٣٤، ٤٥، ٣٧، ٤٢، ٣٦، ٤٣، ٤٤، ٣٩.

(٢) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لاستهلاك الطاقة الكهربائية بالميغاواط/ ساعة طيلة شهر أغسطس في إحدى المدن:

الكمية	٣٣	٣٦	٣٩	٤٠	٤١	٤٢
التكرار	٨	٢	٦	٦	٤	٥

(أ) أوجد المتوسط الحسابي.

(ب) أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم هذه البيانات باستخدام الآلة الحاسبة.

(٣) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لكمية المياه بالسنتيلتر الموجودة في ١٠٠ عبوة.

سعة العبوة الواحدة المفترضة ١٠٠ سنتيلتر.

الفترة	٨٦-	٩٠-	٩٤-	٩٨-	١٠٢-	١٠٦-
التكرار	٥	١٠	٣٩	٣٢	٩	٥

أوجد المتوسط الحسابي، التباين، الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات.

١٠-٤: طرق العد

١ الأهداف

- يحل مسائل باستخدام مبدأ العد.
- يحل مسائل باستخدام قوانين التباديل والتوافيق.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

مبدأ العد – التباديل – التوافيق.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اسأل الطلاب الإجابة عما يلي:

- إذا ألقيت قطعة نقود معدنية منتظمة، فما هي النواتج الممكنة؟
- إذا ألقيت حجر نرد مرقم من ١ إلى ٦، فما هي النواتج الممكنة؟
- إذا ألقيت قطعة نقود معدنية منتظمة ثم حجر نرد مرقم من ١ إلى ٦، فما هي النواتج الممكنة؟
- بكم طريقة يمكنك تنظيم لونين مختلفين من أربعة ألوان: أصفر (ص)، أخضر (خ)، أسود (س)، أزرق (ز)؟

٥ التدريس

يساعد مبدأ العد على حل مسائل كثيرة تواجه الطلاب عند دراسة احتمال حدث معين. لذا من المهم جدًّا متابعة عملهم في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لمعرفة مدى قدرتهم على إيجاد فضاء العينة وترتيبها في قائمة منظمة.

يبيّن المثال (١) الطريقة المتبعة والمطولة في تنظيم قائمة لإيجاد فضاء العينة أو عدد النواتج الممكنة، وما يتطلبه ذلك من جهد وانتباه وتركيز. لذا كان من الضروري التوجه إلى مبدأ العد، الذي يوفر الوقت ويعطي النتيجة المتوخاة بشكل سريع.

أخبر الطلاب أن مخطط الشجرة البيانية يصبح دون فائدة إذا كانت العينة والحدث يتضمنان عناصر كبيرة العدد أيضًا.

أما في المثال (٢)، فقد استخدم مخطط الشجرة البيانية.

يعطي المثال (٣) فكرة واضحة عن كيفية استخدام مبدأ العد.


١٠-٤

طرق العد

Methods of Counting

دعنا نفكر ونتناقش

يقوم خالد برمي حجري نرد معًا مرة واحدة. الأول لونه أحمر والثاني لونه أخضر.
انظر الشكل أدناه.

أ مم يتألف كل ناتج؟
ب اكتب كل عناصر فضاء العينة في قائمة.
جـ ما عدد النواتج الممكنة؟
د ما النواتج التي تشكل الحدث «رمي حجري نرد معًا بحيث يكون مجموع العددين الظاهرين يساوي ٩»؟

سوف تتعلم
- حل مسائل باستخدام مبدأ العد
- حل مسائل باستخدام قوانين التباديل أو التوافيق

كلنا نعرف كيف نعد، ولكننا سنتعرف في هذا الدرس على طرق للعد أكثر تطورًا.
مبدأ العد هو في صلب الجبر المتقطع، وسنستفيد منه عند دراسة الاحتمال.
العديد من المسائل البسيطة أو المعقدة تتطلب تحديد عدد عناصر مجموعة أو الطرق التي يمكن بها ترتيب أشياء أو تجميعها.

مبدا العد Counting Principle

يمكن أن نحل بعض مسائل العد عن طريق ترتيب المجموعة التي سوف نقوم بعدها. وسوف نبدأ بمثالين يتبعان هذه الطريقة.

مثال (١) العد عن طريق القوائم

ما عدد الرموز ثلاثية الحروف التي يمكن تكوينها من بين الحروف: أ، ب، جـ، د من دون تكرار لأي حرف منها؟

الحل:

اكتب قائمة بالإمكانيات بشكل مرتب (متوال بحسب الترتيب):

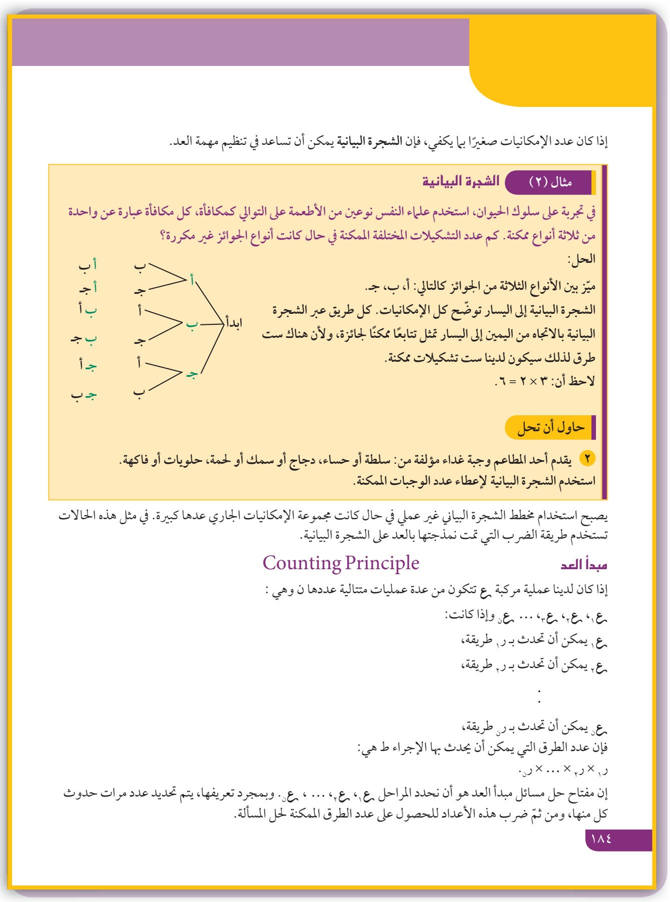
أ ب جـ	أ ب د	أ جـ ب	أ جـ د	أ د ب	أ د جـ	(أ أولًا)
ب أ جـ	ب أ د	ب جـ أ	ب جـ د	ب د أ	ب د جـ	(ب أولًا)
جـ أ ب	جـ أ د	جـ ب أ	جـ ب د	جـ د أ	جـ د ب	(جـ أولًا)
د أ ب	د أ جـ	د ب أ	د ب جـ	د جـ أ	د جـ ب	(د أولًا)

يوجد ٤ × ٦ = ٢٤ إمكانية. يمكن كتابة ٢٤ رمزًا.

حاول أن تحل

١ ما عدد الرموز التي يمكن تكوينها من حروف «نواف» من دون تكرار لأي حرف منها شرط ألّا يبدأ الرمز بـ «أ»؟

١٨٣


إذا كان عدد الإمكانيات صغيرًا بما يكفي، فإن **الشجرة البيانية** يمكن أن تساعد في تنظيم مهمة العد.

مثال (٢) الشجرة البيانية

في تجربة على سلوك الحيوان، استخدم علماء النفس نوعين من الأطعمة على التوالي كمكافأة، كل مكافأة عبارة عن واحدة من ثلاثة أنواع ممكنة. كم عدد التشكيلات المختلفة الممكنة في حال كانت أنواع الجوائز غير مكررة؟

الحل:

ميّز بين الأنواع الثلاثة من الجوائز كالتالي: أ، ب، جـ.
الشجرة البيانية إلى اليسار توضّح كل الإمكانيات. كل طريق عبر الشجرة البيانية بالاتجاه من اليمين إلى اليسار تمثل تتابعًا ممكنًا لجائزة، ولأن هناك ست طرق لذلك سيكون لدينا ست تشكيلات ممكنة.
لاحظ أن: ٣ × ٢ = ٦.

ابدأ
أ: ب، جـ — أ ب، أ جـ
ب: أ، جـ — ب أ، ب جـ
جـ: أ، ب — جـ أ، جـ ب

حاول أن تحل

٢ يقدم أحد المطاعم وجبة غداء مؤلفة من: سلطة أو حساء، دجاج أو سمك أو لحمة، حلويات أو فاكهة.
استخدم الشجرة البيانية لإعطاء عدد الوجبات الممكنة.

يصبح استخدام مخطط الشجرة البياني غير عملي في حال كانت مجموعة الإمكانيات الجاري عدها كبيرة. في مثل هذه الحالات تستخدم طريقة الضرب التي تمت نمذجتها بالعد على الشجرة البيانية.

مبدأ العد Counting Principle

إذا كان لدينا عملية مركبة ع تتكون من عدة عمليات متتالية عددها ن وهي :

$ع_١$، $ع_٢$، $ع_٣$، ... $ع_ن$ وإذا كانت:

$ع_١$ يمكن أن تحدث بـ $ر_١$ طريقة،

$ع_٢$ يمكن أن تحدث بـ $ر_٢$ طريقة،

⋮

$ع_ن$ يمكن أن تحدث بـ $ر_ن$ طريقة،

فإن عدد الطرق التي يمكن أن يحدث بها الإجراء ط هي:

$ر_١ \times ر_٢ \times \dots \times ر_ن$.

إن مفتاح حل مسائل مبدأ العد هو أن نحدد المراحل $ع_١$، $ع_٢$، ... ، $ع_ن$. وبمجرد تعريفها، يتم تحديد عدد مرات حدوث كل منها، ومن ثمّ ضرب هذه الأعداد للحصول على عدد الطرق الممكنة لحل المسألة.

١٨٤

اسأل الطلاب ما إذا كان ممكنًا رسم مخطط شجرة بيانية أو تنظيم قائمة، لإيجاد نواتج لحدث يتكون من حرفين من بين ٢٨ حرفًا يتبعها ثلاثة أرقام من بين ١٠ أرقام. هنا تكمن أهمية فهم مبدأ العد وكيفية التعامل معه. يعالج المثال (٤) حالة حياتية مهمة في مضمار الرياضة. شجع الطلاب على رسم مخطط مشابه مع إعطائهم مثالًا آخر لتتأكد من فهمهم مبدأ العد.

ركز على فهم التباديل أولًا، ثم كيفية استخدام القاعدة حسابيًّا، وبعد ذلك إيجاد النتائج على الآلة الحاسبة.

ابدأ بمقدمة بسيطة تبيّن أمام الطلاب الفرق بين التباديل والتوافيق. أكّد لهم أن موقع العنصر وترتيبه في العملية الأولى مهم، أما في العملية الثانية فلا يهم موقع العنصر أو ترتيبه.

اربط ذلك بما عرفوه سابقًا، على سبيل المثال، الزوج المرتب (س، ص) الذي يحدد موقع نقطة في المستوى الإحداثي (٢، ٥) ≠ (٥، ٢)، ولكن المجموعة المكونة من عنصرين لا تتغير بتغير موقع عنصريها {٢، ٥} = {٥، ٢}.

ويمكن أيضًا تعميم الفكرة إلى ثلاثة عناصر أو أكثر.

المهم توجيه الطلاب إلى قراءة النصوص جيّدًا لفهم ما إذا كان المطلوب هو إيجاد التباديل [اختيار: رئيس، نائب رئيس، أمين سر، أمين صندوق، كما في المثال (٥)] أو إيجاد التوافيق [ما عدد اللجان المؤلفة من ثلاثة أشخاص نختارها من بين ٤ أشخاص، كما في المثال (٨)].

ساعدهم على فهم التوافيق وإدراك علاقتها بالتباديل في القاعدة $ن^{ق}_{ر} = \frac{ن^{ل}_{ر}}{ر!}$.

أرشدهم إلى إيجاد الإجابة حسابيًّا أولًا عن طريق التبسيط، ثم باستخدام الآلة الحاسبة.

ناقش معهم أنواع النواتج في المثال (١١) لتتأكد من أنهم قادرون على التمييز في النصوص لاستخدام التباديل أو التوافيق.

٦ الربط

جميع الأمثلة في هذا الدرس هي من واقع الحياة، يواجهها الطالب في مواقف متعددة.


مثال (٣) استخدام مبدأ العد
تبدأ لوحات السيارات في إحدى المدن بحرفين من الحروف الأبجدية يتبعها ثلاثة أرقام. كم عدد اللوحات التي يمكن الحصول عليها؟ افترض أنه لا يوجد تكرار لأي من الحروف أو الأرقام في أي من لوحات التراخيص.
الحل:
$ع$: ختم اللوحة
$ع_1$: ختم الحرف الأول
$ع_2$: ختم الحرف الثاني
$ع_3$: ختم الرقم الأول

وهكذا لدينا:

العمليات	:	$ع_1$	$ع_2$	$ع_3$	$ع_4$	$ع_5$
عدد الطرق لاستكمال كل عملية	:	٢٨	٢٧	١٠	٩	٨

عدد طرق ختم اللوحة = ٢٨ × ٢٧ × ١٠ × ٩ × ٨
= ٥٤٤ ٣٢٠ طريقة
يمكن الحصول على ٥٤٤ ٣٢٠ لوحة في هذه المدينة.
حاول أن تحل
٣ استخدم معطيات المثال (٣)، ما هو عدد اللوحات التي يمكن الحصول عليها إذا كان رقم الآحاد فردي؟
مثال (٤) استخدام مبدأ العد
يوجد ثمانية متسابقين في سباق ١٠٠ م جري. ما هو عدد النتائج الممكنة لهذا السباق؟ افترض عدم وجود تعادل بين أي متسابقين. علمًا بأن المتسابقين وصل كلًّا منهم إلى خط النهاية.
الحل:
$ع$: قائمة العدائين بترتيب إنهاء السباق.
$ع_1$: المتسابق الذي ينهي السباق أولًا.
$ع_2$: المتسابق الذي ترتيبه الثاني في إنهاء السباق.
١٨٥


وهكذا لدينا:

العمليات	:	$ع_1$	$ع_2$	$ع_3$	$ع_4$	$ع_5$	$ع_6$	$ع_7$	$ع_8$
عدد الطرق لاستكمال كل عملية	:	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١

عدد الطرق لإجراء $ع$ = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١
= ٨! = ٤٠ ٣٢٠
يوجد ٤٠ ٣٢٠ ناتجًا ممكنًا لهذا السباق.
تذكر:
مضروب ن أو
ن! هو: ن × (ن − ١) × ... × ٣ × ٢ × ١
فمثلًا: ٥! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١
٠! = ١ تُقرأ مضروب صفر = ١
حاول أن تحل
٤ اشترك ٢٠ جملًا في سباق للهجن ووصلت جميعها إلى خط النهاية في أوقات مختلفة (أي أنه لا يوجد أي تعادل). ما هو عدد النتائج الممكنة لهذا السباق؟
التباديل Permutations
في المثالين السابقين، كان الترتيب مهمًّا ومعتمدًا. مثل هذا الترتيب يسمى بالتباديل. وعمومًا عدد تباديل ن من الأشياء هو ن! (مضروب ن) كما هو مبيّن في المثال (٤) وفي حالة العديد من المواقف التي تتعامل مع تباديل الأشياء تهتم فقط بمجموعة جزئية من الأشياء المُتضمنة. المثال (٥) يختبر موقفًا مشابهًا.
مثال (٥) إيجاد عدد التباديل
افترض أن ٣١ عضوًا من جمعية الرياضيات في مدرستك يريدون اختيار أربعة أشخاص لأربعة مناصب: رئيس، نائب رئيس، أمين السر، أمين الصندوق. حدّد كم طريقة يمكن بها الاختيار لهذه المناصب.
الحل:
اختيار الرئيس: ٣١ طريقة
اختيار نائب الرئيس: ٣٠ طريقة
اختيار أمين السر: ٢٩ طريقة
اختيار أمين الصندوق: ٢٨ طريقة
عدد الطرق التي يمكن بها اختيار الأشخاص للمناصب الأربعة هو: ٣١ × ٣٠ × ٢٩ × ٢٨ = ٧٥٥ ١٦٠
حاول أن تحل
٥ في إحدى الجمعيات الخيرية يوجد ٢٠ عضوًا يشكلون مجلس الأمناء. يريدون اختيار رئيسًا، أمينًا للسر، أمينًا للصندوق. حدّد كم طريقة يمكن بها الاختيار لهذه المناصب.
١٨٦

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

لا يميز الطلاب في مبدأ العد بين التباديل والتوافيق.
أعط أمثلة بسيطة واطلب إليهم من خلالها أن يحاولوا التمييز بينهما.

٨ التقييم

إن متابعة الطلاب في الإجابة عن فقرات «حاول أن تحل» توضح للمعلم قدرة كل طالب على إيجاد التباديل أو التوافيق وتطبيقاتها.

اختبار سريع

١ أخذ ٥ أشخاص المصعد من الطابق الأرضي في مبنى من ٨ طوابق. بكم طريقة يمكن أن ينزل كل من الأشخاص الخمسة من المصعد في الطوابق على أن ينزل كل منهم في طابق مختلف عن الآخرين.

${}^{٨}ل_{٥} = ٦٧٢٠$

٢ ما عدد الكلمات التي يمكن تأليفها باستخدام ثلاثة أحرف مختلفة دون الاهتمام بالمعنى من أحرف كلمة سراب؟ ${}^{٤}ل_{٣} = ٢٤$

٩ إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(أ)، (ب)، (جـ)، (د) تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

١ $٣ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ١٨$

٢

ابدأ — سلطة — دجاج — حلويات: سلطة، دجاج، حلويات
ابدأ — سلطة — دجاج — فاكهة: سلطة، دجاج، فاكهة
ابدأ — سلطة — لحمة — حلويات: سلطة، لحمة، حلويات
ابدأ — سلطة — لحمة — فاكهة: سلطة، لحمة، فاكهة
ابدأ — سلطة — سمك — حلويات: سلطة، سمك، حلويات
ابدأ — سلطة — سمك — فاكهة: سلطة، سمك، فاكهة
ابدأ — حساء — دجاج — حلويات: حساء، دجاج، حلويات
ابدأ — حساء — دجاج — فاكهة: حساء، دجاج، فاكهة
ابدأ — حساء — لحمة — حلويات: حساء، لحمة، حلويات
ابدأ — حساء — لحمة — فاكهة: حساء، لحمة، فاكهة
ابدأ — حساء — سمك — حلويات: حساء، سمك، حلويات
ابدأ — حساء — سمك — فاكهة: حساء، سمك، فاكهة

عدد الوجبات الممكنة = $٢ \times ٣ \times ٢ = ١٢$ وجبة ممكنة.

قانون التباديل Law of Permutations

عدد تباديل ن من العناصر **المختلفة** مأخوذة منها ر في كل مرة هو:

${}^{ن}ل_{ر} = ن(ن - ١)(ن - ٢) \ldots (ن - ر + ١)$، ر، ن $\in$ صـ$_{+}$، ر $\le$ ن

عندما ر = ٠ يعرّف ${}^{ن}ل_{٠} = ١$

لاحظ: ${}^{ن}ل_{ر} = \underbrace{ن \times (ن - ١) \times (ن - ٢) \times \ldots \times (ن - ر + ١)}_{ر \text{ عامل}}$

$= ن(ن - ١) \times (ن - ٢) \times \ldots \times (ن - ر + ١) \times \frac{(ن - ر) \times \ldots \times ٣ \times ٢ \times ١}{(ن - ر) \times \ldots \times ٣ \times ٢ \times ١}$

$= \frac{ن!}{(ن - ر)!}$

مساعدة: يمكن استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد عدد التباديل، اضغط على nPr.

قانون

${}^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$ حيث ر، ن $\in$ صـ$_{+}$، ر $\le$ ن، ${}^{ن}ل_{٠} = ١$

مثال (٦)

أوجد قيمة كل تبديل بدون استخدام الآلة الحاسبة بصورة مباشرة.

أ ${}^{٦}ل_{٤}$ ب ${}^{١١}ل_{٣}$ جـ ${}^{ن}ل_{٣}$

الحل:

أ الطريقة الأولى:

${}^{٦}ل_{٤} = \frac{٦!}{(٦ - ٤)!} = \frac{٦!}{٢!}$

$= \frac{٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٢ \times ١} = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = ٣٦٠$

الطريقة الثانية:

نبدأ بـ ٦

${}^{٦}ل_{٤} = \underbrace{٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣}_{٤ \text{ أعداد}} = ٣٦٠$

ب ${}^{١١}ل_{٣} = \frac{١١!}{(١١ - ٣)!} = \frac{١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨!}{٨!} = ١١ \times ١٠ \times ٩ = ٩٩٠$

جـ ${}^{ن}ل_{٣} = \frac{ن!}{(ن - ٣)!} = \frac{ن \times (ن - ١) \times (ن - ٢) \times (ن - ٣)!}{(ن - ٣)!} = ن(ن - ١)(ن - ٢)$

١٨٧

حاول أن تحل

٦ أوجد قيمة كل تبديل بدون استخدام الآلة الحاسبة بصورة مباشرة.

أ ${}^{٥}ل_{٣}$ ب ${}^{١٠}ل_{٤}$ جـ ${}^{ن}ل_{٤}$

طرق حساب ${}^{٦}ل_{٤}$

6 shift nPr 4 = 360

6! ÷ (6 − 4)! 360

6 × 5 × 4 × 3 360

مثال (٧)

ما عدد الكلمات التي يمكن أن تتشكل من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية العربية وذلك في حال عدم تكرار أي منها؟

الحل:

المطلوب في المسألة إيجاد عدد التباديل لـ ٥ حروف من ٢٨ حرفًا في الوقت نفسه.

${}^{٢٨}ل_{٥} = \frac{٢٨!}{(٢٨ - ٥)!} = \frac{٢٨!}{٢٣!} = ٢٨ \times ٢٧ \times ٢٦ \times ٢٥ \times ٢٤$

$= ١١\,٧٩٣\,٦٠٠$

يوجد ١١ ٧٩٣ ٦٠٠ كلمة مكونة من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية العربية.

مساعدة: ترتيب الحروف مهم في كتابة الكلمات. فكلمة كتاب تختلف عن كلمة كاتب.

حاول أن تحل

٧ ما عدد الأعداد التي يمكن أن تتشكل من ٤ أرقام من أرقام النظام العشري بدون الصفر وذلك في حال عدم تكرار أي رقم؟

التوافيق Combinations

عندما تريد إيجاد عدد المجموعات الجزئية والمكون كل منها من ر عنصر، والتي يمكن اختيارها من مجموعة مكونة من ن عنصر (ر $\le$ ن) **دون الاعتماد على الترتيب** فنحن نحسب **التوافيق**.

مثال (٨)

ما عدد اللجان المكونة من ثلاثة أشخاص، والتي يمكن تكوينها من مجموعة من أربعة أشخاص؟

الحل:

سَمِّ الأشخاص الأربعة أ، ب، جـ، د ثم قم بإعداد قائمة كتلك الموجودة في المثال (١) وذلك كالتالي:

(لاحظ أن هناك ${}^{٤}ل_{٣} = ٢٤$ ترتيبًا ممكنًا لاختيار ثلاثة منها).

١٨٨

٣ عدد الطرق الممكنة $= ٢٨ \times ٢٧ \times ٥ \times ٩ \times ٨ =$
٢٧٢ ١٦٠

٤ أوجد $٢٠! = ٢\ ٤٣٢\ ٩٠٢\ ٠٠٨\ ٠٠٠\ ٠٠٠\ ٠٠٠$ أو
$٢{,}٤٣٢\ ٩٠٢\ ٠٠٨ \times ١٠^{١٨}$

٥ أوجد: $\frac{٢٠!}{(٢٠-٣)!} = \frac{٢٠!}{١٧!} = ٢٠ \times ١٩ \times ١٨$
$=$ ٦٨٤٠ طريقة

٦ (أ) $ل^{٥}_{٣} = \frac{٥!}{(٥-٣)!} = ٥ \times ٤ \times ٣ = ٦٠$

(ب) $ل^{١٠}_{٤} = \frac{١٠!}{(١٠-٤)!} = ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ = ٥٠٤٠$

(ج) $ل^{ن}_{٤} = \frac{ن!}{(ن-٤)!} = ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)$


مثال (٩)

إذا كان فريق كرة سلة يتكوّن من ١٢ لاعبًا.

فما عدد الفرق المختلفة التي يمكن تكوينها من خمسة لاعبين من بين لاعبي هذا الفريق (يمكن لأي لاعب اللعب في كل المراكز) ؟

(١) لاعب الهجوم الخلفي
(٢) المدافع مسدد الهدف
(٣) لاعب الهجوم صغير الجسم
(٤) لاعب الهجوم قوي الجسم
(٥) لاعب الوسط

الحل:

يجب أن نوجد $\binom{١٢}{٥}$ وهي عدد الفرق المختلفة المكونة من ٥ لاعبين والذين يمكن اختيارهم من ١٢ لاعبًا.

$\binom{١٢}{٥} = \frac{١٢!}{٥!(١٢-٥)!} = \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٧٩٢$ عند استخدام الآلة الحاسبة 12 shift nCr 5 = 792

يوجد ٧٩٢ فريقًا مختلفًا، كل فريق مكون من ٥ لاعبين وتم اختيارهم من بين ١٢ لاعبًا.

حاول أن تحل

٩ إذا كان فريق كرة قدم يتكوّن من ٢٠ لاعبًا. فما عدد الفرق المختلفة التي يمكن تكوينها من ١١ لاعبًا من بين لاعبي هذا الفريق؟ (يمكن لأي لاعب اللعب في أي مركز)

تستطيع العديد من الآلات الحاسبة أن تحسب $^{١٢}ق_{٥}$ مباشرة من دون ضرورة لإيضاح الخطوات الوسطية. وعلى الرغم من ذلك فنحن نوضحها هنا لأنها قد تساعدك في بعض الأحيان التي تكون فيها الأعداد كبيرة بحيث يصعب أن تعطي إجابة دون استخدام الآلة الحاسبة. وفي حالة الأعداد الكبيرة جدًّا قد لا تساعدك بعض الآلات الحاسبة مثل $^{١٠٠٠}ق_{١٠}$. فطبق القانون.

تستخدم الخطوات التالية لإيجاد التوافيق بواسطة الآلة الحاسبة:
ن nCr ر =

مثال (١٠)

من أجل اختيار لوائح المرشحين للانتخابات النيابية، يجب اختيار ١٠ مرشحين من بين ٥١ مرشحًا. ما عدد اللوائح المختلفة التي يمكن تكوينها؟

الحل:

إن الترتيب أثناء اختيار اللائحة غير مطلوب، إذًا هذه مسألة تتعلق بالتوافيق لإيجاد $^{٥١}ق_{١٠}$.

$^{٥١}ق_{١٠} = \frac{٥١!}{١٠! \times ٤١!} = ١٢\ ٧٧٧\ ٧١١\ ٨٧٠$ عند استخدام الآلة الحاسبة 51 nCr 10 = $1{,}2777711870.10^{10}$

عدد اللوائح المختلفة الممكنة هو ١٢ ٧٧٧ ٧١١ ٨٧٠

١٩٠


أ ب جـ	أ ب د	أ جـ ب	أ جـ د	أ د ب	أ د جـ
ب أ جـ	ب أ د	ب جـ أ	ب جـ د	ب د أ	ب د جـ
جـ أ ب	جـ أ د	جـ ب أ	جـ ب د	جـ د أ	جـ د ب
د أ ب	د أ جـ	د ب أ	د ب جـ	د جـ أ	د جـ ب

لاحظ أن لجنة معينة مكونة من ثلاثة أشخاص أ، ب، جـ تظهر ٣! = ٦ مرات في القائمة.

أ ب جـ   أ جـ ب   ب أ جـ   ب جـ أ   جـ أ ب   جـ ب أ

تشكل هذه الترتيبات الستة مجموعة واحدة لذلك فإن إجمالي أعداد اللجان مساو لـ $^{٤}ل_{٣}$ ترتيبًا ممكنًا مقسمًا على ٣! ترتيبًا مختلفًا لكل لجنة.

عدد اللجان $= \frac{^{٤}ل_{٣}}{٣!} = \frac{\frac{٤!}{(٤-٣)!}}{٣!} = \frac{٤!}{(٤-٣)!\,٣!} = \frac{٤!}{١!\,٣!} = ٤$

حاول أن تحل

٨ ما عدد اللجان المكونة من شخصين والتي يمكن تكوينها من مجموعة من أربعة أشخاص؟

وبصفة عامة، عدد التوافيق المكوّن كل منها من ر عنصر والمختارة من بين مجموعة مكونة من ن عنصر يمكن إيجادها كالآتي:

عدد التوافيق $= \frac{^{ن}ل_{ر}}{ر!} = \frac{ن!}{(ن-ر)!\,ر!}$

تعريف: قانون التوافيق

إذا كان ن، ر عددان صحيحان موجبان حيث ن ≥ ر، فإن:
عدد التوافيق المكونة كل منها من ر من الأشياء والمختارة من بين ن من الأشياء هو:

$\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!\,ر!}$

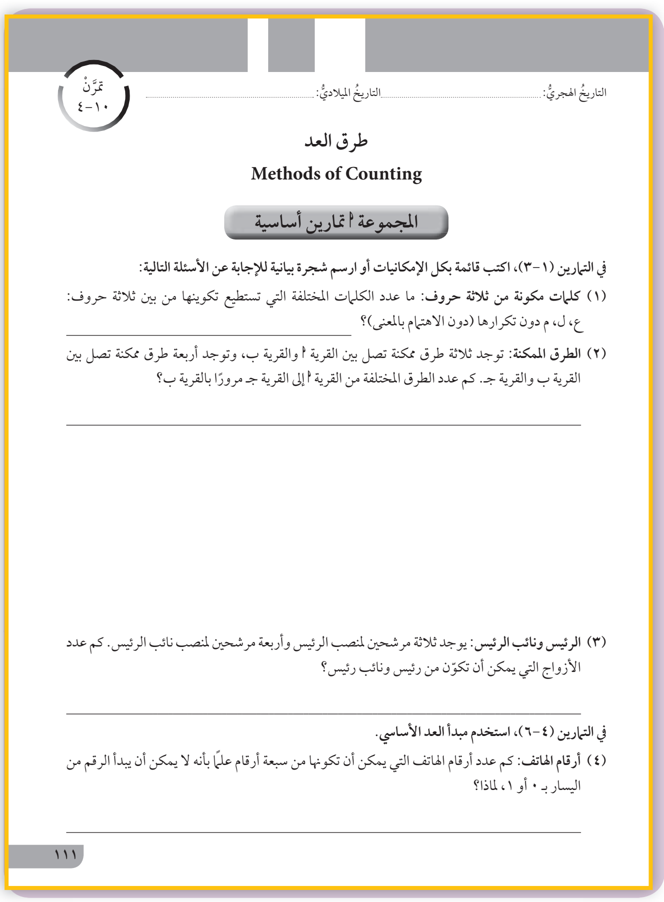
ملاحظة: يستخدم الرمز $^{ن}ق_{ر}$ للتعبير عن عدد التوافيق.

ملاحظات:

(١) عندما ر = ٠ يُعرَّف $\binom{ن}{٠} = ١$

(٢) $\binom{ن}{ن} = ١$

١٨٩


تمرَّنْ ١٠-٤

التاريخُ الهجريُّ:.................... التاريخُ الميلاديُّ:....................

طرق العد

Methods of Counting

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمارين (١-٣)، اكتب قائمة بكل الإمكانيات أو ارسم شجرة بيانية للإجابة عن الأسئلة التالية:

(١) **كلمات مكونة من ثلاثة حروف**: ما عدد الكلمات المختلفة التي تستطيع تكوينها من بين ثلاثة حروف: ع، ل، م دون تكرارها (دون الاهتمام بالمعنى)؟

(٢) **الطرق الممكنة**: توجد ثلاثة طرق ممكنة تصل بين القرية أ والقرية ب، وتوجد أربعة طرق ممكنة تصل بين القرية ب والقرية جـ. كم عدد الطرق المختلفة من القرية أ إلى القرية جـ مرورًا بالقرية ب؟

(٣) **الرئيس ونائب الرئيس**: يوجد ثلاثة مرشحين لمنصب الرئيس وأربعة مرشحين لمنصب نائب الرئيس. كم عدد الأزواج التي يمكن أن تكوّن من رئيس ونائب رئيس؟

في التمارين (٤-٦)، استخدم مبدأ العد الأساسي.

(٤) **أرقام الهاتف**: كم عدد أرقام الهاتف التي يمكن أن تكونها من سبعة أرقام علمًا بأنه لا يمكن أن يبدأ الرقم من اليسار بـ ٠ أو ١، لماذا؟

١١١

٧ $^{٩}ل_{٤} = \frac{!٩}{!(٩ - ٤)} = ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ = ٣٠٢٤$

٨ أوجد: $^{٤}ق_{٢} = \frac{!٤}{!(٤ - ٢)\,!٢} = \frac{٤ \times ٣}{٢} = ٦$

٩ أوجد: $^{٢٠}ق_{١١} = \frac{!٢٠}{!(٢٠ - ١١)\,!١١}$

$= ١٦٧\,٩٦٠$ وهو عدد الفرق.

١٠ أوجد: $^{٦٠}ق_{١٥} = \frac{!٦٠}{!(٦٠ - ١٥)\,!١٥}$

$= ٥,٣١٩\,٤٠٨\,٩١٩ \times ١٠^{١٣}$

١١ (أ) توفيقًا.

(ب) تبديلًا.

(٥) **لوحات الترخيص:** كم عدد لوحات الترخيص التي يمكن أن تكونها من رقمين يتبعهما حرفان ثم ثلاثة أرقام بدون أن تتكرر أي حروف أو أرقام؟

(٦) **رمي حجر نرد:** عند رمي حجري نرد أحدهما أحمر والثاني أخضر معًا وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما. كم عدد النواتج الممكنة؟

في التمارين (٧–١٠)، أوجد قيمة كلّ مما يلي:

(٧) $^{٨}ل_{٥}$

(٨) $^{١٢}ل_{٧}$

(٩) $^{١٤}ق_{٥}$

(١٠) $^{٤٨}ق_{٤٦}$

في التمارين (١١–١٣)، حل المسائل التالية:

(١١) **تكوين اللجان:** سوف يتم انتخاب لجنة مكونة من ٣ سيدات من بين ٢٥ سيدة. كم عدد اللجان المختلفة التي يمكن انتخابها؟

(١٢) **شراء أقراص حاسوب مدمجة:** لدى جيهان نقود تكفي لشراء ثلاثة أقراص حاسوب مدمجة فقط من بين ٤٨ قرصًا. كم عدد مجموعة أقراص الحاسوب التي يمكن شراؤها؟

(١٣) يجري مدير شؤون الموظفين مقابلات شخصية مع ثمانية أشخاص مرشحين لثلاث وظائف شاغرة. كم عدد المجموعات المكونة من ثلاثة أشخاص التي يمكن توظيفها؟

١١٢

حاول أن تحل

١٠ أثناء الإعداد لزيارة المتحف الوطني، أراد منظمو الزيارة إعداد لوائح للطلاب لاستخدام حافلات تتسع كل منها ١٥ طالبًا. علمًا بأن عدد الطلاب هو ٦٠ طالبًا، فما عدد اللوائح المختلفة التي يمكن إعدادها لهذه الزيارة؟

مثال (١١)

في كل مما يلي حدّد ما إذا كان المثال يبيّن تبديلًا أو توفيقًا واحسب عدد الطرق في كل حالة.

أ اختيار رئيس، نائب رئيس، أمين سر من بين ٢٥ عضوًا في نادي القراءة.

ب اختيار ٥ حبات بطاطا من كيس يحتوي على ١٢ حبة لإعداد وجبة غذائية.

جـ وضع معلم مخططًا يبيّن مقاعد ٢٢ طالبًا في غرفة بها ٢٥ مقعدًا.

د اختيار ٤ أبيات من قصيدة شعرية مكونة من ١١ بيتًا لكتابتها وتعليقها في غرفة الفصل.

الحل:

أ الترتيب مهم في الاختيار ∴ تباديل. $^{٢٥}ل_{٣} = ١٣\,٨٠٠$

ب الترتيب غير مهم في الاختيار ∴ توافيق. $^{١٢}ق_{٥} = ٧٩٢$

جـ الترتيب مهم ∴ تباديل. $^{٢٥}ل_{٢٢} \simeq ٢,٥٨٥٢ \times ١٠^{٢٤}$

د الترتيب غير مهم ∴ توافيق. $^{١١}ق_{٤} = ٣٣٠$

حاول أن تحل

١١ في ما يلي، حدّد ما إذا كان المثال يبيّن تبديلًا أو توفيقًا.

أ اختيار ٣ طلاب من الصف العاشر للمشاركة في مسابقة تلاوة القرآن.

ب مراكز المشاركين الثلاثة في مسابقة تلاوة القرآن.

١٩١

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١–٣)، اكتب قائمة بكل الإمكانيات أو ارسم شجرة بيانية للإجابة عن الأسئلة التالية:

(١) **كلمات مكوّنة من ثلاثة حروف:** ما عدد الكلمات المختلفة التي تستطيع تكوينها من ثلاثة حروف دون تكرارها من بين ٤ حروف ل، ع، ب، هـ؟

(٢) **الطرق الممكنة:** توجد ثلاثة طرق ممكنة تصل بين القرية أ والقرية ب، وتوجد أربعة طرق ممكنة تصل بين القرية ب والقرية جـ.

كم عدد الطرق المختلفة من القرية أ إلى القرية جـ والرجوع إلى القرية أ مرورًا بالقرية ب في كل اتجاه؟

(٣) **تذاكر الطيران:** عندما تطلب تذكرة طيران يمكنك أن تحجز في الدرجة الأولى أو درجة رجال الأعمال أو الدرجة السياحية. يمكنك أيضًا أن تختار مكانك إلى جانب نافذة الطائرة أو في الممر أو في الكرسي الأوسط، إلا في حالة عدم وجود كرسي أوسط كما هو الحال في الدرجة الأولى حيث يوجد كرسيان فقط.

كم عدد الطرق المختلفة التي يمكن أن تحجز بها مكانك على متن الطائرة؟

١١٣

١٠-٥: الاحتمال المشروط

١ الأهداف

- يتعرف الحدث المستقل.
- يتعرف الحدث التابع.
- يوجد الاحتمال المشروط.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

حدث مستقل - حدث تابع - جدول ذو مدخلين - مخطط فن - احتمال مشروط - التقاطع - الاتحاد - المتمم - حدثان متنافيان.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية - جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

- بكم طريقة يمكن اختيار: رئيس، أمين سر، أمين صندوق من بين ٧ أشخاص؟
- بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة مؤلفة من ثلاثة أشخاص لتمثل مجموعة من ٧ أشخاص؟
- ما قيمة $^{٧}ل_{٤}$ حسابيًّا؟
- ما قيمة $^{٩}ق_{٥}$ حسابيًّا؟
- أوجد $^{١٧}ل_{٧}$ ، $^{٢٠}ق_{٩}$ باستخدام الآلة الحاسبة.

١٠-٥

الاحتمال المشروط
Conditional Probability

دعنا نفكر ونتناقش

تتألف لعبة الدومينو من بلاطات على شكل متوازي مستطيلات، دُوّن على أحد أوجهها نقاط عددها يتراوح من الصفر (فراغ) إلى ٦.

١ أ كوّن جدولًا يبيّن الأزواج الممكنة. ما عددها؟
ب ما عدد النواتج المؤلفة من رقمين متساويين؟
٢ تم سحب بلاطة رقماها غير متساويين، ما احتمال أن يكون مجموع الرقمين يساوي ٥؟
٣ سحبت بلاطة رقماها متساويان. ما احتمال أن يكون مجموع الرقمين أصغر من ٥؟

سوف تتعلم
- الحدث المستقل
- الحدث التابع
- الاحتمال المشروط

في كل تجربة عشوائية، نهتم أولًا بمعرفة مجموعة النواتج الممكنة والتي تسمى **فضاء العينة (ف)**. كل **حدث** هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

إذا كانت جميع نواتج التجربة لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث أ هو:

$$\text{ل(الحدث أ)} = \frac{\text{عدد نواتج الحدث أ}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

أي أن: $ل(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(ف)}$

يكتب الاحتمال بصورة كسر عشري أو كسر أو نسبة أو نسبة مئوية.

مثال (١)

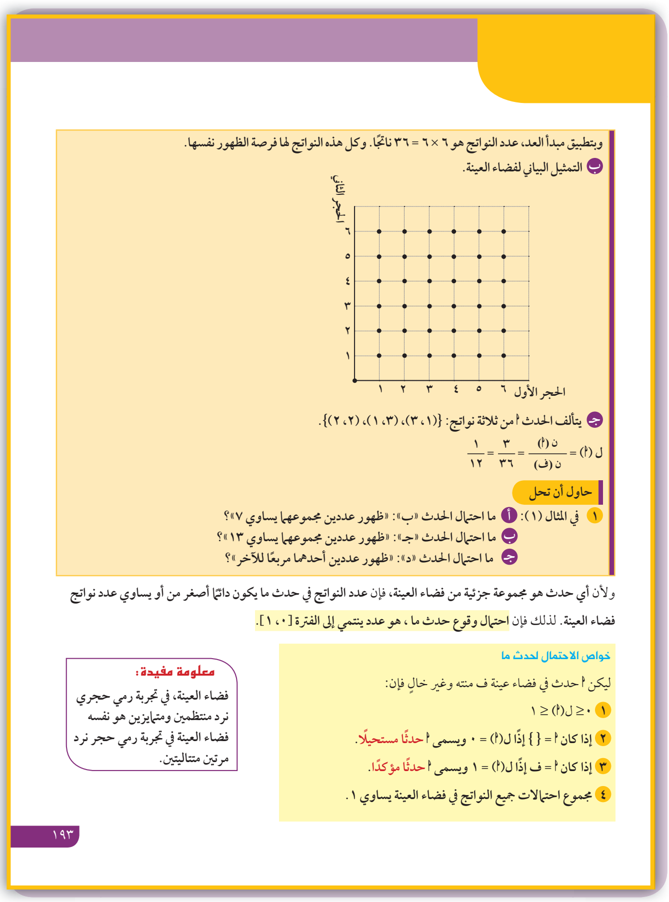
في لعبة «رمي حجري نرد منتظمين ومتمايزين» والتجربة هي ملاحظة الوجه العلوي لكل من الحجرين
أ ممّ يتألف كل ناتج؟ اكتب فضاء العينة. وما عدد النواتج الممكنة؟
ب مثل فضاء العينة بيانيًّا.
جـ ما احتمال الحدث أ: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ٤»؟

الحل:

أ يتألف كل ناتج من زوج مرتب (م، ن) حيث ١ ≤ م ≤ ٦، ١ ≤ ن ≤ ٦. م، ن ∈ $ص^{+}$.

ف = {(١، ١)، (١، ٢)، ... ، (١، ٦)،
(٢، ١)، (٢، ٢)، ... ، (٢، ٦)،
⋮
(٦، ١)، (٦، ٢)، ... ، (٦، ٦)}

١٩٢



وبتطبيق مبدأ العد، عدد النواتج هو ٦ × ٦ = ٣٦ ناتجًا. وكل هذه النواتج لها فرصة الظهور نفسها.

ب التمثيل البياني لفضاء العينة.

جـ يتألف الحدث أ من ثلاثة نواتج: {(١، ٣)، (٣، ١)، (٢، ٢)}.

$$ل(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(ف)} = \frac{٣}{٣٦} = \frac{١}{١٢}$$

حاول أن تحل

١ في المثال (١): أ ما احتمال الحدث «ب»: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ٧»؟
ب ما احتمال الحدث «جـ»: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ١٣»؟
جـ ما احتمال الحدث «د»: «ظهور عددين أحدهما مربعًا للآخر»؟

ولأن أي حدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة، فإن عدد النواتج في حدث ما يكون دائمًا أصغر من أو يساوي عدد نواتج فضاء العينة. لذلك فإن احتمال وقوع حدث ما ، هو عدد ينتمي إلى الفترة [٠، ١].

خواص الاحتمال لحدث ما

ليكن أ حدث في فضاء عينة ف منته وغير خالٍ فإن:

١ ٠ ≤ ل(أ) ≤ ١
٢ إذا كان أ = { } إذًا ل(أ) = ٠ ويسمى أ حدثًا مستحيلًا.
٣ إذا كان أ = ف إذًا ل(أ) = ١ ويسمى أ حدثًا مؤكدًا.
٤ مجموع احتمالات جميع النواتج في فضاء العينة يساوي ١.

معلومة مفيدة:
فضاء العينة، في تجربة رمي حجري نرد منتظمين ومتمايزين هو نفسه فضاء العينة في تجربة رمي حجر نرد مرتين متتاليتين.

١٩٣

٥ التدريس

تعرف الطلاب في مراحل سابقة حالات استخدموا فيها الاحتمال الأولي، حيث طبقوا القاعدة لحدث بسيط كما يلي:

$$\text{ل (الحدث)} = \frac{\text{عدد النواتج في الحدث}}{\text{عدد النواتج الممكنة}}.$$

والآن سوف يتعرفون ويطبقون نوعًا متقدمًا من الاحتمال، ألا وهو الاحتمال المشروط حيث يتدرج من لعبة «رمي مكعبين منتظمين» وإيجاد فضاء العينة أولًا أو النتائج الممكنة كما في المثال (١)، ثم التقدم شيئًا فشيئًا ليستخدموا ما تعلموه في الدرس السابق من قواعد التباديل والتوافيق في أحداث معينة كما في المثال (٣). وبعد ذلك، سوف يتعرفون مخطط ڤن واستخداماته في حل أحداث مركبة كما في المثال (٤)، ويتعرفون أيضًا الجدول المزدوج كما في المثال (٧).

أكّد للطلاب أن جميع هذه الأدوات والوسائل سوف تكون مهمة عند إيجاد إجابات لمواقف، يتطلب فيها موقف ما معرفة احتمال حدوثه.

شدّد أيضًا مع الطلاب على العمليات المستخدمة على الأحداث، وارتباطها بما سبق أن تعلموه عن المجموعات.

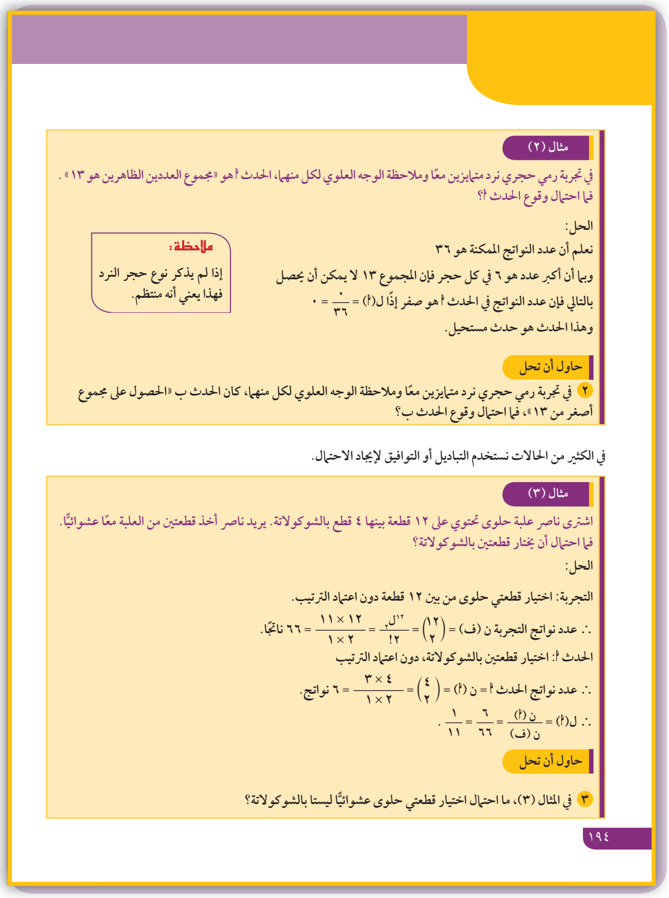
أعط أمثلة متعددة قبل البدء بفقرة تقاطع المجموعات، واتحاد المجموعات، ومتمم الجزء من مجموعة معنية.

أشر إلى الربط بين فضاء العينة والمجموعة الكاملة، وبين الحدث والجزء من المجموعة.

تعامل بهدوء مع المثال (٧)، ليتمكن الطلاب من فهم هذه العمليات.

توسع في شرح معنى الأحداث المستقلة والأحداث التابعة.

أعط أمثلة متعددة ليميز الطلاب بين حدث تابع وحدث مستقل.



مثال (٢)

في تجربة رمي حجري نرد متمايزين معًا وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما، الحدث أ هو «مجموع العددين الظاهرين هو ١٣». فما احتمال وقوع الحدث أ؟

الحل:

نعلم أن عدد النواتج الممكنة هو ٣٦

وبما أن أكبر عدد هو ٦ في كل حجر فإن المجموع ١٣ لا يمكن أن يحصل

بالتالي فإن عدد النواتج في الحدث أ هو صفر إذًا ل(أ) $= \frac{٠}{٣٦} = ٠$

وهذا الحدث هو حدث مستحيل.

ملاحظة: إذا لم يذكر نوع حجر النرد فهذا يعني أنه منتظم.

حاول أن تحل

٢ في تجربة رمي حجري نرد متمايزين معًا وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما، كان الحدث ب «الحصول على مجموع أصغر من ١٣»، فما احتمال وقوع الحدث ب؟

في الكثير من الحالات نستخدم التباديل أو التوافيق لإيجاد الاحتمال.

مثال (٣)

اشترى ناصر علبة حلوى تحتوي على ١٢ قطعة بينها ٤ قطع بالشوكولاتة. يريد ناصر أخذ قطعتين من العلبة معًا عشوائيًّا. فما احتمال أن يختار قطعتين بالشوكولاتة؟

الحل:

التجربة: اختيار قطعتي حلوى من بين ١٢ قطعة دون اعتماد الترتيب.

∴ عدد نواتج التجربة ن (ف) $= \binom{١٢}{٢} = \frac{{}^{١٢}\text{ل}_{٢}}{٢!} = \frac{١٢ \times ١١}{٢ \times ١} = ٦٦$ ناتجًا.

الحدث أ: اختيار قطعتين بالشوكولاتة، دون اعتماد الترتيب

∴ عدد نواتج الحدث أ = ن (أ) $= \binom{٤}{٢} = \frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١} = ٦$ نواتج.

∴ ل(أ) $= \frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{٦}{٦٦} = \frac{١}{١١}$.

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، ما احتمال اختيار قطعتي حلوى عشوائيًّا ليستا بالشوكولاتة؟

١٩٤

منطط ڤن Venn Diagram

تساعد النماذج الهندسية أحيانًا على فهم المسائل وإيجاد الاحتمالات.

مثال (٤) منطط ڤن (مثال إثرائي)

في إحدى المدارس الثانوية يهتم ٥٤٪ من الطلاب بالأنشطة الكشفية، ٦٢٪ بالرياضة.

نصف الذين يهتمون بالأنشطة الكشفية يهتمون أيضًا بالرياضة.

أ ما النسبة المئوية للطلاب الذين يهتمون فقط بالرياضة؟

ب اختير طالب عشوائيًّا من طلاب هذه المدرسة، فما احتمال ألا يهتم بالرياضة؟

الحل:

لترتيب المعطيات وعرضها نختار مستطيلًا يمثل فضاء العينة (كل طلاب المدرسة) ونرسم داخل المستطيل منطقتين متداخلتين لتمثيل الطلاب الذين يهتمون بالأنشطة الكشفية والطلاب الذين يهتمون بالرياضة.

ندوّن داخل هذه المناطق النسب المئوية كما يلي:

المنطقة المتداخلة (الخضراء) تتضمن نصف الطلاب المهتمين بالأنشطة الكشفية والمهتمين بالرياضة: ٠,٥ × ٥٤٪ = ٢٧٪

المنطقة الصفراء تتضمن: (٥٤ − ٢٧)٪ = ٢٧٪

المنطقة الزرقاء تتضمن: (٦٢ − ٢٧)٪ = ٣٥٪

المنطقة البيضاء تتضمن: [١٠٠ − (٢٧ + ٢٧ + ٣٥)]٪ = ١١٪

يمكننا الآن الإجابة عن الأسئلة بقراءة مخطط ڤن.

أ النسبة المئوية للطلاب الذين يهتمون فقط بالرياضة = ٣٥٪

ب احتمال ألا يهتم الطالب بالرياضة = ٢٧٪ + ١١٪ = ٣٨٪ أو ٠,٣٨

• حل آخر: ١ − ٠,٦٢ = ٠,٣٨

حاول أن تحل

٤ يقرأ ٨٤٪ من طلاب الصف العاشر كتب مطالعة باللغة العربية، ويقرأ ١٨٪ من طلاب هذا الصف كتبًا باللغة الإنكليزية، ويقرأ ١٥٪ من الطلاب كتبًا باللغتين.

اختير طالب عشوائيًّا من طلاب هذا الفصل،

أ ما احتمال أن يكون ممن يقرأون كتبًا باللغة الإنكليزية فقط؟

ب ما احتمال أن يكون هذا الطالب ممن لا يقرأون كتبًا باللغتين معًا؟

١٩٥

ناقش معهم النتائج الموجودة في المثالين: (٨) و(٩) لتتأكد من فهمهم الأحداث وكيف تكون تابعة أو مستقلة.

شدّد على مفهوم الاحتمال المشروط لأنها المرة الأولى التي يتعرف عليه الطلاب.

اشرح بإسهاب معنى «حدث يحصل بعد حصول حدث قبله».

أكّد لهم أن ل(ب | أ) لا تعني أبدًا أننا نوجد احتمال الكسر $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ بل هو احتمال حصول الحدث ب بعد حصول الحدث أ كما في المثالين (١٠)، (١١).

أعط أمثلة متعددة لتطبيق القاعدة:

$$\text{ل}(\text{ب} \mid \text{أ}) = \frac{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ل}(\text{أ})}$$

٦ الربط

كل الأمثلة الواردة في هذا الدرس تربط مفاهيمه ومهاراته بالحياة الواقعية.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام قاعدة الاحتمال المشروط. ساعدهم على التعرف من خلال النص إلى ما هو مقصود بحدث يحصل أولًا، ليتبعه حدث آخر يحصل بعد ذلك.

العمليات على الأحداث واحتمالاتها:

تقاطع حدثين أ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ، ب في آن معًا ويرمز إليه بـ أ ∩ ب.

اتحاد حدثين أ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ أو ب ويرمز إليه بـ أ ∪ ب.

الحدثان أ، ب هما متنافيان (Incompatible) إذا لم يشتركا في أي عنصر أي أ ∩ ب = ∅.

متمم الحدث أ هو $\bar{\text{أ}}$ (complement) الذي يتألف من كل النواتج الموجودة في فضاء العينة وغير الموجودة في أ.

قاعدة الاحتمال لاتحاد حدثين:

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

ومنها ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

قاعدة الاحتمال لمتمم الحدث أ:

ل($\bar{\text{أ}}$) = ١ − ل(أ)

قاعدة الاحتمال لحدثين متنافيين:

إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف فإن ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب).

مثال (٥)

إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان:

ل(أ) = ٧ ,٠ ، ل(ب) = ٤ ,٠ ، ل(أ ∩ ب) = ٤ ,٠ ، أوجد كلًّا من:

١ ل(أ ∪ ب) ٢ ل($\bar{\text{أ}}$)

الحل:

١ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٧ ,٠ + ٤ ,٠ − ٤ ,٠ = ٧ ,٠ .

٢ ل($\bar{\text{أ}}$) = ١ − ل(أ)

= ١ − ٧ ,٠ = ٣ ,٠

حاول أن تحل

٥ إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة، وكان ل(أ) = ٣ ,٠ ، ل(ب) = ٥ ,٠ ، ل (أ ∪ ب) = ٦ ,٠ أوجد كلًّا من:

أ ل(أ ∩ ب)

ب ل($\bar{\text{ب}}$)

١٩٦

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ١٠-٥

الاحتمال المشروط

Conditional Pobability

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمارين (١-٣)، عند رمي حجر نرد أحمر اللون وحجر نرد أخضر اللون معًا وملاحظة الوجه العلوي. فما النواتج الممكنة لهذا الحدث؟ وما احتمال وقوع كل حدث مما يلي؟

(١) مجموع العددين الظاهرين ٩.

(٢) مجموع العددين الظاهرين هو عدد زوجي.

(٣) العدد الظاهر على الحجر الأحمر أكبر من العدد الظاهر على الحجر الأخضر.

في التمارين (٤-٩)، ج تتضمن عينة لألوان الحلوى التقليدية التي ينتجها مصنع للحلوى وهي:

ج = {البني، الأخضر، البرتقالي، الأحمر، البرونزي، الأصفر}.

احتمال كل حدث في ج يساوي نسبة إنتاج هذا اللون من الحلوى من إجمالي الألوان. وقد صرح المسؤول في هذا المصنع ببعض المعلومات عن احتمال الإنتاج في الجدول التالي:

اللون	البني	الأحمر	الأصفر	الأخضر	البرتقالي	البرونزي
الاحتمال	٣ ,٠	٢ ,٠	٢ ,٠	١ ,٠	١ ,٠	١ ,٠

إذا قمت بأخذ قطعة حلوى عشوائيًّا من علبة مفتوحة حديثًا من إنتاج هذا المصنع، فما احتمال أن تأخذ حلوى بالألوان التالية:

(٤) البني أو البرونزي؟

١١٤

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يحاولون الإجابة عن فقرات «حاول أن تحل» لتكوّن فكرة عن أدائهم في هذا الدرس، وعن مدى اكتسابهم المفاهيم والمهارات الواردة.

اختبار سريع

في كيس ٧ كرات متشابهة: ٣ كرات سوداء مرقمة من ١ إلى ٣، ٤ كرات حمراء مرقمة من ١ إلى ٤. سحبت عشوائيًّا كرة من الكيس ومن دون إعادتها سحبت كرة ثانية. أوجد احتمال كل من الأحداث التالية:

١ ل (كرة حمراء ثم كرة سوداء). $\frac{٤}{٧} \times \frac{٣}{٦} = \frac{٢}{٧}$

٢ ل (كرتين مجموع رقميهما ٢). $\frac{٢}{٧} \times \frac{١}{٦} = \frac{٢}{٤٢} = \frac{١}{٢١}$

٣ ل (الكرة الثانية حمراء إذا علمنا أن الكرة الأولى سوداء). $\frac{٢}{٣}$

٢ أوجد ل($\bar{أ}$).

٣ أ ليكن هـ الحدث: «الشخص يكون امرأة وطبيب» ، احسب ل(هـ) باستخدام الجدول.

ب اكتب مستخدمًا الحدثين ب ، جـ الحدث« و»: «الشخص يكون امرأة أو طبيب»، ثمّ احسب ل(و).

٤ احسب ل(أ ∪ جـ).

الحل:

١ اختيار الشخص عشوائيًّا يعني أن نواتج التجربة لها فرصة الظهور نفسها ومنها :

ل(أ) = $\frac{٢٥٢}{٣٥٠}$ = ٠,٧٢ ، ل(ب) = $\frac{٢٨٠}{٣٥٠}$ = ٠,٨ ، ل(جـ) = $\frac{٤٢}{٣٥٠}$ = ٠,١٢

٢ ل($\bar{أ}$) = ١ − ل(أ) = ١ − ٠,٧٢ = ٠,٢٨

٣ أ نحسب احتمال الحدث ب ∩ جـ، بحسب الجدول الحدث هـ = ب ∩ جـ لديه ١٤ ناتجًا

وبالتالي: ل(هـ) = ل(ب ∩ جـ) = $\frac{١٤}{٣٥٠}$ = ٠,٠٤

ب نحسب احتمال الحدث ب ∪ جـ، حيث إن ب ، جـ ليسا حدثين متنافيين

ل(و) = ل(ب ∪ جـ) = ل(ب) + ل(جـ) − ل(ب ∩ جـ)

= ٠,٨٠ + ٠,١٢ − ٠,٠٤ = ٠,٨٨

٤ أ ، جـ هما حدثان متنافيان إذًا: ل(أ ∪ جـ) = ل(أ) + ل(جـ) = ٠,٧٢ + ٠,١٢ = ٠,٨٤

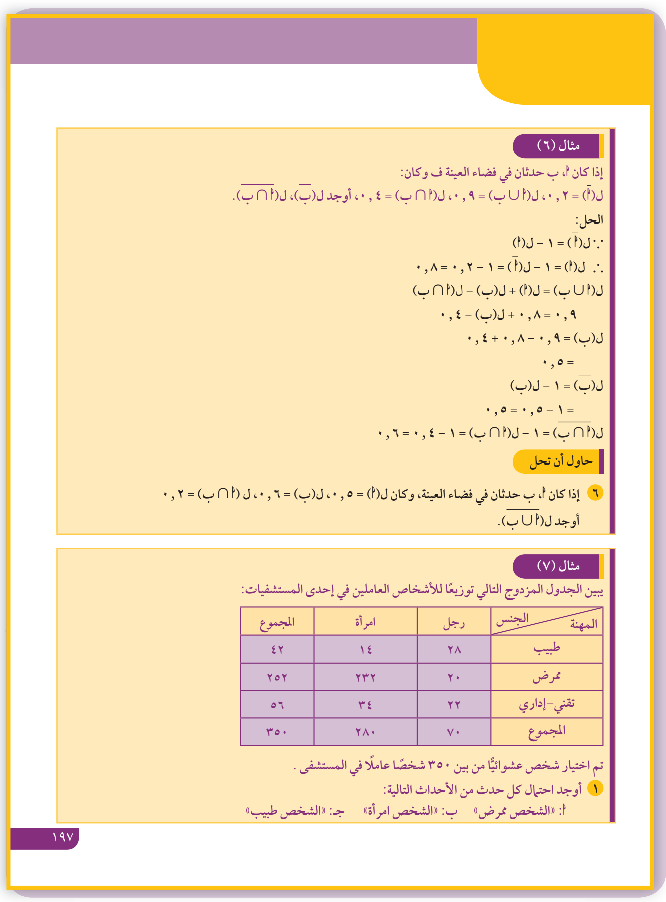
حاول أن تحل

٧ في فضاء عينة ف لدينا حدثان أ ، ب متنافيان حيث ل(أ) = ٠,٤ ، ل(ب) = ٠,٥ .

أ احسب ل(أ ∪ ب).

ب احسب ل($\overline{أ ∪ ب}$).

١٩٨



مثال (٦)

إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان:

ل($\bar{أ}$) = ٠,٢ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٩ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٤ ، أوجد ل($\bar{ب}$)، ل($\overline{أ ∩ ب}$).

الحل:

∵ ل($\bar{أ}$) = ١ − ل(أ)

∴ ل(أ) = ١ − ل($\bar{أ}$) = ١ − ٠,٢ = ٠,٨

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

٠,٩ = ٠,٨ + ل(ب) − ٠,٤

ل(ب) = ٠,٩ − ٠,٨ + ٠,٤

= ٠,٥

ل($\bar{ب}$) = ١ − ل(ب)

= ١ − ٠,٥ = ٠,٥

ل($\overline{أ ∩ ب}$) = ١ − ل(أ ∩ ب) = ١ − ٠,٤ = ٠,٦

حاول أن تحل

٦ إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة، وكان ل(أ) = ٠,٥ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢

أوجد ل($\overline{أ ∪ ب}$).

مثال (٧)

يبين الجدول المزدوج التالي توزيعًا للأشخاص العاملين في إحدى المستشفيات:

المهنة / الجنس	رجل	امرأة	المجموع
طبيب	٢٨	١٤	٤٢
ممرض	٢٠	٢٣٢	٢٥٢
تقني-إداري	٢٢	٣٤	٥٦
المجموع	٧٠	٢٨٠	٣٥٠

تم اختيار شخص عشوائيًّا من بين ٣٥٠ شخصًا عاملًا في المستشفى .

١ أوجد احتمال كل حدث من الأحداث التالية:

أ: «الشخص ممرض» ب: «الشخص امرأة» جـ: «الشخص طبيب»

١٩٧

الأحداث المستقلة Independent Events

يكون الحدثان مستقلين إذا كان وقوع (أو عدم وقوع) أحدهما لا يؤثر على وقوع (أو عدم وقوع) الآخر. فمثلًا، في تجربة عشوائية عند رمي عملة معدنية مرتين وملاحظة الوجه العلوي فإن الحدث «ظهور صورة في الرمية الأولى» لا يؤثر على وقوع الحدث «ظهور صورة في الرمية الثانية»، لأن أي من الرميتين لا تؤثر على الأخرى بأي طريقة، ولذلك **فالحدثان مستقلان**.

إذا كنا نعلم الاحتمالات الفردية لحدثين مستقلين فإنه يمكننا إيجاد احتمال وقوع الحدثين معًا باستخدام القاعدة التالية:

قاعدة الضرب للأحداث المستقلة Multiplication principle of Independent Events

إذا كان أ، ب حدثان مستقلان فإن احتمال وقوع الحدثين معًا هو:

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)

معظم الآلات الحاسبة يمكنها إنتاج أعداد عشوائية تقع بين ٠ ، ١ . كل عدد عشوائي ينتج يكون مستقلًّا عن العدد الآخر السابق له.

مثال (٨)

قام أحمد بتطوير قاعدة باستخدام الآلة الحاسبة البيانية لإنتاج أرقام عشوائية من ٠ إلى ٩ (انظر إلى الشكل المقابل).

فما احتمال أن يكون الرقم الأول الذي حصل عليه زوجيًّا وأن يكون الرقم الثاني مضاعفًا لـ ٣؟

الحل:

بما أن الأرقام عشوائية، فإن الناتج الأول لا يؤثر على الناتج الثاني. أي أن الحدثين مستقلين وهما:

ر: «الرقم الناتج يكون زوجيًّا» ر = {٠، ٢، ٤، ٦، ٨}.

م: «الرقم الناتج يكون مضاعفًا لـ ٣» م = {٣، ٦، ٩}.

ولأن الحدثين مستقلين، لذلك يمكن تطبيق قاعدة الضرب:

ل(ر ∩ م) = ل(ر) × ل(م) = $\frac{٥}{١٠} \times \frac{٣}{١٠}$ = ٠,١٥

وبالتالي: احتمال أن يكون الرقم الأول زوجيًّا والرقم الثاني من مضاعفات ٣ هو ٠,١٥ .

- «**int**» هي أكبر دالة أعداد صحيحة
- «**rand**» هي منتج الأعداد العشوائية بين صفر، ١.
- **int** (10 * **rand**) تعطي أعدادًا بين صفر، ٩.

مثال: **rand** = ٠,٨١٧

10 * **rand** = ٨,١٧

int (10 * **rand**) = ٨

حاول أن تحل

٨ في تجربة عشوائية عند رمي قطعة نقود ثلاث مرات وملاحظة الوجه العلوي.

ما احتمال أن يكون الناتج (ص، ك، ص)؟

١٩٩

٩ إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

١ – ٣ تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

١ (أ) ل (ب) = $\frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$

(ب) ل (جـ) = صفر

(جـ) ل (د) = $\frac{٣}{٣٦} = \frac{١}{١٢}$

٢ ل (ب) = $\frac{٣٦}{٣٦} = ١$

٣ نوجد احتمال (٢ قطع ليستا بالشوكولاتة)

نفرض أن حدث اختيار قطعتي حلوى عشوائيًّا ليست بالشوكولاتة هو الحدث ب

فإن ل(ب) = $\frac{{}_{٢}ق^{٨}}{{}_{٢}ق^{١٢}} = \frac{٢٨}{٦٦} = \frac{١٤}{٣٣}$.

---

(٥) الأحمر أو الأخضر أو البرتقالي؟ ______

(٦) الأحمر؟ ______

(٧) أي لون عدا الأحمر؟ ______

(٨) أي لون عدا البرتقالي أو الأصفر؟ ______

(٩) أي لون عدا البني أو البرونزي؟ ______

في التمارين (١٠–١٣)، ما احتمال أن يحقق رمز عدد عشوائي مكوّن من رقمين من ١ إلى ٩ الشروط التالية؟

(١٠) رقمان عشوائيان. الأول فردي والثاني من مضاعفات العدد ٤. ______

(١١) رقمان عشوائيان. الأول زوجي والثاني فردي. ______

(١٢) رقمان عشوائيان. كلا الرقمين أصغر من ٧. ______

(١٣) رقمان عشوائيان. الرقم الثاني هو الرقم الأول نفسه. ______

(١٤) **تأجير السيارات**: لدى شركة لتأجير السيارات ٢٥ سيارة للإيجار، ٢٠ منها من الحجم الكبير و٥ سيارات من الحجم المتوسط. إذا تم اختيار سيارتين بشكل عشوائي للإيجار لمدة يوم واحد، فما احتمال أن تكون السيارتان من الحجم الكبير؟

______

(١٥) **اكتب لتتعلم**: علّل لماذا العبارة التالية غير صحيحة: احتمال أن يبيع بائع الحواسيب ٠، ١، ٢ أو ٣ أجهزة حاسوب في أي يوم من الأيام هو: ٠,١٢ ، ٠,٤٥ ، ٠,٣٨ ، ٠,١٥ بحسب الترتيب.

______

(١٦) إذا كان أ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٤. أوجد كلًّا من:

(أ) ل(أ ∪ ب) = ______

(ب) ل($\bar{أ}$) = ______

(جـ) ل(أ ∩ ب) = ______

(١٧) ليكن: ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٧ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٨. احسب:

(أ) ل(أ ∩ ب). = ______

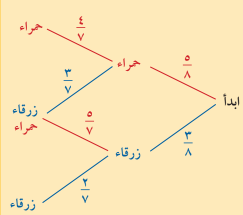
(ب) ل(أ|ب). = ______

(جـ) ل(ب|أ). = ______

الحدث التابع Dependent Event

يكون الحدث تابعًا عندما يتأثر ظهوره بحدث سابق.

مثال (٩) الشجرة البيانية



لدينا ٥ كرات حمراء و٣ كرات زرقاء في كيس. في تجربة عشوائية سحبت كرتين على التوالي بدون إرجاع.

ما احتمال الحصول على كرتين حمراوتين؟

الحل:

ليكن الحدثان أ: «سحب كرة حمراء أولًا»،

ب: «سحب كرة حمراء ثانيًا» .

ل(أ) = $\frac{٥}{٨}$

دون إعادة الكرة الأولى يصبح لدينا في الكيس ٤ كرات حمراء فقط وفي الكيس هناك ٧ كرات وبالتالي ل(ب) = $\frac{٤}{٧}$.

ل(كرتان حمراوتان) = ل(أ) × ل(ب) = $\frac{٥}{٨} \times \frac{٤}{٧} = \frac{٥}{١٤}$

حاول أن تحل

٩ تحتوي علبة حلوى على ١٢ قطعة، ٤ منها بنكهة شوكولاتة والباقي بنكهة الحليب. فما احتمال أخذ قطعة بنكهة شوكولاتة وأكلها، ثم أخذ قطعة بنكهة الحليب؟

---

(١٨) ليكن أ، ب حدثان مستقلان في فضاء عينة ف حيث ل(أ) = ٠,٥، ل(ب) = ٠,٥ .

احسب: ل(ب|أ).

______

في التمارين (١٩–٢١)، اختر الإجابة الصحيحة.

(١٩) إذا كان أ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٥

فإن ل(أ ∪ ب) =

(أ) ٠,٥ (ب) ٠,٧ (جـ) ٠,٨ (د) ٠,٦

(٢٠) إذا كان أ، ب حدثين في فضاء العينة وكان ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٥ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٨

فإن ل(أ ∩ ب) =

(أ) ٠,٢ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٦ (د) ١,٢

(٢١) إذا كان أ، ب حدثين مستقلين في فضاء العينة وكان ل(أ) = ٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٤

فإن ل(أ|ب) =

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٢ (د) ١

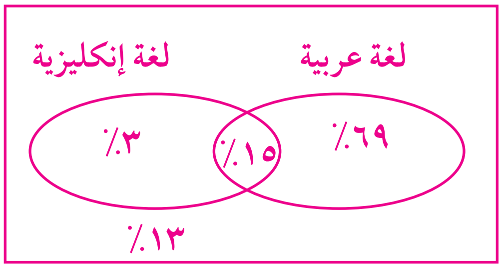
المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١–٣)، عند رمي حجر نرد أحمر اللون وحجر نرد أخضر اللون معًا وملاحظة الوجه العلوي لهما. فما النواتج الممكنة لهذا الحدث؟ وما احتمال ونوع كل حدث في ما يلي؟

(١) مجموع العددين الظاهرين أصغر من ١٠.

(٢) العددان الظاهران عددان فرديان.

٤



(أ) ٪٣

(ب) احتمال الذين لا يقرأون كتبًا باللغتين معًا

= ٪٦٩ يقرأون فقط بالعربية

+ ٪٣ يقرأون فقط بالإنكليزية

+ ٪١٣ لا يقرأون كتبًا

= ٪٨٥

أو ٪١٠٠ − ٪١٥ = ٪٨٥

٥ (أ) ل (أ ∩ ب) = ٠,٢

(ب) ل ($\overline{\text{ب}}$) = ٠,٥

(٣) العددان الظاهران عددان زوجيان.

في التمرين (٤)، حل المسألة التالية:

(٤) **رقم التأمين الاجتماعي**: ما احتمال أن يتم بشكل عشوائي اختيار رقم تأمين اجتماعي مكون من تسعة أرقام مختلفة ليس من بينها الصفر؟

(٥) ما احتمال اختيار رقمًا عشوائيًّا واحدًا من ١ إلى ٩ يحقق الشرطين التاليين:
رقم أولي أو من مضاعفات الرقم ٦.

في التمارين (٦–١٠)، ينتج المصنع حلوى محشوة بالفول السوداني مشكلة بالألوان الموضحة بالجدول.

يوضح الجدول التالي احتمال إنتاج الحلوى بحسب لونها:

اللون	البني	الأحمر	الأصفر	الأخضر	البرتقالي
الاحتمال	٠,٣	٠,٢	٠,٢	٠,٢	٠,١

إذا قمت بأخذ قطعة حلوى عشوائيًّا من كل من علبتين مفتوحتين حديثًا من إنتاج هذا المصنع، فما احتمال أخذ حلوى بالألوان التالية؟

(٦) كلتاهما بنية اللون.

(٧) كلتاهما برتقالية اللون.

(٨) الأولى بنية اللون والثانية صفراء.

(٩) ولا واحدة صفراء.

(١٠) الأولى ليست حمراء والثانية ليست برتقالية.

١١٧

الاحتمال المشروط Conditional Probability

في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة الوجه العلوي له فإن فضاء العينة ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}.

ليكن الحدث أ (ظهور عدد أكبر من ٣) فإن أ = {٤، ٥، ٦} ويكون ل(أ) = ن(أ)/ن(ف) = ٣/٦ = ١/٢

وليكن الحدث ب (ظهور عدد زوجي) فيكون ب = {٢، ٤، ٦}

ل(ب) = ن(ب)/ن(ف) = ٣/٦ = ١/٢

لنسأل الآن: إذا علمنا أن الحدث أ قد وقع، فما هو احتمال وقوع الحدث ب بشرط وقوع الحدث أ. بمعنى آخر ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي بشرط أن يكون أكبر من ٣؟

نلاحظ أن الشرط المعطى يجعل فضاء العينة الجديد هو أ = {٤، ٥، ٦} وللحصول على عدد زوجي أكبر من ٣ نوجد:

ب ∩ أ = {٤، ٦}

وبالتالي احتمال الحصول على عدد زوجي بشرط أن يكون أكبر من ٣ هو ٢/٣

احتمال وقوع الحدث ب بشرط وقوع الحدث أ يسمى بالاحتمال المشروط (الشرطي) ويُكتب ل(ب|أ) ويُقرأ احتمال الحدث ب بشرط أ. ويمكن إيجاد ل(ب|أ) باستخدام القاعدة التالية:

قاعدة الاحتمال المشروط

إذا كان وقوع الحدث ب مشروطًا بوقوع الحدث أ فإن:

ل(ب|أ) = ل(أ ∩ ب) / ل(أ)   حيث ل (أ) ≠ ٠

وكذلك ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب|أ)

٢٠١

(١١) ليكن أ، ب حدثان مستقلان في فضاء عينة ف حيث ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٧ .

احسب:

(أ) ل(أ ∩ ب)

(ب) ل(ب|أ)

(جـ) ل(أ ∪ ب)

(د) ل(ب|أ)

١١٨

٦ ل (ا ∪ ب) = ٠,٥ + ٠,٦ − ٠,٢ = ٠,٩

$\overline{\text{ل (ا ∪ ب)}}$ = ١ − ٠,٩ = ٠,١.

٧ (أ) ل (ا ∪ ب) = ٠,٩

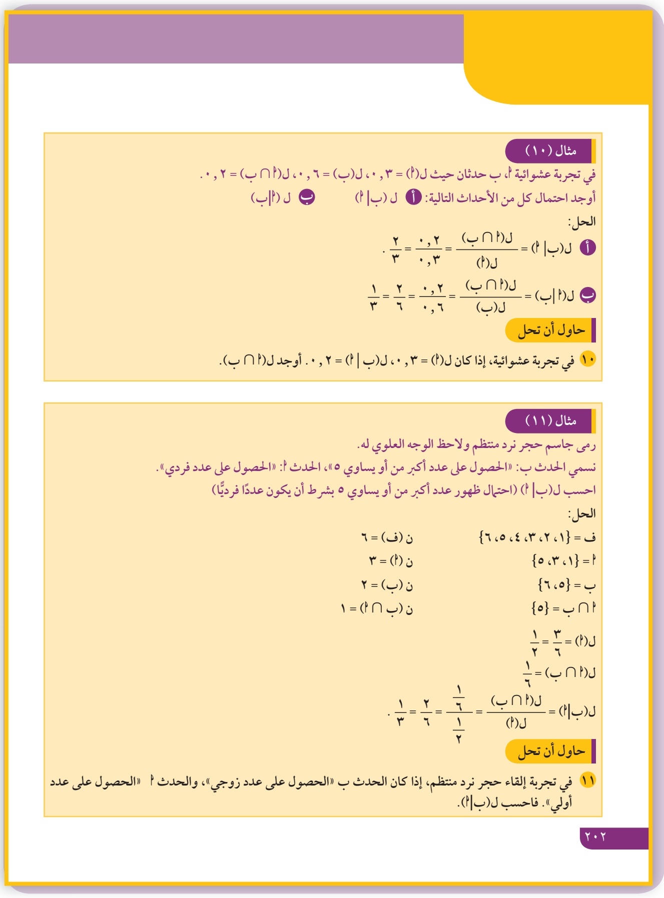
(ب) ل $\overline{\text{(ا ∪ ب)}}$ = ٠,١

٨ $\frac{١}{٨}$

٩ $\frac{٤}{١٢} \times \frac{٨}{١١} = \frac{٨}{٣٣}$

١٠ ل (ا ∩ ب) = ٠,٠٦

١١ ل (ب|ا) = $\frac{١}{٣}$



مثال (١٠)

في تجربة عشوائية ا، ب حدثان حيث ل(ا) = ٠,٣، ل(ب) = ٠,٦، ل(ا ∩ ب) = ٠,٢.

أوجد احتمال كل من الأحداث التالية: أ ل (ب|ا)   ب ل (ا|ب)

الحل:

أ ل(ب|ا) = $\frac{\text{ل(ا ∩ ب)}}{\text{ل(ا)}} = \frac{٠,٢}{٠,٣} = \frac{٢}{٣}$.

ب ل(ا|ب) = $\frac{\text{ل(ا ∩ ب)}}{\text{ل(ب)}} = \frac{٠,٢}{٠,٦} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

حاول أن تحل

١٠ في تجربة عشوائية، إذا كان ل(ا) = ٠,٣، ل(ب | ا) = ٠,٢. أوجد ل(ا ∩ ب).

مثال (١١)

رمى جاسم حجر نرد منتظم ولاحظ الوجه العلوي له.

نسمي الحدث ب: «الحصول على عدد أكبر من أو يساوي ٥»، الحدث ا: «الحصول على عدد فردي».

احسب ل(ب|ا) (احتمال ظهور عدد أكبر من أو يساوي ٥ بشرط أن يكون عددًا فرديًّا)

الحل:

ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}   ن (ف) = ٦

ا = {١، ٣، ٥}   ن (ا) = ٣

ب = {٥، ٦}   ن (ب) = ٢

ا ∩ ب = {٥}   ن (ب ∩ ا) = ١

ل(ا) = $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

ل(ا ∩ ب) = $\frac{١}{٦}$

ل(ب|ا) = $\frac{\text{ل(ا ∩ ب)}}{\text{ل(ا)}} = \frac{\frac{١}{٦}}{\frac{١}{٢}} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$.

حاول أن تحل

١١ في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم، إذا كان الحدث ب «الحصول على عدد زوجي»، والحدث ا «الحصول على عدد أولي». فاحسب ل(ب|ا).

٢٠٢

إجابات «مسألة إضافية»

١ (أ) $\overline{س}$ = ٣١٢,٢٥ مليلتر

(ب) ع = ٢٧,٠٤٥، الانحراف المعياري غير مقبول

لذا، يكون تشتت القيم عن المتوسط الحسابي كبير.

المرشد لحل المسائل

مثال (١)

(١) نأخذ البيانات التالية:

(أ): ١٠، ٢٠، ٤٠، ٥٠، ٧٠، ٨٠، ٩٠، ١٠٠، ١٢٠، ١٥٠

(ب): ١، ٢، ٤، ٥، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١٢، ١٥

أ كيف نستنتج القيم في بيانات المجموعة (ب) من قيم البيانات في المجموعة (أ)؟

ب أوجد التباين $ع_١^٢$ لقيم المجموعة (أ) والتباين $ع_٢^٢$ لقيم المجموعة (ب).

جـ استنتج العلاقة بين $ع_١$ ، $ع_٢$.

ما الذي أعرفه؟ قيّم مجموعتين من البيانات.

ما الذي أريد معرفته؟

الربط بين قيم المجموعة (أ) وقيم المجموعة (ب).

العلاقة بين تباين قيم المجموعة (أ) وتباين قيم المجموعة (ب).

كيف سأحل المسألة؟

(أ) بالنظر إلى قيم البيانات في المجموعة (أ) وقيم البيانات في المجموعة (ب) نلاحظ أن جميع قيم المجموعة (ب) هي قيم المجموعة (أ) مقسومة على ١٠.

(ب) نكوّن جدولًا لكل من قيم المجموعتين:

جدول (أ)

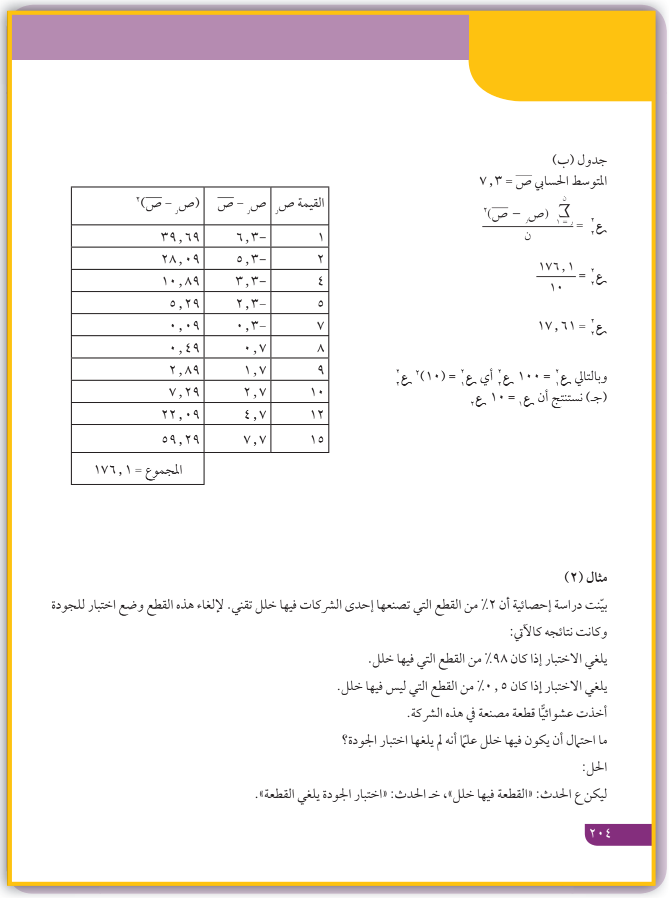
القيمة $س_ر$	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^٢$
١٠	٦٣-	٣ ٩٦٩
٢٠	٥٣-	٢ ٨٠٩
٤٠	٣٣-	١ ٠٨٩
٥٠	٢٣-	٥٢٩
٧٠	٣-	٩
٨٠	٧	٤٩
٩٠	١٧	٢٨٩
١٠٠	٢٧	٧٢٩
١٢٠	٤٧	٢ ٢٠٩
١٥٠	٧٧	٥ ٩٢٩
		المجموع = ١٧ ٦١٠

المتوسط الحسابي $\overline{س}$ = ٧٣

$$ع_١^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢}{ن}$$

$$ع_١^٢ = \frac{١٧\ ٦١٠}{١٠}$$

$ع_١^٢$ = ١٧٦١



جدول (ب)

المتوسط الحسابي $\overline{ص}$ = ٧,٣

$$ع_٢^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (ص_ر - \overline{ص})^٢}{ن}$$

$$ع_٢^٢ = \frac{١٧٦,١}{١٠}$$

$ع_٢^٢$ = ١٧,٦١

القيمة $ص_ر$	$ص_ر - \overline{ص}$	$(ص_ر - \overline{ص})^٢$
١	٦,٣-	٣٩,٦٩
٢	٥,٣-	٢٨,٠٩
٤	٣,٣-	١٠,٨٩
٥	٢,٣-	٥,٢٩
٧	٠,٣-	٠,٠٩
٨	٠,٧	٠,٤٩
٩	١,٧	٢,٨٩
١٠	٢,٧	٧,٢٩
١٢	٤,٧	٢٢,٠٩
١٥	٧,٧	٥٩,٢٩
		المجموع = ١٧٦,١

وبالتالي $ع_١^٢$ = ١٠٠ $ع_٢^٢$ أي $ع_١^٢$ = $(١٠)^٢$ $ع_٢^٢$

(جـ) نستنتج أن $ع_١$ = ١٠ $ع_٢$

مثال (٢)

بيّنت دراسة إحصائية أن ٢٪ من القطع التي تصنعها إحدى الشركات فيها خلل تقني. لإلغاء هذه القطع وضع اختبار للجودة وكانت نتائجه كالآتي:

يلغي الاختبار إذا كان ٩٨٪ من القطع التي فيها خلل.

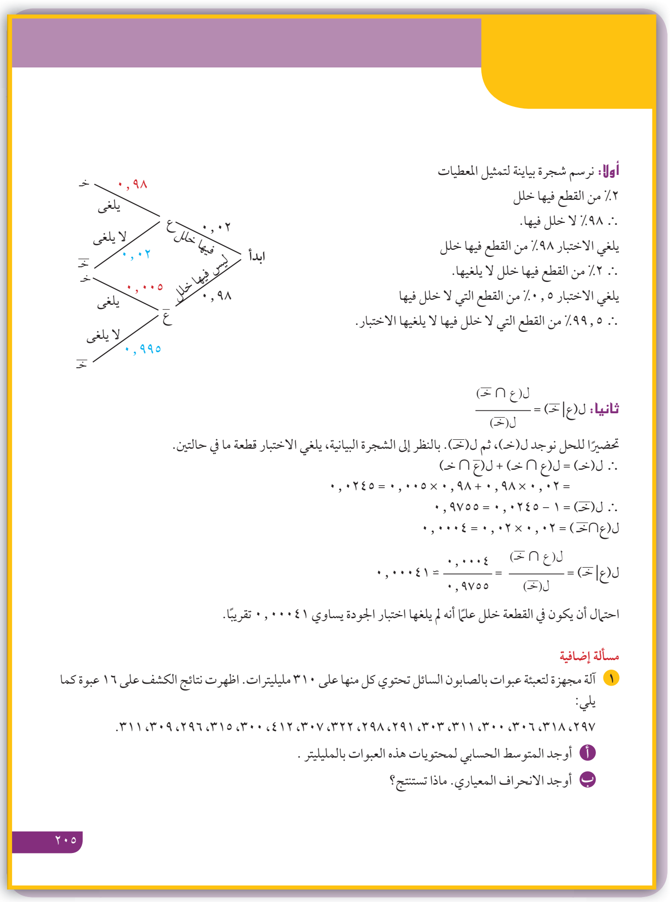
يلغي الاختبار إذا كان ٠,٥٪ من القطع التي ليس فيها خلل.

أخذت عشوائيًّا قطعة مصنعة في هذه الشركة.

ما احتمال أن يكون فيها خلل علمًا أنه لم يلغها اختبار الجودة؟

الحل:

ليكن ع الحدث: «القطعة فيها خلل»، خـ الحدث: «اختبار الجودة يلغي القطعة».



أولا: نرسم شجرة بياينة لتمثيل المعطيات

٢٪ من القطع فيها خلل

∴ ٩٨٪ لا خلل فيها.

يلغي الاختبار ٩٨٪ من القطع فيها خلل

∴ ٢٪ من القطع فيها خلل لا يلغيها.

يلغي الاختبار ٠,٥٪ من القطع التي لا خلل فيها

∴ ٩٩,٥٪ من القطع التي لا خلل فيها لا يلغيها الاختبار.

ثانيا: $ل(ع|\overline{خـ}) = \frac{ل(ع \cap \overline{خـ})}{ل(\overline{خـ})}$

تحضيرًا للحل نوجد ل(خـ)، ثم ل($\overline{خـ}$). بالنظر إلى الشجرة البيانية، يلغي الاختبار قطعة ما في حالتين.

∴ ل(خـ) = ل(ع ∩ خـ) + ل($\overline{ع}$ ∩ خـ)

= ٠,٠٢ × ٠,٩٨ + ٠,٩٨ × ٠,٠٠٥ = ٠,٠٢٤٥

∴ ل($\overline{خـ}$) = ١ − ٠,٠٢٤٥ = ٠,٩٧٥٥

ل(ع∩$\overline{خـ}$) = ٠,٠٢ × ٠,٠٢ = ٠,٠٠٠٤

$$ل(ع|\overline{خـ}) = \frac{ل(ع \cap \overline{خـ})}{ل(\overline{خـ})} = \frac{٠,٠٠٠٤}{٠,٩٧٥٥} \simeq ٠,٠٠٠٤١$$

احتمال أن يكون في القطعة خلل علمًا أنه لم يلغها اختبار الجودة يساوي ٠,٠٠٠٤١ تقريبًا.

مسألة إضافية

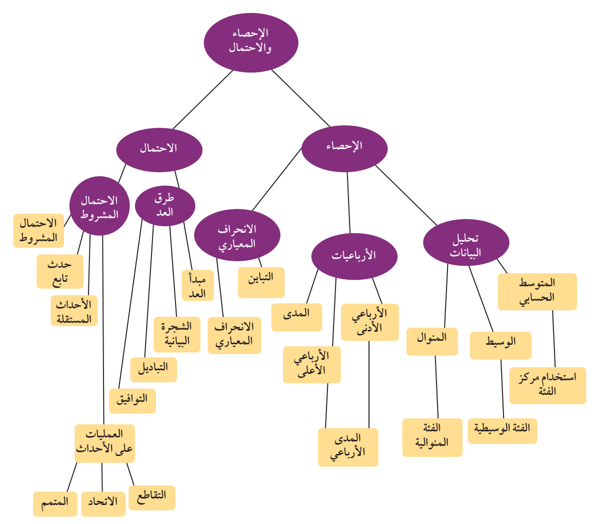
١ آلة مجهزة لتعبئة عبوات بالصابون السائل تحتوي كل منها على ٣١٠ مليليترات. اظهرت نتائج الكشف على ١٦ عبوة كما يلي:

٢٩٧، ٣١٨، ٣٠٦، ٣٠٠، ٣١١، ٣٠٣، ٢٩١، ٢٩٨، ٣٢٢، ٣٠٧، ٤١٢، ٣٠٠، ٣١٥، ٢٩٦، ٣٠٩، ٣١١.

أ أوجد المتوسط الحسابي لمحتويات هذه العبوات بالمليليتر .

ب أوجد الانحراف المعياري. ماذا تستنتج؟

مخطط تنظيمي للوحدة العاشرة



* المدى الأرباعي = الأرباعي الأعلى ($ر_٣$) − الأرباعي الأدنى ($ر_١$)

– **الشجرة البيانية**: إذا كان عدد الإمكانيات صغيرًا بما يكفي، فإن الشجرة البيانية يمكن أن تساعد في تنظيم مهمة العد.

– **التباديل**: عندما يكون الترتيب مهمًّا ومعتمداً يسمى بالتباديل، عامة عدد تباديل من الأشياء هو ن! (مضروب ن).

– **قانون التباديل**: إذا كان ن، ر عددان صحيحان غير سالبين بحيث ر ≥ ن، فإن عدد التباديل المكوّن من أشياء عددها ر والمأخوذة من بين ن من الأشياء هو: $^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$

– **التوافيق**: عندما تريد إيجاد عدد المجموعات الجزئية والمكوّن كل منها من ر عنصر، والتي يمكن اختيارها من مجموعة مكوّنة من ن عنصر دون اعتماد النظر عن الترتيب فنحن نحسب التوافيق.

– **قانون التوافيق**: إذا كان ن، ر عددان صحيحان غير سالبين، حيث ر ≥ ن فإن عدد التوافيق المكوّنة كل منها من ر من الأشياء والمختارة من بين ن من العناصر في الوقت نفسه هو: $^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{ر!(ن - ر)!}$.

– احتمال الحدث أ هو: $ل(أ) = \frac{\text{عدد النواتج في الحدث أ}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$

– خواص الاحتمال لحدث ما:

ليكن أ حدث في فضاء عينة منته وغير خالٍ ف فإن:

– $٠ \leq ل(أ) \leq ١$

– إذا كان أ = { } فإن ل(أ) = ٠، أ يسمى الحدث المستحيل.

– إذا كان أ = ف فإن ل(أ) = ١، أ يسمى الحدث المؤكد.

– مجموع احتمالات النواتج في فضاء العينة يساوي ١ .

– تقاطع حدثين أ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ وفي ب في آن معًا ويرمز إليه بـ $أ \cap ب$.

– اتحاد حدثين أ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ أو في ب ويرمز إليه بـ $أ \cup ب$.

– الحدثان أ، ب هما متنافيان إذا لم يكن لديهما ناتج مشترك أي $أ \cap ب = \varnothing$.

– متمم حدث أ يرمز إليه بـ $\bar{أ}$ وهو الحدث الذي يتألف من كل النواتج الموجودة في فضاء العينة وغير موجودة في أ.

– الأحداث المستقلة: يكون حدثان مستقلان إذا كان حدوث أحدهما ليس له تأثير على احتمال حدوث الآخر.

– قاعدة الضرب للأحداث المستقلة:

إذا كان أ، ب حدثان مستقلان فإن احتمال وقوع الحدثين معًا هو: $ل(أ \cap ب) = ل(أ) \times ل(ب)$

– **الحدث التابع**: يكون الحدث تابعًا عندما يتأثر ظهور هذا الحدث بحدث سابق.

– الاحتمال المشروط:

ليكن لدينا حدثين أ، ب ونفترض أن $ل(أ) \neq ٠$.

احتمال وقوع الحدث ب بشرط وقوع الحدث أ يسمى الاحتمال المشروط ويكتب ل(ب|أ) ويقرأ «احتمال الحدث ب بشرط أ».

– قاعدة الاحتمال المشروط:

إذا كان وقوع الحدث ب مشروطًا بوقوع الحدث أ ($ل(أ) \neq ٠$)

$ل(ب|أ) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)}$ ، $ل(أ \cap ب) = ل(أ) \times ل(ب|أ)$.

ملخص

– تستخدم قيم النزعة المركزية لوصف البيانات الإحصائية:

* المتوسط الحسابي هو ناتج قسمة مجموع قيم البيانات على عدد هذه القيم: $\bar{س} = \frac{ت_١ س_١ + ت_٢ س_٢ + ... + ت_ن س_ن}{ت_١ + ت_٢ + ... + ت_ن}$

* الوسيط هو القيمة التي تأتي في المنتصف بعد ترتيب هذه القيم تصاعديًّا أو تنازليًّا.

* المنوال هو القيمة (القيم) الأكثر تكرارًا في البيانات.

* في البيانات حيث التوزيع التكراري على فئات نستخدم مركز الفئة لإيجاد المتوسط الحسابي.

* في البيانات حيث التوزيع التكراري على فئات نستخدم قانون الرافعة:

المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + $\frac{ك_٢}{ك_١ + ك_٢} \times ف$

حيث إن ف = طول الفئة المنوالية،

$ك_١$ = تكرار الفئة السابقة مباشرة للفئة المنوالية،

$ك_٢$ = تكرار الفئة اللاحقة مباشرة للفئة المنوالية

* يمكن إيجاد الوسيط باستخدام بمنحنى المتجمع الصاعد أو منحنى المتجمع النازل أو كليهما.

* يمكن إيجاد المنوال باستخدام قانون الرافعة.

* يمكن إيجاد المنوال باستخدام المدرج التكراري.

– نستخدم الأرباعيات والمدى والتباين والانحراف المعياري لدراسة تشتت البيانات.

* المدى = القيمة العظمى من البيانات − القيمة الصغرى من البيانات.

* الأرباعي الأدنى = وسيط القيم الأدنى للبيانات أصغر من الوسيط ويعرف بالرمز $ر_١$.

* الأرباعي الأعلى = وسيط القيم الأعلى للبيانات أكبر من الوسيط ويعرف بالرمز $ر_٣$.

* يعرف الوسيط للبيانات بالرمز $ر_٢$.

* مجمل الأعداد الخمسة في البيانات هو: القيمة الصغرى، $ر_١$، $ر_٢$، $ر_٣$، القيمة العظمى.

* يوضح مخطط الصندوق ذي العارضتين كيفية توزيع القيم الخمس والعلاقة فيما بينها وتشتت قيم البيانات.

* التباين هو القيمة من البيانات الناتجة من حساب القاعدة: $ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر (س_ر - \bar{س})^٢}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر}$

* الانحراف المعياري يبيّن تشتت البيانات عن المتوسط الحسابي لهذه البيانات ويعطى بالقاعدة:

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر (س_ر - \bar{س})^٢}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر}}$$

إذا كبر الانحراف المعياري يكون التشتت كبيرًا وبعيدًا عن المتوسط الحسابي وإذا صغر الانحراف المعياري يكون التشتت قريبًا من المتوسط الحسابي.

مراجعة الوحدة العاشرة

(١) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لعدد الرجال غير المتزوجين في إحدى الدول.

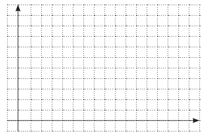
الفئة (العمر)	الرجال
−٢٠	٤٥٠٠
−٣٠	٤٨٠
−٤٠	٣٧٠
−٥٠	٢٩٠
−٦٠	١٨٠
−٧٠	١١٠
−٨٠	٣٠

(أ) أكمل الجدول بإضافة مراكز الفئات والتكرار المتجمع الصاعد.

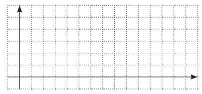
الفئة (العمر)	الرجال	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	مركز الفئة
−٢٠	٤٥٠٠			
−٣٠	٤٨٠			
−٤٠	٣٧٠			
−٥٠	٢٩٠			
−٦٠	١٨٠			
−٧٠	١١٠			
−٨٠	٣٠			

(ب) أوجد المتوسط الحسابي لأعمار الرجال.

(جـ) أوجد الوسيط لأعمار الرجال مستخدمًا منحنى التكرار المتجمع الصاعد.



(د) أوجد المنوال لأعمار الرجال باستخدام المدرج التكراري.



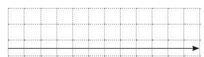
(٢) جاءت درجات أحمد السنة الماضية في اختبار مادة العلوم حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة كما يلي:

١٧، ١٠، ١٥، ١٢، ١٣، ٩، ١٦، ٨، ١٤، ١٦.

(أ) أوجد المتوسط الحسابي لهذه الدرجات $\overline{س}$.

(ب) أوجد مجمل الأعداد الخمسة لهذه الدرجات.

(جـ) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين.



ماذا تلاحظ؟

(د) أوجد الانحراف المعياري لهذه الدرجات ع.

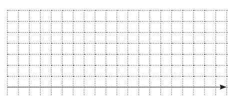
١٢٠

(٣) إذا كانت درجات أحد الطلاب في اختبارات مادة الرياضيات على مدار السنة حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة كما يلي: ٧، ١٠، ١٢، ٩، ١٤، ١٦، ١٥، ٨، ١٧.

(أ) أوجد مجمل الأعداد الخمسة لقيم هذه الدرجات.

(ب) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين لتمثيل قيم هذه الدرجات.

ماذا تلاحظ؟



١٢١

تمارين إثرائية

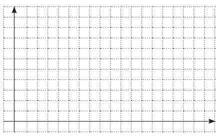
(١) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان ٧٥ رأسًا من قطيع المها العربية بالكيلوجرام.

الفئة	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-
التكرار	١	٧	٥	٨	١١	٢٢	١٧	٤

(أ) أكمل الجدول بإضافة التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل.

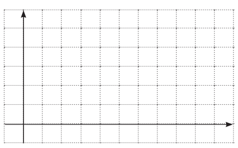
الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
١٠-	١				
٢٠-	٧				
٣٠-	٥				
٤٠-	٨				
٥٠-	١١				
٦٠-	٢٢				
٧٠-	١٧				
٨٠-	٤				

(ب) أوجد الوسيط لقيم هذه الأوزان باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد ومنحنى التكرار المتجمع النازل معًا.



١٢٢

(جـ) أوجد المنوال لقيم هذه الأوزان باستخدام قانون الرافعة وباستخدام المدرج التكراري.



(د) أوجد المتوسط الحسابي لقيم هذه الأوزان.

(٢) سجل أحد الاشخاص أسعار الحاسوب بالدينار الكويتي من عدة محلات لبيع هذه الأجهزة كما يلي:

٢٥٠، ٢٤٥، ٢٦٠، ٢٥٥، ٢٤٠، ٢٦٥، ٢٦٥، ٢٣٥، ٢٧٠، ٢٦٥.

(أ) أوجد المتوسط الحسابي لقيم هذه الأسعار $\overline{س}$.

(ب) أوجد الانحراف المعياري لقيم هذه الأسعار ع.

(٣) **حلوى محشوة بالفول السوداني**: ينتج مصنع حلوى محشوة بالفول السوداني مشكلة بالألوان، كما يوضح الجدول التالي:

اللون	البني	الأحمر	الأصفر	الأخضر	البرتقالي
الاحتمال	٠,٣	٠,٢	٠,٢	٠,٢	٠,١

إذا أخذت ثلاث قطع من علبة واحدة، فكم عدد الألوان التي يحتمل الحصول عليها؟

(٤) **تسلية**: في إحدى الألعاب يتم رمي خمسة أحجار نرد متمايزة في وقت واحد وملاحظة الوجه العلوي لها. كم عدد النواتج التي يمكن تمييزها إذا كان لكل حجر لون مختلف؟

١٢٣

(٥) **المعلم والامتحان النهائي**: أعطى معلم طلابه ٢٠ سؤالًا للاستذكار على أن يحتوي الامتحان النهائي على ثمانية أسئلة منها. كم عدد الامتحانات النهائية المختلفة التي يمكن وضعها؟

(٦) **مسح للخريجين**: اختارت إحدى الكليات عددًا من دفعة عام ١٩٩٦ المكونة من ٢٥٤ خريجًا من بينهم ١٧٢ سيدة، حيث التحق ١٢٤ سيدة بالدراسات الجامعية و٥٨ رجلًا. فما احتمال كل من الأحداث التالية؟

(أ) أن يكون الخريج سيدة.

(ب) أن يلتحق الخريج بالدراسات الجامعية.

(جـ) أن يكون الخريج سيدة وقد التحقت بالدراسات الجامعية.

(٧) **تحديد نوع الطفل**: افترض أن احتمال أن يكون الطفل المولود حديثًا من نوع معين هو ٥٠٪، في عائلة مكونة من أربعة أطفال. فما احتمال كل حدث معطى؟

(أ) كل الأطفال إناث.

(ب) كل الأطفال من نوع مختلف.

(جـ) كل الأطفال إما ذكور أو إناث.

(٨) عند إشارة المرور التي تتألف من ثلاثة ألوان لاحظنا أن:

٢٪ من السيارات تتوقف عند الإشارة الخضراء.

٦٥٪ من السيارات تتوقف عند الإشارة الصفراء (كما يطلب قانون المرور).

٩٧٪ من السيارات تتوقف عند الإشارة الحمراء.

قررنا مراقبة سلوك سيارة عند إشارة المرور. لنفترض أنه عند وصول السيارة إلى الإشارة، لون الإشارة عشوائي وأن احتمال أن يكون اللون هو الأخضر ٦, ٠، احتمال أن يكون اللون هو الأصفر ١, ٠، احتمال أن يكون اللون هو الأحمر ٣, ٠.

(أ) ما احتمال أن تكون السيارة المراقبة قد توقفت؟

(ب) تجاوزت السيارة الإشارة. فما احتمال أن تكون قد تجاوزت الإشارة عندما كان لونها أحمرًا.

(٩) **أرقام الهاتف**: ما احتمال أن يتم بشكل عشوائي اختيار رقم هاتف مكوّن من سبعة أرقام دون تكرار أي منها؟

(١٠) ما احتمال اختيار رقم واحد عشوائي من ١ إلى ٩ يحقق الشروط التالية: عدد فردي أو من مضاعفات العدد ٤؟

(١١) في فصل الشتاء، أصابت موجة زكام ربع المواطنين. ثلث المواطنين تلقوا لقاحًا ضد الزكام، ولسبب عدم فاعلية اللقاح ١٠٠٪ نفترض أن مريضًا مصابًا بالزكام من ١٠ قد تلقى لقاحًا.

ما احتمال أن يكون مواطن من بين الذين تلقوا اللقاح مصابًا بالزكام؟

مماس الدائرة — تمرَّنْ ٦-١

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) س = ١٢٠° (٢) س = ٤٨° (٣) نعم، ٨^{٢} + ٦^{٢} = ١٠^{٢}

(٤) كلّا، ١٥^{٢} + ٥^{٢} ≠ ١٦^{٢} (٥) محاطة (٦) محيطة

(٧) ٧٨ سم (٨) ٨ سم (٩) ١٣ سم

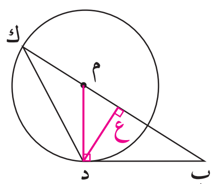
(١٠) م$_{١}$ت$_{١}$ = م$_{١}$ت$_{٢}$، م$_{٢}$ت$_{١}$ = م$_{٢}$ت$_{٢}$.

$\overleftrightarrow{\text{م}_{١}\text{م}_{٢}}$ المنصف العمودي لِـ $\overline{\text{ت}_{١}\text{ت}_{٢}}$.

كذلك $\overleftrightarrow{\text{م}_{١}\text{م}_{٢}}$ المنصف العمودي لِـ $\overline{\text{ل}_{١}\text{ل}_{٢}}$.

∴ $\overline{\text{ت}_{١}\text{ت}_{٢}}$ // $\overline{\text{ل}_{١}\text{ل}_{٢}}$ (إذا تعامد مستقيمان مع مستقيم ثالث يكون المستقيمان متوازيين).

(١١) (أ) ٨ سم.



(ب) ب م × ع = ب د × م د، ع = $\frac{١٢٠}{١٧}$ سم، المساحة ≃ ٨٨,٢٤ سم^{٢}.

المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

(١) س = ٣٠° (٢) نعم. ٦^{٢} + ٢,٥^{٢} = (٦,٥)^{٢}

(٣) محاطة

(٤) أطوال القطع الأربع متساوية. نظرية.

(٥) (أ) س = ٨٧,٢° (ب) ٨٢ سم (جـ) ٢٩ سم

(٦) ٣٥° (٧) $\frac{\text{س}}{٢}$

(٨) (جـ) (٩) (أ)

(١٠) (جـ) (١١) (د)

الأوتار والأقواس — تمرَّنْ ٦-٢

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) (أ) س = ١٤ (ب) س = ٢ (جـ) س = ٧

(٢) تتنوّع الإجابات. مثال: $\overline{جـ ب} \cong \overline{د ب}$ ؛ ق(جـ وْ ب) = ق(د وْ ب).

(٣) (أ) س = ٦ (ب) س ≃ ٥,٣٨ (جـ) س ≃ ٨,٩

(٤) لا يعلم إذا كانت الأوتار متساوية البعد من مركز الدائرة.

(٥) (أ) ٥ سم (ب) ١٠ سم

(٦) (أ) ٣,٥٤ سم (ب) ١٥,٥٤ سم

(٧) ١٢ سم (٨) ≃ ٨,٩ سم (٩) (ب) (١٠) (د)

المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

(١) (أ) س = ٥٠ (ب) س = ٨ (جـ) س = ١٠

(٢) مركز الدائرة.

(٣) (أ) س = ١٢,٥٣ (ب) س ≃ ٩,٩٥ (جـ) س ≃ ٢٠,٧٨

(٤) س ≃ ٦,٢ سم (٥) ≃ ٩ سم

(٦) = ١٠ سم، لأن Δ ل و م قائم الزاوية في و.

الزوايا المركزية والزوايا المحيطية — تمرَّنْ ٦-٣

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) (أ) س = ١١٦°

(ب) س = ١٨٠°

(جـ) س = ٢١٨°، ص = ١٠٩°

(د) س = ٣٦°، ص = ٣٦°

(هـ) س = ٥٠°، ك = ٩٠°، ص = ٩٠°

(٢) (أ) س = ١٢٣°

(ب) س = ٥٢°، ص = ٦٤°

(جـ) ص = ١٣٠°، س = ٦٥°

(٣) (أ) ٤٠° (ب) ٥٠° (جـ) ٤٠° (د) ٦٥°

(٤) (أ) ٧٨° (ب) ١٠٥° (جـ) ٨٥°

(٥) ق (أ بَ جـ) = ق (ب جَ د) بالتبادل الداخلي. لذا: $\overset{\frown}{\text{أجـ}} \cong \overset{\frown}{\text{ب د}}$

(٦) شبه منحرف متطابق الضلعين. لأن مجموع قياسي زاويتين متقابلتين يساوي °١٨٠.

(٧) °٤٠ (٨) °٩٠

(٩) (أ) $\simeq$ °٤٨

(ب) $\simeq$ °٤٨

(١٠) (أ) ق (ب جَ د) = ق $= \frac{(\overset{\frown}{\text{ب د}})}{٢}$ ، ق (جـ بَ د) = ق $\frac{(\overset{\frown}{\text{جـ د}})}{٢}$ ، $\overline{\text{جـ د}} \cong \overline{\text{د ب}}$.

(ب) Δ ب جـ د قائم الزاوية في د ومتطابق الضلعين.

(١١) (أ) قائم الزاوية في تَ .

(ب) °٦٠

(جـ) (٣ + $\sqrt{٣}$)نق

(١٢) ق (ب أَ ت) = ق (ب وَ جـ) = $\frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{ب ت}})}{٢}$ (بالتناظر).

(١٣) (أ) نق = ١٠ سم.

(ب) ق $\overset{\frown}{\text{أب}}$ $\simeq$ °١٠٦

المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

(١) (أ) س = °٥٤ ، ص = °٣٠ ، ك = °٩٦

(ب) س = °١١٢ ، ص = °١٢٠ ، ك = °٣٨

(جـ) س = °٨٥ ، ص = °٤٧,٥ ، ك = °٩٠

(د) س = °١٠١ ، ل = °٨٠ ، ك = °٨٤ ، ص = °٦٧

(٢) (أ) س = °٢٢ ، ك = °١٥٦ ، ص = °٧٨

(ب) ل = °٦٠ ، س = °٣٠ ، ص = °٦٠ ، م = °١٢٤ ، ك = °٦٢

(٣) $\simeq$ °١٢٣,٩.

(٤) ق (جَ) = °١١٠ ، ق (دَ) = °٥٠.

(٥) ليكن و مركز الدائرة.

قياس كل زاوية في المثلث تساوي °١٨٠ − °١٢٠ = °٦٠.

فيكون Δ د هـ ز متطابق الأضلاع.

(٦) (أ) (٧) (جـ) (٨) (د)

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) د هـ = ٢١
(٢) م ن = ١٢
(٣) س = ١٥
(٤) س = ٢٥,٨ ، ص ≃ ١٢,٤
(٥) $١٦,\overline{٦}$
(٦) $٢٦,\overline{٦}$
(٧) س ≃ ٨,٩ ، ص = ٢
(٨) س ≃ $١٠,\overline{٦}$ ، ص = ١٠
(٩) يجب كتابة (٥,٧ + ٦)٦ = $س^٢$
(١٠) هـ منتصف $\overline{م ل}$ فيكون : $\overline{م ل} \perp \overline{و جـ}$
$\overleftrightarrow{أ ب}$ مماس للدائرة عند جـ ∴ $\overleftrightarrow{أ ب} \perp \overline{و جـ}$.
لذا $\overline{م ل} // \overleftrightarrow{أ ب}$
(١١) هـ ب = ٨٠
(١٢) س = ٣٠٠
(١٣) (أ) جـ د = ٦
(ب) أ ب ≃ ١٢,٦٥

المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

(١) هـ ب = ١٠
(٢) أ د = ١٢ ، جـ د = ٩
(٣) س = ٣,٥
(٤) س ≃ ٣,٥ ، ص ≃ ٢,٩
(٥) ١٤,١ تقريبًا.
(٦) د ك = ٥,٨
(٧) أ جـ = ٤
(٨) (أ) ل ب × ل هـ = ل د × ل جـ
∵ ل ب = ل د ∴ ل جـ = ل هـ
(ب) أ د × أ هـ = أ ب × أ جـ
∵ أ د = أ ب ∴ أ هـ = أ جـ ومنه ب جـ = د هـ.

مراجعة الوحدة السادسة

(١) س = ٩٤°

(٢) س = ٤٠

(٣) س ≃ ٧,٢

(٤) س ≃ ٩,٨

(٥) ق($\overset{\frown}{أب}$) = ١٢٠°

(٦) ق($\overset{\frown}{أب}$) = ٦٥°

(٧) ز = ٦٠°

(٨) ٨,٢٧ سم تقريبًا.

(٩) س = ١١٠°، ص = ٧٠°

(١٠) س = ٦,٥

(١١) س = ١٠,٥

(١٢) س = ٨

(١٣) س = ٣٤°

(١٤) ١٠٠°

(١٥) س = ٨,$\overline{٨}$

(١٦) ٤٤ مترًا.

(١٧) ق($\hat{ن}$) = ١٠٠°

(١٨) ٦٠°   ١٢٠°   ٣٠°   ٦٠°

تمارين إثرائية

(١) Δ وبأ متطابق الضلعين إذًا: ق(و$\hat{ب}$أ) = ق(و$\hat{أ}$ب)

Δ و'جـأ متطابق الضلعين إذًا: ق(و'$\hat{أ}$جـ) = ق(و'$\hat{جـ}$أ)

ثم ق(و$\hat{أ}$ب) = ق(و'$\hat{أ}$جـ) (تقابل بالرأس).

نستنتج أن: ق(و$\hat{ب}$أ) = ق(و'$\hat{جـ}$أ).

يبقى ق(أ$\hat{ب}$س') = ق(أ$\hat{جـ}$ص) لذا $\overleftrightarrow{س س'}$ // $\overleftrightarrow{ص ص'}$.

(٢) $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{بأ}$، هـ ب = هـ أ لذا $\overleftrightarrow{م هـ}$ منصف عمودي على $\overline{بأ}$

وهكذا $\overleftrightarrow{هـ ن}$ منصف عمودي على $\overline{ب جـ}$

وأيضًا $\overleftrightarrow{هـ و}$ منصف عمودي على $\overline{أجـ}$

فتكون هـ نقطة تقاطع المنصفات العمودية على أضلاع المثلث أب جـ

أو مركز الدائرة المحيطة بالمثلث أب جـ.

(٣) ق(هـ$\hat{ب}$جـ) + ق(هـ$\hat{جـ}$ب) = ١٨٠° − ١٣٥° = ٤٥°

٢[ق(هـ$\hat{ب}$جـ) + ق(هـ$\hat{جـ}$ب)] = ٢ × ٤٥° = ٩٠°

ويبقى في المثلث أب جـ أن ق($\hat{أ}$) = ٩٠°.

(٤) جـ وَ د زاوية مركزية فيكون ن(جـ وَ د) = ن(جـ د⌒)

ﺃ وَ ب زاوية مركزية فيكون ن(ﺃ وَ ب) = ن(ﺃب⌒)

ولكن ن(جـ وَ د) = ن(ﺃ وَ ب) فيكون

ن(جـ د⌒) = ن(ﺃب⌒) نستنتج

ن(د ﺃَ جـ) = ن(ﺃ جَـ ب)(بالوضع التبادلي الداخلي)

ومنه د ﺃ // جـ ب

(٥) Δ د ﺃ جـ ≅ Δ ﺃ د ب لأن: د ﺃ = د ﺃ (ضلع مشترك).

د جـ = ﺃب (شبه منحرف متطابق الضلعين).

ن(جـ دَ ﺃ) = ن(د ﺃَ ب) زوايا القاعدة في شبه المنحرف

متطابق الضلعين، فيكون تطابق المثلثين على الحالة (ض. ز. ض)

ومنه نستنتج ن(د جَـ ﺃ) = ن(د بَ ﺃ)

ولهما ضلع مشترك د ﺃ فيكون ﺃب جـ د رباعي دائري.

تنظيم البيانات في مصفوفات — تمرَّنْ ٧-١

المجموعة ﺃ تمارين أساسية

(١) ٢ × ١

(٢) ٣ × ٣

(٣) كلّا، الرتبة ليست نفسها.

(٤) ٣ × ٣ ؛ -٧

(٥) (جـ)

(٦) س = -٣ ، س = ٣ ، ص = ٠ ، ص = ٥

(٧) (ﺃ)

الأسابيع / أنواع الكتب	الأسبوع الأول	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
كتب الفقه	١٧٥	١٥٠	٢٠٠	١٧٥
تاريخ	١٢٥	١٢٥	١٧٥	١٢٥
علوم	١٠٠	٧٥	١٧٥	١٥٠
رياضيات	١٢٥	١٠٠	١٢٥	١٥٠

(ب)

تمثل الأعمدة الأسابيع في شهر أغسطس وتمثل الصفوف أعداد الكتب المباعة

الأسبوع الأول	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
١٧٥	١٥٠	٢٠٠	١٧٥
١٢٥	١٢٥	١٧٥	١٢٥
١٠٠	٧٥	١٧٥	١٥٠
١٢٥	١٠٠	١٢٥	١٥٠

(٨) اختلط الأمر على الطالب فبدأ بالصف الثاني ثم بالعمود الثالث والصحيح $أ_{٢٣}$ = ٥,٤ .

أي الصف الثالث والعمود الثاني.

(٩) س = $\frac{١٧}{٢}$ ، ص = $-\frac{٩}{٢}$

(١٠) س = $\frac{٥}{٢}$ ، ص = $\frac{٢}{٥}$ ، ك = ٧ ، ل = ٥ ، م = −١

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) ٢ × ٣

(٢) ٣ × ١

(٣) نعم، العناصر متساوية والرتبة نفسها

(٤) كلّا، الرتبة ليست نفسها

(٥) ٤ × ٣، ٠

(٦) ٢ × ٣، ١

(٧) $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٨٢ & ٨٥ & ٨٨ & ٩٣ & ٩٦ & ٩٨ \\ ٥١ & ٤٧ & ٤٣ & ٣٦ & ٣١ & ٢٠ \end{bmatrix}$

٤٣ مليونًا، يمثل عدد المستخدمين للتليفزيون الأبيض والأسود سنة ١٩٨٤ .

(٨)

$$\begin{bmatrix} ٨٢ & ٥١ \\ ٨٥ & ٤٧ \\ ٨٨ & ٤٣ \\ ٩٣ & ٣٦ \\ ٩٦ & ٣١ \\ ٩٨ & ٢٠ \end{bmatrix}$$

٩٣ مليونًا، يمثل عدد مستخدمي التليفزيون الملون سنة ١٩٨٧ .

(٩) س = ٢ ، ص = $\frac{٣}{٥}$

(١٠) س = ٠ ، ك = -١٠ ، ص = -٣ ، ل = -٢

(١١) س = ٢ ، ص = $\frac{٩}{٤}$ ، ك = -١ ، ل = ٠ ، ن = $\frac{١}{٢}$ ، م = -٤

جمع وطرح المصفوفات

تمرَّنْ ٧-٢

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) $\begin{bmatrix} ٠ & -٢ & ٠ \\ -٢ & ٠ & -٢ \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} -١ & -٥ & ٨ \\ -٣ & -٦ & -١١ \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} ٠ & -٦ \\ ١٢ & -٤ \\ ١٠ & -٢ \end{bmatrix}$

(٥) ممكن، لهما الرتبة نفسها: ٢ × ٤ .

(٦) ممكن، لهما الرتبة نفسها: ٣ × ٢ .

(٧) غير ممكن، أ من الرتبة ٢ × ٤ ، ب من الرتبة ٣ × ٢ .

(٨) غير ممكن، جـ من الرتبة ٣ × ٢ ، د من الرتبة ٢ × ٤ .

(٩) ممكن، لهما الرتبة نفسها: ٣ × ٢ .

(١٠) $\begin{bmatrix} ١١ & -١ & ٤ \\ ٢ & -١ & -٨ \end{bmatrix}$

(١١) $\begin{bmatrix} ٦٢ & ٩ \\ -١١ & ١٢٥ \end{bmatrix}$

(١٢) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٨ \\ ٧ & ٥ & -٢ \\ ٠ & ٣ & ١٢ \end{bmatrix}$

(١٣) $\begin{bmatrix} ٥ & ٢٤ & ١٣ \\ -٢٣ & -١٣ & -٤ \end{bmatrix}$

(١٤) (أ) أنشطة/ ذكور $\begin{bmatrix} ٥٣ \\ ٥٤ \\ ٣٩ \\ ٤١ \end{bmatrix}$ أنشطة/ إناث $\begin{bmatrix} ٥٧ \\ ٥٨ \\ ٢٩ \\ ٦٠ \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} ١١٠ \\ ١١٢ \\ ٦٨ \\ ١٠١ \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} -٤ \\ -٤ \\ ١٠ \\ -١٩ \end{bmatrix}$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) $\begin{bmatrix} ٤ & -٣ & ٢ \\ -٧ & ٦ & ٥ \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ٥ & -٣ & ٠ \end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

(٥) (أ) المصنع الأول $\begin{bmatrix} ٧٠٠ & ٥٠٠ \\ ١٩٠٠ & ١٣٠٠ \end{bmatrix}$ المصنع الثاني $\begin{bmatrix} ١٢٠٠ & ٤٠٠ \\ ١٦٠٠ & ٦٠٠ \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} -٥٠٠ & +١٠٠ \\ +٣٠٠ & +٧٠٠ \end{bmatrix}$

(٦) $\begin{bmatrix} -٦ & -٦ \\ -٦ & ٥ \end{bmatrix}$

(٧) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٣ \\ -٦ & ٦ & ١ \end{bmatrix}$

(٨) $\begin{bmatrix} ٦ & -٢ & -١ \\ ٥ & -٤ & ٢ \end{bmatrix}$

(٩) تتنوّع الإجابات.

(١٠) $\begin{bmatrix} ٠ & -٢ & -٣ \\ ٠ & ٠ & -٢ \\ -٨ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

(١١) $\begin{bmatrix} ١٠ & ١ & -١ \\ -٢ & -٦ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

(١٢) $\begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ -١ & ٠ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix}$

(١٣) ممكن.

(١٤) ممكن.

(١٥) غير ممكن.

(١٦) غير ممكن.

(١٧) $\begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -1 & -1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$

(١٨) $\begin{bmatrix} 12 & -2 & -9 \\ -7 & 11 & -15 \end{bmatrix}$

(١٩) $\begin{bmatrix} 14 & 2 \\ -4 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

(٢٠) $\begin{bmatrix} 15 & 2 \\ -28 & -22 \\ -21 & 6 \end{bmatrix}$

ضرب المصفوفات

تمرَّنْ ٧-٣

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) $\begin{bmatrix} -12 & 5 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} 34 \end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} 4 & 17 \\ -\frac{11}{5} & \frac{11}{5} \\ -\frac{14}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

(٥) معرّف.

(٦) معرّف.

(٧) غير معرّف.

(٨) معرّف.

(٩) معرّف.

(١٠) $\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$

(١١) $\begin{bmatrix} 7 & 1{,}5 \\ -2 & 3{,}5 \end{bmatrix}$

(١٢) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(١٣) (ب)

(١٤) $\begin{bmatrix} -5 & -6 & 1 \\ -5 & 1 & 6 \\ 0 & -12 & -3 \end{bmatrix}$

(١٥) $\begin{bmatrix} -24 & 17 \\ -7 & -33 \\ -18 & 69 \end{bmatrix}$

(١٦) $\begin{bmatrix} -1 & 12 & -3 \\ 5 & 3 & -2 \\ -4 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

(١٧) $\begin{bmatrix} 0 & -90 \\ 42 & -78 \\ -30 & -30 \end{bmatrix}$

(١٨) (أ) [٥,٩ ١٣,٢ ١٠,٣]، تمثل العناصر مجموع مبيعات الأغراض الثلاثة في كل محل.

(ب) أجمع عناصر المصفوفة في (أ).

(جـ) ١١,٥٠٠ دينارًا.

(١٩) تتنوّع الإجابات. مثل: $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

(٢٠) س = -٣ ؛ ص = -٩

(٢١) نعم.

(٢٢) كلّا، م × ن = $\begin{bmatrix} ١٧ & -٨ \\ -٩ & ٤ \end{bmatrix}$ ≠ ن × م = $\begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ -١٨ & ١١ \end{bmatrix}$

(٢٣) (ب).

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) $\begin{bmatrix} ٠ & -٨ \\ -٨ & ٠ \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} ٠ & ٣٤ \end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} ٤ & ٧ & -٩ \\ -٣ & ٢ & ٨ \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} -١ & ٠ & ١ \\ -١ & ١ & ٠ \end{bmatrix}$

(٥) معرّف لأن عدد أعمدة أ يساوي عدد صفوف ب.

(٦) غير معرّف لأن عدد أعمدة جـ يختلف عن عدد صفوف أ.

(٧) معرّف لأن عدد أعمدة ب يساوي عدد صفوف جـ.

(٨) غير معرّف لأن عدد أعمدة أ يختلف عن عدد صفوف د.

(٩) معرّف لأن عدد أعمدة جـ يساوي عدد صفوف د.

(١٠) $\begin{bmatrix} -٦ & ٩ \\ -٣ & ١٥ \\ -١٢ & -٦ \end{bmatrix}$

(١١) $\begin{bmatrix} -٢٤ & ١٧ \\ -٧ & -٣٣ \\ -١٨ & ٦٩ \end{bmatrix}$

(١٢) $\begin{bmatrix} -١ & ٣٤ \\ -١٣ & ٦ \\ ١٦ & -٧ \end{bmatrix}$

(١٣) $\begin{bmatrix} -١٥ & ٨ & ١٦ \\ -١٥ & -٩ & ١٥ \\ -٥ & ١١ & ٢ \end{bmatrix}$

(١٤) كلّا، أب مصفوفة من الرتبة ٢ × ٢ ، ب أ من الرتبة ٣ × ٣.

مثال: أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٤ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، أ × ب = $\begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب × أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٤ & ٢ & ١٢ \\ ٦ & ٣ & ٣ \end{bmatrix}$

(١٥) العائد اليومي $\begin{array}{ccc} \text{الخميس} & \text{الأربعاء} & \text{الثلاثاء} \\ \end{array}$ $\begin{bmatrix} ٢٥٧٠ & ١٩٥٠ & ٢١٠٠ \end{bmatrix}$

(١٦) س = -٢ ، ص = -٣

(١٧) نعم. $(\underline{أ}+\underline{ب})\times\underline{هـ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$

ولكن: $\underline{أ}\times\underline{هـ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب}\times\underline{هـ} = \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$

$\underline{أ}\times\underline{هـ} + \underline{ب}\times\underline{هـ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ ∴ يوجد مساواة

مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوس) تمرَّنْ ٧−٤

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} -\frac{١}{١٠} & \frac{١}{٥} \\ \frac{١}{٤} & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

(٣) ٠

(٤) $-\frac{١١}{٤٠}$

(٥) ١٣

(٦) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$

(٧) $\begin{bmatrix} -\frac{١}{٢} & -\frac{١}{٨} \\ \frac{١}{٤} & \frac{٣}{١٦} \end{bmatrix}$

(٨) $\begin{bmatrix} -١٫٥ & ٢ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$

(٩) لا يوجد نظير ضربي لأن المحدد = ٦ × ٤ − $(-٨)\times(-٣)$ = ٠

(١٠) $\begin{bmatrix} -١٧ & -١٥ \\ ٢٩ & ٢٦ \end{bmatrix}$

(١١) لا يمكن، لأن محدد $\begin{bmatrix} -٤ & ٠ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix} = ٠$

(١٢) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$

(١٣) ٣٦

(١٤) ٠

(١٥) ٢

(١٦) نعم، ناتج الضرب = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

(١٧) كلّا، ناتج الضرب = $\begin{bmatrix} ٨ & ٢٣ \\ -١٦ & -٤٦ \end{bmatrix}$

(١٨) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

* (١٩) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$

(٢٠) س = $\frac{1}{2}$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) $\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(٢) ٠,٧٥−

(٣) ١٧−

(٤) ٢

(٥) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

(٦) $\begin{bmatrix} \frac{2}{27} & \frac{4}{9} \\ \frac{10}{27} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$

(٧) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$

(٨) $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

(٩) $\begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}$

(١٠) ١٢٠−

(١١) ٩

(١٢) كلّا، ناتج الضرب = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(١٣) $\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$

* (١٤) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

حل نظام من معادلتين خطيتين — تمرَّنْ ٧-٥

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$

مصفوفة المعاملات × مصفوفة المتغيرات = مصفوفة الثوابت

(٢) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

مصفوفة المعاملات × مصفوفة المتغيرات = مصفوفة الثوابت

(٣) ٣س − ص = −١ ، ٢س + ٤ص = ٣

(٤) ٢س + ٤ص = ٥ ، −س − ٢ص = −٢

(٥) (٢، ١) $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$ س = ٢ ، ص = ١

(٦) (−١، ٠) $\begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ -٥ & ١٦ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٥ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٦ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ \\ ٥ \end{bmatrix}$ س = −١ ، ص = ٠

(٧) نعم، $\begin{bmatrix} ٢٠ & ٥ \\ ٢٠ & ١ \end{bmatrix}$ المحدد = ٢٠ − ١٠٠ = ٨٠ ≠ ٠

(٨) كلّا، $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$ المحدد = ١٢ − ١٢ = ٠

(٩) نعم، $\begin{bmatrix} -\frac{٢}{٣} & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ المحدد = $\frac{-٢}{٣} - ١ = \frac{-٥}{٣٠} \neq ٠$

(١٠) $\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} = -٥$ ، $\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٦ & -١ \end{vmatrix} = -١٠$ ، $\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix} = ٠$ ، س = ٢ ، ص = ٠

(١١) $\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ -٢ & ٥ \end{vmatrix} = ١٢$ ، $\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٧ & ١ \\ -١ & ٥ \end{vmatrix} = ٣٦$ ، $\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & ٧ \\ -٢ & -١ \end{vmatrix} = ١٢$ ، س = ٣ ، ص = ١

(١٢) $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١}{٤} \\ \frac{١}{٤} & -\frac{٣}{٨} \end{vmatrix} = \frac{-١}{٤}$ ، $\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٤ & \frac{١}{٤} \\ -٢ & -\frac{٣}{٨} \end{vmatrix} = -١$ ، $\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} \frac{١}{٢} & ٤ \\ \frac{١}{٤} & -٢ \end{vmatrix} = -٢$ ، س = ٤ ، ص = ٨

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) $\begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ \\ ٢ \end{bmatrix}$

مصفوفة المعاملات × مصفوفة المتغيرات = مصفوفة الثوابت

(٢) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١ \\ ١٨ \end{bmatrix}$

مصفوفة المعاملات × مصفوفة المتغيرات = مصفوفة الثوابت

=

(٣) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ \\ ٧ \end{bmatrix}$ ؛ $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١٢ \\ ٧ \end{bmatrix}$ س = ٣ ، ص = ٢

(٤) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$ ؛ $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$ س = -٨ ، ص = ٧

(٥) $\begin{bmatrix} ٦ \\ ٢ \end{bmatrix}$ ، س = ٦ ، ص = ٢

(٦) لا حل وحيد.

(٧) $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{٣}{٢} \\ \frac{٥}{٢} & -\frac{٧}{٢} \end{vmatrix} = -\frac{١١}{٢}$ ، $\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٧ & \frac{٣}{٢} \\ -٩ & -\frac{٧}{٢} \end{vmatrix} = -١١$ ، $\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} \frac{١}{٢} & ٧ \\ \frac{٥}{٢} & -٩ \end{vmatrix} = -٢٢$ ، س = ٢ ، ص = ٤

(٨) $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{١}{٥} & -\frac{٢}{٥} \\ \frac{٢}{٥} & -\frac{٣}{٥} \end{vmatrix} = \frac{١}{٢٥}$ ، $\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٤ & -\frac{٢}{٥} \\ ٥ & -\frac{٣}{٥} \end{vmatrix} = -\frac{٢}{٥}$ ، $\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} \frac{١}{٥} & ٤ \\ \frac{٢}{٥} & ٥ \end{vmatrix} = -\frac{٣}{٥}$ ، س = -١٠
ص = -١٥

(٩) ثمن المحاة: ٢٠٠ فلس، ثمن القلم: ٢٥٠ فلسًا.

مراجعة الوحدة السابعة

(١) (أ) $\begin{bmatrix} ٣٠ & -٣٧ \\ ٤٠ & -٣٣ \\ ٤٢ & -١٤ \\ ٣٧ & -١ \\ ٣٩ & -٢٨ \\ ٤٤ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ٦ × ٢

(ب) -١

(٢) $\begin{bmatrix} ٢ & ٧ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} ٢٣ & ٢٠ & -٢ \\ ٢٩ & ١٢ & ٣٠ \\ ٢١ & ٢٤ & ٣ \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} ٥ & ١٤ \\ ٦ & ١٢ \\ ١٨ & ٥٢ \end{bmatrix}$

(٥) $\begin{bmatrix} -٩ & -٣٠ \\ -٦٣ & ١٢ \end{bmatrix}$

(٦) غير ممكن؛ عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى لا يساوي عدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

(٧) $\begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

(٨) -١٣

(٩) -١

(١٠) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & -\frac{١}{٣} \\ -\frac{١}{٢} & ١ \end{bmatrix}$

(١١) لا يوجد. المحدد = $-١١٢ + ١١٢ = ٠$

(١٢) $\underline{س} = \begin{bmatrix} -١١ \\ ٩ \end{bmatrix}$

(١٣) $\underline{س} = \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$

(١٤) $\underline{س} = \begin{bmatrix} ٧ & -٢ & -٦ \\ ١٥ & ١ & -٢ \end{bmatrix}$

(١٥) $\underline{س} = \begin{bmatrix} -٢٠ & ١ \\ ٢٦ & -١ \end{bmatrix}$

(١٦) $\underline{س} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٤} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & ١ \end{bmatrix}$

(١٧) $\underline{س} = \begin{bmatrix} -\frac{٣}{٤} & \frac{١}{٤} \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$

(١٨) (٠، -٢) $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٢ & -٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & -\frac{١}{٤} \\ ١ & -١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix}$ $\quad س = ٠،\ ص = -٢$

(١٩) (-٢، -٢) $\Delta = \begin{vmatrix} -٣ & ٥ \\ ١ & -٣ \end{vmatrix} = ٤$، $\Delta_{س} = \begin{vmatrix} -٤ & ٥ \\ ٤ & -٣ \end{vmatrix} = -٨$، $\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} -٣ & -٤ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = -٨$، $س = -٢$، $ص = -٢$

(٢٠) تتنوّع الإجابات.

(٢١) نعم، تحقّق من عمل الطلّاب.

(٢٢) س = سعر القرنفلة

ص = سعر الأقحوانة

$١٠س + ٥ص = ١٢,٥$

$٥س + ٨ص = ١١,٧٥$

$\begin{bmatrix} ١٠ & ٥ \\ ٥ & ٨ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢,٥ \\ ١١,٧٥ \end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٨}{٥٥} & -\frac{٥}{٥٥} \\ -\frac{٥}{٥٥} & \frac{١٠}{٥٥} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١٢,٥ \\ ١١,٧٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠,٧٥ \\ ١ \end{bmatrix}$

سعر القرنفلة الواحدة: ٠,٧٥٠ دينار، سعر الأقحوانة الواحدة: ١ دينار.

تمارين إثرائية

(١) (أ) نعم. محدد $\underline{\text{أ}}$ = ٤ ≠ ٠ ؛ محدد $\underline{\text{ب}}$ = ١ ≠ ٠ ؛ محدد $(\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}})$ = ٤ ≠ ٠ .

(ب) $\underline{\text{أ}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ ، $(\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

(جـ) ليست صحيحة. النظير الضربي لناتج جمع مصفوفتين لا يساوي ناتج جمع النظير الضربي لهاتين المصفوفتين.

(د) $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(٢) (أ) $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ ، $(\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}})^2 = \begin{bmatrix} 49 & 0 \\ 3 & 36 \end{bmatrix}$

(ب) $\underline{\text{أ}}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 13 \end{bmatrix}$ ، $(\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}) = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 15 & 11 \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}}^2 = \begin{bmatrix} 25 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$\underline{\text{أ}}^2 + 2\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} + \underline{\text{ب}}^2 = \begin{bmatrix} 46 & 13 \\ 24 & 39 \end{bmatrix}$ الإجابتان مختلفتان.

(جـ) $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ ، $(\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}})^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{أ}}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 13 \end{bmatrix}$

$\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}}^2 = \begin{bmatrix} 22 & -4 \\ 12 & -2 \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{أ}}^2 + 2\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} + \underline{\text{ب}}^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ ،

$(\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}})^2 = \underline{\text{أ}}^2 + 2\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} + \underline{\text{ب}}^2$.

(٣) (أ) س عمر جاد، ص عمر ربيع.

$$\begin{cases} ٢\text{س} - ٣\text{ص} = ٥ \\ -٣\text{س} + ٥\text{ص} = -٢ \end{cases}$$

(ب) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

(جـ) ١ ، نعم، $\underline{\text{أ}}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix}$ ؛ س = ١٩ ، ص = ١١ .

(هـ) $\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٣- \\ ٣- & ٥ \end{vmatrix} = ١$ ، $\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٥ & ٣- \\ ٢- & ٥ \end{vmatrix} = ١٩$ ، $\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣- & ٢- \end{vmatrix} = ١١$ ، س = ١٩ ، ص = ١١

(٤) (أ) $\underline{أ}^{٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\underline{أ}^{٣} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

(ب) ١. عوّض س + ص بـ س.

٢. $\underline{م}(٠) = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٨ \\ ٠ & ١ & ٤ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

٣. $\begin{bmatrix} ١ & س + ص & \frac{س^{٢} + ص^{٢}}{٢} + س\,ص \\ ٠ & ١ & س + ص \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

٤. $\underline{م}(س + ص) = \begin{bmatrix} ١ & س + ص & \frac{(س + ص)^{٢}}{٢} \\ ٠ & ١ & س + ص \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix} = \underline{م}(س) \times \underline{م}(ص)$.

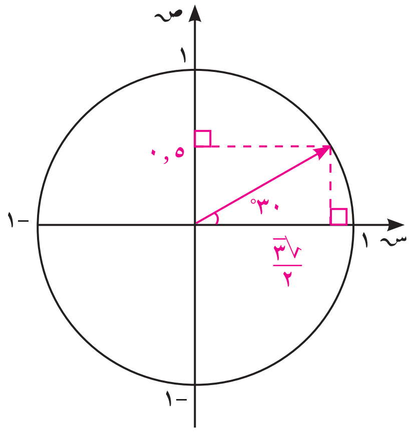
(٥) مثال: أ = ±١ ، د = ±١ ، ب = ٠ ، جـ = ٠.

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي — تمرَّنْ ٨-١

المجموعة أ تمارين أساسية

(١)

القياس بالدرجات	القياس بالراديان
٤٥°	$\frac{\pi}{٤}$
١٣٥°	$\frac{٣\pi}{٤}$
-١٨٠°	$-\pi$
-١٥٠°	$-\frac{٥\pi}{٦}$
-٢٢٥°	$-\frac{٥\pi}{٤}$
١٥٠°	$\frac{٥\pi}{٦}$



(٢) $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$

(أ) $\frac{١}{٢}$

(ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

(د) $\sqrt{٣}$

(هـ) $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$

(و) ٢

(٣) $\frac{١}{٢} ، -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٤) $-\frac{\sqrt{٢}}{٢} ، -\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

(٥) $\frac{\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{\sqrt{٢}}{٢} ، ١$

(٦) $\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \sqrt{٣}$

(٧) ١، ٠، ٠

(٨) الربع الثاني.

(٩) محور السينات السالب.

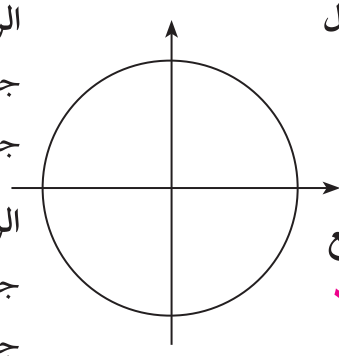
(١٠) الربع الرابع.

(١١) الربع الثالث.

(١٢) (أ)

الربع الأول
$\text{جتا}\,\theta > ٠$
$\text{جا}\,\theta > ٠$

الربع الثاني
$\text{جتا}\,\theta < ٠$
$\text{جا}\,\theta > ٠$



الربع الثالث
$\text{جتا}\,\theta < ٠$
$\text{جا}\,\theta < ٠$

الربع الرابع
$\text{جتا}\,\theta > ٠$
$\text{جا}\,\theta < ٠$

(ب) (ب)

(١٣) باستخدام دائرة الوحدة، نرى أن الأضلاع النهائية للزوايا: ٠°، ١٨٠°، ٣٦٠° تقع على محور السينات بالتالي «جا» هذه الزوايا تساوي ٠. و«جتا» هذه الزوايا هي: ١، −١، ١ على التوالي.

تقع الأضلاع النهائية للزوايا ٩٠°، ٢٧٠° على محور الصادات فتكون جتا(٩٠°) = جتا(٢٧٠°) = ٠،

جا(٩٠°) = ١، جا(٢٧٠°) = −١.

(١٤) ٣٠°

(١٥) $\frac{\pi}{٣}$

(١٦) ١٠°

(١٧) $\frac{\pi}{٣}$

(١٨) (د)

(١٩) (جـ)

(في التمارين ١٤ − ١٩، تحقق من رسومات الطلاب).

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) (أ)　(٢) (ب)　(٣) (أ)

(٤) (أ)　(٥) (جـ)　(٦) (د)

(٧) (د)　(٨) (ب)　(٩) (أ)

العلاقات بين الدوال المثلثية (١)　تمرَّنْ ٨-٢

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) (أ) $-$جاθ　(ب) $-$جتاθ　(جـ) جتاθ　(د) جاθ

(٢) (أ) $-$ظا س　(ب) $-$جتا س　(جـ) $-$جا س

(٣) (أ) $\frac{1}{ظا(\theta + \pi)} = \frac{1}{ظا\theta} = ظتا\theta$

(ب) $\frac{1}{جا\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{1}{جتا\theta} = قا\theta$

(جـ) $\frac{1}{ظا\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{جتا\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{جا\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = -\frac{جا\theta}{جتا\theta} = -ظا\theta$

(د) $\frac{1}{جتا(-\theta)} = \frac{1}{جتا\theta} = قا\theta$

(٤) (أ) $\frac{1}{2}$　(ب) -1　(جـ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(٥) (أ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(ب) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(جـ) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(٦) (أ) $\frac{1}{2}$　(ب) ١　(جـ) $\sqrt{2}$

(٧) (ب)　(٨) (أ)　(٩) (ب)　(١٠) (أ)

(١١) (أ) -2 جتاθ　(ب) ٠ (صفر)

(١٢) (أ) س $= \frac{\pi}{3} + 2$كπ أو س $= -\frac{\pi}{3} + 2$كπ (ك $\in$ صـ)

(ب) س $= \frac{\pi}{6} +$ كπ (ك $\in$ صـ)

(جـ) س $= \frac{\pi}{4} + 2$كπ أو س $= \frac{3\pi}{4} + 2$كπ (ك $\in$ صـ)

(د) س $= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}$ك$\pi$ أو س $= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}$ك$\pi$ (ك $\in$ صـ)

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) (أ) (أ) (ب) (ب) (جـ) (ب) (د) (ب)

(٢) (أ) (أ) (ب) (ب) (جـ) (أ)

(د) (أ) (هـ) (أ)

(٣) (أ) (٤) (أ)

(٥) (ب)

العلاقات بين الدوال المثلثية (٢) تمرَّنْ ٨–٣

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) جتا θ = $\frac{٢\sqrt{٦}}{٥}$ ظا θ = $\frac{\sqrt{٦}}{١٢}$

ظتا θ = $٢\sqrt{٦}$

قا θ = $\frac{٥\sqrt{٦}}{١٢}$ قتا θ = ٥

(٢) جتا θ = $-\frac{١}{٣}$

جا θ = $-\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$

(٣) جا θ = $-\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$

ظتا θ = $\frac{-\sqrt{٢}}{٤}$

(٤) ١

(٥) ١

(٦) ٠ (صفر)

(٧) ٥

(٨) ١ + ظتا^٢(−θ) = ١ + ظتا^٢ θ = قتا^٢ θ.

(٩) قا^٤ θ − قا^٢ θ = قا^٢ θ(قا^٢ θ − ١) = (ظا^٢ θ + ١)ظا^٢ θ = ظا^٤ θ + ظا^٢ θ.

(١٠) (١ − جتا^٢ θ)(١ + ظتا^٢ θ) = جا^٢ θ × قتا^٢ θ = ١.

(١١) ٣جا^٢ θ + ٤جتا^٢ θ = ٣(جا^٢ θ + جتا^٢ θ) + جتا^٢ θ = ٣ + جتا^٢ θ.

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) (أ) (٢) (أ) (٣) (أ) (٤) (أ)

(٥) (ب) (٦) (أ) (٧) (جـ) (٨) (د)

(٩) جا θ (ظتا θ + ظا θ) = جا θ $\left(\frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta} + \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}\right)$ = جا θ $\left(\frac{\text{جتا}^2\theta + \text{جا}^2\theta}{\text{جا}\,\theta\ \text{جتا}\,\theta}\right) = \frac{1}{\text{جتا}\,\theta}$ = قا θ.

(١٠) $\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta} = \frac{1}{\frac{\text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}} = \frac{1}{1 - \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}} = \frac{1}{1 - \text{ظتا}\,\theta}$.

مراجعة الوحدة الثامنة

(١) (أ) الربع الأول أو الثاني.

(ب) محور السينات السالب.

(جـ) الربع الثاني أو الرابع.

(د) الربع الثاني أو الثالث.

(٢) (أ) ١٧ (ب) $\frac{1}{4}$ (جـ) ٤ (د) $\frac{17}{16}$

(٣) (أ) ≃ ٠,٧٨٥ (ب) ≃ −٠,٧٨٥ (جـ) ≃ −١,٢٨١

(٤) (أ) ٤ (ب) ٢

(٥) (أ) = $\frac{1}{\text{جتا}^2\theta} - \frac{2\,\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} + \frac{1}{\text{جتا}^2\theta} = \frac{2 - 2\,\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} = \frac{2\,\text{جتا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} = 2$

(ب) = $\frac{\text{جتا}^2\theta + \text{جتا}\,\theta + \text{جا}^2\theta}{1 + \text{جتا}\,\theta} = \frac{1 + \text{جتا}\,\theta}{1 + \text{جتا}\,\theta} = 1$

(٦) (أ) جتا^4 θ − جا^4 θ = (جتا^2 θ − جا^2 θ)(جتا^2 θ + جا^2 θ) = (جتا^2 θ − جا^2 θ) × ١ = جتا^2 θ − جا^2 θ.

(ب) = جتا θ (ظا θ + ظتا θ) = جتا θ $\left(\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} + \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}\right)$ = جتا θ × $\frac{1}{\text{جتا}\,\theta \times \text{جا}\,\theta} = \frac{1}{\text{جا}\,\theta}$ = قتا θ.

(٧) (أ) س = $\frac{\pi}{4}$ + ٢ك π أو س = −$\frac{\pi}{4}$ + ٢ك π (ك ∈ ص)

(ب) جا س = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، س = $\frac{\pi}{3}$ + ٢ك π أو س = $\frac{2\pi}{3}$ + ٢ك π (ك ∈ ص)

(جـ) س = $\frac{\pi}{4}$ + ك π (ك ∈ ص)

تمارين إثرائية

(١) إذا كان الجيب وجيب التمام كليهما سالب، تكون الزاوية في الربع الثالث.

الزاوية ٦٠° هي في الربع الأول (كلا) والزاوية −١٢٠° في الربع الثالث (نعم).

(٢) (أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) ١ (د) ٢

(٣) (أ) ٠ (ب) −١

(٤) (أ) $\text{س} = -\pi + ٢\text{ك}\pi$ أو $\text{س} = \frac{\pi}{٦} + \frac{٢}{٣}\text{ك}\pi$ (ك ∈ ص)

(ب) $\text{س} = -\frac{٥\pi}{١٨} + \frac{٢}{٣}\text{ك}\pi$ أو $\text{س} = \frac{٣}{٢}\pi + ٢\text{ك}\pi$ (ك ∈ ص)

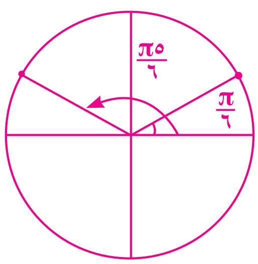
(جـ) $\text{س} = -\frac{\pi}{٨} + ٢\text{ك}\pi$ (ك ∈ ص)

(د) $\text{س} = -\frac{٥\pi}{٨} + \frac{\text{ك}\pi}{٨}$ (ك ∈ ص)

(٥) $$\frac{١ - \text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} + \frac{\text{جتا}\theta}{١ - \text{جا}\theta} = \frac{(١ - \text{جا}\theta)^{٢} + \text{جتا}^{٢}\theta}{\text{جتا}\theta(١ - \text{جا}\theta)}$$

$$= \frac{١ - ٢\text{جا}\theta + \text{جا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\theta}{\text{جتا}\theta(١ - \text{جا}\theta)}$$

$$= \frac{٢ - ٢\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta(١ - \text{جا}\theta)} = \frac{٢(١ - \text{جا}\theta)}{\text{جتا}\theta(١ - \text{جا}\theta)} = \frac{٢}{\text{جتا}\theta} = ٢\,\text{قا}\theta.$$



(٦) $\theta = \frac{\pi}{٦}$ ، $\theta = \frac{٥\pi}{٦}$

(٧) $$\frac{\text{جا}\theta + \text{جتا}\theta}{\text{جتا}\theta} - \frac{\text{جا}\theta + \text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta} = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} + ١ - ١ + \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta} = \frac{١}{\text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta} = \text{قا}\theta\,\text{قتا}\theta.$$

(٨) $$\frac{\text{جتا}^{٢}\theta - \text{جا}^{٢}\theta}{١ - \frac{\text{جا}^{٢}\theta}{\text{جتا}^{٢}\theta}} = \frac{\text{جتا}^{٢}\theta - \text{جا}^{٢}\theta}{\frac{\text{جتا}^{٢}\theta - \text{جا}^{٢}\theta}{\text{جتا}^{٢}\theta}} = \text{جتا}^{٢}\theta.$$

(٩) $\text{س} = \frac{\pi}{٢} + \text{ك}\pi$ أو $\text{س} = \frac{\pi}{٤} + \text{ك}\pi$ (ك ∈ ص)

(١٠) $\text{س} = ٠ + ٢\text{ك}\pi$ أو $\text{س} = \frac{\pi}{٣} + ٢\text{ك}\pi$ أو $\text{س} = -\frac{\pi}{٣} + ٢\text{ك}\pi$ (ك ∈ ص)

(١١) $\theta = \pi$

(١٢) $\theta = \pi$ أو $\theta = \frac{\pi}{٤}$ أو $\theta = \frac{٥\pi}{٤}$

(١٣) $\text{جا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\theta = ٠$ ، لا حلّ لها.

(١٤) $\theta = \frac{\pi}{٣}$ ، $\theta = \frac{٥\pi}{٣}$ ، $\theta = \pi$

(١٥) $\theta = \frac{\pi}{٤}$ ، $\theta = \frac{٥\pi}{٣}$

$\theta = \frac{٣\pi}{٤}$ ، $\theta = \frac{٧\pi}{٤}$

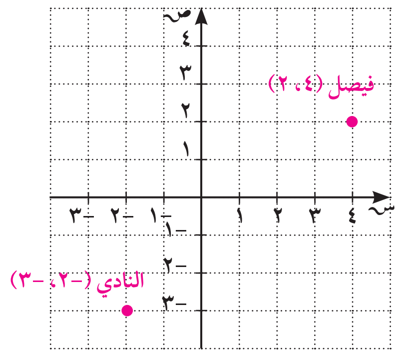
المجموعة أ تمارين أساسية

(١) ١٥ (٢) ١٤ (٣) (١، ٦) (٤) (-١، ١٢)

(٥) أب ≃ ١,٤ ؛ ب جـ ≃ ٢,٣ ؛ أجـ = ٥

(٦) م ن ≃ ١,٥ ؛ ن ك ≃ ٦,٣ ؛ م ك = ٥

(٧) (أ)



(ب) $\left(١ ، -\frac{١}{٢}\right)$

(جـ) $\sqrt{٦١} \simeq ٧,٨١$ ، حوالى ١٩,٥ كيلومترًا.

(٨) إن إحداثيات نقطتي طرفي القطعة تكون المعكوس الجمعي في ما بينها.

(٩) (أ) ٥ وحدات.

(ب) قد تتنوّع الإجابات، مثال على الإجابة: (٥، ٠)، (٠، ٥)، (-٥، ٠)، (٠، -٥)، (٣، -٤)، (-٣، ٤)، (-٣، -٤).

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) (د) (٢) (جـ) (٣) (أ)

(٤) (ب) (٥) (جـ)

(٦) أ(-٤، ٥)؛ ب(٤، -٢)؛ أب ≃ ١٠,٦

(٧) (أ) م منتصف $\overline{أب}$: م $\left(-\frac{١}{٢} ، ٣\right)$.

ن منتصف $\overline{جـ د}$: ن $\left(\frac{١١}{٢} ، ٣\right)$

(ب) م ن = ٦ ، ب جـ = ٤ ، أد = ٨

م ن = المتوسط الحسابي لطولي $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{أد}$

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) (أ) ن$\left(-٢، \frac{٥}{٣}\right)$ (ب) ن(٤، ٧)

(٢) (أ) م(-٦، ٧) (ب) م$\left(٤، \frac{٢١}{٢}\right)$

(٣) (أ) (٠، ٤)، (٢، ٦)، (-١، ٥) (ب) د$\left(\frac{١}{٣}، ٥\right)$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) (أ) ن(-١٥، ١٠)

(ب) ن(١١، ١٦,٢٥)

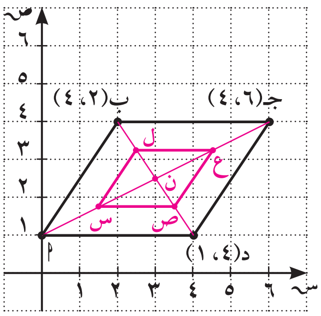
(٢) م(٣، -٤)

(٣) (أ) أب = جـ د = $\sqrt{١٣}$ ، ب جـ = أد = ٤

إذًا أب جـ د متوازي الأضلاع.

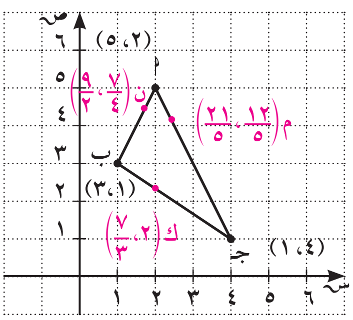
(ب) س(١,٥، ١,٧٥) ؛ ص(٣,٥، ١,٧٥) ؛

ع(٤,٥، ٣,٢٥) ؛ ل(٢,٥، ٣,٢٥)



(٤) (أ) ن$\left(\frac{٧}{٤}، \frac{٩}{٢}\right)$

(ب) ك$\left(٢، \frac{٧}{٣}\right)$



المجموعة أ تمارين أساسية

(١) (أ) $\frac{٥}{٣}$ ، تتزايد درجة الحرارة $\frac{٥}{٣}$ درجات مئوية كل ساعة.

(ب) -٥، يهبط المظلي خمسة أمتار في الثانية.

(٢) -٣ (٣) $\frac{١}{٢}$ (٤) صفر (٥) غير معرّف

(٦) ٢ (٧) $\frac{١}{٢}$ (٨) صفر (٩) غير معرّف

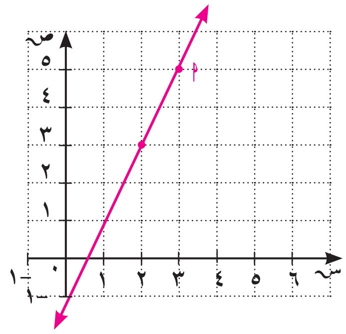
(١٠) ظا(٦٠°) = $\sqrt{٣}$ ≃ ١,٧٣٢ = الميل.

(١١) ظا(٤٥°) = ١ = ميل المستقيم: ص = س − ٧

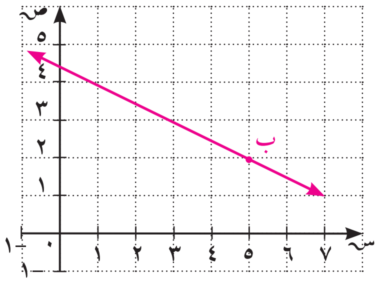
(١٢) ٢,$\overline{٦}$ سم كل شهر.

(١٣) ١,٥ دينار لكل تذكرة.

(١٤)



(١٥)



(١٦) قد تختلف الإجابات. مثال: $\left(١، \frac{٣}{٤}\right)$، (٤، ٣)

(١٧) س = ٤

(١٨) ص = ١٢

(١٩) س = ٣

(٢٠) $\overline{أب}$: صفر، $\overline{ب جـ}$: غير معرّف، $\overline{جـ د}$: −١ ، $\overline{دأ}$: $\frac{١}{٢}$

(٢١) (أ) (٢٢) (ب) (٢٣) (ب) (٢٤) (أ)

(٢٥) وجد سالم صيغة الميل كنسبة التغير الأفقي على التغير العمودي (الرأسي) وهذا خطأ. لإيجاد الميل نوجد نسبة التغير الرأسي على التغير الأفقي.

(٢٦) الميل = صفر، شرط أن تكون س ≠ ٠

(٢٧) نعم، $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ لهما الميل نفسه وهو $\frac{-١}{٣}$.

(٢٨) كلّا، $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ليس لهما الميل نفسه. ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = −٢، ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ =١

(٢٩) −٢ × $\frac{١}{٢}$ = −١، إذًا المستقيمان متعامدان.

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) (أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) إنهما متساويان.

(٢) (أ) ٢، سعر الوجبة لكل شخص هو ٢ دينار.

(ب) ١٠ ليترات في ٧٥ كيلومترًا. معدل صرف الوقود ١ ليتر في ٧,٥ كم.

(٣) $\frac{٢}{٣}$ (٤) ٢ (٥) $-\frac{٣}{٢}$ (٦) −١

(٧) الميل: = ٠

(٨) الميل = ١ أو −١.

(٩) غير معرّف.

(١٠) غير معرّف.

(١١) صفر.

(١٢) قد تختلف الإجابات. مثال: $\left(١، \frac{١-}{٢}\right)$، (٢، −١)

(١٣) س = ٠

(١٤) س = −٦

(١٥) س = ٦

(١٦) ميل $\overline{أب}$ = $-\ \frac{١-}{٢}$ | ميل $\overline{ب جـ}$ = ٢

ميل $\overline{جـ د}$ = $-\ \frac{١-}{٢}$ | ميل $\overline{أ د}$ = ٢

(١٧) (ب) (١٨) (أ) (١٩) (ب)

(٢٠) (أ) ٥,١، ٥,١ دينارًا في اليوم.

(ب) ١٥ دينار.

(٢١) الميل = $\frac{-ص}{٢س}$

(٢٢) كلّا، $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ليس لهما الميل نفسه.

(٢٣) نعم، $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ لهما الميل نفسه $\frac{٣}{٢}$.

(٢٤) $-\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

ميل الخط المستقيم — تمرَّنْ ٩-٣ (ب)

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) (أ) ص = ٣س − ١٣

(ب) ص = −٢س

(جـ) ص = $\frac{٢}{٣}$س − $\frac{٥}{٣}$

(٢) (أ) الميل = $\frac{٥}{٣}$ ، الجزء المقطوع: –١ ، ص = $\frac{٥}{٣}$ س – ١

(ب) الميل = ٠ ، الجزء المقطوع: ٣ ، ص = ٣

(جـ) الميل = ١ ، الجزء المقطوع: ٣ ، ص = س + ٣

(٣) (أ) ٤س + ص – ٢٣ = ٠

(ب) ٥س – ٤ص – ٣١ = ٠

(٤) ص = $\frac{٢}{٣}$ س – $\frac{١٧}{٣}$

(٥) ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٤

(٦) ص = –٤س

(٧) ص = $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{٣}{٢}$

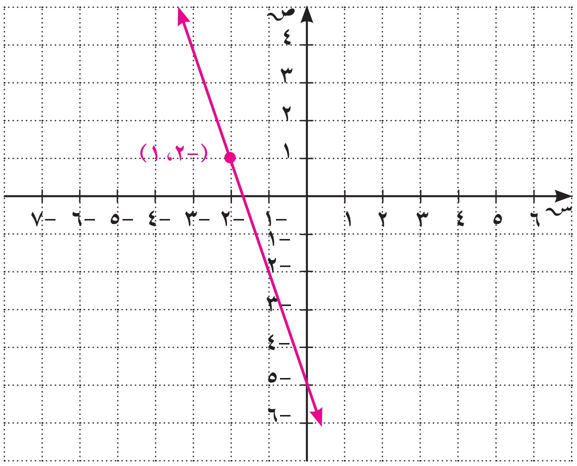
المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) (أ) ص = $\frac{١}{٢}$ س – ٤

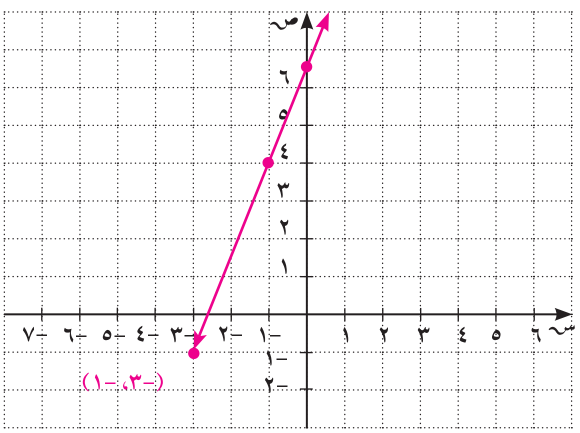
(ب) س = ١

(جـ) ص = –٢س + ٣

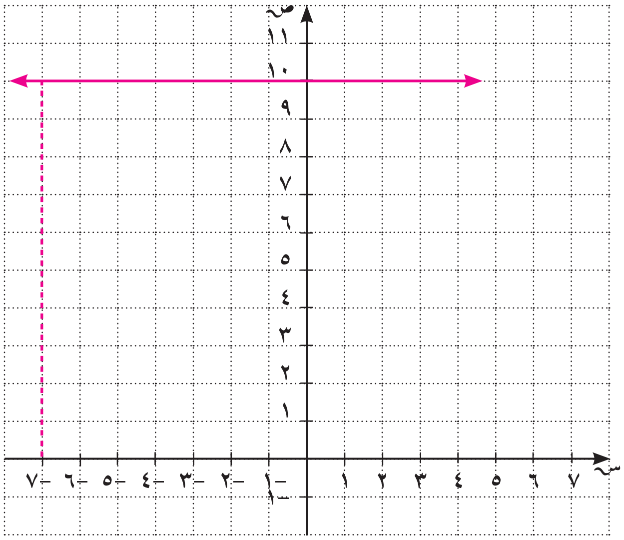
(٢) ص = –٣س – ٥



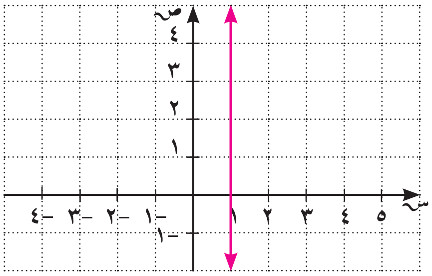
(٣) ص = $\frac{٥}{٢}$ س + $\frac{١٣}{٢}$



(٤) ص = ١٠



(٥) س = ١



(٦) ص = س − ٣

(٧) (أ) ص = ٧س

(ب) ص = $\frac{-٤}{٣}$ س

(جـ) ص = − $\frac{٥}{٣}$ س + ٥

(٨) ص = ٣س − ٨

البعد بين نقطة ومستقيم

تمرّنْ ٩–٤

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) نعم (٢) كلّا (٣) كلّا (٤) كلّا

(٥) $\frac{٤}{\sqrt{١٠}} = \frac{٢\sqrt{١٠}}{٥}$ وحدة طول.

(٦) $\frac{٤}{\sqrt{٩ + ٤}} = \frac{٤}{\sqrt{١٣}}$ وحدة طول.

(٧) ئه = $\frac{١٧}{٥}$ وحدة طول.

(٨) $\frac{١١\sqrt{٥}}{٥}$ وحدة طول.

(٩) $\frac{٧\sqrt{٢٦}}{١٣}$ وحدة طول.

(١٠) $\frac{١١\sqrt{٣٧}}{٣٧}$ وحدة طول.

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) كلّا (٢) كلّا (٣) نعم

(٤) $\frac{٣٢}{٥}$ وحدة طول.

(٥) $\frac{٤٠}{١٣}$ وحدة طول.

(٦) $\frac{٧\sqrt{٢}}{٢}$ وحدة طول.

(٧) $\frac{٤}{٥}$ وحدة طول.

(٨) $٣\sqrt{٢}$ وحدة طول.

معادلة الدائرة تمرَّنْ ٩–٥

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) (أ) كلّا (ب) كلّا (جـ) نعم (د) كلّا

(٢) (أ) $س^٢ + ص^٢ = ٩$

(ب) $(س - ٤)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٤$

(٣) (أ) $(س - ١)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٢٥$

(ب) $س^٢ + ص^٢ = ١٦$

(٤) (أ) $\sqrt{٥}$ وحدة طول، (٣، ٣)

(ب) $٢\sqrt{٢}$ وحدة طول، (١، ١)

(٥) $(س + ٣)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ١٦$

(٦) المركز (٤، –١)، نق = ٥

(٧) المركز (٨، ٠)، نق = ٩

(٨) المركز (٠، ٢)، نق = $\sqrt{١٠}$

(٩) النقطة على الدائرة. معادلة المماس: س – ص + ٢ = ٠

(١٠) $(س - ٣)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٩$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) (أ) نق = ٢ (ب) نق = ٤ (جـ) نق = ٣

(٢) (أ) $س^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٤٩$

(ب) $(س + ٤)^{٢} + ص^{٢} = ٩$

(٣) (أ) $س^{٢} + ص^{٢} = ٩$

(ب) $س^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٤$

(جـ) $س^{٢} + ص^{٢} = ٤$

(٤) (أ) $س^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٩$

(ب) $(س - ٥)^{٢} + (ص - ١)^{٢} = ١$

(٥) المركز (١، ٢) ، نق = $\sqrt{٥}$

(٦) المركز (−١، ١) ، نق = $٣\sqrt{٢}$

(٧) $س + ٣ص - ٥ = ٠$

(٨) (جـ)

(٩) (أ) (٢، −٢)

(ب) (−٣، −٢)

مراجعة الوحدة التاسعة

(١) ص = ١

(٢) (١، ٥)؛ (١، −٣)

(٣) أ = ٨

(٤) متعامدان، $\left(-\frac{٥}{٧}\right)\left(\frac{٧}{٥}\right) = -١$

(٥) $(س + ٢)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٥٢$

(٦) (أ) د(٤، ٧)

(ب) $\overleftrightarrow{أد}$: $٢س - ص - ١ = ٠$

(٧) $٥ص + س - ١٠ = ٠$

(٨) (أ) جـ(٤، ٥)

(ب) أب^{٢} = أجـ^{٢} + ب جـ^{٢} = ٢٠ أو ميل $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ × ميل $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ = −١

(٩) (أ) ق(١٠، ٨)، ك(٥,٥، ٨)

(ب) $\frac{٨ - ٨}{١٠ - ٥,٥} = \frac{٥ - ٥}{١٢ - ٣} = ٠$

(جـ) ق ك = $\frac{٩}{٢}$ ؛ ب جـ = ٩، إذًا ق ك = $\frac{١}{٢}$ ب جـ.

(د) ميل $\overline{\text{أب}}$ = −$\frac{٣}{٢}$ ، ميل $\overline{\text{ب جـ}}$ = ٠ ؛ ٠ × $\left(-\frac{٣}{٢}\right)$ = ٠ ؛ $\overline{\text{أب}}$ و $\overline{\text{ب جـ}}$ غير متعامدين.

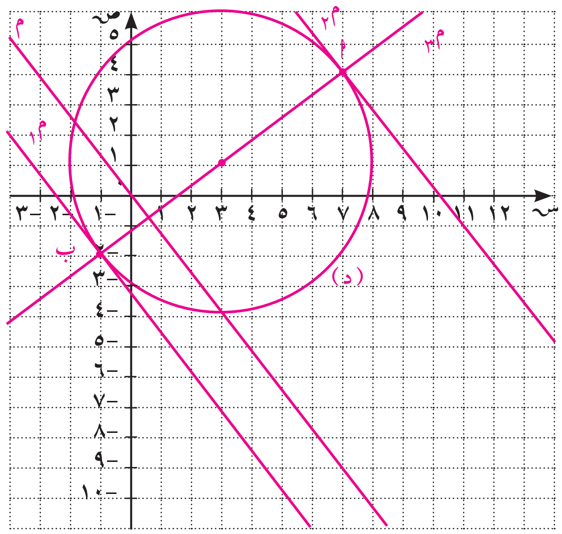
تمارين إثرائية

(١) (أ) معادلة المنصف العمودي لـ $\overline{\text{وب}}$: س − ص + ٣ = ٠ ، $\overline{\text{أب}}$: ٣س − ص + ٢ = ٠

(ب) $\left(\text{س} - \frac{١}{٢}\right)^{٢} + \left(\text{ص} - \frac{٧}{٢}\right)^{٢} = \frac{٢٥}{٢}$

(جـ) ٧س + ص + ١٨ = ٠

(٢) (أ) − (ب)



(جـ) م$_{٣}$: ٣س − ٤ص − ٥ = ٠

(د) أ(٧، ٤)، ب(−١، −٢)

(هـ) م$_{١}$: ٤س + ٣ص = ١٠ = ٠ ؛ م$_{٢}$: ٤س + ٣ص − ٤٠ = ٠

(٣) س^{٢} + ص^{٢} = $\frac{٢٥٦}{٢٥}$

(٤) (س + ١)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = $\frac{١٢١}{٤٥}$

(٥) (س − ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١

(٦) س^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ٤ أو (س − ٤)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ٤ أو (س − ٤)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٤

أو س^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٤

(٧) لأن لهما الميل نفسه $-\frac{أ}{ب}$.

(٨) ≃ ٣٨,١ كم.

تحليل البيانات تمرَّنْ ١٠–١

المجموعة أ تمارين أساسية

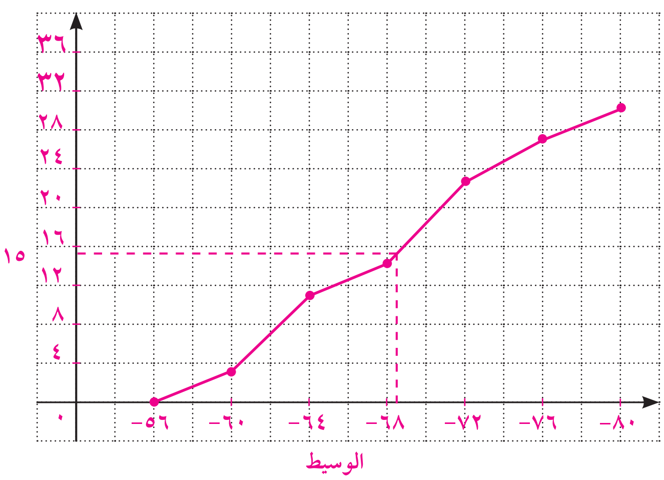
(١) (أ)

الفئة	٥٦–	٦٠–	٦٤–	٦٨–	٧٢–	٧٦–
التكرار	٣	٨	٣	٩	٤	٣
مركز الفئة	٥٨	٦٢	٦٦	٧٠	٧٤	٧٨

المتوسط الحسابي = $\frac{٣ \times ٥٨ + ٨ \times ٦٢ + ٣ \times ٦٦ + ٩ \times ٧٠ + ٤ \times ٧٤ + ٣ \times ٧٨}{٣٠} = ٦٧,٦$

(ب)

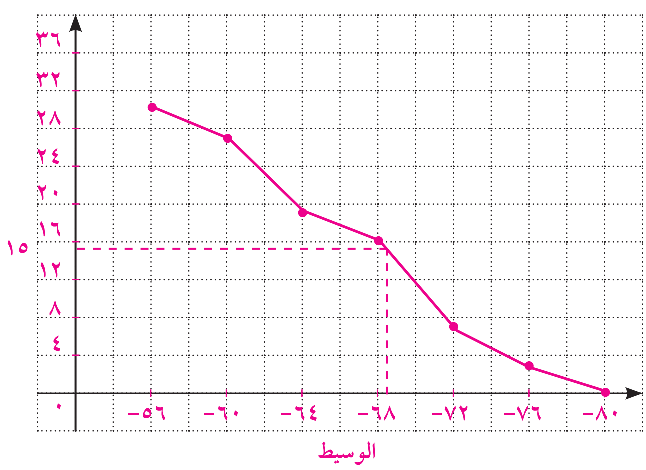
الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
٥٦–	٣	أقل من ٦٠	٣
٦٠–	٨	أقل من ٦٤	١١
٦٤–	٣	أقل من ٦٨	١٤
٦٨–	٩	أقل من ٧٢	٢٣
٧٢–	٤	أقل من ٧٦	٢٧
٧٦–	٣	أقل من ٨٠	٣٠



ترتيب الوسيط: $\frac{٣٠}{٢} = ١٥$، الوسيط يساوي حوالى ٦٨,٥ بحسب منحنى التكرار المتجمع الصاعد.

(جـ)

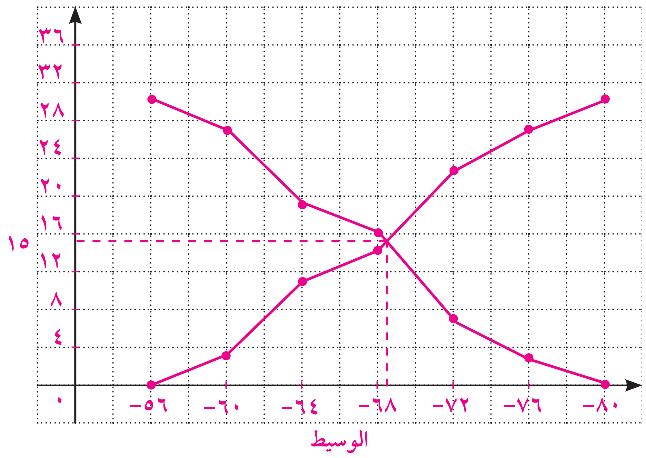
الفئة	التكرار	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٥٦–	٣	٥٦ فأكثر	٣٠
٦٠–	٨	٦٠ فأكثر	٢٧
٦٤–	٣	٦٤ فأكثر	١٩
٦٨–	٩	٦٨ فأكثر	١٦
٧٢–	٤	٧٢ فأكثر	٧
٧٦–	٣	٧٦ فأكثر	٣



ترتيب الوسيط: $\frac{٣٠}{٢} = ١٥$، الوسيط يساوي حوالي ٦٨,٥ بحسب منحنى التكرار المتجمع النازل.

(د)

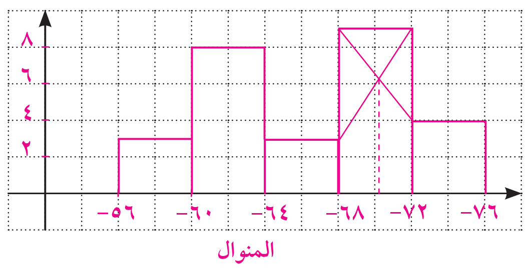
الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٥٦–	٣	أقل من ٦٠	٣	٥٦ فأكثر	٣٠
٦٠–	٨	أقل من ٦٤	١١	٦٠ فأكثر	٢٧
٦٤–	٣	أقل من ٦٨	١٤	٦٤ فأكثر	١٩
٦٨–	٩	أقل من ٧٢	٢٣	٦٨ فأكثر	١٦
٧٢–	٤	أقل من ٧٦	٢٧	٧٢ فأكثر	٧
٧٦–	٣	أقل من ٨٠	٣٠	٧٦ فأكثر	٣



ترتيب الوسيط: $\frac{٣٠}{٢}$ = ١٥، الوسيط يساوي حوالى ٦٨,٥ بحسب تقاطع كل من منحنى التكرار المتجمع النازل ومنحنى التكرار المتجمع الصاعد.

(هـ) الفئة المنوالية: ٦٨–، المنوال = ٦٨ + $\frac{٤}{٣ + ٤}$ × ٤ ≃ ٧٠,٣.

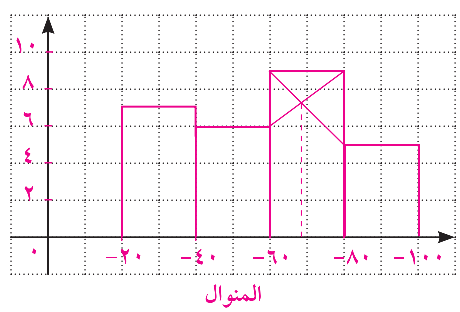
(و)



يبيّن المدرج التكراري حوالى ٧٠ للمنوال.

(٢) (أ) الفئة المنوالية: ٦٠–، المنوال = ٦٠ + $\frac{٥}{٦ + ٥}$ × ٢٠ ≃ ٦٩,٠٩، إذًا المنوال يساوي ٦٩,٠٩ تقريبًا.

(ب)



يبيّن المدرج التكراري حوالى ٦٩ للمنوال.

(٣) (أ)　　(٤) (ب)　　(٥) (ب)　　(٦) (أ)

(٧) (ب)　　(٨) (جـ)　　(٩) (د)

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) ٢,٣ تقريبًا.

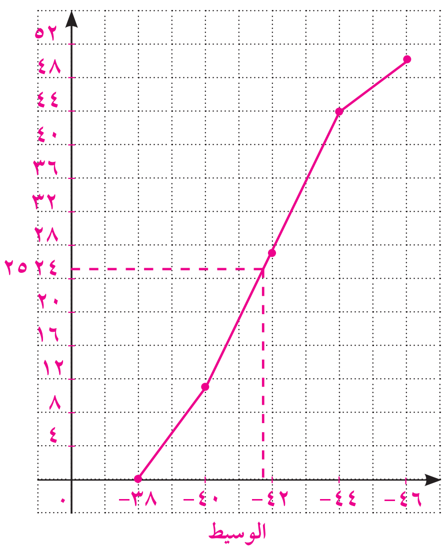
(٢) (أ)

الفئة	٣٨-	٤٠-	٤٢-	٤٤-
التكرار	١١	١٦	١٧	٦
مركز الفئة	٣٩	٤١	٤٣	٤٥

المتوسط الحسابي = $\frac{١١ \times ٣٩ + ١٦ \times ٤١ + ١٧ \times ٤٣ + ٦ \times ٤٥}{٥٠}$ = ٤١,٧٢

(ب)

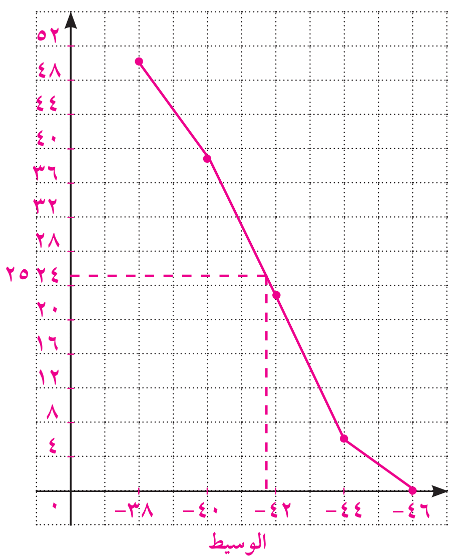
الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا لفئة	التكرار المتجمع الصاعد
٣٨-	١١	أقل من ٤٠	١١
٤٠-	١٦	أقل من ٤٢	٢٧
٤٢-	١٧	أقل من ٤٤	٤٤
٤٤-	٦	أقل من ٤٦	٥٠



ترتيب الوسيط: $\frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥، الوسيط يساوي حوالى ٤١,٧٥ بحسب منحنى التكرار المتجمع الصاعد.

(جـ)

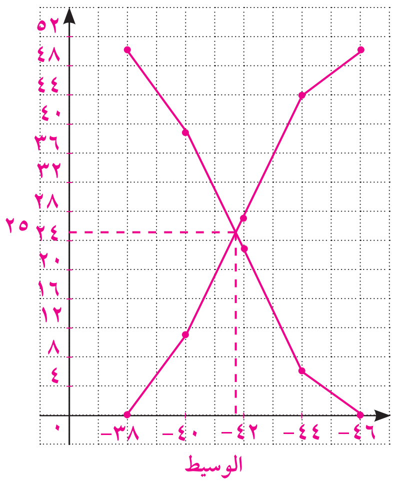
الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا لفئة	التكرار المتجمع الصاعد
٣٨-	١١	٣٨ فأكثر	٥٠
٤٠-	١٦	٤٠ فأكثر	٣٩
٤٢-	١٧	٤٢ فأكثر	٢٣
٤٤-	٦	٤٤ فأكثر	٦



ترتيب الوسيط: $\frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥، الوسيط يساوي حوالى ٤١,٧٥ بحسب منحنى التكرار المتجمع النازل.

(د)

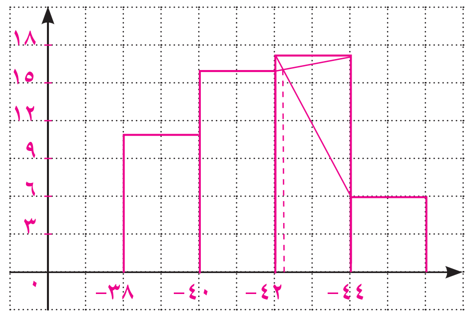
الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٣٨–	١١	أقل من ٤٠	١١	٣٨ فأكثر	٥٠
٤٠–	١٦	أقل من ٤٢	٢٧	٤٠ فأكثر	٣٩
٤٢–	١٧	أقل من ٤٤	٤٤	٤٢ فأكثر	٢٣
٤٤–	٦	أقل من ٤٦	٥٠	٤٤ فأكثر	٦



ترتيب الوسيط: $\frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥، الوسيط يساوي حوالى ٤١,٧٥ بحسب نقطة تقاطع منحنى التكرار المتجمع النازل ومنحنى التكرار المتجمع الصاعد.

(هـ) الفئة المنوالية: ٤٢–، المنوال = ٤٢ + $\frac{٦}{١٦ + ٦}$ × ٢ ≃ ٤٢,٥ .

(و)



باستخدام المدرج التكراري يساوي المنوال حوالى ٤٢,٢٥ .

الأرباعيات

تمرَّنْ ١٠–٢

المجموعة أ تمارين أساسية

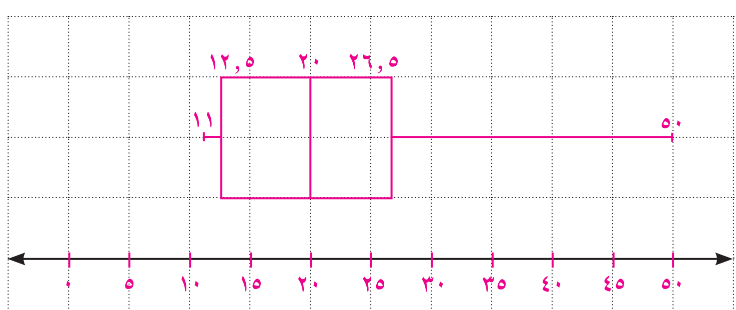
(١) (أ) ١٠ − ٣ = ٧

(ب) ٢٣ − ١١ = ١٢

(٢) مجمل الأعداد الخمسة (٥٠، ٥٤، ٦١، ٦٥، ٩٥).

(٣) (أ) الأعداد الخمسة = (١١، ١٢,٥، ٢٠، ٢٦,٥، ٥٠).

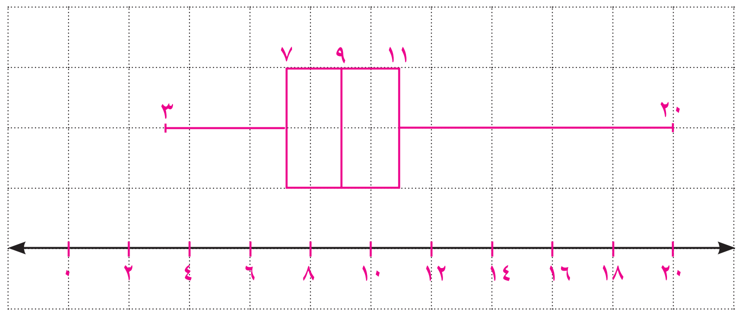
(ب)



(٤) البيانات: ٣، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ٢٠.

الوسيط = $د_{٢}$ = ٩ ، الأرباعي الأدنى = $د_{١}$ = ٧ ، الأرباعي الأعلى = $د_{٣}$ = ١١

الأعداد الخمسة: (٣، ٧، ٩، ١١، ٢٠)



(٥) (أ)　　(٦) (ب)　　(٧) (ب)　　(٨) (ب)

(٩) (جـ)　　(١٠) (د)

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) (أ) مجمل الأعداد الخمسة: (٤٩، ٥٨، ٦٤، ٧٧، ٨٠).

(ب) مجمل الأعداد الخمسة: (١٠٠، ١٠١,٥، ١٠٣,٥، ١٠٧، ١١٠).

(جـ) مجمل الأعداد الخمسة: (١١، ١٢,٥، ١٥، ١٩، ٢٠).

(٢) (أ) البيانات: ٦، ٧، ٨، ١١، ١١، ١٣، ١٤، ١٤، ١٥، ٣٣ (مع القيمة المتطرفة)

٦، ٧، ٨، ١١، ١١، ١٣، ١٤، ١٤، ١٥ (من دون القيمة المتطرفة)

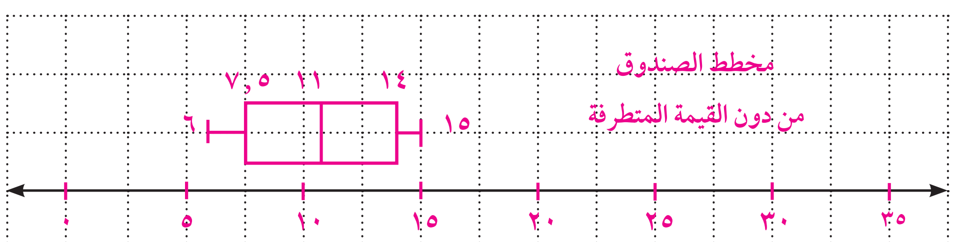
مع القيمة المتطرفة:

مجمل الأعداد الخمسة: (٦، ٨، ١٢، ١٤، ٣٣)

من دون القيمة المتطرفة:

مجمل الأعداد الخمسة = (٦، ٧,٥، ١١، ١٤، ١٥)

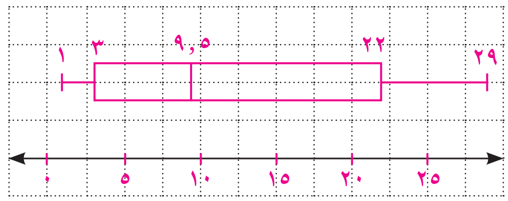
(ب)



(٣) (أ) البيانات: ١، ٢، ٣، ٦، ٩، ١٠، ١٤، ٢٢، ٢٤، ٢٩.

مجمل الأعداد الخمسة = (١، ٣، ٩,٥، ٢٢، ٢٩).

(ب)



يبيّن مخطط الصندوق الفرق في المساحة بين معدل دخل الفرد السنوي لدول مجلس التعاون الخليجي ودول أخرى في المجموعة العربية.

الانحراف المعياري — تمرَّنْ ١٠–٣

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) (أ) المتوسط الحسابي $\overline{س}$ = ٦١

القيمة س	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^٢$
٥٢	−٩	٨١
٦٣	٢	٤
٥٤	−٧	٤٩
٧٠	٩	٨١
٦٦	٥	٢٥
		المجموع = ٢٤٠

$ع^٢ = \frac{٢٤٠}{٥} = ٤٨$ (التباين)

الانحراف المعياري: $ع = \sqrt{٤٨}$

$\simeq ٦,٩٣$

(ب) المتوسط الحسابي $\overline{س}$ = ١٠

$ع^٢ = \frac{٢٥٢}{٨} = ٣١,٥$ (التباين)

الانحراف المعياري: $ع = \sqrt{٣١,٥}$

$\simeq ٥,٦$

القيمة س	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^٢$
١	−٩	٨١
٢	−٨	٦٤
١٧	٧	٤٩
١٢	٢	٤
١٥	٥	٢٥
٨	−٢	٤
١٠	٠	٠
١٥	٥	٢٥
		المجموع = ٢٥٢

(٢) المتوسط الحسابي $\overline{\text{س}}$ = ٥٠

القيمة س	$\text{س}_\text{ر} - \overline{\text{س}}$	$(\text{س}_\text{ر} - \overline{\text{س}})^2$
٤٨,٠	−٢	٤
٥٣,٢	٣,٢	١٠,٢٤
٥٢,٣	٢,٣	٥,٢٩
٤٦,٦	−٣,٤	١١,٥٦
٤٩,٩	−٠,١	٠,٠١
		المجموع = ٣١,١٠

$\text{ع}^2 = \frac{٣١,١}{٥} \simeq ٦,٢٢$

$\text{ع} = \sqrt{٦,٢٢} \simeq ٢,٥$

(٣)

الفئة	٢٠−	٢٥−	٣٠−	٣٥−	٤٠−	٤٥−
التكرار	٦	٦	٨	١٠	١٤	٦
مركز الفئة	٢٢,٥	٢٧,٥	٣٢,٥	٣٧,٥	٤٢,٥	٤,٥

المتوسط الحسابي = $\frac{٢٢,٥ \times ٦ + ٢٧,٥ \times ٦ + ٣٢,٥ \times ٨ + ٣٧,٥ \times ١٠ + ٤٢,٥ \times ١٤ + ٤٧,٥ \times ٦}{٥٠}$ = ٣٦,٦

القيمة س	$\text{س}_\text{ر} - \overline{\text{س}}$	$(\text{س}_\text{ر} - \overline{\text{س}})^2$
٢٢,٥	−١٣,٨	١٩٠,٤٤
٢٧,٥	−٨,٨	٧٧,٤٤
٣٢,٥	−٣,٨	١٤,٤٤
٣٧,٥	١,٢	١,٤٤
٤٢,٥	٦,٢	٣٨,٤٤
٤٧,٥	١١,٢	١٢٥,٤٤
		المجموع = ٤٤٧,٦٤

التباين = $\frac{٤٤٧,٦٤}{٥٠}$ = ٨,٩٥٢٨

الانحراف المعياري = $\sqrt{٨,٩٥٢٨} \approx ٣$

(٤) ٣,٧٦٨　　(٥) (أ)　　(٦) (ب)

(٧) (جـ)　　(٨) (جـ)

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) (أ) المتوسط الحسابي $\overline{س} = \frac{٤٢}{٧} = ٦$

القيمة س	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^٢$
٥	١−	١
٧	١	١
٦	٠	٠
٤	٢−	٤
٨	٢	٤
٩	٣	٩
٣	٣−	٩
		المجموع = ٢٨

$ع^٢ = \frac{٢٨}{٧} = ٤$

الانحراف المعياري: $ع = \sqrt{٤} = ٢$. نلاحظ أن قيم البيانات تتجمع أكثر حول المتوسط الحسابي.

(ب) المتوسط الحسابي $\overline{س} = \frac{٣٢٠}{٨} = ٤٠$

القيمة س	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^٢$
٣٤	٦−	٣٦
٤٥	٥	٢٥
٣٧	٣−	٩
٤٢	٢	٤
٣٦	٤−	١٦
٤٣	٣	٩
٤٤	٤	١٦
٣٩	١−	١
		المجموع = ١١٦

$ع^٢ = \frac{١١٦}{٨} = ١٤,٥$

الانحراف المعياري: $ع = \sqrt{١٤,٥} \simeq ٣,٨$. نلاحظ أن قيم البيانات تتجمع أكثر حول المتوسط الحسابي.

(٢) (أ) المتوسط الحسابي = $\overline{س} \simeq ٣٨,٢$ أي أن المتوسط الحسابي لاستهلاك الطاقة الكهربائية هو ٣٨,٢ ميغاواط/ ساعة يوميًّا.

(ب) التباين = $ع^٢ \simeq ١,٨٧$، الانحراف المعياري بواسطة الآلة الحاسبة هو: $ع \simeq ١,٣٦٨$ ميغاواط/ ساعة تقريبًا.

(٣)

الفئة	٨٦–	٩٠–	٩٤–	٩٨–	١٠٢–	١٠٦–
التكرار	٥	١٠	٣٩	٣٢	٩	٥
مركز الفئة	٨٨	٩٢	٩٦	١٠٠	١٠٤	١٠٨

المتوسط الحسابي $\overline{س}$ = ٩٧,٨ سنتيلترًا؛ التباين $ع^{٢}_{ر}$ ≃ ١٩,٦٢٥،

الانحراف المعياري: $ع_{ر}$ ≃ ٤,٤٣ سنتيلترات.

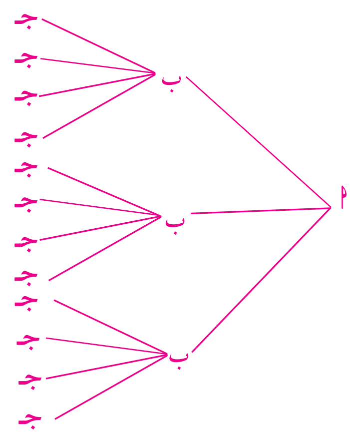
طرق العد

تمرَّنْ ١٠–٤

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) ٦؛ ع ل م، ع م ل، م ع ل، م ل ع، ل ع م، ل م ع.

(٢) ١٢



(٣) ١٢؛ $ر_{١}ن_{١}$ ، $ر_{١}ن_{٢}$ ، $ر_{١}ن_{٣}$ ، $ر_{١}ن_{٤}$ ، $ر_{٢}ن_{١}$ ، $ر_{٢}ن_{٢}$ ، $ر_{٢}ن_{٣}$ ، $ر_{٢}ن_{٤}$ ، $ر_{٣}ن_{١}$ ، $ر_{٣}ن_{٢}$ ، $ر_{٣}ن_{٣}$ ، $ر_{٣}ن_{٤}$.

(٤) ٨×١٠^{٦} = ٨ ٠٠٠ ٠٠٠، لأن الرقم الأول من اليسار لديه ٨ إمكانيات وكل من الأرقام الأخرى لديها ١٠ إمكانيات.

(٥) ٢٢ ٨٦١ ٤٤٠ (١٠ × ٩ × ٢٨ × ٢٧ × ٨ × ٧ × ٦)

(٦) ٣٦ (٦ × ٦)

(٧) ٦٧٢٠

(٨) ٣ ٩٩١ ٦٨٠

(٩) ٢٠٠٢

(١٠) ١ ١٢٨

(١١) ٢ ٣٠٠ ($^{٢٥}ق_{٣}$)

(١٢) ١٧ ٢٩٦ ($^{٤٨}ق_{٣}$)

(١٣) ٥٦ ($^{٨}ق_{٣}$)

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) $^{٤}ل_{٣}$ = ٢٤

(٢) ١٤٤ (١٢ × ١٢)

(٣) ٨

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) {(٣، ٦)، (٤، ٥)، (٥، ٤)، (٦، ٣)}؛ $\frac{٤}{٣٦} = \frac{١}{٩}$

(٢) {(١، ١)، (١، ٣)، (١، ٥)، (٢، ٢)، (٢، ٤)، (٢، ٦)، (٣، ١)، (٣، ٣)، (٣، ٥)، (٤، ٢)، (٤، ٤)، (٤، ٦)، (٥، ١)، (٥، ٣)، (٥، ٥)، (٦، ٢)، (٦، ٤)، (٦، ٦)}؛ $\frac{١٨}{٣٦} = \frac{١}{٢}$

(٣) {(٢، ١)، (٣، ١)، (٣، ٢)، (٤، ١)، (٤، ٢)، (٤، ٣)، (٥، ١)، (٥، ٢)، (٥، ٣)، (٥، ٤)، (٦، ١)، (٦، ٢)، (٦، ٣)، (٦، ٤)، (٦، ٥)}؛ $\frac{١٥}{٣٦} = \frac{٥}{١٢}$

(٤) ٠,٤　　(٥) ٠,٤　　(٦) ٠,٢

(٧) ٠,٨　　(٨) ٠,٧　　(٩) ٠,٦

(١٠) $\frac{١٠}{٨١} \simeq ٠,١٢٣$　　(١١) $\frac{٢٠}{٨١}$　　(١٢) $\frac{٤}{٩}$

(١٣) $\frac{١}{٩}$　　(١٤) $\frac{١٩}{٣٠}$

(١٥) مجموع الاحتمالات أكبر من ١، غير ممكن. إذًا هذه الأحداث لا يمكن أن تحصل معًا.

(١٦) (أ) ٠,٣ + ٠,٤ − ٠,٣ × ٠,٤ = ٠,٥٨

(ب) ١ − ٠,٣ = ٠,٧

(جـ) ل(أ) × ل(ب) = ٠,١٢

(١٧) (أ) ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب) = ٠,٣ + ٠,٧ − ٠,٨ = ٠,٢

(ب) = $\frac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{\text{ل(ب)}} = \frac{٢}{٧}$

(جـ) = $\frac{\text{ل(ب ∩ أ)}}{\text{ل(أ)}} = \frac{٢}{٣}$

(١٨) = $\frac{\text{ل(ب ∩ أ)}}{\text{ل(أ)}} = \frac{٠,٢٥}{٠,٥} = ٠,٥$ أو ل(ب|أ) = ل(ب) = ٠,٥

(١٩) (د)　　(٢٠) (ب)　　(٢١) (أ)

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) {(١، ١)، (١، ٢)، (١، ٣)، (١، ٤)، (١، ٥)، (١، ٦)، (٢، ١)، (٢، ٢)، (٢، ٣)، (٢، ٤)، (٢، ٥)، (٢، ٦)، (٣، ١)، (٣، ٢)، (٣، ٣)، (٣، ٤)، (٣، ٥)، (٣، ٦)، (٤، ١)، (٤، ٢)، (٤، ٣)، (٤، ٤)، (٤، ٥)، (٥، ١)، (٥، ٢)، (٥، ٣)، (٥، ٤)، (٦، ١)، (٦، ٢)، (٦، ٣)}؛ $\frac{٣٠}{٣٦} = \frac{٥}{٦}$

(٢) {(١، ١)، (١، ٣)، (١، ٥)، (٣، ١)، (٣، ٣)، (٣، ٥)، (٥، ١)، (٥، ٣)، (٥، ٥)}؛ $\frac{٩}{٣٦} = \frac{١}{٤}$

(٣) {(٢، ٢)، (٢، ٤)، (٢، ٦)، (٤، ٢)، (٤، ٤)، (٤، ٦)، (٦، ٢)، (٦، ٤)، (٦، ٦)}؛ $\frac{٩}{٣٦} = \frac{١}{٤}$

(٤) $\frac{٩!}{١٠^٩} \simeq ٠,٠٠٠٣٦$

(٥) $\frac{٥}{٩}$

(٦) ٠,٠٩

(٧) ٠,٠١

(٨) ٠,٠٦

(٩) ٠,٦٤

(١٠) ٠,٧٢

(١١) (أ) ا، ب حدثان مستقلان إذًا:

ل(ا ∩ ب) = ل(ا) × ل(ب)

= ٠,٢ × ٠,٧

= ٠,١٤

(ب) ل(ب|ا) = ل(ب) = ٠,٧

(جـ) ل(ا ∪ ب) = ل(ا) + ل(ب) − ل(ا ∩ ب)

= ٠,٢ + ٠,٧ − ٠,١٤

= ٠,٧٦

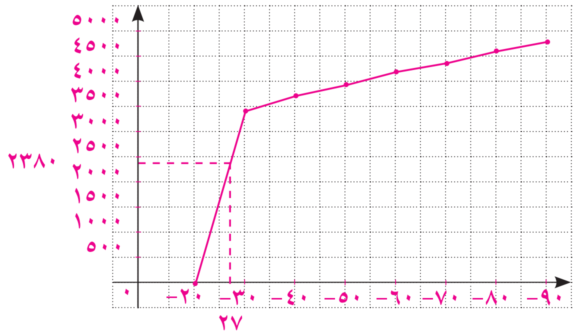
(د) ٠,٢

مراجعة الوحدة العاشرة

(١) (أ)

الفئة (العمر)	الرجال	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد (رجال)	مركز الفئة
٢٠−	٤٥٠٠	أقل من ٣٠	٤٥٠٠	٢٥
٣٠−	٤٨٠	أقل من ٤٠	٤٩٨٠	٣٥
٤٠−	٣٧٠	أقل من ٥٠	٥٣٥٠	٤٥
٥٠−	٢٩٠	أقل من ٦٠	٥٦٤٠	٥٥
٦٠−	١٨٠	أقل من ٧٠	٥٨٢٠	٦٥
٧٠−	١١٠	أقل من ٨٠	٥٩٣٠	٧٥
٨٠−	٣٠	أقل من ٩٠	٥٩٦٠	٨٥

(ب) $\overline{س}$ = متوسط أعمار الرجال = ٣١ سنة تقريبًا.

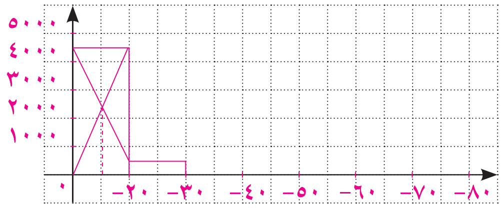


(جـ) ترتيب الوسيط عند الرجال = ٢ ٩٨٠،

فئة الوسيط ٢٠–

الوسيط ≈ ٢٧ سنة

٥٠٪ من الرجال دون ٢٧ سنة غير متزوجين.

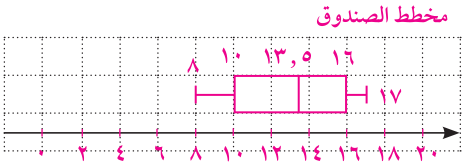


(د) الفئة المنوالية لأعمار الرجال ٢٠–

المنوال يساوي بحسب الرسم البياني حوالى ١٥ سنة.

(٢) (أ) $\frac{١٣٠}{١٠} = ١٣ = \overline{س}$.

(ب) ٨، ٩، ١٠، ١٢، ١٣، ١٤، ١٥، ١٦، ١٦، ١٧.

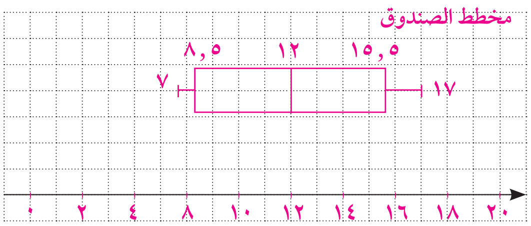


مجمل الأعداد الخمسة: (٨، ١٠، ١٣,٥، ١٦، ١٧).

(جـ) لا يوجد تشتت كبير لهذه الدرجات.

(د) الانحراف المعياري ع = $\sqrt{٩}$ = ٣ وهو صغير أي أن القيم تتجمع حول المتوسط الحسابي.

(٣) (أ) البيانات: ٧، ٨، ٩، ١٠، ١٢، ١٤، ١٥، ١٦، ١٧؛



مجمل الأعداد الخمسة = (٧، ٨,٥، ١٢، ١٥,٥، ١٧).

(ب) يبيّن المخطط عدم وجود تشتت كبير للقيم عن الوسيط ويوجد توزيع تماثلي بين الوسيط والأرباعي الأدنى والأرباعي الأعلى.

تمارين إثرائية

(١) (أ)

الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
١٠–	١	أقل من ٢٠	١	١٠ فأكثر	٧٥
٢٠–	٧	أقل من ٣٠	٨	٢٠ فأكثر	٧٤
٣٠–	٥	أقل من ٤٠	١٣	٣٠ فأكثر	٦٧
٤٠–	٨	أقل من ٥٠	٢١	٤٠ فأكثر	٦٢
٥٠–	١١	أقل من ٦٠	٣٢	٥٠ فأكثر	٥٤
٦٠–	٢٢	أقل من ٧٠	٥٤	٦٠ فأكثر	٤٣
٧٠–	١٧	أقل من ٨٠	٧١	٧٠ فأكثر	٢١
٨٠–	٤	أقل من ٩٠	٧٥	٨٠ فأكثر	٤

(ب) ترتيب الوسيط = $\frac{٧٥ + ١}{٢}$ = ٣٨

فئة الوسيط: ٦٠−

قيمة الوسيط بيانيًّا: تقريبًا ٦٢,٥ كجم.

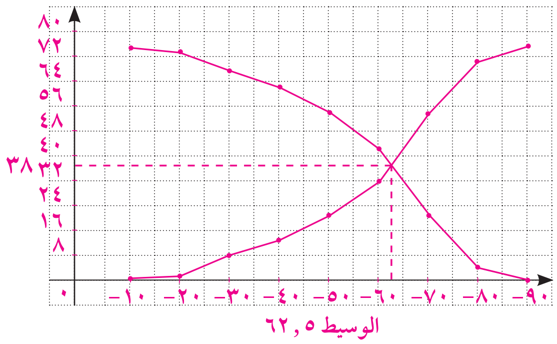
(جـ) المنوال حسابيًّا: ٦٠ + $\frac{١٧}{١١ + ١٧}$ × ١٠

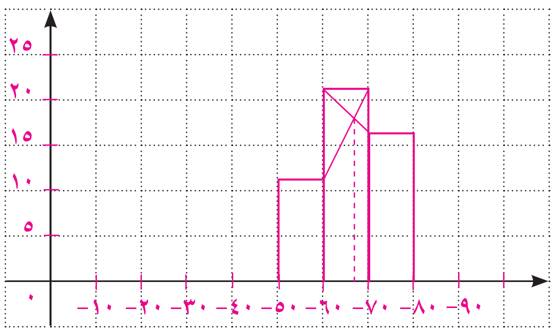
= ٦٦,١ كجم.

باستخدام المدرج التكراري نجد أن المنوال

تقريبًا يساوي ٦٦ كجم.

(د) المتوسط الحسابي: $\frac{٤\,٣٧٥}{٧٥}$ = ٥٨,٣ كجم.





(٢) (أ) المتوسط الحسابي $\overline{س}$ = $\frac{٢\,٥٥٠}{١٠}$ = ٢٥٥

(ب)

القيمة س	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^٢$
٢٥٠	−٥	٢٥
٢٤٥	−١٠	١٠٠
٢٦٠	٥	٢٥
٢٥٥	٠	٠
٢٤٠	−١٥	٢٢٥
٢٦٥	١٠	١٠٠
٢٦٥	١٠	١٠٠
٢٣٥	−٢٠	٤٠٠
٢٧٠	١٥	٢٢٥
٢٦٥	١٠	١٠٠
		المجموع = ١٣٠٠

$ع^٢$ = $\frac{١\,٣٠٠}{١٠}$ = ١٣٠، ع = $\sqrt{١٣٠}$ ≃ ١١,٤

الانحراف المعياري: ع ≃ ١١,٤ دينارًا.

(٣) $^٥ق_٣$ + $^٥ق_٢$ + $^٥ق_١$ = ٢٥

(٤) ٧٧٧٦ $(٦^٥)$

(٥) $^{٢٠}ق_٨$ = ١٢٥٩٧٠

(٦) (أ) $\frac{٨٦}{١٢٧}$ (ب) $\frac{٩١}{١٢٧}$ (جـ) $\frac{٦٢}{١٢٧}$

(٧) (أ) $\frac{١}{١٦}$

(ب) ٠

(جـ) $٢ \times \frac{١}{١٦} = \frac{١}{٨}$

(٨) (أ) نستخدم الحروف التالية: خ للتعبير عن اللون الأخضر، ص للتعبير عن اللون الأصفر، ح للتعبير عن اللون الأحمر، ت للتعبير عن التوقف، $\overline{\text{ت}}$ للتعبير عن عدم التوقف أي المرور.

من معطيات المسألة نكتب: ل(ت|خ) = ٠,٠٢ ، ل(ت|ص) = ٠,٦٥

ل(ت|ح) = ٠,٩٧ وكذلك ل(خ) = ٠,٦ ، ل(ص) = ٠,١ ، ل(ح) = ٠,٣

ل(ت) = ل (ت ∩ خ) + ل (ت ∩ ص) + ل(ت ∩ ح) = ٠,٠٢ × ٠,٦ + ٠,٦٥ × ٠,١ + ٠,٩٧ × ٠,٣

= ٠,٣٦٨

(ب) ل(ح|ت) = $\frac{\text{ل(حـ ∩ ت)}}{\text{ل(ت)}}$

لدينا ل(حـ ∩ ت) = ٠,٣ × ٠,٣ = ٠,٠٠٩

ل(ت) = ١ − ل(ت) = ١ − ٠,٣٦٨ = ٠,٦٣٢

وبالتالي: ل(ح|$\overline{\text{ت}}$) = $\frac{٠,٠٠٩}{٠,٦٣٢} = \frac{٩}{٦٣٢}$

(٩) $\frac{{}^{١٠}\text{ل}_{٧}}{١٠^{٧}} = ٠,٠٦٠٤٨$

(١٠) $\frac{٧}{٩}$

(١١) ليكن ز الحدث: «مواطن مصاب بالزكام»؛ ليكن ط الحدث: «مواطن تلقى لقاحًا».

من خلال معطيات المسألة: ل(ز) = $\frac{١}{٤}$ ؛ ل(ط) = $\frac{١}{٣}$ ؛ ل(ط|ز) = $\frac{١}{١٠}$

ل(ز|ط) = $\frac{\text{ل(ز ∩ ط)}}{\text{ل(ط)}} = \frac{\text{ل(ط|ز)} \times \text{ل(ز)}}{\text{ل(ط)}}$

$= \frac{\frac{١}{١٠} \times \frac{١}{٤}}{\frac{١}{٣}} = \frac{٣}{٤٠}$

ملاحظات