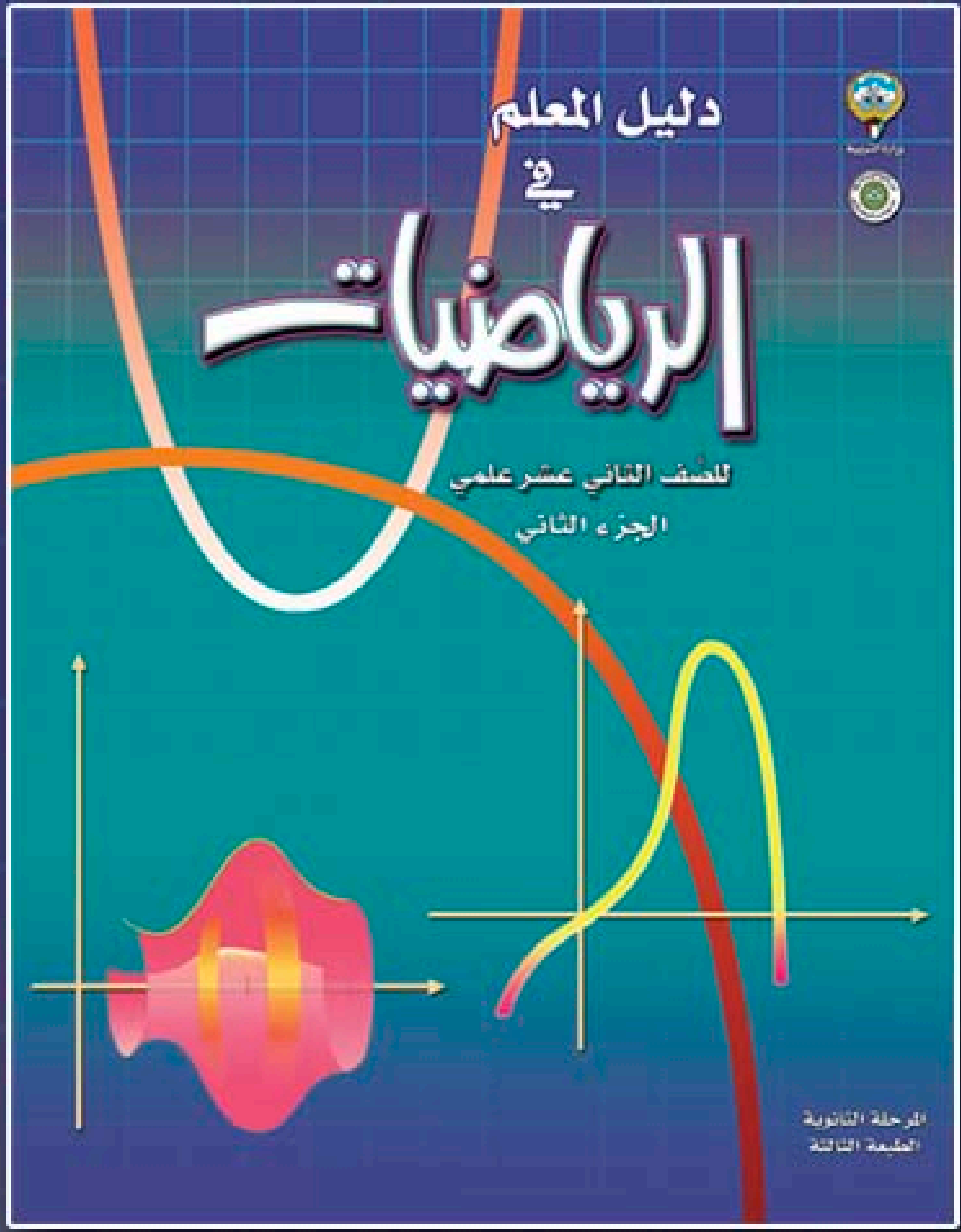
وزارة التربية



Book Mark

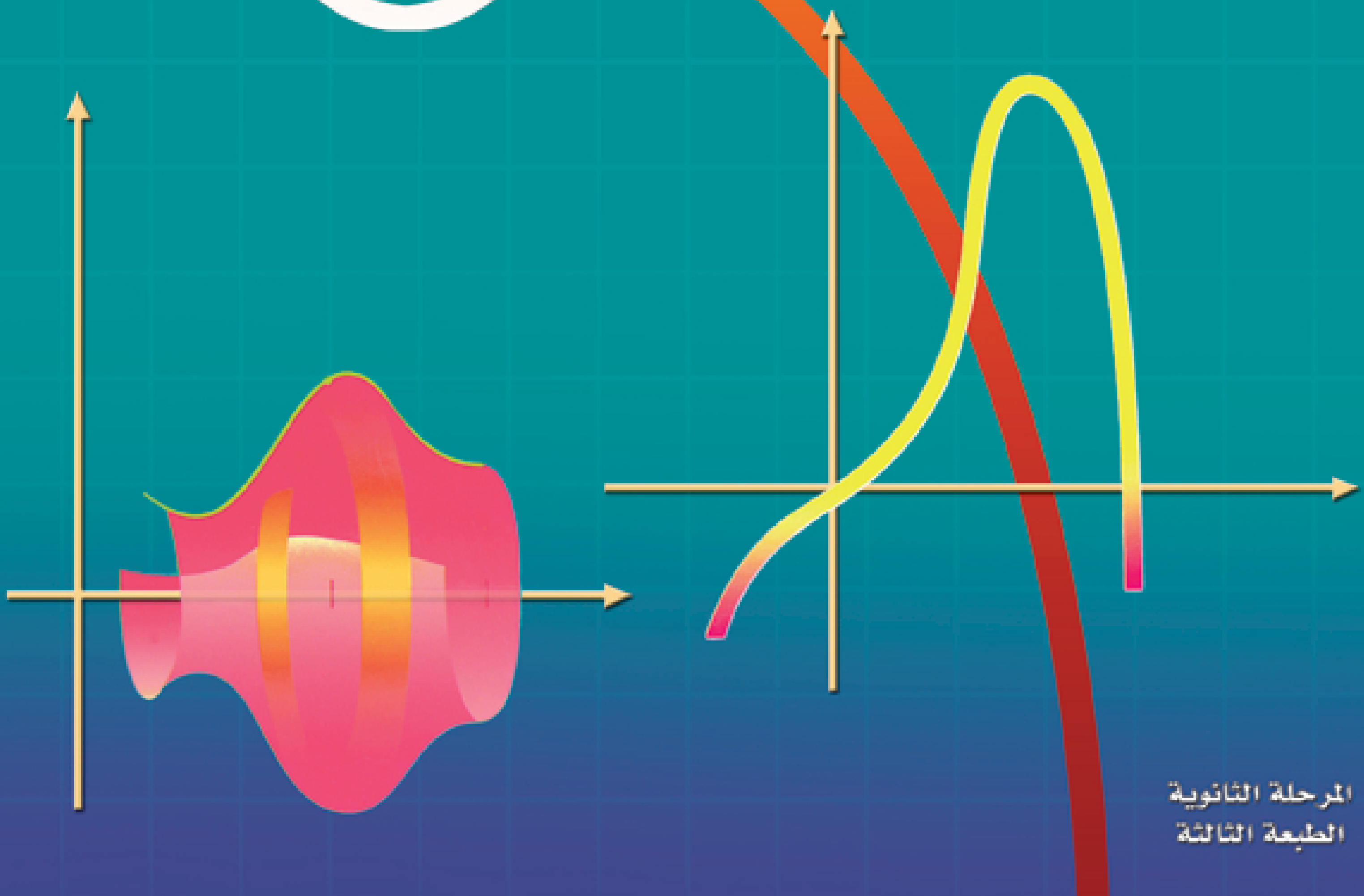
Index

Exit

وزارة التربية

دليل المعلم في الرياضيات

للصَّف الثاني عشر علمي
الجزء الثاني



المرحلة الثانوية
الطبعة الثالثة

Book Mark
Exit
Index

دليل المعلم في الرياضيات

للصف الثاني عشر علمي

الجزء الثاني

تأليف

د. أحمد شمس الدين الشيخ — د. حميد فايز حميد

د. محمد عبدالرحمن القاضي — د. منصور غلوم حسين

د. نصرة حسن الباقر

تحرير ومراجعة

الدكتور/ عبدالفتاح الشرقاوي

الطبعة الثالثة

١٤٢٩هـ

٢٠٠٨ - ٢٠٠٩م

الطبعة الثانية : ١٩٩٨ - ١٩٩٩م
الطبعة الثالثة : ٢٠٠٨ - ٢٠٠٩م

أسماء المعدلين :

د. هاني رضا فران (مشرفًا)

أ. حصة يونس العلي   أ. مصطفى كامل الهنداوي

أ. موسى الشهير بزهير

تنفيذ الرسوم بالحاسوب :

أ. رأفت سمير زكي بالتعاون مع الباحثين الفنيين بقسم مناهج الثانوي/ وحدة المناهج

أعضاء لجنة المواءمة :

أ. حصة يونس العلي (رئيسًا)

أ. إلهام عفيفي علي   أ. فرحات محمد عبدالصبور

أ. فتحية محمود أبوزور

بسم الله الرحمن الرحيم

Book Mark
Exit
Index

خبراء المشروع

■ اتفقت الدول الأعضاء في مكتب التربية العربي لدول الخليج على تدريس هذا الكتاب المدرسي الموحد في مدارسها، وهو يخدم الصف الثالث الثانوي العلمي في كل من دولة الإمارات العربية المتحدة، مملكة البحرين، سلطنة عُمان، دولة قطر، المملكة العربية السعودية، والصف الثاني عشر العلمي في دولة الكويت.

د. حميد فايز حميد
أ. محمد هلال اليوسفي

د. عبدالله الحواج
أ. هدى إسماعيل العوضي
أ. ناهدة إبراهيم الخياط
أ. سلوى لطيف مطر

د. منصور غلوم حسين
أ. علي عبدالله الصراف
أ. إبراهيم حسين القطان

د. محمد بن علوي البار
د. محمد عبدالرحمن القاضي
د. يوسف بن صالح الشنيفي

د. أحمد شمس الدين الشيخ
أ. محمد راشد بن سعيد الحديدي
أ. الحسيني محمد الغرباوي

د. نصرة رضا حسن الباقر
أ. عبدالله محمد النعمة

الدكتور/ عبدالفتاح الشرقاوي

المحتوى

الموضوع | الصفحة

تابع المحتوى

الموضوع الصفحة

Book Mark

Exit

تقديم

المربي الفاضل . . .
المربية الفاضلة . . .

يسر مكتب التربية العربي لدول الخليج/ المركز العربي للبحوث التربوية لدول الخليج، أن يضع بين يديك كتاب المعلم لرياضيات الصف الثاني عشر (علمي) في دولة الكويت المعادل للصف الثالث الثانوي العلمي في كل من: دولة الإمارات العربية المتحدة، ومملكة البحرين، وسلطنة عُمان، ودولة قطر، والمملكة العربية السعودية. وقد وضع كل من كتاب الطالب وكتاب المعلم في ظل منهج خليجي موحد، من أهم ملامحه أنه:

* يتناول محتوى موحدًا في كل الدول الأعضاء بمكتب التربية العربي لدول الخليج بقصد بناء الإنسان وتنمية المجتمع في إطار وحدة الفكر والهدف الخليجي.
* يهتم في محتواه بأحدث التقنية، فيربط بذلك بين دراسة الرياضيات وتكنولوجيا العصر.
* يعكس الاتجاهات العالمية المعاصرة في الرياضيات المدرسية.
* يتم بناؤه من خلال عمل جماعي تشارك فيه جميع الدول الأعضاء، وينبع من فكرها وتطلعاتها وواقعها.
* يؤكد على الدور الوظيفي للرياضيات وخاصة فيما يتعلق بحل المشكلات، ويؤكد على إيجابية ونشاط المتعلم.
* يراعى الفروق الفردية من خلال تنوع الأنشطة وتقديم توجيهات عمل في كتاب المعلم.
* يأتي بناؤه في تتابع تطويري، محاوره: التخطيط والإعداد والتجريب، والتقويم المصاحب والتحسين، ثم التعميم، مع المتابعة التطويرية في ضوء التغذية الراجعة.

وقد جاء كتاب الطالب في جزأين، وذلك على النحو التالي:

الجزء الأول:

يتناول موضوعات: النهايات والاتصال والاشتقاق وتطبيقات على الاشتقاق.

الجزء الثاني:

يتناول موضوعات: التكامل وتطبيقاته، القطوع المخروطية وهندسة الفضاء.

إن كتاب المعلم وسيلة في غاية الأهمية للمعلم، وبخاصة في مجال الرياضيات إذ من شأنه أن يساعد معلم الرياضيات على التخطيط لعمله وتهيئة المواقف التعليمية لتحقيق الأهداف المنشودة.

ويعد كتاب المعلم بمثابة وسيلة مهمة لتوسيع آفاق المعلم في مجالات المادة العلمية، وطرق التدريس، والتقنيات التربوية والتقويم.

وقد روعي في تأليف هذا الكتاب ما يلي:

- يتضمن الأهداف العامة للمقرر والأهداف التدريسية مصاغة صياغة سلوكية لكل موضوع.
- يعرض لبعض أساليب التدريس الملائمة، وذلك بأمثلة محددة.
- يتضمن قائمة التقنيات والأنشطة المصاحبة والممكنة التي تعين المعلم على تدريس موضوعات كتاب الطالب.
- يوضح كيفية الإفادة من التقنيات التعليمية والأنشطة المصاحبة في تدريس موضوعات الكتاب ويذكر البدائل لهذه الوسائل في حالة عدم توافرها.
- يثري المادة العلمية للمعلم بما يمكنه من التدريس الفعال لمادته.
- يعالج معظم التمارين تفصيليًا، ويعرض طرق التفكير في الوصول إلى الحل.
- يوجه المعلم إلى الأساليب الملائمة لتقويم الطلاب ويعطي أمثلة محددة لذلك.
- يتضمن نماذج خاصة لتقويم الكتاب المدرسي عقب كل موضوع.
- يوضح الترابط بين موضوعات كتاب الطالب من خلال عرض لوحة تدفقية لمحتوى المنهج.
- يقدم قائمة بأسماء المراجع والمصادر العلمية التي يمكن أن يفيد منها المعلم.
- يقدم نماذج لعرض بعض الموضوعات بأكثر من مدخل والتركيز في ذلك على الموضوعات المستحدثة.
- يتطرق إلى المفاهيم والخبرات السابقة والمعلومات التي تعلمها الطالب لكي يبني المعلم عليها المفاهيم والمعلومات الجديدة.
- يضيف بعض النماذج من الاختبارات التحصيلية ليهتدي بها المعلم في بناء اختبارات تقويم التحصيل.

أيها المربّي الفاضل. .
أيتها المربية الفاضلة. .

إذا كانت كتب الرياضيات الموحدة قد حرصت على تقديم الأفضل، مادة وطريقة، فإنَّ الدور الذي ننتظره منك هو الذي يؤكد هذا الاتجاه وينميه، ويجعله وسيلة لإثارة الدافعية لدى المتعلم، فيكون تعلمه معتمدًا على نشاطه، ويكون نشاطه منطلقًا من رغبة ذاتية، ويستطيع المعلم أن يهيئ للرغبة دوافعها، وإننا لعلى يقين من النجاح والتوفيق لجميع الزملاء من معلمين ومعلمات فيما قصدنا إليه، متى صحّت النيّة وصدق العزم.

والله من وراء القصد، وهو يهدي السبيل،،

مدير المركز
د. رشيد الحمد

Exit
Index
Book Mark

تدريس التكامل وتطبيقاته

Integration and Its Applications

الفصل الأول

عرض موضوع «التكامل وتطبيقاته» في الفصل الأول من الجزء الثاني لكتاب الطالب، وقد جاء في سبعة بنود على النحو التالي :

- ١ – ١ الدالة المقابلة – التكامل غير المحدد .
- ١ – ٢ التكامل المحدد .
- ١ – ٣ خواص التكامل المحدد .
- ١ – ٤ المساحة .
- ١ – ٥ حجوم الأجسام الدورانية .
- ١ – ٦ تطبيقات أخرى على التكامل .
- ١ – ٧ ملخص وتمارين عامة .

- تحليل المحتوى العلمي :

أولًا : مفاهيم ومصطلحات ورموز :

- الدالة المقابلة .
- الصورة العامة للدوال المقابلة لدالة .
- التكامل غير المحدد لدالة ، $\int د(س)\ ءس$.
- رمز التكامل .
- المكامل .
- ثابت التكامل .
- قاعدة القوى .
- التكامل المحدد، $\int_{ا}^{ب} د(س)\ ءس$.
- طرفا التكامل أو حدا التكامل .
- الطرف أو الحد الأسفل للتكامل .
- الطرف أو الحد الأعلى للتكامل .
- دالة قابلة للتكامل .
- مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة **د** ومحور السينات والمستقيمين س = ا، س = ب على النحو التالي :
  - م = $\int_{ا}^{ب} د(س)\ ءس$ وحدة مربعة إذا كانت د(س) $\geqslant$ ٠ $\forall$ س $\in$ [ا ، ب]
  - م = $-\int_{ا}^{ب} د(س)\ ءس$ وحدة مربعة إذا كانت د(س) $\leqslant$ ٠ $\forall$ س $\in$ [ا ، ب]
  - أو م = $\int_{ا}^{ب} |د(س)|\ ءس$ لكل س $\in$ [ا ، ب]
- مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة **د** ومنحنى الدالة **هـ** والمستقيمين س = ا، س = ب على النحو التالي :

  م = $\int_{ا}^{ب} |د(س) - هـ(س)|\ ءس$
- حجم الجسم الدوراني الناتج من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالة **د** والمحور السيني والمستقيمين س = ا، س = ب حول المحور السيني هي :

  $\int_{ا}^{ب} \pi [د(س)]^{2}\ ءس$

Book Mark
Exit
Index

- حجم الجسم الدوراني الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين:

ص = د(س) ، ص = هـ(س)

والمستقيمين س = أ ، س = ب حول المحور السيني

حيث د(س) ⩾ هـ(س) ⩾ ٠ ∀ س ∈ [أ ، ب]

يساوي $\int_{أ}^{ب} \pi \left[(د(س))^{٢} - (هـ(س))^{٢} \right]$ ءس

ثانيًا: حقائق وتعميمات:

- إذا كانت ن دالة مقابلة للدالة د فإن:

ن(س) + ث حيث ث ثابت، هي الصورة العامة للدوال المقابلة للدالة د.

- إذا كانت د(س) = ٠ ∀ س ∈ ف فإن الدالة: ن(س) = ث حيث ث ثابت، هي الدالة المقابلة في الفترة ف.

- إذا كانت كل من د ، هـ دالة مقابلة للدالة ن في الفترة ف فإن:

د(س) = هـ(س) + ث حيث ث ثابت ∀ س ∈ ف

- إذا كانت د′(س) = هـ′(س) ∀ س ∈ ف فإن:

د(س) = هـ(س) + ث ∀ س ∈ ف

- $\int$ س^ر ءس = $\frac{س^{ر+١}}{ر + ١}$ + ث حيث ث ثابت، ر ≠ −١

- إذا كان لكل من د ، هـ دالة مقابلة في فترة ما ف فإن:

i $\int$ م د(س) ءس = م $\int$ د(س) ءس: م ثابت ≠ ٠

ii $\int$ [د(س) ± هـ(س)] ءس = $\int$ د(س) ءس ± $\int$ هـ(س) ءس

- $\int$ [د(س)]^ر · د′(س) ءس = $\frac{١}{ر + ١}$ [د(س)]^{ر + ١} + ث

حيث ث ثابت، ر عدد نسبي، ر ≠ −١

التكامل المحدد:

لتكن د دالة متصلة على [أ ، ب] ولتكن ن هي إحدى دوالها المقابلة.

التكامل المحدد للدالة د على [أ ، ب] ونرمز له بالرمز $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس هو العدد الحقيقي ن(ب) − ن(أ)

ويمكن كتابة ذلك على الصورة

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \Big[\text{ق}(\text{س})\Big]_{\text{أ}}^{\text{ب}} = \text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(\text{أ})$$

- قيمة التكامل المحدد عدد حقيقي لا يتعلق بالحرف س ، ولذلك:

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{ص})\,\text{ءص} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{ع})\,\text{ءع} \text{ ، } \ldots$$

- $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \Big[\int \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}\Big]_{\text{أ}}^{\text{ب}}$

- إذا كانت الدالة **د** متصلة على الفترة [أ ، ب]، فإنها تكون قابلة للتكامل على هذه الفترة.

- إذا كانت الدالة **د** متصلة على الفترة [أ ، ب] فإنه توجد دالة **ق** متصلة على الفترة [أ ، ب] مقابلة للدالة **د** حيث:

$$\text{ق}(\text{س}) = \int_{\text{أ}}^{\text{س}} \text{د}(\text{ن})\,\text{ءن} \qquad \forall\ \text{س} \in [\text{أ} ، \text{ب}]$$

- $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ح}\ \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{ح} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د}(\text{س}) \pm \text{هـ}(\text{س})]\,\text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} \pm \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس}$$

- إذا كانت **د** متصلة على الفترة [أ ، ب] ، وكانت د(س) $\geqslant 0$ $\forall$ س $\in$ [أ ، ب] فإن:

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} \geqslant 0$$

- إذا كانت كل من د ، هـ دالة متصلة على [أ ، ب] وكانت د(س) $\geqslant$ هـ(س) $\forall$ س $\in$ [أ ، ب] فإن:

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} \geqslant \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس}$$

- إذا كانت **د** متصلة على الفترة [أ ، ب] وكان أ $<$ ح $<$ ب ، فإن:

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ح}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{\text{ح}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$$

- إذا كانت **د** متصلة على فترة **ف** وكانت أ ، ب ، ح $\in$ **ف** فإن:

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ح}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{\text{ح}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$$

- $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{س}^{\text{ن}}\,\text{ءس} = \left[\dfrac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}\right]_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ ، } \text{ن} \neq -1$

- $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}} \, \text{د}'(\text{س}) \, \text{ءس} = \left[\frac{[\text{د}(\text{س})]^{\text{ن} + ١}}{\text{ن} + ١} \right]_{\text{أ}}^{\text{ب}}$

حيث $\text{ن} \neq -١$.

ثالثًا: مهارات وخوارزميات:

- إيجاد الدالة المقابلة لدالة معلومة في فترة مغلقة.
- تعيين التكامل غير المحدد لدالة عن طريق تعيين الصورة العامة للدوال المقابلة لها.
- استخدام خواص التكامل غير المحدد وقاعدة القوى في حساب التكامل غير المحدد.
- تعيين قيمة التكامل المحدد باستخدام النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل.
- تعيين قيمة التكامل المحدد باستخدام الخواص.
- تعيين قيمة التكامل المحدد باستخدام تعميم قاعدة القوى.
- إيجاد مساحة منطقة محددة بمنحنيين.
- إيجاد حجم الجسم الناتج من دوران منطقة محددة بمنحنى دالة ص = د(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب حول محور السينات.
- إيجاد حجم الجسم الناتج من دوران منطقة محصورة بين منحنيين $\text{ص}_١ = \text{د}_١(\text{س})$ ، $\text{ص}_٢ = \text{د}_٢(\text{س})$ حول محور السينات.

رابعًا: مسائل وتطبيقات:

تنمية أساليب التفكير السليم وخاصة التفكير الاستقرائي من خلال:

- حل مسائل رياضية على التكامل المحدد وغير المحدد.
- تناول تطبيقات حياتية وهندسية.
- برهنة النظريات الخاصة بالتكامل.

- الأهداف السلوكية:

ينبغي أن يكون الطالب في نهاية دراسته لموضوع التكامل وتطبيقاته قادرًا على أن:

- يعرّف الدالة المقابلة لدالة معلومة.
- يعين دالة مقابلة لدالة معلومة.
- يعين الصورة العامة للدوال المقابلة لدالة معلومة.
- يعرّف التكامل غير المحدد باستخدام مفهوم الدالة المقابلة.

- يتعرّف رمز التكامل، وثابت التكامل.
- يعين التكامل غير المحدد لدالة عن طريق تعيين الصورة العامة للدوال المقابلة لها.
- يحل مسائل حياتية باستخدام التكامل غير المحدد.
- يذكر قاعدة القوى في التكامل.
- يذكر خواص التكامل غير المحدد.
- يعين التكامل غير المحدد لدالة معلومة باستخدام الخواص وقاعدة القوى.
- يعرّف التكامل المحدد لدالة معلومة.
- يتعرف حدي التكامل.
- يعرّف الدالة القابلة للتكامل.
- يقرأ ويكتب الرموز والتعبيرات المتضمنة في الموضوع:

$$\int \quad ، \quad \int \text{د(س) ءس} \quad ، \quad \int_{\text{م}}^{\text{ب}} \text{د(س) ءس} \quad ، \quad \Big[\text{ق(س)}\Big]_{\text{م}}^{\text{ب}}$$

- يذكر تعريف التكامل المحدد.
- يذكر خواص التكامل المحدد لدالة.
- يذكر العلاقة بين التكامل المحدد والتكامل غير المحدد لدالة معلومة.
- يعين قيمة التكامل المحدد لدالة معلومة باستخدام النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل.
- يبرهن صحة خواص التكامل المحدد.
- يوظف خواص التكامل المحدد في تعيين قيمة التكامل المحدد لدالة معلومة.
- يعمم قاعدة القوى في التكامل.
- يستخدم تعميم قاعدة القوى في إيجاد قيمة التكامل المحدد.
- يعين قيمة التكامل المحدد لدالة حدودية نسبية.
- يعين المساحة المحددة بمنحنى معلوم ص = د(س) ومحور السينات والمستقيمين س = م، س = ب.
- يعين مساحة منطقة محددة بمنحنيين $\text{ص}_1 = \text{د}_1\text{(س)}$ ، $\text{ص}_2 = \text{د}_2\text{(س)}$.
- يعين حجم الجسم الناتج من دوران منطقة محدودة بمنحنى معلوم ومحور السينات ومستقيمين س = م، س = ب حول محور السينات.

- يعين حجم الجسم الناتج من دوران منطقة محددة بمنحنيين $ص_١ = د_١(س)$، $ص_٢ = د_٢(س)$ حول محور السينات عندما $د_١(س) \geqslant د_٢(س) \geqslant ٠$.

- خلفية علمية :

تعيين طول منحنى باستخدام التكامل :

لتكن د دالة معرفة على الفترة المغلقة [أ ، ب] ، بحيث تكون كل من د ، د′ متصلة على [أ ، ب] .

إذا أخذنا تجزئة نونية للفترة [أ ، ب] مثل :

$$\{س_٠ = أ ، س_١ ، س_٢ ، \dots ، س_ن ، \dots ، س_د = ب\}$$

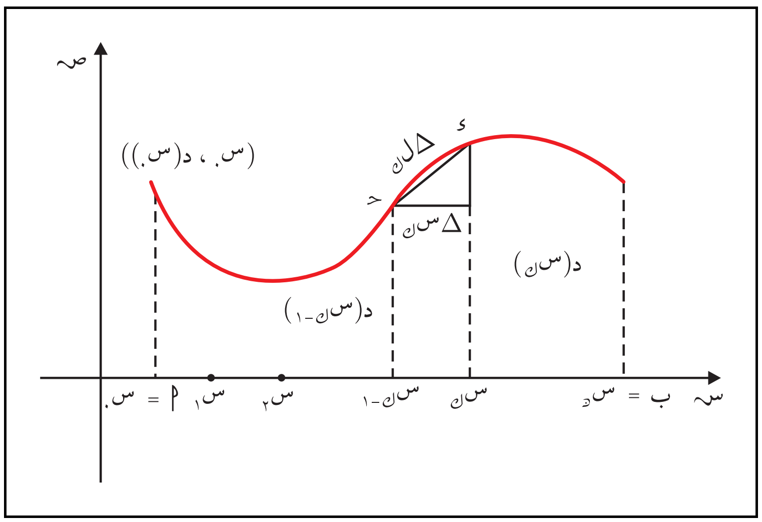
وافترضنا أن طول الفترة الجزئية :

$$\Delta س_ن = س_ن - س_{ن - ١} ،$$

وافترضنا أن $\Delta ل_ن$ = طول جزء المنحنى الواصل بين النقطتين :

$$حـ(س_{ن - ١} ، د(س_{ن - ١})) \quad ، \quad ء(س_ن ، د(س_ن))$$

(انظر الشكل التالي)



فإن: $\Delta ل_ن \approx$ حـء حيث حـء طول القطعة المستقيمة $\overline{حـء}$ ويكون :

$$\Delta ل_ن \approx \sqrt{(س_ن - س_{ن - ١})^٢ + \left[د(س_ن) - د(س_{ن - ١})\right]^٢}$$

وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة :

$$\text{د}(\text{س}_{\text{ك}}) - \text{د}(\text{س}_{\text{ك}-١}) = \text{د}'(\text{ى}_{\text{ك}})(\text{س}_{\text{ك}} - \text{س}_{\text{ك}-١})$$

حيث $\text{ى}_{\text{ك}} \in \,]\text{س}_{\text{ك}-١} \text{ ، } \text{س}_{\text{ك}}[$

$$\therefore \Delta \text{ل}_{\text{ك}} \approx \sqrt{(\text{س}_{\text{ك}} - \text{س}_{\text{ك}-١})^{٢} + \left[\text{د}'(\text{ى}_{\text{ك}})(\text{س}_{\text{ك}} - \text{س}_{\text{ك}-١})\right]^{٢}}$$

$$= \sqrt{١ + [\text{د}'(\text{ى}_{\text{ك}})]^{٢}}\ (\text{س}_{\text{ك}} - \text{س}_{\text{ك}-١})$$

$\therefore$ ل (طول المنحنى من أ إلى ب)

$$\text{نها}_{\Delta \text{س}_{\text{ك}} \to ٠} \sum_{\text{ك}=١}^{\text{ن}} \sqrt{١ + [\text{د}'(\text{ى}_{\text{ك}})]^{٢}}\ \Delta \text{س}_{\text{ك}}$$

$$\therefore \boxed{\text{ل} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \sqrt{١ + \left[\text{د}'(\text{س})\right]^{٢}}\ \text{ء}\text{س}}$$

مثال ١

أوجد طول منحنى الدالة : $\text{د}(\text{س}) = ٢\text{س} + ٣$ حيث $١ \leqslant \text{س} \leqslant ٥$.

الحل

$$\text{د}(\text{س}) = ٢\text{س} + ٣$$

$$\text{د}'(\text{س}) = ٢$$

$$\therefore \text{ل} = \int_{١}^{٥} \sqrt{١ + \left[\text{د}'(\text{س})\right]^{٢}}\ \text{ء}\text{س}$$

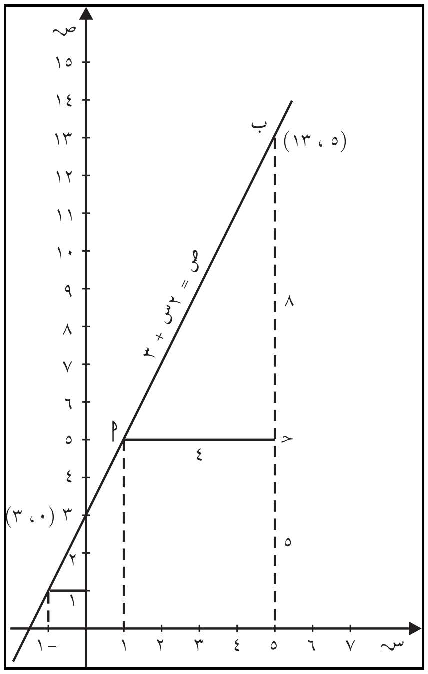
$$= \int_{١}^{٥} \sqrt{١ + ٤}\ \text{ء}\text{س} = \int_{١}^{٥} \sqrt{٥}\ \text{ء}\text{س}$$

$$= \sqrt{٥}\,[\text{س}]_{١}^{٥} = \sqrt{٥}\,(٥ - ١) = ٤\sqrt{٥} \text{ وحدة طول}$$

Book Mark
Exit
Index

ملاحظة :

يمكن إيجاد الطول دون استخدام التكامل في هذه الحالة في الشكل :



$\text{أ}(١ ، ٥) \quad ، \quad \text{ب}(٥ ، ١٣)$

$\text{أحـ} = ٤$ وحدة طول

$\therefore \text{حـب} = ١٣ - ٥$

$= ٨$ وحدة طول

$(\text{أب})^{٢} = (\text{أحـ})^{٢} + (\text{ب حـ})^{٢}$

$= ١٦ + ٦٤$

$= ٨٠$

$\therefore \text{أب} = \sqrt{٨٠} = ٤\sqrt{٥}$ وحدة طول

أو $\text{أب} = \sqrt{(٥ - ١)^{٢} + (١٣ - ٥)^{٢}}$

$= \sqrt{٨٠} = ٤\sqrt{٥}$ وحدة طول

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها .

مثال ٢

أوجد طول منحنى الدالة : $\text{د(س)} = \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}}$ بين س = ١ ، س = ٤

الحل

$\text{د(س)} = \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}}$

$\text{د}'\text{(س)} = \frac{٢}{٣} \times \frac{٣}{٢}\text{س}^{\frac{١}{٢}} = \text{س}^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore \text{ل} = \int_{١}^{٤} \sqrt{١ + \left[\text{د}'\text{(س)}\right]^{٢}}\ \text{ءس}$

$= \int_{١}^{٤} \sqrt{١ + \text{س}}\ \text{ءس}$

$= \left[\frac{(١ + \text{س})^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}\right]_{١}^{٤} = \frac{٢}{٣}\left[٥\sqrt{٥} - ٢\sqrt{٢}\right]$

مثال ٣

أوجد طول منحنى الدالة : $\text{د}(\text{س}) = \text{لط س} - \frac{١}{٨}\text{س}^{٢}$

من س = ١ إلى س = ٢

الحل

$$\text{د}(\text{س}) = \text{لط س} - \frac{١}{٨}\text{س}^{٢}$$

$$\text{د}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}} - \frac{\text{س}}{٤}$$

$$\therefore \text{ل} = \int_{١}^{٢} \sqrt{١ + \left(\frac{١}{\text{س}} - \frac{\text{س}}{٤}\right)^{٢}}\ \text{ء س}$$

$$= \int_{١}^{٢} \sqrt{١ + \frac{١}{\text{س}^{٢}} - \frac{١}{٢} + \frac{\text{س}^{٢}}{١٦}}\ \text{ء س}$$

$$= \int_{١}^{٢} \sqrt{\frac{١}{\text{س}^{٢}} + \frac{١}{٢} + \frac{\text{س}^{٢}}{١٦}}\ \text{ء س}$$

$$= \int_{١}^{٢} \sqrt{\left(\frac{١}{\text{س}} + \frac{\text{س}}{٤}\right)^{٢}}\ \text{ء س}$$

$$= \int_{١}^{٢} \left(\frac{١}{\text{س}} + \frac{\text{س}}{٤}\right) \text{ء س}$$

$$= \left[\text{لط س} + \frac{\text{س}^{٢}}{٨}\right]_{١}^{٢} = \text{لط } ٢ + \frac{٣}{٨}$$

Book Mark
Exit
Index

إثبات صحة بعض خواص الرمز $\sum$

١ $\sum\limits_{ك=١}^{ن} ك = ١ + ٢ + ٣ + \ldots + ن$

= مجموع متتالية حسابية حدّها الأول ١ وحدّها الأخير ن وعدد حدودها ن

$$= \frac{ن}{٢}\left(١ + ن\right)$$

$$\therefore \sum\limits_{ك=١}^{ن} ك = \frac{ن(ن + ١)}{٢}$$

٢ $\sum\limits_{ك=١}^{ن} ك^{٢} = ١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + \ldots + ن^{٢}$

$$\overset{?}{=} \frac{ن(ن + ١)(٢ن + ١)}{٦}$$

عند ن = ١ : الطرف الأيمن $= \sum\limits_{ك=١}^{١} ك^{٢} = ١^{٢} = ١$

والطرف الأيسر $= \frac{١ \times (١ + ١)(٢ + ١)}{٦} = ١$

$\therefore$ القانون صحيح عندما ن = ١

عند ن = ٢ : الطرف الأيمن $= \sum\limits_{ك=١}^{٢} ك^{٢} = ١^{٢} + ٢^{٢} = ٥$

والطرف الأيسر $= \frac{٢ \times (٢ + ١)(٤ + ١)}{٦} = ٥$

$\therefore$ القانون صحيح عندما ن = ٢

نفرض صحة القانون عندما ن = س ، أي أن:

$$\sum\limits_{ك=١}^{س} ك^{٢} = ١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + \ldots + س^{٢} = \frac{س(س + ١)(٢س + ١)}{٦}$$

ولنسعى لإثبات صحة القانون عندما ن = س + ١

عند $\text{ن} = \text{ر} + ١$:

الطرف الأيمن $= \sum_{١}^{\text{ن}} (\text{ر} + ١)^{٢}$

$$= (١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + \dots + \text{ر}^{٢}) + (\text{ر} + ١)^{٢}$$

$$= \frac{\text{ر}(\text{ر} + ١)(٢\text{ر} + ١)}{٦} + (\text{ر} + ١)^{٢}$$

$$= \frac{(\text{ر} + ١)}{٦}\left[\text{ر}(٢\text{ر} + ١) + ٦(\text{ر} + ١)\right]$$

$$= \frac{(\text{ر} + ١)}{٦}(٢\text{ر}^{٢} + ٧\text{ر} + ٦)$$

$$= \frac{(\text{ر} + ١)(\text{ر} + ٢)(٢\text{ر} + ٣)}{٦}$$

والطرف الأيسر $= \dfrac{(\text{ر} + ١)(\text{ر} + ٢)[٢(\text{ر} + ١) + ١]}{٦}$

$$= \frac{(\text{ر} + ١)(\text{ر} + ٢)(٢\text{ر} + ٣)}{٦}$$

$\therefore$ القانون صحيح عندما $\text{ن} = \text{ر} + ١$ إذا كان صحيحًا عندما $\text{ن} = \text{ر}$ ولكن القانون صحيح عندما $\text{ن} = ٢$ $\therefore$ فهو صحيح عندما $\text{ن} = ٣$ وحيث إن القانون صحيح عندما $\text{ن} = ٣$ $\therefore$ فهو صحيح عندما $\text{ن} = ٤$ وهكذا.

$\therefore$ القانون صحيح لجميع قيم $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$

٣ $\sum_{١}^{\text{ن}} \text{ك}^{٣} = ١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + \dots + \text{ن}^{٣} \overset{?}{=} \left[\dfrac{\text{ن}(\text{ن} + ١)}{٢}\right]^{٢}$

عند $\text{ن} = ١$: الطرف الأيمن $= ١^{٣} = ١$

والطرف الأيسر $= \left(\dfrac{١ \times ٢}{٢}\right)^{٢} = ١$

عند $\text{ن} = ٢$: الطرف الأيمن $= ١^{٣} + ٢^{٣} = ٩$

والطرف الأيسر $= \left(\dfrac{٢ \times ٣}{٢}\right)^{٢} = ٩$

∴ القانون صحيح عندما ن = ١ ، ن = ٢

نفرض صحة القانون عندما ن = ر ، أي أن

$$١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + \dots + ر^{٣} = \left[\frac{ر(ر + ١)}{٢}\right]^{٢}$$

∴ عندما ن = ر + ١

الطرف الأيمن $= ١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + \dots + ر^{٣} + (ر + ١)^{٣}$

$$= \left[\frac{ر(ر + ١)}{٢}\right]^{٢} + (ر + ١)^{٣}$$

$$= \left(\frac{ر + ١}{٢}\right)^{٢}\left[ر^{٢} + ٤ر + ٤\right] = \left[\frac{(ر + ١)(ر + ٢)}{٢}\right]^{٢}$$

= الطرف الأيسر عندما ن = ر + ١

∴ القانون صحيح عندما ن = ر + ١ إذا كان صحيحًا عندما ن = ر ولكنه صحيح عندما ن = ٢ ∴ فهو صحيح عندما ن = ٣ ،

∵ القانون صحيح عندما ن = ٣ فهو صحيح عندما ن = ٤ وهكذا.

∴ القانون صحيح لكل ن ∈ $ص^{+}$

– الوسائط التعليمية

يمكن الاستعانة بالوسائط التعليمية التالية:

- طباشير ملون أو أقلام ملونة.
- سبورة بيانية.
- جهاز العرض العلوي والشفافيات.
- منحنيات لبعض الدوال الشهيرة على الشفافيات.
- شفافيات توضح المساحة تحت منحنى معلوم.

Book Mark
Exit
Index

- شفافيات توضح المساحة بين منحنيين.
- شفافيات توضح الأجسام الدورانية.
- برمجيات الرياضيات.

تدريس الموضوع

عرض موضوع التكامل وتطبيقاته في الفصل الأول من الجزء الثاني لكتاب الطالب، ويقترح تخصيص ٢٥ حصة لتدريسه توزع على بنوده على النحو التالي:

رقم البند	عنوان البند	عدد الحصص
١ - ١	الدالة المقابلة - التكامل غير المحدد	٥
١ - ٢	التكامل المحدد	٥
١ - ٣	خواص التكامل المحدد	٥
١ - ٤	المساحة	٤
١ - ٥	حجوم الأجسام الدورانية	٣
١ - ٦	تطبيقات أخرى على التكامل	٢
١ - ٧	ملخص وتمارين عامة	١
	المجموع	٢٥

ويقترح مراعاة ما يلي عند تدريس الموضوع:

- تتضمن استراتيجية مناهج الرياضيات الموحدة التخفيف من الحسبان (التفاضل والتكامل) ولذلك اقتصرت الدراسة فيه على الدوال الجبرية فقط..
- الوقت المخصص لتدريس الموضوع قد يفوق إلى حد ما الوقت اللازم لتدريسه، وذلك لغرض تبسيط العرض، واستيعاب المحتوى، وزيادة التدريب على حل المسائل والتطبيقات...
- خصص حصة في نهاية تدريسك لكل بند من البنود الستة لإعطاء ملخص لمحتوى البند وحل مسائل منوعة وذلك قبل البدء في تدريس البند التالي.

- تناول التكامل غير المحدد بند (١-١) باعتباره عملية عكسية للتفاضل ويتطلب ذلك تخصيص حصة في بداية تدريس موضوع «التكامل وتطبيقاته» لمراجعة ما سبق دراسته في موضوع «الاشتقاق وتطبيقاته» بالجزء الأول من الكتاب..

- أكد على أن قاعدة القوى في التكامل صحيحة فقط عندما تكون $\text{ن} \neq -1$

$$\int \text{س}^{\text{ن}}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث} \;:\; \text{ن} \neq -1$$

ولا تتعرض للحالة التي تكون فيها $\text{ن} = -1$ فهي خارجة عن إطار محتوى الموضوع، لأننا اقتصرنا في دراستنا على الدالة الجبرية.

وأنت تعلم أن:

$$\int \text{س}^{-1}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{ءس}}{\text{س}} = \text{لط س} + \text{ث}$$

- برهن صحة خواص التكامل غير المحدد مع تلاميذك:

$$\int \text{أ}\,\text{د(س)}\,\text{ءس} = \text{أ} \int \text{د(س)}\,\text{ءس} \qquad \text{حيث أ} \neq 0$$

$$\int [\text{د(س)} + \text{هـ(س)}]\,\text{ءس} = \int \text{د(س)}\,\text{ءس} + \int \text{هـ(س)}\,\text{ءس}$$

$$\int [\text{د(س)} - \text{هـ(س)}]\,\text{ءس} = \int \text{د(س)}\,\text{ءس} - \int \text{هـ(س)}\,\text{ءس}$$

فالبراهين سهلة وتعتمد بالدرجة الأولى على مفهوم الدالة المقابلة.

- أكد أنه عندما يكون المكامل دالة نسبية فإنه يلزم إجراء عملية قسمة للبسط على المقام إذا كانت درجة البسط أكبر من أو يساوي درجة المقام ثم إجراء التكامل لناتج القسمة الذي يكون في الصورة:

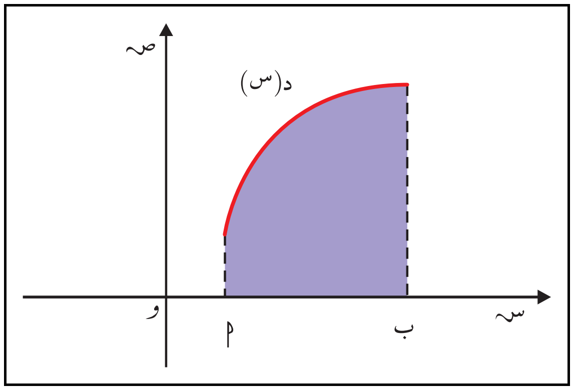
$$\frac{\text{د(س)}}{\text{هـ(س)}} = \text{و(س)} + \frac{\text{ر(س)}}{\text{هـ(س)}}$$

حيث درجة الدالة ر(س) أصغر من درجة الدالة هـ(س) وأنه توجد دالة مقابلة للدالة $\frac{\text{ر(س)}}{\text{هـ(س)}}$ في حدود مستوى الطالب.

- أعط تدريبات كافية على إيجاد التكامل المحدد قبل البدء في تناول التطبيقات الخاصة بالمساحة وحجوم الأجسام الدورانية.

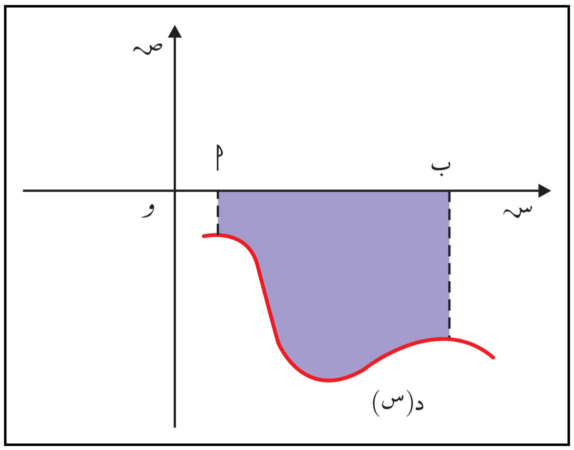
Book Mark
Exit
Index

- ليكن واضحًا لدى تلاميذك أن المساحة في شكل (١) هي $\int_{م}^{ب}$ د(س) ءس.



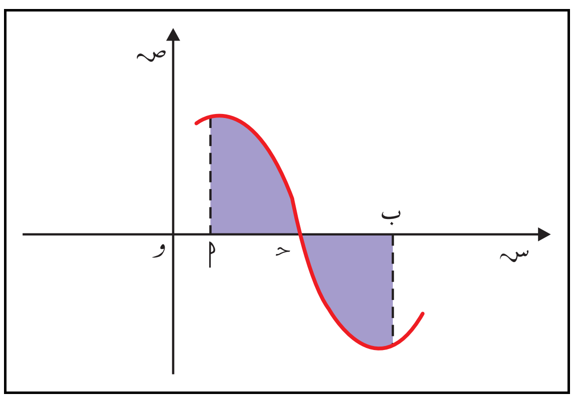
شكل ١

ولكن المساحة في شكل (٢) هي : $-\int_{م}^{ب}$ د(س) ءس



شكل ٢

والمساحة في شكل (٣) هي : $\int_{م}^{حـ}$ د(س)ءس $-\int_{حـ}^{ب}$ د(س) ءس



شكل ٣

- عوِّد تلاميذك على ضرورة عمل تخطيط للمسألة التي تتناول المساحة أو حجم الجسم الدوراني قبل البدء في الحل، كذلك يلزم تدريبهم على تعيين نقط تقاطع منحنيين فهذا أمر ضروري لتعيين حدود التكامل.

- أكد على أنه لإيجاد المساحة بين المنحنيين د(س) ، هـ(س) والمستقيم س = أ ، س = ب يلزم مقارنة قيم د(س) وقيم هـ(س) في الفترة [أ ، ب] لمعرفة أيهما أكبر من الأخرى. . وإذا كانت د(س) $\geqslant$ هـ(س) تكون:

$$\text{المساحة} = \int_{أ}^{ب} \left(د(س) - هـ(س)\right) ءس$$

أما إذا كانت هـ(س) $\geqslant$ د(س) في الفترة [أ ، ب] فإن:

$$\text{المساحة} = \int_{أ}^{ب} \left(هـ(س) - د(س)\right) ءس$$

- يكتفي فقط بدراسة حجوم الأجسام الدورانية الناتجة عن دوران مساحة معلومة حول محور السينات، ولا داعي للتعرض إلى حالة الدوران حول محور الصادات. .

- يرجى إعطاء دراسة الموضوع الوقت الكافي للاستيعاب والتدريب على المهارات المتضمنة في الموضوع فالوقت المقترح تخصيصه لتدريسه كاف وينبغي أن يستغل لهذا الغرض. . . . ويمكن للمعلم إن شاء أن يضيف تدريبات أخرى غير الواردة في الكتاب إذا لزم الأمر ووجد الوقت الكافي لذلك.

- عرض موضوع التكامل بالتعويض بشكل مبسط من خلال تعميم قاعدة القوى:

$$\int [د(ع)]^{ن}\, د'(ع)\, ءع = \frac{[د(ع)]^{ن+١}}{ن + ١} + ث \quad ، \quad \text{حيث } ن \neq -١$$

$$\text{فمثلًا، } \int (س^{٢} - ٤)^{٣} (٢س)\, ءس = \frac{(س^{٢} - ٤)^{٤}}{٤} + ث$$

حيث $ع(س) = س^{٢} - ٤ \quad ، \quad ع'(س) = ٢س$

وبالتعويض:

نفرض أن $ع = (س^{٢} - ٤)$

$\therefore \quad ءع = ٢س\, ءس$

$$\therefore \quad \text{التكامل} = \int ع^{٣} ءع = \frac{ع^{٤}}{٤} + ث$$

$$= \frac{(س^{٢} - ٤)^{٤}}{٤} + ث$$

- أعط تدريبات كافية على إيجاد قيمة التكامل المحدد: بالنظرية الأساسية للتفاضل والتكامل قبل البدء في إيجاده مستخدمًا الخواص بند (١-٣).

١ $د(س) = ٢س - ٣$ ، $ق(س) + ث = س^{٢} - ٣س + ث$

٢ $د(س) = س^{٢} + \sqrt{٢}$ ، $ق(س) + ث = \frac{١}{٣} س^{٣} + \sqrt{٢}\, س + ث$

٣ $د(س) = س^{\frac{٢}{٣}}$ ، $ق(س) + ث = \frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} + ث$

٤ $د(س) = س^{-\frac{٤}{٣}}$ ، $ق(س) + ث = -٣ س^{-\frac{١}{٣}} + ث$

٥ $د(س) = \left(س - \frac{١}{س}\right)^{٢} = س^{٢} - ٢ + \frac{١}{س^{٢}} = س^{٢} - ٢ + س^{-٢}$

$ق(س) + ث = \frac{١}{٣} س^{٣} - ٢س - \frac{١}{س} + ث$

٦ $د(س) = ٦س^{٢} - ٦س + ١$

$ق(س) + ث = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} + س + ث$

٧ $د(س) = \frac{١}{س^{٣}} + \frac{٦}{س^{٧}} = س^{-٣} + ٦س^{-٧}$

$ق(س) + ث = \frac{س^{-٢}}{-٢} + ٦ \times \frac{س^{-٦}}{-٦} + ث$

$= -\frac{١}{٢س^{٢}} - \frac{١}{س^{٦}} + ث$

٨ $د(س) = \frac{٢س^{٣} - ٣س^{٢} + ١}{س^{٢}} = ٢س - ٣ + \frac{١}{س^{٢}}$

$ق(س) + ث = س^{٢} - ٣س - \frac{١}{س} + ث$

٩ د(س) = (٢س + ١)(٣س + ٢)

= ٦س^{٢} + ٧س + ٢

و(س) + ث = ٢س^{٣} + $\frac{٧}{٢}$س^{٢} + ٢س + ث

١٠ د(س) = ٢٠س^{٧} − ٧س^{٤} + ٦

و(س) + ث = $\frac{٥}{٢}$س^{٨} − $\frac{٧}{٥}$س^{٥} + ٦س + ث

١١ ∫ (س^{٣} + $\sqrt{\text{س}}$) ى س = ∫ س^{٣} ى س + ∫ $\sqrt{\text{س}}$ ى س

= ∫ س^{٣} ى س + ∫ س$^{\frac{١}{٢}}$ ى س

= $\frac{١}{٤}$س^{٤} + $\frac{٢}{٣}$س$^{\frac{٣}{٢}}$ + ث

١٢ ∫ (س^{٢} + ١)^{٢} ى س = ∫ (س^{٤} + ٢س^{٢} + ١) ى س

= ∫ س^{٤} ى س + ∫ ٢س^{٢} ى س + ∫ ى س

= ∫ س^{٤} ى س + ٢∫ س^{٢} ى س + ∫ ى س

= $\frac{١}{٥}$س^{٥} + $\frac{٢}{٣}$س^{٣} + س + ث

١٣ ∫ س^{٢}(س^{٢} − ٣) ى س = ∫ (س^{٤} − ٣س^{٢}) ى س

= ∫ س^{٤} ى س − ٣∫ س^{٢} ى س

= $\frac{١}{٥}$س^{٥} − س^{٣} + ث

١٤ ∫ $\frac{\text{هـ}^{٤} - ٢\text{هـ}^{٣} + ١}{\text{هـ}^{٢}}$ ى هـ = ∫ (هـ^{٢} − ٢هـ + $\frac{١}{\text{هـ}^{٢}}$) ى هـ

= ∫ هـ^{٢} ى هـ − ٢∫ هـ ى هـ + ∫ هـ$^{-٢}$ ى هـ

= $\frac{١}{٣}$هـ^{٣} − هـ^{٢} − هـ$^{-١}$ + ث

١٥ $\int \frac{س^{٣} - ٣س^{٢} + ١}{\sqrt{س}} \, ءس = \int \left(س^{\frac{٥}{٢}} - ٣س^{\frac{٣}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}}\right) ءس$

$= \frac{٢}{٧} س^{\frac{٧}{٢}} - \frac{٦}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + ٢س^{\frac{١}{٢}} + ث$

١٦ $\int (٣ن^{٢} - ٢ن)^{٢} \, ءن = \int (٩ن^{٤} - ١٢ن^{٣} + ٤ن^{٢}) \, ءن$

$= \frac{٩}{٥} ن^{٥} - ٣ن^{٤} + \frac{٤}{٣} ن^{٣} + ث$

١٧ $\int (٣س + ١)^{٣} \times ٣ءس = ٣\int (٢٧س^{٣} + ٢٧س^{٢} + ٩س + ١) \, ءس$

$= ٣\left[\frac{٢٧}{٤} س^{٤} + \frac{٢٧}{٣} س^{٣} + \frac{٩}{٢} س^{٢} + س\right] + ث$

$= \frac{٨١}{٤} س^{٤} + ٢٧س^{٣} + \frac{٢٧}{٢} س^{٣} + ٣س + ث$

$= \frac{١}{٤}(٨١س^{٤} + ١٠٨س^{٣} + ٥٤س^{٢} + ١٢س) + ث$

حل آخر:

$\int (٣س + ١)^{٣} \times ٣ءس$ بفرض $د(س) = ٣س + ١$ فإن $د'(س) = ٣$

$\therefore \int (٣س + ١)^{٣} \times ٣ءس = \frac{(٣س + ١)^{٤}}{٤} + ث$

١٨ $\int (س^{٢} - ٤)^{٣} \times ٢س \, ءس$

$= \int (س^{٦} - ٣س^{٤} \times ٤ + ٣س^{٢} \times ١٦ - ٦٤) \times ٢س \, ءس$

$= \int (٢س^{٧} - ٢٤س^{٥} + ٩٦س^{٣} - ١٢٨س) \, ءس$

$= \frac{٢}{٨} س^{٨} - \frac{٢٤}{٦} س^{٦} + \frac{٩٦}{٤} س^{٤} - \frac{١٢٨}{٢} س^{٢} + ث$

$= \frac{١}{٤} س^{٨} - ٤س^{٦} + ٢٤س^{٤} - ٦٤س^{٢} + ث$

$= \frac{١}{٤}(س^{٨} - ١٦س^{٦} + ٩٦س^{٤} - ٢٥٦س^{٢}) + ث = \frac{(س^{٢} - ٤)^{٤}}{٤} + ث$

حل آخر :

$$\int (س^{٢} - ٤)^{٣} \times ٢س \, ءس = \frac{(س^{٢} - ٤)^{٤}}{٤} + ث$$

١٩

$$\int \frac{٨س - ٥}{\sqrt[٣]{س}} \, ءس = \int \left(٨س^{\frac{٢}{٣}} - ٥س^{-\frac{١}{٣}}\right) ءس$$

$$= ٨ \times \frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} - ٥ \times \frac{٣}{٢} س^{\frac{٢}{٣}} + ث$$

$$= \frac{٢٤}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} - \frac{١٥}{٢} س^{\frac{٢}{٣}} + ث$$

٢٠

$$\int (ص^{-٣} - ص^{-٢}) \, ءص = -\frac{١}{٢} ص^{-٢} + ص^{-١} + ث$$

٢١

$$\int \frac{١}{\sqrt{س}\sqrt{١ + \sqrt{س}}} \, ءس = \int \frac{١}{\sqrt{س}} \left(١ + \sqrt{س}\right)^{-\frac{١}{٢}} ءس$$

$$= ٢ \int \frac{١}{٢\sqrt{س}} \left(١ + \sqrt{س}\right)^{-\frac{١}{٢}} ءس$$

$$= ٢ \times ٢ \left(١ + \sqrt{س}\right)^{\frac{١}{٢}} + ث$$

$$= ٤\sqrt{١ + \sqrt{س}} + ث$$

٢٢

$$\int \frac{س^{٢} + ١}{\sqrt{س^{٣} + ٣س}} \, ءس = \int (س^{٢} + ١)(س^{٣} + ٣س)^{-\frac{١}{٢}} ءس$$

$$= \frac{١}{٣} \int (٣س^{٢} + ٣)(س^{٣} + ٣س)^{-\frac{١}{٢}} ءس$$

$$= \frac{١}{٣} \times ٢(س^{٣} + ٣س)^{\frac{١}{٢}} + ث$$

$$= \frac{٢}{٣} \sqrt{س^{٣} + ٣س} + ث$$

٢٣ $\int \frac{(\text{٥س} - ١)^{٣}}{\text{س}^{٥}}\,\text{ءس} = \int \frac{(\text{٥س} - ١)^{٣}}{\text{س}^{٣} \times \text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

$= \int \left(\frac{\text{٥س} - ١}{\text{س}}\right)^{٣} \times \frac{١}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

$= \int \left(٥ - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٣} \times \frac{١}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٤}\left(٥ - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٤} + \text{ث}$

٢٤ $\int \text{٢س}^{٣}(\text{س}^{٢} + ١)^{٧}\,\text{ءس} = \int \text{٢س} \times \text{س}^{٢}(\text{س}^{٢} + ١)^{٧}\,\text{ءس}$

$= \int \text{٢س} \times [(\text{س}^{٢} + ١) - ١](\text{س}^{٢} + ١)^{٧}\,\text{ءس}$

$= \int \text{٢س}\,(\text{س}^{٢} + ١)^{٨}\,\text{ءس} - \int \text{٢س}\,(\text{س}^{٢} + ١)^{٧}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٩}(\text{س}^{٢} + ١)^{٩} - \frac{١}{٨}(\text{س}^{٢} + ١)^{٨} + \text{ث}$

٢٥ $\text{د}'(\text{س}) = \text{٢س}\,(\text{٣س} - ١) = \text{٦س}^{٢} - \text{٢س}$

$\text{د}(\text{س}) = \int \text{د}'(\text{س})\,\text{ءس} = \int (\text{٦س}^{٢} - \text{٢س})\,\text{ءس}$

$= \text{٢س}^{٣} - \text{س}^{٢} + \text{ث}$

ولكن $\text{د}(١) = ٣$ $\quad \therefore ٣ = ٢ - ١ + \text{ث} \Leftarrow \text{ث} = ٢$

$\text{د}(\text{س}) = \text{٢س}^{٣} - \text{س}^{٢} + ٢$

٢٦ $\text{د}'(\text{س}) = \text{٦س}^{٢} - \text{٣٠س} + ٣٦$

نضع $\text{د}'(\text{س}) = ٠$ $\quad \therefore ٦(\text{س}^{٢} - \text{٥س} + ٦) = ٠$

٦(س − ٢)(س − ٣) = ٠

∴ س = ٢ أو س = ٣

س	−∞		٢		٣		∞
إشارة د′(س)		+ + +	صفر	− − −	صفر	+ + +	
د(س)		↗		↘		↗	

∴ للدالة **د** قيمة عظمى محلية عند س = ٢ وقيمة صغرى محلية عند س = ٣

، ∵ القيمة العظمى المحلية = ٢٨

∴ د(٢) = ٢٨

د(س) = $\int$ د′(س) ءس = $\int$ (٦س^٢ − ٣٠س + ٣٦) ءس

= ٢س^٣ − ١٥س^٢ + ٣٦س + ث

ولكن د(٢) = ٢٨ ∴ ٢٨ = ١٦ − ٦٠ + ٧٢ + ث ⇐ ث = ٠

∴ د(س) = ٢س^٣ − ١٥س^٢ + ٣٦س

القيمة الصغرى المحلية = د(٣) = ٢ × ٢٧ − ١٥ × ٩ + ٣٦ × ٣

= ٢٧

٢٧ بفرض أن الدالة د

∴ د′(س) = س $\sqrt{أ}$

د(س) = $\int$ د′(س) ءس = $\frac{\sqrt{أ}}{٢}$ س^٢ + ث

ولكن (٠ ، ٠) ∈ د ⇐ ث = ٠

∴ د(س) = $\frac{\sqrt{أ}}{٢}$ س^٢

وكذلك د(١) = ٣ ∴ ٣ = $\frac{\sqrt{أ}}{٢}$ ∴ $\sqrt{أ}$ = ٦

∴ أ = ٣٦ ويكون د(س) = ٣س^٢

٢٨ بفرض أن الدالة د

∴ د$'$(س) = ل س^{٢} − ١٢س + ٩

د$''$(س) = ٢ل س − ١٢

ولكن (٢ ، −٣) نقطة انعطاف لبيان الدالة د

∴ د$''$(٢) = ٠

∴ د$''$(٢) = ٤ل − ١٢ = ٠ ⇐ ل = ٣

د$'$(س) = ٣س^{٢} − ١٢س + ٩

نضع د$'$(س) = ٠ ∴ ٣(س^{٢} − ٤س + ٣) = ٠

∴ ٣(س − ١)(س − ٣) = ٠

∴ س = ١ أو س = ٣

س	−∞		١		٣		∞
إشارة د$'$(س)		+ + +	صفر	− − −	صفر	+ + +	
د(س)		↗		↘		↗	

للدالة د قيمة عظمى محلية عند س = ١ وقيمة صغرى محلية عند س = ٣

د(س) = $\int$ د$'$(س) ءس = $\int$ (٣س^{٢} − ١٢س + ٩) ءس

= س^{٣} − ٦س^{٢} + ٩س + ث

ولكن (٢ ، −٣) نقطة الانعطاف هي إحدى نقاط بيان الدالة د

∴ د(٢) = −٣ ∴ −٣ = ٨ − ٢٤ + ١٨ + ث

∴ ث = −٥

∴ د(س) = س^{٣} − ٦س^{٢} + ٩س − ٥

د(١) = ١ − ٦ + ٩ − ٥ = −١ (القيمة العظمى المحلية)

د(٣) = ٢٧ − ٥٤ + ٢٧ − ٥ = −٥ (القيمة الصغرى المحلية)

تمارين

١ − ٢

١ د(س) = ٤س − ٢ دالة متصلة على [١ ، ٣]

ں(س) = ٢س^{٢} − ٢س دالة مقابلة للدالة د.

$$\therefore \int_{١}^{٣} (٤س - ٢)\, ءس = [٢س^{٢} - ٢س]_{١}^{٣} = (١٨ - ٦) - (٢ - ٢) = ١٢$$

٢ د(س) = س دالة متصلة على [أ ، ب]

ں(س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} دالة مقابلة للدالة د

$$\int_{أ}^{ب} س\, ءس = \left[\frac{١}{٢} س^{٢}\right]_{أ}^{ب} = \frac{١}{٢}(ب^{٢} - أ^{٢})$$

٣ د(س) = س^{٣} دالة متصلة على [١ ، ٤]

ں(س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٤} دالة مقابلة للدالة د

$$\int_{١}^{٤} س^{٣}\, ءس = \left[\frac{١}{٤} س^{٤}\right]_{١}^{٤} = \frac{١}{٤}[٢٥٦ - ١] = \frac{٢٥٥}{٤}$$

٤ د(س) = س^{٢} − ٦س − ١ دالة متصلة على [−١ ، ٢]

ں(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − ٣س^{٢} − س دالة مقابلة للدالة د

$$\therefore \int_{-١}^{٢} (س^{٢} - ٦س - ١)\, ءس = \left[\frac{١}{٣} س^{٣} - ٣س^{٢} - س\right]_{-١}^{٢}$$

$$= \left(\frac{-٣٤}{٣}\right) - \left(\frac{-٧}{٣}\right) = \frac{-٢٧}{٣} = -٩$$

٥ د(س) = $\frac{١}{٢}$ س دالة متصلة على [١ ، ٧]

ں(س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٢} دالة مقابلة للدالة د

$$\int_{١}^{٧} \frac{١}{٢} س\, ءس = \left[\frac{١}{٤} س^{٢}\right]_{١}^{٧} = \frac{١}{٤}[٤٩ - ١] = \frac{١}{٤} \times ٤٨ = ١٢$$

وبالمثل يكون الحل في التمارين التالية:

٦ $\int_{-1}^{2} (2\text{س} + 3)\,\text{ءس} = \left[\text{س}^2 + 3\text{س}\right]_{-1}^{2} = \cdots = 12$

٧ $\int_{0}^{3} (\text{س}^2 + 1)\,\text{ءس} = \left[\frac{1}{3}\text{س}^3 + \text{س}\right]_{0}^{3} = \cdots = 12$

٨ $\int_{0}^{4} (\frac{1}{3}\text{س}^2 + 3)\,\text{ءس} = \left[\frac{1}{9}\text{س}^3 + 3\text{س}\right]_{0}^{4} = \cdots = 19\frac{1}{9}$

٩ $\int_{0}^{1} (\text{س}^3 + \text{س})\,\text{ءس} = \left[\frac{1}{4}\text{س}^4 + \frac{1}{2}\text{س}^2\right]_{0}^{1} = \cdots = \frac{3}{4}$

١٠ $\int_{0}^{2} (4 - \text{س}^4)\,\text{ءس} = \left[4\text{س} - \frac{1}{5}\text{س}^5\right]_{0}^{2} = \cdots = 1\frac{3}{5}$

١١ $\int_{0}^{3} \text{س}^2\,\text{ءس} = \left[\frac{1}{3}\text{س}^3\right]_{0}^{3} = \cdots = 9$

١٢ $\int_{-3}^{4} (3\text{س}^2 - 2\text{س} + 1)\,\text{ءس} = \left[\text{س}^3 - \text{س}^2 + \text{س}\right]_{-3}^{4} = \cdots = 91$

١٣ $\int_{1}^{4} (6\text{س}^5 - 5\text{س}^4 - 22)\,\text{ءس} = \left[\text{س}^6 - \text{س}^5 - 22\text{س}\right]_{1}^{4} = \cdots = 3006$

١٤ $\int_{0}^{1} \sqrt[3]{\text{س}^2}\,\text{ءس} = \frac{3}{5}\left[\sqrt[3]{\text{س}^5}\right]_{0}^{1} = \cdots = \frac{3}{5}$

١٥ $\int_{1}^{4} \frac{2}{5\text{س}^2}\,\text{ءس} = \left[\frac{-2}{5\text{س}}\right]_{1}^{4} = \cdots = \frac{3}{10}$

١٦ $\int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس} = 2\left[\sqrt{\text{س}}\right]_{1}^{3} = \cdots = 2(\sqrt{3} - 1)$

١٧ $\int_{-4}^{-2} \left(\text{س}^2 + \frac{1}{\text{س}^2}\right)\text{ءس} = \left[\frac{\text{س}^3}{3} - \frac{1}{\text{س}}\right]_{-4}^{-2} = \cdots = 18\frac{-11}{12}$

١٨ $\int_{1}^{4} \frac{8 - \text{س}^4}{2\text{س}^2}\,\text{ءس} = \int_{1}^{4} \left(\frac{4}{\text{س}^2} - \frac{1}{2}\text{س}^2\right)\text{ءس}$

$= \left[\frac{-4}{\text{س}} - \frac{1}{6}\text{س}^3\right]_{1}^{4} = \cdots = -7\frac{1}{2}$

١٩ $$\int_{1}^{4} \text{س}\sqrt{\text{س}}\ \text{ءس} = \frac{2}{5}\left[\text{س}^{\frac{5}{2}}\right]_{1}^{4} = \cdots = 12\frac{2}{5}$$

٢٠ $$\int_{1}^{2} \frac{\text{س}^{2}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{ءس} = \frac{2}{5}\left[\text{س}^{\frac{5}{2}}\right]_{1}^{2} = \cdots = \frac{2}{5}\left(4\sqrt{2} - 1\right)$$

٢١ $$\text{د(س)} = \frac{\text{س} - 1}{\sqrt{\text{س}} - 1} = \sqrt{\text{س}} + 1$$ دالة متصلة على [٢ ، ٤]

$$\text{ق(س)} = \frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} + \text{س}$$ دالة مقابلة للدالة د

$$\int_{2}^{4} \frac{\text{س} - 1}{\sqrt{\text{س}} - 1}\ \text{ءس} = \int_{2}^{4} \left(\sqrt{\text{س}} + 1\right) \text{ءس}$$

$$= \left[\frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} + \text{س}\right]_{2}^{4} = \cdots = \frac{2}{3}\left(11 - 2\sqrt{2}\right)$$

٢٢ $$\text{د(س)} = \frac{\text{س} - 1}{\sqrt[3]{\text{س}} - 1}$$

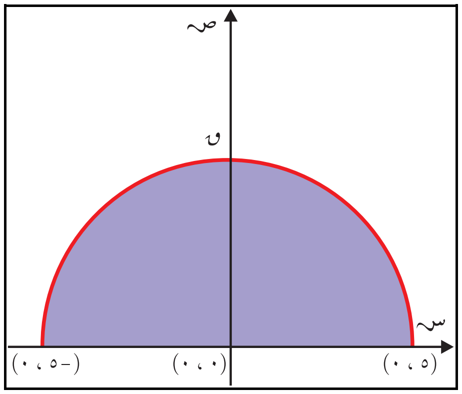
$$= \frac{\left(\text{س}^{\frac{1}{3}} - 1\right)\left(\text{س}^{\frac{2}{3}} + \text{س}^{\frac{1}{3}} + 1\right)}{\left(\text{س}^{\frac{1}{3}} - 1\right)}$$

$$= \left(\sqrt[3]{\text{س}}\right)^{2} + \sqrt[3]{\text{س}} + 1$$ دالة متصلة على [٢ ، ٣]

$$\text{ق(س)} = \frac{3}{5}\text{س}^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{4}\text{س}^{\frac{4}{3}} + \text{س}$$ دالة مقابلة للدالة د

$$\int_{2}^{3} \text{د(س)}\ \text{ءس} = \left[\frac{3}{5}\text{س}^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{4}\text{س}^{\frac{4}{3}} + \text{س}\right]_{2}^{3} = \cdots = 4{,}19$$ تقريبًا

٢٣ بيان الدالة: $ن(س) = \sqrt{٢٥ - س^{٢}}$ هو نصف دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٥ وحدات، نلاحظ أن $ن(س) \geqslant ٠ \quad \forall \; س \in [-٥ \,،\, ٥]$

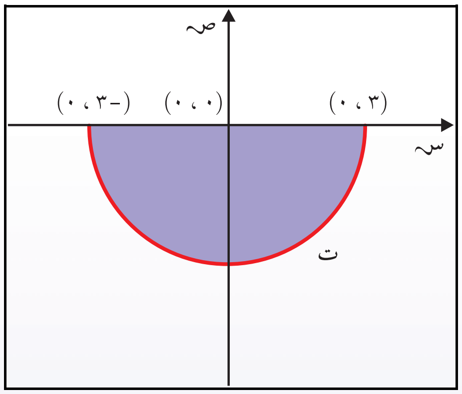


$$\therefore \int_{-٥}^{٥} \sqrt{٢٥ - س^{٢}} \; ءس = \text{مساحة المنطقة المظللة}$$

$$= \frac{١}{٤} \text{ مساحة المنطقة الدائرية التي طول نصف قطرها ٥ وحدات.}$$

$$= \frac{١}{٤} \times \pi \times ٢٥ = \frac{٢٥}{٤}\pi$$

٢٤ بيان الدالة: $ت(س) = -\sqrt{٩ - س^{٢}}$ هو نصف دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٣ وحدات طول. نلاحظ أن $ن(س) \leqslant ٠ \quad \forall \; س \in [-٣ \,،\, ٣]$

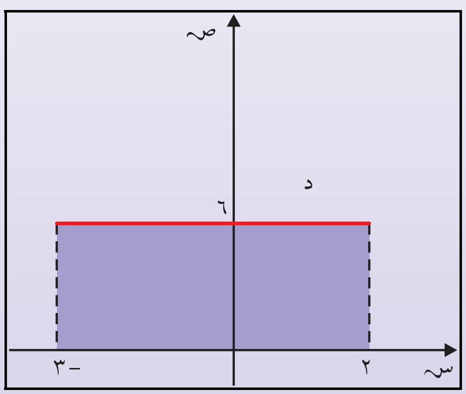


$$\therefore \int_{-٣}^{٣} -\sqrt{٩ - س^{٢}} \; ءس = - \text{قيمة مساحة نصف المنطقة الدائرية المظللة}$$

$$= -\frac{١}{٢}\pi \, نق^{٢} = -\frac{١}{٢}\pi \times ٩$$

$$= -\frac{٩}{٢}\pi$$

٢٥ الدالة: $د(س) = ٦$ بيانها الموضح بالشكل نلاحظ أن $د(س) \geqslant ٠ \quad \forall \; س \in [-٣ \,،\, ٢]$

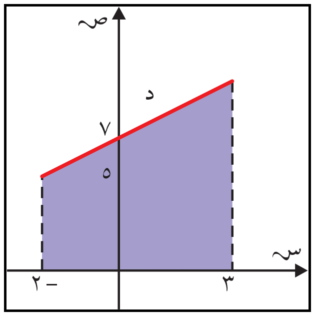


$$\text{المساحة المطلوبة} = \int_{-٣}^{٢} ٦ \; ءس = [٦س]_{-٣}^{٢}$$

$$= ٦(٢ - (-٣))$$

$$= ٣٠ \text{ وحدة مربعة}$$

٢٦ بيان الدالة : $\text{د}(\text{س}) = \text{س} + ٧$ الموضح بالشكل نلاحظ أن $\text{د}(\text{س}) \geqslant ٠ \;\; \forall \; \text{س} \in [-٢ \text{ ، } ٣]$



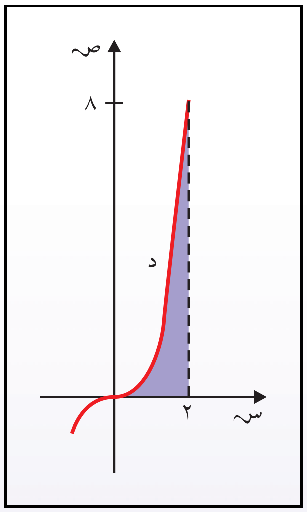
$$\text{المساحة المطلوبة} = \int_{-٢}^{٣} (\text{س} + ٧) \, \text{ءس}$$

$$= \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٧\text{س} \right]_{-٢}^{٣}$$

$$= \left(\frac{٩}{٢} + ٢١\right) - \left(\frac{٤}{٢} - ١٤\right)$$

$$= \frac{٩}{٢} + ٢١ + ١٢ = \frac{٧٥}{٢} \text{ وحدة مربعة}$$

٢٧ بيان الدالة : $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣}$ الموضح بالشكل .



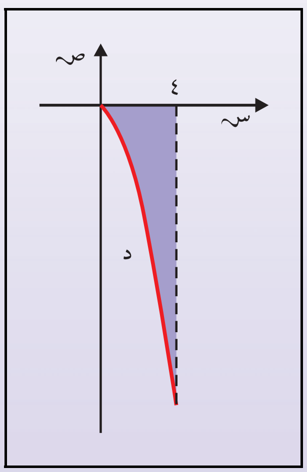
نلاحظ أن $\text{د}(\text{س}) \geqslant ٠ \;\; \forall \; \text{س} \in [٠ \text{ ، } ٢]$

$$\text{مساحة المنطقة المظللة} = \int_{٠}^{٢} \text{س}^{٣} \, \text{ءس}$$

$$= \left[\frac{١}{٤} \text{س}^{٤} \right]_{٠}^{٢}$$

$= ٤$ وحدة مساحة .

٢٨ بيان الدالة : $\text{د}(\text{س}) = -\text{س}^{٢}$ الموضح بالشكل .



نلاحظ أن $\text{د}(\text{س}) \leqslant ٠ \;\; \forall \; \text{س} \in [٠ \text{ ، } ٤]$

$$\text{مساحة المنطقة المظللة} = -\int_{٠}^{٤} (-\text{س}^{٢}) \, \text{ءس}$$

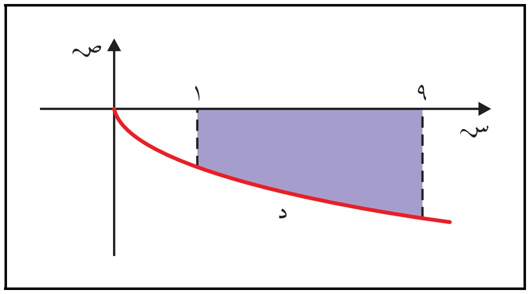
$$= \int_{٠}^{٤} \text{س}^{٢} \, \text{ءس}$$

$$= \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} \right]_{٠}^{٤} = \frac{٦٤}{٣} \text{ وحدة مساحة}$$

Book Mark
Exit
Index

٢٩ بيان الدالة : $د(س) = -\sqrt{س}$ الموضح بالشكل.

نلاحظ أن $د(س) \leqslant ٠ \;\forall\; س \in [١ ، ٩]$



مساحة المنطقة المظللة $= -\int_{١}^{٩} -\sqrt{س}\,ءس = \left[\frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}}\right]_{١}^{٩}$

$= \frac{٢}{٣}[٢٧ - ١] = \frac{٢}{٣} \times ٢٦ = \frac{٥٢}{٣}$ وحدة مساحة

٣٠ لاحظ أن $د(س) \geqslant ٠ \;\forall\; س \in [٠ ، ب]$

مساحة المنطقة المطلوبة $= \int_{٠}^{ب} س^{٢}\, ءس = \left[\frac{س^{٣}}{٣}\right]_{٠}^{ب}$

$= \frac{١}{٣}[ب^{٣} - ٠] = \frac{١}{٣} ب^{٣}$

٣١ $ں(س) = ١ + \sqrt{١ + س^{٤}}$

$\therefore ں'(س) = \frac{١}{٢}(١ + س^{٤})^{-\frac{١}{٢}} \times ٤س^{٣} = \frac{٢س^{٣}}{\sqrt{١ + س^{٤}}} = د(س)$

$\therefore$ ں دالة مقابلة للدالة د.

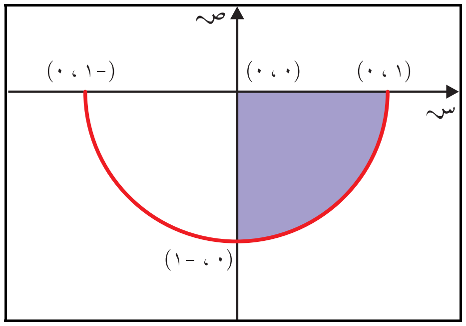
$\because د(س) \geqslant ٠$

$\therefore$ مساحة المنطقة المطلوبة $= \int_{٠}^{\frac{١}{٢}} د(س)\, ءس = \left[ں(س)\right]_{٠}^{\frac{١}{٢}}$

$= \left(١ + \sqrt{١ + \frac{١}{١٦}}\right) - \left(١ + \sqrt{١ + ٠}\right)$

$= \frac{١}{٤}\sqrt{١٧} - ١ \approx ٠{,}٠٣٠٨$ وحدة مربعة

٣٢ بيان الدالة : د(س) = $-\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}$ هو نصف الدائرة الموضح بالشكل .



المركز (٠ ، ٠) وطول نصف القطر = ١ وحدة .

$$\int_{٠}^{١} -\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}\ \text{ءس}$$

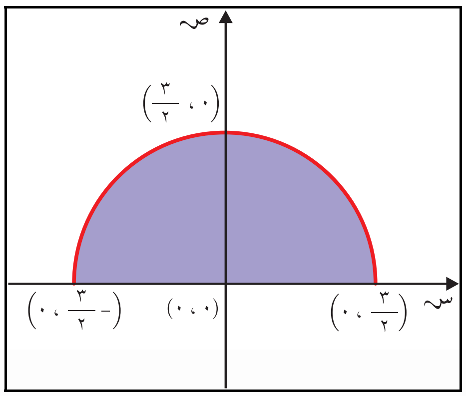
= − (قيمة مساحة المنطقة المظللة)

$$= -\frac{١}{٤}\pi(١)^{٢} = -\frac{\pi}{٤}$$

٣٣ $$\text{د(س)} = \frac{١}{٢}\sqrt{٩ - ٤\text{س}^{٢}}$$

$$= \frac{١}{٢}\sqrt{٤\left(\frac{٩}{٤} - \text{س}^{٢}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{٩}{٤} - \text{س}^{٢}}$$

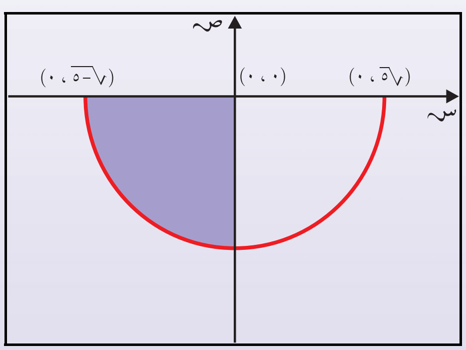


فإن بيان الدالة د هو نصف دائرة مركزها (٠ ، ٠) وطول نصف قطرها $\frac{٣}{٢}$

$$\int_{-\frac{٣}{٢}}^{\frac{٣}{٢}} \frac{١}{٢}\sqrt{٩ - ٤\text{س}^{٢}}\ \text{ءس} = \text{مساحة المنطقة المظللة}$$

$$= \frac{١}{٢}\pi \times \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢} = \frac{٩}{٨}\pi$$

٣٤ بيان الدالة : د(س) = $-\sqrt{٥ - \text{س}^{٢}}$ هو نصف دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها $\sqrt{٥}$.



$$-\frac{٢}{٣}\int_{-\sqrt{٥}}^{٠} \sqrt{٥ - \text{س}^{٢}}\ \text{ءس} =$$

$$= \frac{٢}{٣}\int_{-\sqrt{٥}}^{٠} -\sqrt{٥ - \text{س}^{٢}}\ \text{ءس}$$

= $-\frac{٢}{٣}$ × مساحة ربع منطقة دائرية (المظللة) طول نصف قطرها $\sqrt{٥}$

$$= -\frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٤}\pi \times (\sqrt{٥})^{٢} = -\frac{٥}{٦}\pi$$

Book Mark
Exit
Index

٣٥ ت(س) = $\int_{-1}^{س} (٤ع^{٣} - ٦ع^{٢})\, ءع = \left[ع^{٤} - ٢ع^{٣}\right]_{-1}^{س}$

$= س^{٤} - ٢س^{٣} - (١ + ٢) = س^{٤} - ٢س^{٣} - ٣$

ت(−١) = $(-١)^{٤} - ٢(-١)^{٣} - ٣ =$ صفر

ت(١) = $١ - ٢ - ٣ = -٤$

◄ بنود موضوعية :

أولًا :

١ ✓ ٢ x ٣ x ٤ ✓

ثانيًا :

١ أ ٢ جـ ٣ جـ ٤ أ ٥ ب

◄ أسئلة مقالية :

ثالثًا :

١ نفرض $ن(س) = (س^٢ + ٢) - (٢س - ٣)$

$= س^٢ - ٢س + ٥ \geq ٠$ لكل $س \in ح$

أي أن $ن(س) \geq ٠$ لكل $س \in [١ ، ٣]$

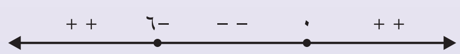
$\therefore (س^٢ + ٢) \geq (٢س - ٣) \quad \forall\, س \in [١ ، ٣]$

$\therefore \int_{١}^{٣} (س^٢ + ٢)\, ءس \geq \int_{١}^{٣} (٢س - ٣)\, ءس$

٢ $\because س^٢ - ٦س \leq ٠ \quad \forall\, س \in [٢ ، ٣]$

$\therefore \int_{٢}^{٣} (س^٢ - ٦س)\, ءس \leq ٠$

٣ $\because س^٢ + ٦س \geq ٠ \quad \forall\, س \in [٢ ، ٣]$



$\therefore \int_{٢}^{٣} (س^٢ + ٦س)\, ءس \geq ٠$

رابعًا :

٤ $\int_{٥}^{٦} س^٢\, ءس + \int_{٠}^{٥} س^٢\, ءس = \int_{٠}^{٥} س^٢\, ءس + \int_{٥}^{٦} س^٢\, ءس$

$= \int_{٠}^{٦} س^٢\, ءس$

٥ $\int_{-٢}^{١} \sqrt{س + ٣}\ ءس - \int_{٥}^{١} \sqrt{س + ٣}\ ءس$

$$= \int_{-٢}^{١} \sqrt{س + ٣}\ ءس + \int_{١}^{٥} \sqrt{س + ٣}\ ءس$$

$$= \int_{-٢}^{٥} \sqrt{س + ٣}\ ءس$$

خامسًا :

٦ $\int_{٠}^{١} ٤\ ءس = ٤ \int_{٠}^{١} ءس = ٤[س]_{٠}^{١} = ٤$

٧ $\int_{١}^{٣} -ص\ ءص = \left[-\frac{١}{٢} ص^{٢}\right]_{١}^{٣} = -٤$

٨ $\int_{١}^{٤} \sqrt{١٦ س^{٥}}\ ءس = ٤ \int_{١}^{٤} س^{\frac{٥}{٢}}\ ءس$

$$= ٤ \times \frac{٢}{٧} \left[س^{\frac{٧}{٢}}\right]_{١}^{٤} = \frac{٨}{٧}(٢^{٧} - ١) = ١٤٥\frac{١}{٧}$$

٩ $\int_{٠}^{١} (٢س - ٣)(٥س + ١)\ ءس =$

$$= \int_{٠}^{١} (١٠س^{٢} - ١٣س - ٣)\ ءس$$

$$= \frac{١٠}{٣}[س^{٣}]_{٠}^{١} - \frac{١٣}{٢}[س^{٢}]_{٠}^{١} - ٣[س]_{٠}^{١} = -٦\frac{١}{٦}$$

١٠ $\int_{-١}^{١} (س^{٢} + ١)^{٢}\ ءس = \int_{-١}^{١} (س^{٤} + ٢س^{٢} + ١)\ ءس$

$$= \left[\frac{١}{٥} س^{٥} + \frac{٢}{٣} س^{٣} + س\right]_{-١}^{١} = ٣\frac{١١}{١٥}$$

١١ $\int_{-٤}^{-١} \frac{١ - س^{٥}}{٢س^{٢}}\ ءس = \int_{-٤}^{-١} \left(\frac{١}{٢س^{٢}} - \frac{س^{٥}}{٢س^{٢}}\right) ءس$

$$= \int_{-٤}^{-١} \left(\frac{١}{٢} س^{-٢} - \frac{١}{٢} س^{٣}\right) ءس$$

$$= \left[-\frac{١}{٢س} - \frac{١}{٨} س^{٤}\right]_{-٤}^{-١}$$

$$= ٣٢\frac{١}{٤}$$

١٢ $\int_{-٢}^{١} \frac{٢س^{٣} - ١٢س^{٢} + ١٨س + ٥}{٩ - ٦س + س^{٢}} \, ءس$

بقسمة البسط على المقام حيث إن درجته أكبر

$$\frac{٢س^{٣} - ١٢س^{٢} + ١٨س + ٥}{س^{٢} - ٦س + ٩} = ٢س + \frac{٥}{س^{٢} - ٦س + ٩}$$

أو $\left(\frac{٢س(س^{٢} - ٦س + ٩) + ٥}{س^{٢} - ٦س + ٩} = ٢س + \frac{٥}{س^{٢} - ٦س + ٩} \right)$

$$\therefore \text{التكامل} = \int_{-٢}^{١} ٢س \, ءس + \int_{-٢}^{١} \frac{٥ \, ءس}{س^{٢} - ٦س + ٩}$$

$$= [س^{٢}]_{-٢}^{١} + \int_{-٢}^{١} \frac{٥ \, ءس}{(س - ٣)^{٢}}$$

$$= (١ - ٤) + ٥ \int_{-٢}^{١} (س - ٣)^{-٢} \, ءس$$

$$= -٣ + ٥ \times \left[\frac{(س - ٣)^{-١}}{-١} \right]_{-٢}^{١} = -٣ + ٥ \left[\frac{-١}{س - ٣} \right]_{-٢}^{١}$$

$$= -٣ + ٥ \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٥} \right) = -\frac{٣}{٢}$$

١٣ $\int_{٠}^{٨} \sqrt{٣س + ١} \, ءس = \int_{٠}^{٨} (٣س + ١)^{\frac{١}{٢}} \, ءس$

$$= \frac{١}{٣} \int_{٠}^{٨} (٣س + ١)^{\frac{١}{٢}} (٣ \, ءس)$$

$$= \left[\frac{١}{٣} \; \frac{(٣س + ١)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} \right]_{٠}^{٨}$$

$$= \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٣} \left[(٣س + ١)^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٠}^{٨}$$

$$= \frac{٢}{٩} (٢٥ \times ٥ - ١٦ \times ٤) = ١٣\frac{٥}{٩}$$

١٤ $$\int_{٠}^{٧} \frac{١}{\sqrt{٢\text{س} + ٢}}\, \text{ءس} = \int_{٠}^{٧} (٢\text{س} + ٢)^{-\frac{١}{٢}}\, \text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٢} \int_{٠}^{٧} (٢\text{س} + ٢)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢\, \text{ءس}$$

$$= \left[\frac{١}{٢} \; \frac{(٢\text{س} + ٢)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} \right]_{٠}^{٧} = \left[\sqrt{٢\text{س} + ٢} \right]_{٠}^{٧}$$

$$= ٤ - \sqrt{٢}$$

١٥ $$\int_{-٦}^{-١} \left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}^{٢}} \right) \text{ءس} = \int_{-٦}^{-١} \text{س}\, \text{ءس} + \int_{-٦}^{-١} \text{س}^{-٢}\, \text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٢} \left[\text{س}^{٢} \right]_{-٦}^{-١} - \left[\frac{١}{\text{س}} \right]_{-٦}^{-١} = -١٧\frac{١}{٢} + \frac{٥}{٦}$$

$$= -١٦\frac{٢}{٣}$$

١٦ $$\int_{٣}^{٧} \text{س} \sqrt{٢\text{س}^{٢} - ١٧}\, \text{ءس} = \int_{٣}^{٧} (٢\text{س}^{٢} - ١٧)^{\frac{١}{٢}} \times \text{س}\, \text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٤} \int_{٣}^{٧} (٢\text{س}^{٢} - ١٧)^{\frac{١}{٢}} \times ٤\text{س}\, \text{ءس}$$

$$= \left[\frac{١}{٤} \times \frac{(٢\text{س}^{٢} - ١٧)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} \right]_{٣}^{٧}$$

$$= ١٢١\frac{١}{٣}$$

١٧ $$\int_{-١}^{٠} \frac{٥\text{س}}{\sqrt{٣ - \text{س}^{٢}}}\, \text{ءس} = \int_{-١}^{٠} (٣ - \text{س}^{٢})^{-\frac{١}{٢}} \times ٥\text{س}\, \text{ءس}$$

$$= -\frac{٥}{٢} \int_{-١}^{٠} (٣ - \text{س}^{٢})^{-\frac{١}{٢}} \times (-٢\text{س}\, \text{ءس})$$

$$= \left[-\frac{٥}{٢} \times \frac{(٣ - \text{س}^{٢})^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} \right]_{-١}^{٠} = -٥\left(\sqrt{٣} - \sqrt{٢} \right)$$

Book Mark
Exit
Index

١٨

$$\int_{١}^{٤} \frac{١}{\sqrt{\text{س}}\,(\sqrt{\text{س}}+١)^{٢}}\,\text{ءس} = \int_{١}^{٤} (\sqrt{\text{س}}+١)^{-٢} \times \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس}$$

$$= ٢\int_{١}^{٤} (\sqrt{\text{س}}+١)^{-٢} \times \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس}$$

$$\text{د(س)} = (\sqrt{\text{س}}+١) \quad ، \quad \text{د}'\text{(س)} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس}$$

$$\therefore \text{التكامل} = ٢\left[\frac{(\sqrt{\text{س}}+١)^{-١}}{-١}\right]_{١}^{٤} = -٢\left[\frac{١}{٣} - \frac{١}{٢}\right] = \frac{١}{٣}$$

١٩

$$\int_{١}^{٢} (\text{س}-١)^{٦}(\text{س}+١)^{٦}\,\text{س}\,\text{ءس} = \int_{١}^{٢} \left((\text{س}-١)(\text{س}+١)\right)^{٦}\,\text{س}\,\text{ءس}$$

$$= \int_{١}^{٢} (\text{س}^{٢}-١)^{٦}\,\text{س}\,\text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٢}\int_{١}^{٢} (\text{س}^{٢}-١)^{٦} \times ٢\text{س}\,\text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٢}\left[\frac{(\text{س}^{٢}-١)^{٧}}{٧}\right]_{١}^{٢}$$

$$= \frac{١}{١٤}\left[٣^{٧} - ٠\right] = \frac{٢١٨٧}{١٤}$$

٢٠

$$\int_{-٢}^{٠} \frac{\text{س}^{٣}-٢٧}{\text{س}-٣}\,\text{ءس} = \int_{-٢}^{٠} \frac{(\text{س}-٣)(\text{س}^{٢}+٣\text{س}+٩)}{\text{س}-٣}\,\text{ءس}$$

$$= \int_{-٢}^{٠} (\text{س}^{٢}+٣\text{س}+٩)\,\text{ءس}$$

$$= \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{٣\text{س}^{٢}}{٢} + ٩\text{س}\right]_{-٢}^{٠}$$

$$= ١٤\frac{٢}{٣}$$

٢١

$$\int_{١}^{٢} \frac{(\text{س} + ٢)^{٤}}{\text{س}^{٦}} \, \text{ءس} = \int_{١}^{٢} \frac{(\text{س} + ٢)^{٤}}{(\text{س})^{٤}\,\text{س}^{٢}} \, \text{ءس}$$

$$= \int_{١}^{٢} \left(١ + \frac{٢}{\text{س}}\right)^{٤} \times \frac{١}{\text{س}^{٢}} \, \text{ءس}$$

$$= -\frac{١}{٢} \int_{١}^{٢} \left(١ + \frac{٢}{\text{س}}\right)^{٤} \times \frac{-٢}{\text{س}^{٢}} \, \text{ءس}$$

$$= -\frac{١}{٢} \left[\frac{\left(١ + \frac{٢}{\text{س}}\right)^{٥}}{٥} \right]_{١}^{٢} = -\frac{١}{١٠} \left[٣٢ - ٢٤٣ \right]$$

$$= \frac{-١}{١٠} \times (-٢١١) = \frac{٢١١}{١٠}$$

٢٢

$$\int_{٢}^{٦} \text{س} \sqrt{\frac{٢}{\text{س}} - \frac{٣}{\text{س}^{٢}}} \, \text{ءس} = \int_{٢}^{٦} \sqrt{\text{س}^{٢}\left(\frac{٢}{\text{س}} - \frac{٣}{\text{س}^{٢}}\right)} \, \text{ءس}$$

$$= \int_{٢}^{٦} (٢\text{س} - ٣)^{\frac{١}{٢}} \, \text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٢} \left[\frac{(٢\text{س} - ٣)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} \right]_{٢}^{٦}$$

$$= \frac{١}{٣} \left[(٢\text{س} - ٣)^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٢}^{٦}$$

$$= \frac{١}{٣} \times ٢٦ = ٨\frac{٢}{٣}$$

٢٣

$$\int_{-١}^{١} (س + ٢)^{٤}(س + ٣)\, ء س = \int_{-١}^{١} (س + ٢)^{٤}(س + ٢ + ١)\, ء س$$

$$= \int_{-١}^{١} \left((س + ٢)^{٥} + (س + ٢)^{٤}\right) ء س$$

$$= \left[\frac{(س + ٢)^{٦}}{٦} + \frac{(س + ٢)^{٥}}{٥}\right]_{-١}^{١}$$

$$= ١٦٩\frac{٧٣}{١٠٠}$$

٢٤

$$\int_{١}^{٤} \frac{(\sqrt{س} - ١)^{٣}}{\sqrt{س}}\, ء س = \int_{١}^{٤} (\sqrt{س} - ١)^{٣} \times \frac{١}{\sqrt{س}}\, ء س$$

$$= ٢\int_{١}^{٤} (\sqrt{س} - ١)^{٣} \times \frac{١}{٢\sqrt{س}}\, ء س$$

$$= ٢\left[\frac{(\sqrt{س} - ١)^{٤}}{٤}\right]_{١}^{٤}$$

$$= \frac{١}{٢}\left[(\sqrt{س} - ١)^{٤}\right]_{١}^{٤} = \frac{١}{٢}$$

٢٥

$$\int_{١}^{٤} \frac{\sqrt{س}(س - ١)}{\sqrt{س} + ١}\, ء س = \int_{٠}^{٤} \frac{\sqrt{س}(\sqrt{س} - ١)(\sqrt{س} + ١)}{\sqrt{س} + ١}\, ء س$$

$$= \int_{٠}^{٤} (س - \sqrt{س})\, ء س$$

$$= \left[\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٤} = ٢\frac{٢}{٣}$$

٢٦ $\int_{٢}^{٤} س^{٧}\left(١ - \frac{٣}{س}\right)^{٧} \text{ءس} = \int_{٢}^{٤} \left(س\left(١ - \frac{٣}{س}\right)\right)^{٧} \text{ءس}$

$= \int_{٢}^{٤} (س - ٣)^{٧} \text{ءس}$

$= \left[\frac{(س - ٣)^{٨}}{٨}\right]_{٢}^{٤} = \text{صفر}$

٢٧ $\int_{٣}^{٤} \frac{٢س - ٥}{(س - ٥)^{٣}} \text{ءس} = \int_{٣}^{٤} (س - ٥)^{-٣}(٢س - ١٠ + ٥) \text{ءس}$

$= \int_{٣}^{٤} \left(٢(س - ٥)^{-٢} + ٥(س - ٥)^{-٣}\right) \text{ءس}$

$= \left[\frac{٢(س - ٥)^{-١}}{-١} + \frac{٥(س - ٥)^{-٢}}{-٢}\right]_{٣}^{٤} = -\frac{٧}{٨}$

٢٨ $\int_{٠}^{٣} |١ - س^{٢}| \text{ءس} = \int_{٠}^{١} (١ - س^{٢}) \text{ءس} + \int_{١}^{٣} (س^{٢} - ١) \text{ءس}$

$= \left[س - \frac{س^{٣}}{٣}\right]_{٠}^{١} + \left[\frac{س^{٣}}{٣} - س\right]_{١}^{٣}$

$= \frac{٢}{٣} + ٦\frac{٢}{٣} = ٧\frac{١}{٣}$

سادسًا :

٢٩ **أ** $\int_{١}^{٢} ٣د(س) \text{ءس} = ٣\int_{١}^{٢} د(س) \text{ءس} = ٣ \times ٧ = ٢١$

ب $\int_{١}^{٢} (-٥و(س)) \text{ءس} = -٥\int_{١}^{٢} و(س) \text{ءس} = ٢٠$

حـ $\int_{١}^{٢} (٣د(س) - ٥و(س)) \text{ءس} = ٢١ + ٢٠ = ٤١$ (استفد من أ ، ب)

ء $\int_{٢}^{١} (٣د(س) - ٤و(س)) \text{ءس} = -٣\int_{١}^{٢} د(س) \text{ءس} + ٤\int_{١}^{٢} و(س) \text{ءس}$

$= -٣ \times ٧ + ٤ \times (-٤)$

$= -٢١ - ١٦ = -٣٧$

٣٠ **أ** $\int_{٣}^{-٢} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = -\int_{-٢}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = -٥$

ب $\int_{-٢}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{٣}^{-٢} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int_{-٢}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} - \int_{-٢}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = ٠$

(حاول إيجاد الناتج بطريقة أخرى)

جـ $\int_{-٢}^{١} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{١}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{-٢}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = ٥$

ء $\int_{-٢}^{٣} ٢\text{د}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{٣}^{-٢} ٣\text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int_{-٢}^{٣} ٢\text{د}(\text{س})\,\text{ءس} - \int_{-٢}^{٣} ٣(\text{س})\,\text{ءس}$

$= -\int_{-٢}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = -٥$

٣١ $\text{د}(\text{س}) = \int \frac{\text{ءس}}{\sqrt[٣]{(٢\text{س} + ٥)^{٢}}} = \int (٢\text{س} + ٥)^{-\frac{٢}{٣}}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\,\frac{(٢\text{س} + ٥)^{\frac{١}{٣}}}{\frac{١}{٣}} + \text{ث} = \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{٢\text{س} + ٥} + \text{ث}$

ولكن $\text{د}(١١) = ٥ \quad \therefore ٥ = \frac{٣}{٢} \times ٣ + \text{ث} \quad \therefore \text{ث} = \frac{١}{٢}$

$\therefore \text{د}(\text{س}) = \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{(٢\text{س} + ٥)} + \frac{١}{٢}$

٣٢ $\text{د}(\text{س}) = \int \sqrt{١ + ٣\text{س}}\,\text{ءس} = \frac{١}{٣}\int (١ + ٣\text{س})^{\frac{١}{٢}} \times ٣\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{(١ + ٣\text{س})^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{ث} = \frac{٢}{٩}\sqrt{(١ + ٣\text{س})^{٣}} + \text{ث}$

ولكن $\text{د}\left(-\frac{١}{٣}\right) = \frac{٧}{٩}$

Book Mark
Exit
Index

$$\therefore \frac{٧}{٩} = ٠ + \text{ث} \qquad \therefore \text{ث} = \frac{٧}{٩}$$

$$\therefore \text{د}(\text{س}) = \frac{٢}{٩}\sqrt{(٣\text{س} + ١)^{٣}} + \frac{٧}{٩}$$

$$\therefore \text{د}(٨) = ٢٨\frac{٥}{٩}$$

٣٣

$$\text{د}''(\text{س}) = ٢ - ٦\text{س}$$

$$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \int \text{د}''(\text{س})\ \text{ءس}$$

$$= \int (٢ - ٦\text{س})\ \text{ءس} = ٢\text{س} - ٣\text{س}^{٢} + \text{ث}$$

ولكن $\text{د}'(١) = ٤$

$$٤ = ٢ - ٣ + \text{ث} \Leftarrow \text{ث} = ٥$$

$$\therefore \text{د}'(\text{س}) = ٢\text{س} - ٣\text{س}^{٢} + ٥$$

$$\text{د}(\text{س}) = \int \text{د}'(\text{س})\ \text{ءس} = \int (٢\text{س} - ٣\text{س}^{٢} + ٥)\ \text{ءس}$$

$$= \text{س}^{٢} - \text{س}^{٣} + ٥\text{س} + \text{ث}_{١}$$

ولكن $\text{د}(٠) = ١$

$$\therefore ١ = ٠ + \text{ث}_{١} \Leftarrow \text{ث}_{١} = ١$$

$$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - \text{س}^{٣} + ٥\text{س} + ١$$

٣٤

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢$$

$\therefore \text{ص} = ٢\text{س} + \text{ث}_{١}$. ولكن $\text{ص} = ٠$ عندما $\text{س} = ٠$

$$\therefore \text{ث}_{١} = ٠ \qquad \therefore \text{ص} = ٢\text{س}$$

تمارين

١ – ٤

١ ص = س − س^{٢}

لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

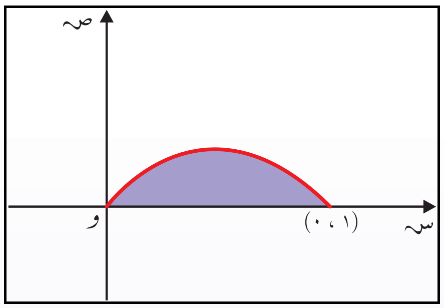
نضع ص = ٠

٠ = س − س^{٢}

∴ س (١ − س) = ٠ ⇐ س = ٠ أو س = ١

∴ المنحنى يقطع محور السينات في النقطتين (٠ ، ٠) ، (١ ، ٠)

∀ س ∈ [٠ ، ١] نجد أن (س − س^{٢}) ⩾ ٠



∴ المساحة = $\int_{٠}^{١}$ (س − س^{٢}) ءس

= $\left[\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{٠}^{١}$

= $\left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}\right) - ٠$

= $\frac{١}{٦}$ وحدة مساحة

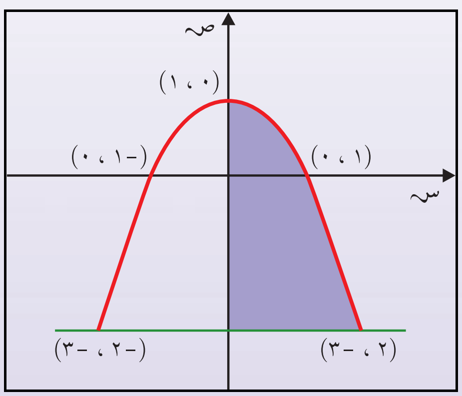
٢ ص$_{١}$ = ١ − س^{٢} ، ص$_{٢}$ = −٣

لإيجاد نقط التقاطع نضع −٣ = ١ − س^{٢}

∴ س^{٢} = ٤ ⇐ س = ±٢

∴ المنحنى يقطع المستقيم ص = −٣

في النقطتين (٢ ، −٣) ، (−٢ ، −٣)



س = ٠ ⇐ ص$_{١}$ = ١

∴ منحنى الدالة ص$_{١}$ يقطع محور الصادات في (٠ ، ١)

ص = ٠ ⇐ ١ − س^{٢} = ٠

$\therefore$ س = ±١

$\therefore$ منحنى الدالة ص١ يقطع محور السينات في (١ ، ٠) ، (-١ ، ٠)

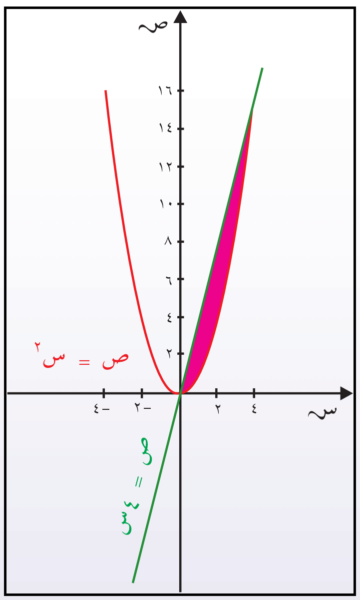
المساحة = $٢\int_{٠}^{٢}$ [(١ - س٢) - (-٣)] ءس

= $٢\int_{٠}^{٢}$ (١ - س٢ + ٣) ءس = $٢\int_{٠}^{٢}$ (٤ - س٢) ءس

= $٢\left[٤س - \frac{١}{٣}س^{٣}\right]_{٠}^{٢}$ = $٢\left(٨ - \frac{٨}{٣} - ٠\right)$

= $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مساحة

٣ ص = س٢ ، ص = ٤س



لإيجاد نقطتي التقاطع:

٤س = س٢ ⇐ س٢ - ٤س = ٠ ⇐

$\therefore$ س(س - ٤) = ٠

⇐ س = ٠ أو س = ٤

المساحة = $\int_{٠}^{٤}$ (٤س - س٢) ءس

= $\left[٢س^{٢} - \frac{١}{٣}س^{٣}\right]_{٠}^{٤}$

= $\left(٣٢ - \frac{٦٤}{٣}\right)$

= $١٠\frac{٢}{٣}$ وحدة مساحة

٤ ص = ٢ - س٢ ، ص = -س

لإيجاد نقط التقاطع نضع -س = ٢ - س٢ ⇐

س٢ - س - ٢ = ٠ ⇐ (س - ٢)(س + ١) = ٠ ⇐

س = ٢ ، س = -١

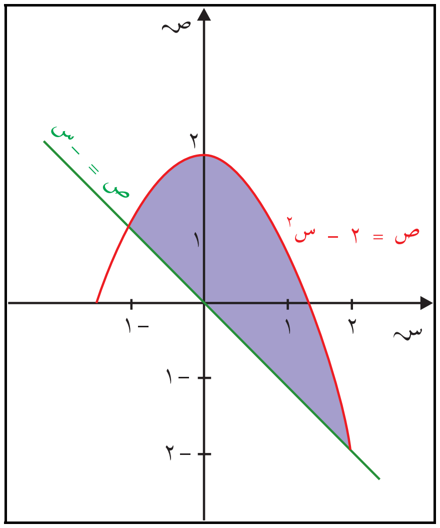
$$\text{المساحة} = \int_{١-}^{٢} [(٢ - \text{س}^{٢}) - (-\text{س})]\, \text{ءس}$$

$$= \int_{١-}^{٢} (٢ - \text{س}^{٢} + \text{س})\, \text{ءس}$$

$$= \left[٢\text{س} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\right]_{١-}^{٢}$$

$$= \left(٤ - \frac{٨}{٣} + ٢\right) - \left(٢- + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٢}\right)$$

$$= ٤\frac{١}{٢} \text{ وحدة مساحة}$$



٥ $\text{ص} = ٤\text{س}^{٣} - ١٢\text{س}^{٢} + ٨\text{س} \quad ، \quad \text{ص} = ٠$

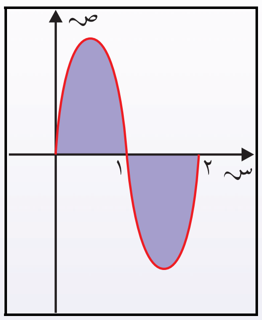
لإيجاد نقط التقاطع نضع

$$٤\text{س}^{٣} - ١٢\text{س}^{٢} + ٨\text{س} = ٠$$

$$٤\text{س}\,(\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢) = ٠$$

$$٤\text{س}\,(\text{س} - ٢)(\text{س} - ١) = ٠ \Leftarrow$$

$$\text{س} = ٠ \quad ، \quad \text{س} = ٢ \quad ، \quad \text{س} = ١$$



$$\text{المساحة} = \int_{٠}^{١} (٤\text{س}^{٣} - ١٢\text{س}^{٢} + ٨\text{س})\, \text{ءس}$$

$$- \int_{١}^{٢} (٤\text{س}^{٣} - ١٢\text{س}^{٢} + ٨\text{س})\, \text{ءس}$$

$$= \left[\text{س}^{٤} - ٤\text{س}^{٣} + ٤\text{س}^{٢}\right]_{٠}^{١} - \left[\text{س}^{٤} - ٤\text{س}^{٣} + ٤\text{س}^{٢}\right]_{١}^{٢}$$

$$= (١ - ٤ + ٤) - [(١٦ - ٣٢ + ١٦) - (١ - ٤ + ٤)]$$

$$= ٢ \text{ وحدة مساحة}$$

٦

$$ص = س^{٤} \quad ، \quad ص = ٢ - س^{٢}$$

$$\therefore\ س^{٤} = ٢ - س^{٢} \Leftarrow س^{٤} + س^{٢} - ٢ = ٠ \Leftarrow$$

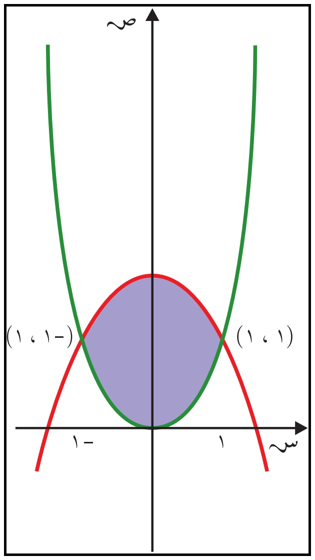
$$(س^{٢} + ٢)(س^{٢} - ١) = ٠ \Leftarrow س = \pm ١$$

$$٢ - س^{٢} \geqslant س^{٤} \quad \forall\ س \in [-١ \text{ ، } ١]$$

$$\therefore\ \text{المساحة} = \int_{-١}^{١} \left[(٢ - س^{٢}) - س^{٤}\right] ءس$$

$$= \left[٢س - \frac{١}{٣}س^{٣} - \frac{١}{٥}س^{٥}\right]_{-١}^{١}$$

$$= ٢\frac{١٤}{١٥} \text{ وحدة مساحة.}$$



٧

$$ص = -س^{٢} + ٦ \quad ، \quad ص + ٢س - ٣ = ٠$$

$$\therefore\ ص = ٣ - ٢س$$

$$\therefore\ ٣ - ٢س = -س^{٢} + ٦$$

$$\therefore\ س^{٢} - ٢س - ٣ = ٠$$

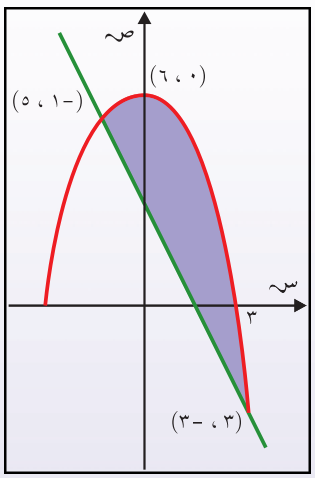
$$\therefore\ (س - ٣)(س + ١) = ٠$$

$$\therefore\ س = -١ \text{ أو } س = ٣$$

$$\text{المساحة} = \int_{-١}^{٣} \left[(٦ - س^{٢}) - (٣ - ٢س)\right] ءس$$

$$= \int_{-١}^{٣} (٣ + ٢س - س^{٢})\, ءس = \left[٣س + س^{٢} - \frac{١}{٣}س^{٣}\right]_{-١}^{٣}$$

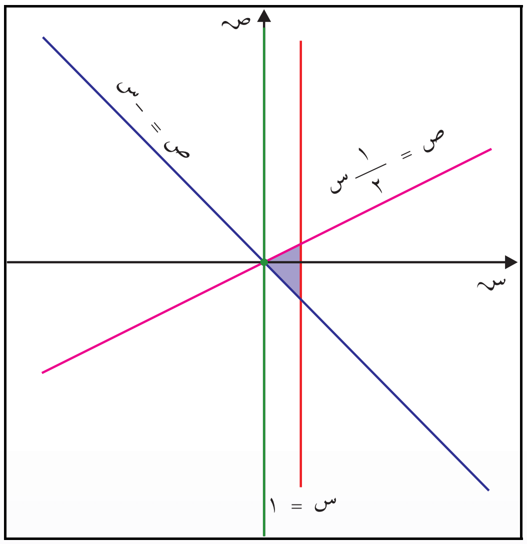
$$= (٩ + ٩ - ٩) - \left(-٣ + ١ + \frac{١}{٣}\right) = ١٠\frac{٢}{٣} \text{ وحدة مساحة.}$$



٨ $\text{ص} = \frac{١}{٢}\text{س}$ ، $\text{ص} = -\text{س}$ ، $\text{س} = ٠$ ، $\text{س} = ١$

$$\text{المساحة} = \int_{٠}^{١} \left[\frac{١}{٢}\text{س} - (-\text{س})\right] \text{ءس}$$

$$= \int_{٠}^{١} \frac{٣}{٢}\text{س}\ \text{ءس} = \left[\frac{٣}{٤}\text{س}^{٢}\right]_{٠}^{١} = \frac{٣}{٤}\ \text{وحدة مساحة}$$



٩ $\text{ص} = \text{س}(\text{س} + ١)(\text{س} - ٢)$ ، $\text{ص} = ٤\text{س}$

$\text{ص} = \text{س}(\text{س} + ١)(\text{س} - ٢)$

يقطع محور السينات في النقاط

$(٠ ، ٠)$ ، $(-١ ، ٠)$ ، $(٢ ، ٠)$

لإيجاد نقط تقاطعه مع المستقيم $\text{ص} = ٤\text{س}$

$٤\text{س} = \text{س}(\text{س} + ١)(\text{س} - ٢)$

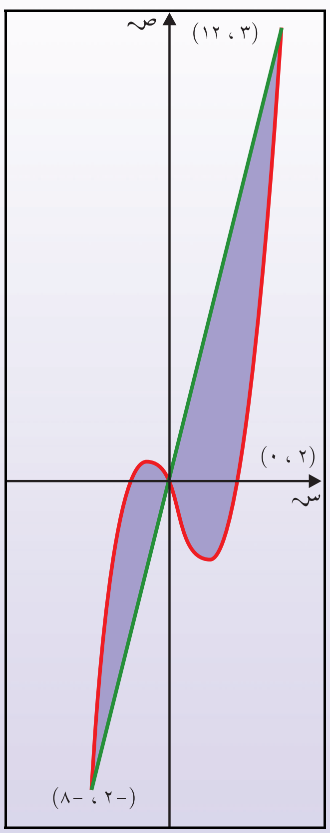
$\therefore \text{س}[(\text{س} + ١)(\text{س} - ٢) - ٤] = ٠$

$\text{س}[\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢ - ٤] = ٠$

$\text{س}(\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦) = ٠$

$\text{س}(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٢) = ٠ \Leftarrow$

$\text{س} = ٠$ أو $\text{س} = ٣$ أو $\text{س} = -٢$



$$\text{المساحة} = \int_{-2}^{0} [\text{س}(\text{س}+1)(\text{س}-2) - 4\text{س}]\, \text{ء}\text{س}$$

$$+ \int_{0}^{3} [4\text{س} - \text{س}(\text{س}+1)(\text{س}-2)]\, \text{ء}\text{س}$$

$$= \int_{-2}^{0} (\text{س}^3 - \text{س}^2 - 6\text{س})\, \text{ء}\text{س} + \int_{0}^{3} (6\text{س} + \text{س}^2 - \text{س}^3)\, \text{ء}\text{س}$$

$$= \left[\frac{1}{4}\text{س}^4 - \frac{1}{3}\text{س}^3 - 3\text{س}^2\right]_{-2}^{0} + \left[3\text{س}^2 - \frac{1}{4}\text{س}^4 + \frac{1}{3}\text{س}^3\right]_{0}^{3}$$

$$= -\left(4 + \frac{8}{3} - 12\right) + \left(27 - \frac{81}{4} + 9\right)$$

$$= +\frac{16}{3} + 15\frac{3}{4} = 21\frac{1}{12} \text{ وحدة مساحة}$$

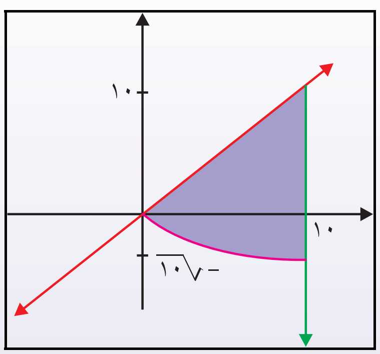
١٠ $\because$ $\text{ص} = -\sqrt{\text{س}}$ ، $\text{ص} = \text{س}$

لإيجاد نقط التقاطع : $\text{س} = -\sqrt{\text{س}}$

بتربيع الطرفين

$\text{س}^2 = \text{س} \Leftarrow \text{س}(\text{س} - 1) = 0$

$\text{س} = 0$ أو $\text{س} = 1$ (مرفوضة)



$$\therefore \text{المساحة} = \int_{0}^{10} (\text{س} + \sqrt{\text{س}})\, \text{ء}\text{س}$$

$$= \left[\frac{\text{س}^2}{2} + \frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{10}$$

$$= \left(50 + \frac{2}{3} \times 10\sqrt{10}\right) - \text{صفر}$$

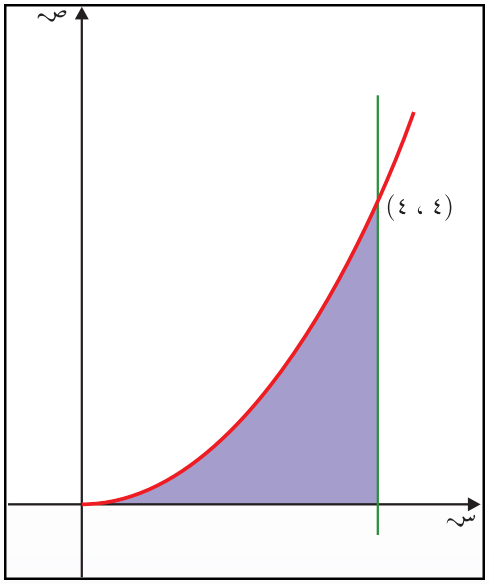
$$= 10\left(5 + \frac{2}{3}\sqrt{10}\right) \text{ وحدة مساحة}$$

Book Mark
Exit
Index

تمارين

١ – ٥

١ $\text{ص} = \frac{١}{٤}\text{س}^{٢}$ ، $\text{س} = ٤$ ، $\text{ص} = ٠$



$\text{س} = ٤ \Leftarrow$

$\text{ص} = \frac{١}{٤} \times ١٦ = ٤$

نقطة التقاطع هي $(٤ ، ٤)$

$\text{الحجم} = \int_{٠}^{٤} \pi\, \text{ص}^{٢}\, \text{ءس}$

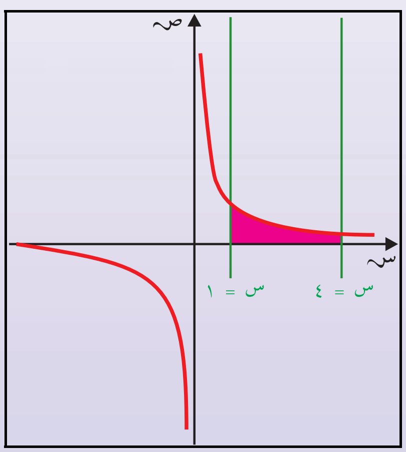
$= \pi \int_{٠}^{٤} \left(\frac{١}{٤}\text{س}^{٢}\right)^{٢} \text{ءس}$

$= \pi \int_{٠}^{٤} \frac{١}{١٦}\text{س}^{٤}\, \text{ءس}$

$= \frac{\pi}{١٦}\left[\frac{\text{س}^{٥}}{٥}\right]_{٠}^{٤} = \frac{\pi}{١٦} \times \frac{٤^{٥}}{٥} = \frac{\pi}{٥} \times ٦٤$

$= \frac{٦٤}{٥}\pi$ وحدة حجم

٢ $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}}$ ، $\text{س} = ١$ ، $\text{س} = ٤$ ، $\text{ص} = ٠$

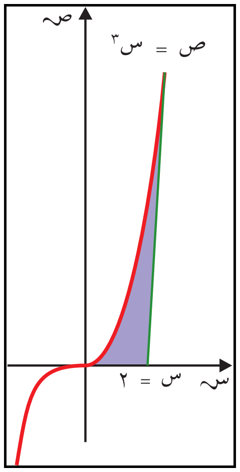


$\text{الحجم} = \int_{١}^{٤} \pi \left(\frac{١}{\text{س}}\right)^{٢} \text{ءس}$

$= \pi \int_{١}^{٤} \text{س}^{-٢}\, \text{ءس} = \pi \left[\frac{-١}{\text{س}}\right]_{١}^{٤}$

$= \pi\left(-\frac{١}{٤} + ١\right) = \frac{٣\pi}{٤}$ وحدة حجم

٣ $\text{ص} = \text{س}^{٣}$ ، $\text{س} = ٢$ ، $\text{ص} = ٠$



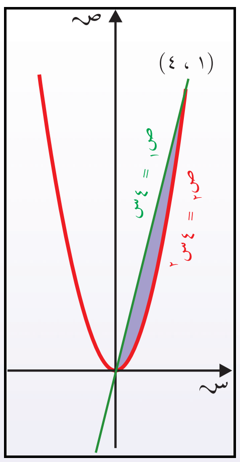
$$\text{الحجم} = \int_{٠}^{٢} \pi \left(\text{س}^{٣}\right)^{٢} \, \text{ءس}$$

$$= \int_{٠}^{٢} \pi \, \text{س}^{٦} \, \text{ءس}$$

$$= \pi \left[\frac{\text{س}^{٧}}{٧} \right]_{٠}^{٢}$$

$$= \frac{١٢٨}{٧} \pi \text{ وحدة حجم}$$

٤ نفرض $\text{ص}_{٢} = ٤\text{س}^{٢}$ ، $\text{ص}_{١} = ٤\text{س}$



لإيجاد نقطتي التقاطع:

$$٤\text{س} = ٤\text{س}^{٢}$$

$$\therefore \; ٤\text{س}^{٢} - ٤\text{س} = ٠$$

$$٤\text{س} \left(\text{س} - ١\right) = ٠ \Leftarrow$$

$\text{س} = ٠$ أو $\text{س} = ١$

$\therefore$ نقطتا التقاطع هما $(٠ ، ٠)$ ، $(١ ، ٤)$

$$\text{الحجم} = \pi \int_{٠}^{١} \left(\text{ص}_{١}^{٢} - \text{ص}_{٢}^{٢}\right) \text{ءس}$$

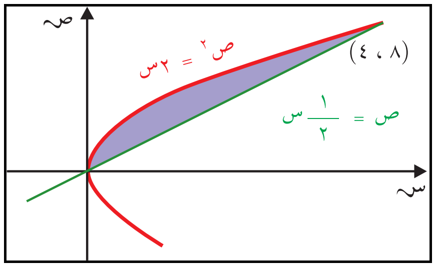
$$= \pi \int_{٠}^{١} \left(١٦\text{س}^{٢} - ١٦\text{س}^{٤}\right) \text{ءس}$$

$$= ١٦\pi \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} - \frac{\text{س}^{٥}}{٥} \right]_{٠}^{١} = \frac{٣٢}{١٥} \pi \text{ وحدة حجم}$$

٥ $\text{س} - ٢\text{ص} = ٠$ ، $\text{ص}^{٢} - ٢\text{س} = ٠$

$$\text{س} - ٢\text{ص} = ٠ \Leftarrow \text{ص} = \frac{١}{٢}\text{س}$$

$$\text{ص}^{٢} - ٢\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{ص}^{٢} = ٢\text{س}$$



$\therefore \ \frac{\text{١}}{\text{٤}}\,\text{س}^{\text{٢}} = \text{٢س} \Leftarrow$

$\text{س}^{\text{٢}} - \text{٨س} = \text{٠} \Leftarrow$

$\text{س}(\text{س} - \text{٨}) = \text{٠} \Leftarrow$

$\text{س} = \text{٠}$ أو $\text{س} = \text{٨}$

∴ نقطتا التقاطع هما: (٠ ، ٠) ، (٨ ، ٤).

$$\text{الحجم} = \pi \int_{\text{٠}}^{\text{٨}} \left(\text{٢س} - \frac{\text{١}}{\text{٤}}\,\text{س}^{\text{٢}}\right) \text{ءس}$$

$$= \pi \left[\text{س}^{\text{٢}} - \frac{\text{١}}{\text{١٢}}\,\text{س}^{\text{٣}}\right]_{\text{٠}}^{\text{٨}}$$

$$= \frac{\text{٦٤}\pi}{\text{٣}} \ \text{وحدة حجم}$$

٦ $\text{ص} = -\text{س}^{\text{٣}}$ ، $\text{ص} = \text{٠}$ ، $\text{س} = \text{١}$ ، $\text{س} = \text{٤}$

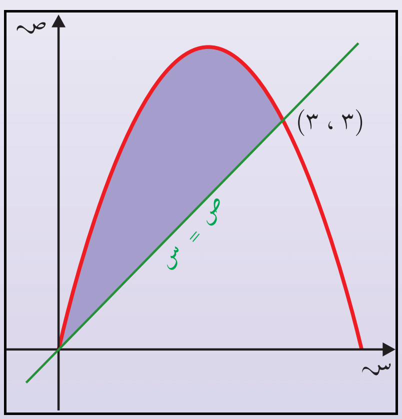
$$\text{الحجم} = \pi \int_{\text{١}}^{\text{٤}} \text{س}^{\text{٦}}\,\text{ءس} = \pi \left[\frac{\text{س}^{\text{٧}}}{\text{٧}}\right]_{\text{١}}^{\text{٤}} = \frac{\text{١٦٣٨٣}}{\text{٧}}\,\pi \ \text{وحدة حجم}$$

٧ $\text{ص} = \text{س} + \text{١}$ ، $\text{ص} = \text{س} - \text{١}$ ، $\text{س} = \text{١}$ ، $\text{س} = \text{٤}$

المستقيمان متوازيان، والمستقيم $\text{ص} = \text{س} + \text{١}$ يعلو المستقيم $\text{ص} = \text{س} - \text{١}$

$$\therefore \ \text{الحجم} = \pi \int_{\text{١}}^{\text{٤}} \left[(\text{س} + \text{١})^{\text{٢}} - (\text{س} - \text{١})^{\text{٢}}\right] \text{ءس}$$

$$= \pi \int_{\text{١}}^{\text{٤}} \text{٤س}\,\text{ءس} = \text{٢}\pi \left[\text{س}^{\text{٢}}\right]_{\text{١}}^{\text{٤}} = \text{٣٠}\pi \ \text{وحدة حجم}$$



٨ $\text{ص} = \text{٤س} - \text{س}^{\text{٢}}$ ، $\text{ص} = \text{س}$

$\text{ص} = \text{س} \Leftarrow$

$\text{س} = \text{٤س} - \text{س}^{\text{٢}}$

$\therefore \ \text{س}^{\text{٢}} - \text{٣س} = \text{٠}$

$\therefore \ \text{س}(\text{س} - \text{٣}) = \text{٠}$

$\therefore \ \text{س} = \text{٠}$ أو $\text{س} = \text{٣}$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٠}^{٣} \left[(٤\text{س} - \text{س}^{٢})^{٢} - \text{س}^{٢} \right] \text{ءس}$

$= \pi \int_{٠}^{٣} (١٦\text{س}^{٢} - ٨\text{س}^{٣} + \text{س}^{٤} - \text{س}^{٢}) \text{ءس}$

$= \pi \left[٥\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٤} + \frac{١}{٥}\text{س}^{٥} \right]_{٠}^{٣}$

$= \pi \left(٥ \times ٢٧ - ٢ \times ٨١ + \frac{١}{٥} \times ٢٤٣ \right)$

$= \frac{١٠٨}{٥} \pi$ وحدة حجم

٩ ص $=$ ١ $-$ س^{٢} ، س $+$ ص $=$ ١

ص $=$ ١ $-$ س^{٢} ، ص $= -$س $+$ ١

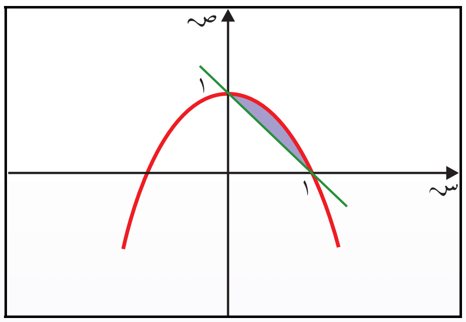
$-$س $+$ ١ $=$ ١ $-$ س^{٢}

$\therefore$ س^{٢} $-$ س $=$ ٠

$\Leftarrow$ س(س $-$ ١) $=$ ٠ $\Leftarrow$

س $=$ ٠ أو س $=$ ١

$\therefore$ نقطتا التقاطع هما: (٠ ، ١) ، (١ ، ٠).



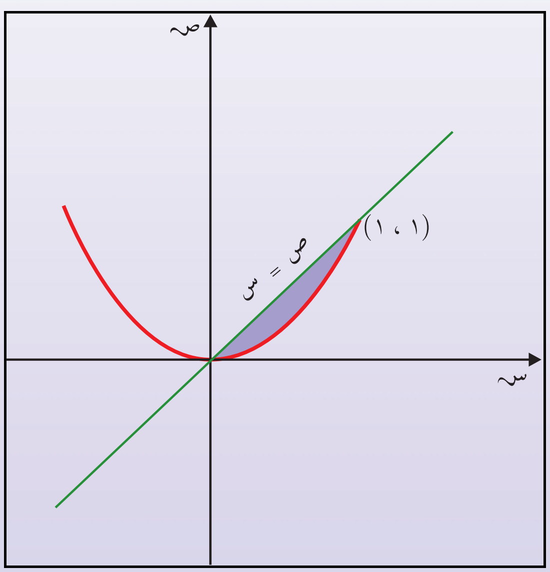
الحجم $= \pi \int_{٠}^{١} \left[(١ - \text{س}^{٢})^{٢} - (-\text{س} + ١)^{٢} \right] \text{ءس}$

$= \pi \int_{٠}^{١} (١ - ٢\text{س}^{٢} + \text{س}^{٤} - \text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١) \text{ءس}$

$= \pi \int_{٠}^{١} (-٣\text{س}^{٢} + \text{س}^{٤} + ٢\text{س}) \text{ءس}$

$= \pi \left[-\text{س}^{٣} + \frac{١}{٥}\text{س}^{٥} + \text{س}^{٢} \right]_{٠}^{١}$

$= \frac{\pi}{٥}$ وحدة حجم



١٠ ص $=$ س^{٢} ، ص $=$ س

س^{٢} $=$ س $\Leftarrow$

س^{٢} $-$ س $=$ ٠ $\Leftarrow$

Book Mark
Exit
Index

$\text{س}(\text{س} - ١) = ٠$

$\therefore \quad \text{س} = ٠ \quad ، \quad \text{س} = ١$

$\text{س} \geqslant \text{س}^{٢} \geqslant ٠$ لجميع قيم س في $[٠ ، ١]$

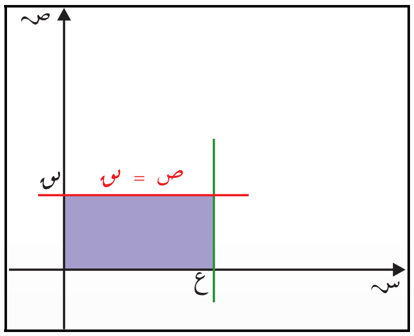
$$\text{الحجم} = \pi \int_{٠}^{١} (\text{س}^{٢} - \text{س}^{٤})\, \text{ءس}$$

$$= \pi \left[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - \frac{١}{٥}\text{س}^{٥} \right]_{٠}^{١} = \frac{٢\pi}{١٥} \text{ وحدة حجم}$$

*[١١] تنتج الأسطوانة من دوران المنطقة المحددة بالتالي:

$\text{ص} = \text{نق}$ ، محور السينات ، $\text{س} = ٠$ ، $\text{س} = \text{ع}$ حول محور السينات

ويكون حجم الاسطوانة



$$= \int_{٠}^{\text{ع}} \pi\, \text{ص}^{٢}\, \text{ءس}$$

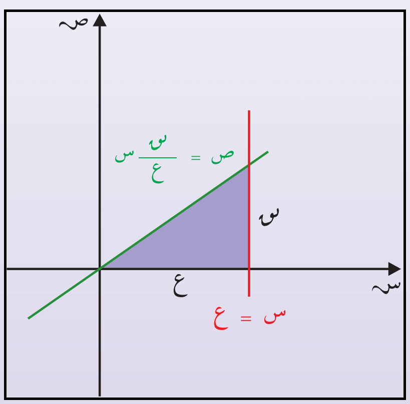
$$= \pi \int_{٠}^{\text{ع}} \text{نق}^{٢}\, \text{ءس} = \pi\, \text{نق}^{٢} \int_{٠}^{\text{ع}} \text{ءس}$$

$$= \pi\, \text{نق}^{٢} \Big[\text{س} \Big]_{٠}^{\text{ع}} = \pi\, \text{نق}^{٢}\, \text{ع}$$

*[١٢] ينتج المخروط الدائري القائم من دوران المنطقة المحددة بالتالي:

$$\text{ص} = \frac{\text{نق}}{\text{ع}}\text{س} \quad ، \quad \text{س} = ٠ \quad ، \quad \text{س} = \text{ع}$$

محور السينات، حول محور السينات، حجم المخروط الدائري القائم.



$$= \int_{٠}^{\text{ع}} \pi \text{ص}^{٢}\, \text{ءس} = \int_{٠}^{\text{ع}} \pi \left(\frac{\text{نق}}{\text{ع}} \right)^{٢} \text{ءس}$$

$$= \pi \frac{\text{نق}^{٢}}{\text{ع}^{٢}} \int_{٠}^{\text{ع}} \text{س}^{٢}\, \text{ءس} = \pi \frac{\text{نق}^{٢}}{\text{ع}^{٢}} \left[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} \right]_{٠}^{\text{ع}}$$

$$= \frac{\pi \text{نق}^{٢}}{\text{ع}^{٢}} \times \frac{١}{٣}\text{ع}^{٣} = \frac{١}{٣} \pi\, \text{نق}^{٢}\, \text{ع}$$

تمارين

١ – ٦

١ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (\text{س} - ٣)(٧ - \text{س})$

بوضع $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$ $\therefore (\text{س} - ٣)(٧ - \text{س}) = ٠$

$\therefore (\text{س} - ٣) = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٣$

أو $٧ - \text{س} = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٧$

س	$-\infty$		٣		٧		∞
إشارة ص′		− − −	صفر	+ + +	صفر	− − −	
ص		↘		↗		↘	

نلاحظ أن القيمة العظمى المحلية عند س = ٧

$\therefore \left(٧ ، \frac{٤٧}{٣}\right) \in \text{د}$

$\text{د}(\text{س}) = \int (\text{س} - ٣)(٧ - \text{س}) \, \text{ءس}$

$= \int (-\text{س}^٢ + ١٠\text{س} - ٢١) \, \text{ءس}$

$= -\frac{١}{٣}\text{س}^٣ + ٥\text{س}^٢ - ٢١\text{س} + \text{ث}$

$\therefore \frac{٤٧}{٣} = -\frac{٣٤٣}{٣} + ٢٤٥ - ١٤٧ + \text{ث}$

$\Leftarrow \text{ث} = ٣٢$

$\text{د}(\text{س}) = -\frac{١}{٣}\text{س}^٣ + ٥\text{س}^٢ - ٢١\text{س} + ٣٢$

للدالة د قيمة صغرى محلية عند س = ٣

$$\text{د}(٣) = -٩ + ٤٥ - ٦٣ + ٣٢ = ٥$$

القيمة الصغرى المحلية = ٥

٢

$$\text{د(س)} = \int \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس} = ٢\sqrt{\text{س}} + \text{ث}$$

ولكن $\text{د}(١) = ٢$ $\therefore ٢ = ٢ \times ١ + \text{ث} \Leftarrow \text{ث} = ٠$

$$\therefore \text{د(س)} = ٢\sqrt{\text{س}}$$

٣

$\because (١ ، ١)$ نقطة انعطاف $\therefore \text{د}''(١) = ٠ \quad ، \quad \text{د}(١) = ١$

$$\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} = \text{أس} + \text{ب} \quad \therefore \text{أ} + \text{ب} = ٠ \quad \text{.........} (١)$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{د}'(\text{س}) = \int (\text{أس} + \text{ب})\,\text{ءس} = \frac{١}{٢}\text{أس}^٢ + \text{ب س} + \text{ث}$$

ولكن $\text{د}(٠) = -١$ .... (٢)

وكذلك $\text{د}'(٠) = ٠$

$$\therefore ٠ = ٠ + ٠ + \text{ث} \Leftarrow \text{ث} = ٠$$

$$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \frac{١}{٢}\text{أس}^٢ + \text{ب س}$$

$$\text{د(س)} = \int \left(\frac{١}{٢}\text{أس}^٢ + \text{ب س}\right)\text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٦}\text{أس}^٣ + \frac{١}{٢}\text{ب س}^٢ + \text{ث}_١$$

من (٢) $\therefore -١ = ٠ + ٠ + \text{ث}_١ \quad \therefore \text{ث}_١ = -١$

$$\therefore \text{د(س)} = \frac{١}{٦}\text{أس}^٣ + \frac{١}{٢}\text{ب س}^٢ - ١$$

$\because (١ ، ١) \in \text{د} \quad \therefore ١ = \frac{١}{٦}\text{أ} + \frac{١}{٢}\text{ب} - ١$

$\therefore ٢ = \frac{١}{٦}\text{أ} + \frac{١}{٢}\text{ب} \quad \therefore ١٢ = \text{أ} + ٣\text{ب}$ .... (٣)

من (١) ، (٣) وبالطرح $\therefore$ ٢ب = ١٢ $\therefore$ ب = ٦

من (١) $\therefore$ أ = -٦

$د(س) = -س^{٣} + ٣س^{٢} - ١$

٤ $د'(س) = س^{٢} - ٢س - ٣$ بوضع $د'(س) = ٠$

$(س - ٣)(س + ١) = ٠$

س = ٣ أو س = -١

س	$-\infty$		-١		٣		∞
إشارة د'(س)		+ + +	صفر	- - -	صفر	+ + +	
د(س)		↗		↘		↗	

$د(س) = \int د'(س)\,ءس = \frac{١}{٣}س^{٣} - س^{٢} - ٣س + ث$

ولكن (٣ ، -٥) ∈ د (لماذا؟)

$\therefore$ -٥ = ٩ - ٩ - ٩ + ث ⟸ ث = ٤

$د(س) = \frac{١}{٣}س^{٣} - س^{٢} - ٣س + ٤$

القيمة العظمى = د(-١) = $-\frac{١}{٣} - ١ + ٣ + ٤ = ٥\frac{٢}{٣}$

٥ $د(س) = \int د'(س)\,ءس = \int (س^{٣} - ٢س + ٥)\,ءس$

$= \frac{١}{٤}س^{٤} - س^{٢} + ٥س + ث$

(٠ ، -٣) ∈ د

$\therefore$ -٣ = ٠ + ث $\therefore$ ث = -٣

$د(س) = \frac{١}{٤}س^{٤} - س^{٢} + ٥س - ٣$

Book Mark
Exit
Index

٦

$$ع = \int \frac{ءع}{ءص} ءص = \int \frac{-أ}{ص^{٢}} ءص$$

$$= \frac{أ}{ص} + ث$$

ع = ١٥م^{٣} عندما ص = ١ نيوتن/ م^{٢}

$\therefore$ ١٥ = أ + ث .... (١)

ع = ١٠م^{٣} عندما ص = ٢ نيوتن/ م^{٢}

$$١٠ = \frac{أ}{٢} + ث$$ $\therefore$ ٢٠ = أ + ٢ث .... (٢)

من (١) ، (٢) وبالطرح $\therefore$ ث = ٥ ومن (٢) ، أ = ١٠

$$\therefore ع = \frac{١٠}{ص} + ٥$$

بنود موضوعية :

أولًا :

العبارات ١ ، ٤ صحيحة .

ثانيًا :

٦	حـ	٧	أ	٨	أ	٩	ب
١٠	أ	١١	د	١٢	د	١٣	د
١٤	ب	١٥	أ	١٦	د	١٧	أ
١٨	حـ	١٩	أ	٢٠	د	٢١	حـ

أسئلة مقالية :

أولًا :

١

$$\int \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{(\text{س}^{\text{٣}} + \text{١})^{\text{٢}}}\, \text{ء س} = \int (\text{س}^{\text{٣}} + \text{١})^{-\text{٢}}\, \text{س}^{\text{٢}}\, \text{ء س}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٣}} \int (\text{س}^{\text{٣}} + \text{١})^{-\text{٢}} \times \text{٣س}^{\text{٢}}\, \text{ء س}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٣}}\ \frac{(\text{س}^{\text{٣}} + \text{١})^{-\text{١}}}{-\text{١}} + \text{ث}$$

$$= \frac{-\text{١}}{\text{٣}(\text{س}^{\text{٣}} + \text{١})} + \text{ث}$$

٢

$$\int_{\text{.}}^{\text{٢}} (\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{٥س} + \text{٣})\, \text{ء س} = \left[\frac{\text{٢}}{\text{٣}}\text{س}^{\text{٣}} - \frac{\text{٥}}{\text{٢}}\text{س}^{\text{٢}} + \text{٣س}\right]_{\text{.}}^{\text{٢}}$$

$$= \frac{\text{٢}}{\text{٣}} \times \text{٨} - \frac{\text{٥}}{\text{٢}} \times \text{٤} + \text{٦} - \text{٠} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}$$

٣ $\int ٥س^{٤}(س^{٥} - ٣)\,ءس = \int (س^{٥} - ٣) \times ٥س^{٤}\,ءس$

$$= \frac{(س^{٥} - ٣)^{٢}}{٢} + ث = \frac{١}{٢}(س^{٥} - ٣)^{٢} + ث$$

حل آخر:

$$\int (٥س^{٩} - ١٥س^{٤})\,ءس = \frac{٥}{١٠}س^{١٠} - \frac{١٥}{٥}س^{٥} + ث$$

$$= \frac{١}{٢}س^{١٠} - ٣س^{٥} + ث$$

لاحظ أن الجواب الأول $= \frac{١}{٢}(س^{١٠} - ٦س^{٥} + ٩) + ث$

$$= \frac{١}{٢}س^{١٠} - ٣س^{٥} + \frac{٩}{٢} + ث$$

$$= \frac{١}{٢}س^{١٠} - ٣س^{٥} + ث_{١}$$

حيث $ث_{١} = \frac{٩}{٢} + ث$

فالاختلاف فقط بين الجوابين في الثابت

٤ $\int (س^{٥} - ٣س^{٣} + س^{٢})\,ءس = \frac{١}{٦}س^{٦} - \frac{٣}{٤}س^{٤} + \frac{١}{٣}س^{٣} + ث$

٥ $\int (٢س - ١)^{٦}\,ءس = \frac{١}{٢}\int (٢س - ١)^{٦} \times ٢\,ءس$

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{(٢س - ١)^{٧}}{٧} + ث$$

$$= \frac{(٢س - ١)^{٧}}{١٤} + ث$$

٦ $\int_{٠}^{٢} (س^{٤} - ٦س^{٢} + ٩)\,ءس = \left[\frac{١}{٥}س^{٥} - ٢س^{٣} + ٩س\right]_{٠}^{٢}$

$$= \frac{١}{٥} \times ٣٢ - ٢ \times ٨ + ٩ \times ٢ - ٠ = ٨\frac{٢}{٥}$$

٧ $\int (١ + ٣\text{س}^{٢})^{٥}\,\text{س}\;\text{ءس} = \frac{١}{٦}\int (١ + ٣\text{س}^{٢})^{٥} \times ٦\text{س}\;\text{ءس}$

$= \frac{١}{٦} \times \frac{(١ + ٣\text{س}^{٢})^{٦}}{٦} + \text{ث}$

$= \frac{(١ + ٣\text{س}^{٢})^{٦}}{٣٦} + \text{ث}$

٨ $\int (\text{س}^{٢} + ١)^{-٣}\,\text{س}\;\text{ءس} = \frac{١}{٢}\int (\text{س}^{٢} + ١)^{-٣} \times ٢\text{س}\;\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(\text{س}^{٢} + ١)^{-٢}}{-٢} + \text{ث}$

$= -\frac{١}{٤(\text{س}^{٢} + ١)^{٢}} + \text{ث}$

٩ $\int (\text{س}^{٢} + ٢)^{-٢} \times ٣\text{س}\;\text{ءس} = \frac{٣}{٢}\int (\text{س}^{٢} + ٢)^{-٢} \times ٢\text{س}\;\text{ءس}$

$= \frac{٣}{٢} \times \frac{(\text{س}^{٢} + ٢)^{-١}}{-١} + \text{ث}$

$= \frac{-٣}{٢(\text{س}^{٢} + ٢)} + \text{ث}$

ثانيًا :

١٠ $\text{ص} = \text{د}(\text{س})$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}(\text{س} - ١)$

$\therefore\ \text{ص} = \int ٢\text{س}(\text{س} - ١)\;\text{ءس}$

$= \int (٢\text{س}^{٢} - ٢\text{س})\;\text{ءس}$

$= \frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + \text{ث}$

ولكن (١، ٠) تنتمي إلى المنحنى :

$$\therefore\ ٠ = \frac{٢}{٣} - ١ + ث \Leftarrow ث = \frac{١}{٣}$$

$$\therefore\ ص = \frac{٢}{٣} س^{٣} - س^{٢} + \frac{١}{٣}$$

أو $٣ص = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} + ١$

١١ $ك = \int \frac{دك}{دد}\, دد = \int (٩٠ + ١٢د - ٦د^{٢})\, دد$

$$= ٩٠د + ٦د^{٢} - ٢د^{٣} + ث$$

ولكن $ك = ٠$ عندما $د = ٠ \Leftarrow ث = ٠$

$$ك = ٩٠د + ٦د^{٢} - ٢د^{٣}$$

عند $د = ٤ \quad \therefore\ ك = ٣٢٨$ كلمة

$$ل = \int \frac{دل}{دد}\, دد = \int (٨٥ + ١٥د - ٦د^{٢})\, دد$$

$$= ٨٥د + \frac{١٥}{٢} د^{٢} - ٢د^{٣} + ث_{١}$$

ولكن $ل = ٠$ عندما $د = ٠ \Leftarrow ث_{١} = ٠$

$$ل = ٨٥د + \frac{١٥}{٢} د^{٢} - ٢د^{٣}$$

عند $د = ٤ \quad \therefore\ ل = ٣٣٢$ كلمة

$\therefore$ المتسابقة الثانية تكتب كلمات أكثر .

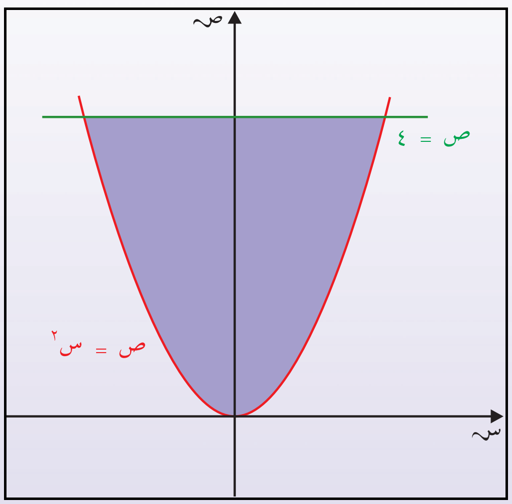
ثالثًا :

١٢ $ص = س^{٢}$ ، $ص = ٤$

نوجد نقط التقاطع

$$٤ = س^{٢}$$

$$\therefore\ س = \pm ٢$$



$$\therefore\ المساحة = \int_{-٢}^{٢} (٤ - س^{٢})\, دس = \left[٤س - \frac{١}{٣} س^{٣}\right]_{-٢}^{٢}$$

$$= \left(٨ - \frac{٨}{٣}\right) - \left(-٨ + \frac{٨}{٣}\right) = \frac{٣٢}{٣}$$ وحدة مساحة

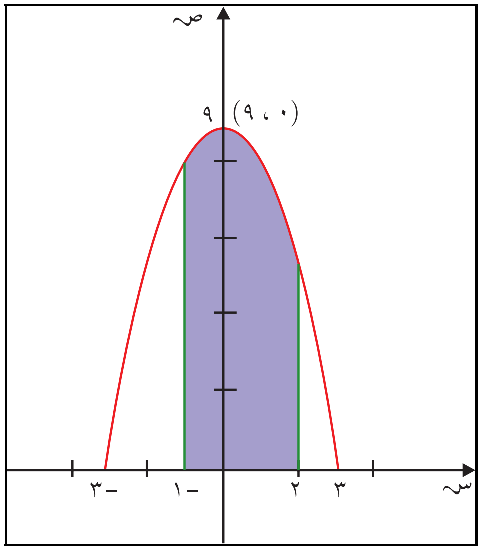
١٣

$$\text{ص} = ٩ - \text{س}^{٢}$$

معادلة محور السينات هي ص = ٠

نوجد نقط التقاطع

$$٩ - \text{س}^{٢} = ٠ \Leftarrow \text{س} = -٣ \;\text{ ، }\; \text{س} = ٣$$



$$\text{المساحة} = \int_{-١}^{٢} (٩ - \text{س}^{٢})\, \text{ء س}$$

$$= \left[٩\text{س} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{-١}^{٢}$$

$$= \left(١٨ - \frac{٨}{٣}\right) - \left(-٩ + \frac{١}{٣}\right)$$

$$= ٢٤ \text{ وحدة مساحة}$$

١٤

$$\text{ص} = ٤ - \text{س}^{٢} \;\text{ ، }\; \text{ص} = ٣\text{س}$$

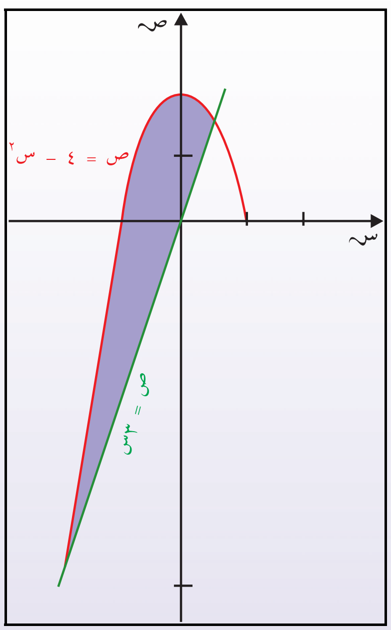
نوجد نقط التقاطع

$$\therefore ٣\text{س} = ٤ - \text{س}^{٢}$$

$$\therefore \text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٤ = ٠$$

$$(\text{س} + ٤)(\text{س} - ١) = ٠$$

$$\text{س} = -٤ \text{ أو } \text{س} = ١$$



$$\therefore \text{المساحة} = \int_{-٤}^{١} \left[(٤ - \text{س}^{٢}) - ٣\text{س}\right] \text{ء س}$$

$$= \int_{-٤}^{١} (٤ - \text{س}^{٢} - ٣\text{س})\, \text{ء س}$$

$$= \left[٤\text{س} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - \frac{٣}{٢}\text{س}^{٢}\right]_{-٤}^{١}$$

$$= \left(٤ - \frac{١}{٣} - \frac{٣}{٢}\right) - \left(-١٦ + \frac{٦٤}{٣} - \frac{٤٨}{٢}\right)$$

$$= \frac{١٣}{٦} + \frac{١١٢}{٦} = \frac{١٢٥}{٦} \text{ وحدة مساحة}$$

$$= ٢٠\frac{٥}{٦} \text{ وحدة مساحة}$$

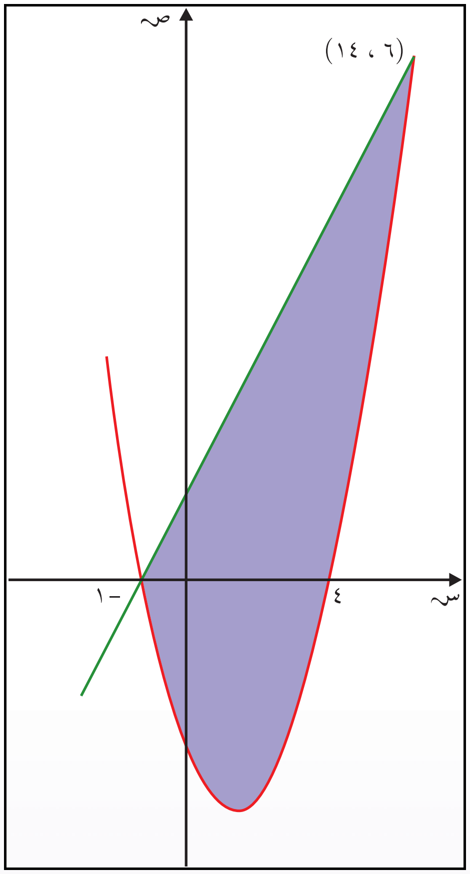
١٥ $ص = س^{٢} - ٣س - ٤$ ، $ص = ٢(س + ١)$

$٢(س + ١) = س^{٢} - ٣س - ٤$

$\therefore$ $س^{٢} - ٥س - ٦ = ٠$

$\therefore$ $(س - ٦)(س + ١) = ٠$

$\therefore$ $س = -١$ أو $س = ٦$



استعنا في الرسم بتعيين نقطتي تقاطع منحنى الدالة :

$ص = س^{٢} - ٣س - ٤$

مع المحور السيني :

$ص = ٠ \Leftarrow$

$س^{٢} - ٣س - ٤ = ٠$

$(س - ٤)(س + ١) = ٠$

$س = ٤$ أو $س = -١$

والمستقيم $ص = ٢(س + ١)$ يقطع محور السينات عند $س = -١$ (عوض عن $ص = ٠$ في معادلة المستقيم).

المساحة المطلوبة $= \int_{-١}^{٦} [(٢س + ٢) - (س^{٢} - ٣س - ٤)]\, ءس$

$= \int_{-١}^{٦} (-س^{٢} + ٥س + ٦)\, ءس$

$= \left[-\frac{١}{٣}س^{٣} + \frac{٥}{٢}س^{٢} + ٦س\right]_{-١}^{٦}$

$= \left(-\frac{٢١٦}{٣} + ٩٠ + ٣٦\right) - \left(\frac{١}{٣} + \frac{٥}{٢} - ٦\right)$ وحدة مساحة .

$= ٥٧\frac{١}{٦}$ وحدة مساحة .

١٦ $د(س) = ٥س - س^{٢}$ ، $هـ(س) = س^{٢} - ٣س$

نوجد نقط التقاطع .

$٥س - س^{٢} = س^{٢} - ٣س$

$\therefore$ ٢س^{٢} − ٨س = ٠

٢س (س − ٤) = ٠

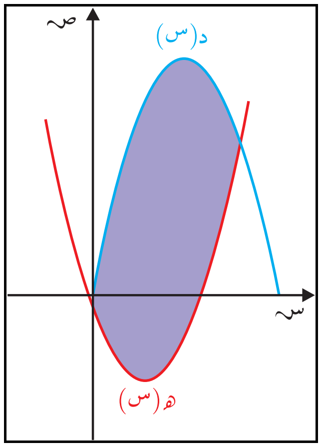
س = ٠ أو س = ٤

بأخذ إحدى قيم س $\in$ (٠ ، ٤)

نضع س = ١ مثلًا د(١) = ٤

هـ(١) = −٢

نلاحظ أن د(١) > هـ(١)



$\therefore$ المساحة المطلوبة $= \int_{٠}^{٤} [(٥س - س^{٢}) - (س^{٢} - ٣س)]\, ءس$

$= \int_{٠}^{٤} (-٢س^{٢} + ٨س)\, ءس$

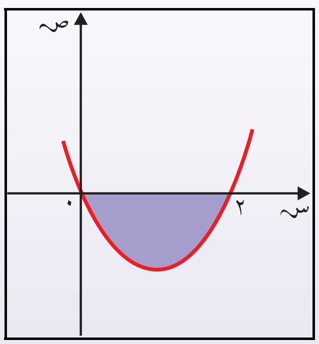
$= \left[-\frac{٢}{٣}س^{٣} + ٤س^{٢}\right]_{٠}^{٤} = -\frac{١٢٨}{٣} + ٦٤$

$= ٦٤\left(-\frac{٢}{٣} + ١\right) = \frac{٦٤}{٣}$ وحدة مساحة

رابعًا:

١٧ ص = س(س − ٢) يقطع محور السينات عند س = ٠ ، س = ٢

ص = س^{٢} − ٢س



حجم الجسم الناتج من الدوران

$= \pi \int_{٠}^{٢} (س^{٢} - ٢س)^{٢}\, ءس$

$= \pi \int_{٠}^{٢} (س^{٤} - ٤س^{٣} + ٤س^{٢})\, ءس$

$= \pi \left[\frac{١}{٥}س^{٥} - س^{٤} + \frac{٤}{٣}س^{٣}\right]_{٠}^{٢}$

$= \pi \left[\frac{٣٢}{٥} - ١٦ + \frac{٣٢}{٣}\right] = \frac{١٦}{١٥}\pi$ وحدة حجم

١٨ ص = (س − ١)^{٢}

حجم الجسم الناتج من الدوران $= \pi \int_{١}^{٢} (س - ١)^{٤}\, ءس$

$= \pi \left[\frac{(س - ١)^{٥}}{٥}\right]_{١}^{٢} = \pi\left(\frac{١}{٥} - ٠\right) = \frac{١}{٥}\pi$ وحدة حجم.

تدريس القطوع المخروطية

Conics Sections

الفصل الثاني

عرض موضوع «القطوع المخروطية» في الفصل الثاني من الجزء الثاني لكتاب الطالب، وقد جاء في ستة بنود على النحو التالي:

- ٢ – ١ القطع المخروطي.
- ٢ – ٢ القطع المكافئ.
- ٢ – ٣ القطع الناقص.
- ٢ – ٤ القطع الزائد.
- ٢ – ٥ الاختلاف المركزي.
- ٢ – ٦ ملخص وتمارين عامة.

Book Mark
Exit
Index

- تحليل المحتوى العلمي :

أولًا : مفاهيم ومصطلحات ورموز :

- المخروط الدائري القائم ثنائي القاعدة .
- راسم المخروط الدائري القائم ثنائي القاعدة .
- محور المخروط الدائري القائم ثنائي القاعدة .
- القطع المخروطي .
- القطع المكافئ .
- بؤرة القطع المكافئ .
- دليل القطع المكافئ .
- رأس القطع المكافئ .
- الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ .

$$ص^{٢} = ٤أ\,س \quad ، \quad ص^{٢} = -٤أ\,س$$

$$س^{٢} = ٤أ\,ص \quad ، \quad س^{٢} = -٤أ\,ص$$

- محور تناظر القطع المكافئ .
- القطع الناقص .
- بؤرتا القطع الناقص $ب_{١}$ ، $ب_{٢}$.
- رأسا القطع الناقص $ر_{١}$ ، $ر_{٢}$.
- مركز القطع الناقص .
- المحور الأكبر للقطع الناقص .
- طول المحور الأكبر للقطع الناقص ٢أ .
- المحور الأصغر للقطع الناقص .
- طول المحور الأصغر للقطع الناقص ٢ب .
- الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص :

$$\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١ \quad ، \quad \frac{س^{٢}}{ب^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{أ^{٢}} = ١$$

- محور تناظر القطع الناقص.
- القطع الزائد.
- بؤرتا القطع الزائد $ب_{١}$ ، $ب_{٢}$.
- رأسا القطع الزائد $ر_{١}$ ، $ر_{٢}$.
- مركز القطع الزائد.
- الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد:

$$\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١ \quad ، \quad \frac{ص^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{س^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$

- المحور الأساسي للقطع الزائد.
- المحور المرافق للقطع الزائد.
- طول المحور الأساسي للقطع الزائد ٢أ .
- طول المحور المرافق للقطع الزائد ٢ب .
- الخطان التقاربيان للقطع الزائد.
- محور تناظر القطع الزائد.

ثانيًا: حقائق وتعميمات:

- معادلتا الخطين التقاربيين للقطع الزائد:

$$ص = \pm \frac{ب}{أ} س \quad ، \quad ص = \pm \frac{أ}{ب} س$$

- الاختلاف المركزي للقطع المخروطي هو e ويكون:

$e < ١$ للقطع الناقص

$e > ١$ للقطع الزائد

$e = ١$ للقطع المكافئ

- في حالة القطع الناقص والقطع الزائد $e = \frac{حـ}{أ}$
- المعادلة $س^{٢} = ٤أ ص$ ، معادلة قطع مكافئ:

رأسه (٠ ، ٠)

فتحته إلى أعلى حيث $أ > ٠$

متناظر حول محور الصادات
بؤرته $(٠ ، ٲ)$
معادلة دليله : $ص = -ٲ$.

- المعادلة $س^٢ = -٤ٲ ص$ ، معادلة قطع مكافئ.
رأسه $(٠ ، ٠)$
فتحته إلى أسفل حيث $ٲ > ٠$
متناظر حول محور الصادات
بؤرته $(٠ ، -ٲ)$
معادلة دليله : $ص = ٲ$.

- المعادلة $ص^٢ = ٤ٲ س$ ، معادلة قطع مكافئ.
رأسه $(٠ ، ٠)$
فتحته إلى اليمين حيث $ٲ > ٠$
متناظر حول محور السينات
بؤرته $(ٲ ، ٠)$
معادلة دليله : $س = -ٲ$.

- المعادلة $ص^٢ = -٤ٲ س$ ، معادلة قطع مكافئ.
رأسه $(٠ ، ٠)$
فتحته إلى اليسار حيث $ٲ > ٠$
متناظر حول محور السينات
بؤرته $(-ٲ ، ٠)$
معادلة دليله : $س = ٲ$.

- المعادلة : $\frac{س^٢}{ٲ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١ \; : \; ٲ > ب$ ، معادلة قطع ناقص.
مركزه $(٠ ، ٠)$
رأساه $(ٲ ، ٠)$ ، $(-ٲ ، ٠)$
بؤرتاه $(حـ ، ٠)$ ، $(-حـ ، ٠)$
متناظر حول كل من المحورين.

- المعادلة : $\frac{س^2}{ب^2} + \frac{ص^2}{أ^2} = 1$: أ > ب ، معادلة قطع ناقص .

مركزه (٠ ، ٠)

رأساه (٠ ، أ) ، (٠ ، −أ)

بؤرتاه (٠ ، حـ) ، (٠ ، −حـ)

متناظر حول كل من المحورين .

- في جميع الحالات سالفة الذكر يكون : $أ^2 = ب^2 + حـ^2$

- مجموع بعدي البؤرتين عن أي نقطة تنتمي للقطع الناقص يساوي ٢أ

- المعادلة : $\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = 1$: أ > ب ، معادلة قطع زائد .

مركزه (٠ ، ٠)

رأساه (أ ، ٠) ، (−أ ، ٠)

بؤرتاه (حـ ، ٠) ، (−حـ ، ٠)

خطاه التقاربيان : ص = $\pm \frac{ب}{أ}$ س

متناظر حول كل من المحورين .

- المعادلة : $\frac{ص^2}{أ^2} - \frac{س^2}{ب^2} = 1$ ، معادلة قطع زائد .

مركزه (٠ ، ٠)

رأساه (٠ ، أ) ، (٠ ، −أ)

بؤرتاه (٠ ، حـ) ، (٠ ، −حـ)

خطاه التقاربيان : ص = $\pm \frac{أ}{ب}$ س

- متناظر حول كل من المحورين .

- في جميع الحالات سالفة الذكر يكون $حـ^2 = أ^2 + ب^2$

- القيمة المطلقة للفرق بين بعدي البؤرتين عن أي نقطة تنتمي للقطع الزائد = ٢أ

ثالثًا : مهارات وخوارزميات :

- تعيين البؤرة والدليل لقطع مكافئ رأسه نقطة الأصل وعلمت معادلته .

- تعيين الرأس والبؤرة والدليل لقطع مكافئ معطاة معادلته في أي صورة قياسية.
- إيجاد معادلة قطع مكافئ معلوم رأسه وبؤرته.
- مناقشة معادلة معطاة لقطع مكافئ.
- تعيين معادلة قطع مكافئ من رسمه البياني.
- رسم قطع مكافئ معطاة معادلته في أي صورة.
- إيجاد معادلة قطع ناقص معلوم بؤرتاه وطول محوره الأكبر أو الأصغر.
- تعيين البؤرتين والرأسين وطولي المحورين لقطع ناقص مركزه نقطة الأصل.
- تعيين المركز والبؤرتين والرأسين لقطع ناقص معطاة معادلته في أي صورة قياسية.
- إيجاد معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل ومعلوم بؤرتاه واختلافه المركزي.
- تعيين البؤرتين لقطع ناقص مركزه نقطة الأصل ومعادلته معطاة.
- رسم قطع ناقص معطاة معادلته في أي صورة.
- إيجاد معادلة قطع زائد معلوم رأساه وبؤرتاه.
- تعيين رأسي وبؤرتي قطع زائد معادلته معطاة في أي صورة.
- إيجاد الخطين التقاربيين لقطع زائد معلوم رأساه وبؤرتاه.
- إيجاد الخطين التقاربيين لقطع زائد معادلته معطاة في أي صورة قياسية.
- إيجاد معادلة قطع زائد معلوم رأساه ومركزه واختلافه المركزي.
- رسم قطع زائد معادلته معطاة في أي صورة قياسية.
- تعيين الاختلاف المركزي لقطع ناقص مركزه نقطة الأصل ومعادلته معطاة.
- تعيين الاختلاف المركزي لقطع زائد معادلته معطاة.

رابعًا: مسائل وتطبيقات:

من أجل تنمية أساليب التفكير السليم:

- حل مسائل رياضية تعتمد على المعارف والمهارات المتضمنة في الموضوع وفق استراتيجية حل المسائل.
- حل تطبيقات حياتية تتناول مدارات بعض الكواكب.
- استنتاج الصور المختلفة لمعادلات القطوع المخروطية الثلاثة اعتمادًا على تعريف كل منها.

- الأهداف السلوكية :

من المتوقع أن يصبح الطالب في نهاية دراسته لهذا الفصل قادرًا على أن :

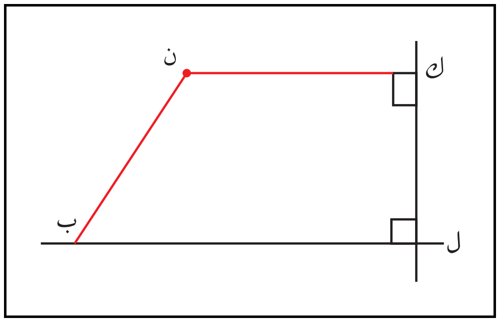
- يعرّف كلًّا من القطع المكافئ والقطع الناقص والقطع الزائد .
- يذكر الصور القياسية لمعادلات القطوع المخروطية الثلاثة .
- يذكر معادلتي الخطين التقاربيين للقطع الزائد في أوضاعه المختلفة .
- يعين البؤرة والدليل لقطع مكافئ معلومة معادلته .
- يعين معادلة قطع مكافئ من رسمه الموضح عليه عناصره .
- يرسم قطع مكافئ معطاة معادلته .
- يجد معادلة قطع مكافئ معلوم رأسه وبؤرته .
- يجد معادلة قطع ناقص معلوم بؤرتاه وطول محور الأكبر أو الأصغر .
- يعين البؤرتين والرأسين وطولي المحورين لقطع ناقص مركزه نقطة الأصل .
- يعين المركز والبؤرتين والرأسين لقطع ناقص معطاة معادلته في أي صورة .
- يجد معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل ومعلوم بؤرتاه واختلافه المركزي .
- يعين البؤرتين والاختلاف المركزي لقطع ناقص مركزه نقطة الأصل ومعادلته معطاة .
- يرسم قطع ناقص معادلته معطاة في أي صورة قياسية .
- يجد معادلة قطع زائد معلوم رأساه وبؤرتاه .
- يعين رأسي وبؤرتي قطع زائد معادلته معطاة في أي صورة قياسية .
- يجد الخطين التقاربيين لقطع زائد معادلته معطاة في أي صورة قياسية .
- يجد الخطين التقاربيين لقطع زائد معلوم رأساه وبؤرتاه .
- يعين الاختلاف المركزي لقطع زائد معادلته معطاة في أي صورة قياسية .
- يجد معادلة قطع زائد معلوم رأساه ومركزه واختلافه المركزي .
- يرسم قطع زائد معادلته معطاة في أي صورة قياسية .

- خلفية علمية :

التعريف العام للقطع المخروطي :

القطع المخروطي هو مجموعة جميع النقط في المستوى الإحداثي بحيث تكون نسبة بعدها عن نقطة ثابتة إلى بعدها عن مستقيم ثابت تساوي مقدارًا ثابتًا يرمز له بالرمز «e». تسمى النقطة الثابتة «بؤرة» ويسمى المستقيم الثابت «دليل». وتسمى النسبة «e» الاختلاف المركزي للقطع المخروطي.

في الشكل، $\overleftrightarrow{\text{ل ك}}$ هو الدليل، ب هي البؤرة، ن نقطة ما على القطع المخروطي.



$\therefore\ e = \dfrac{\text{ن ب}}{\text{ن ك}} > ٠$

من التعريف يكون القطع المخروطي متناظرًا حول $\overleftrightarrow{\text{ل ب}}$

واضح أن منحنى القطع المخروطي يعتمد على «e».

١ إذا كان e = ١ فإن القطع المخروطي هو قطع مكافئ.

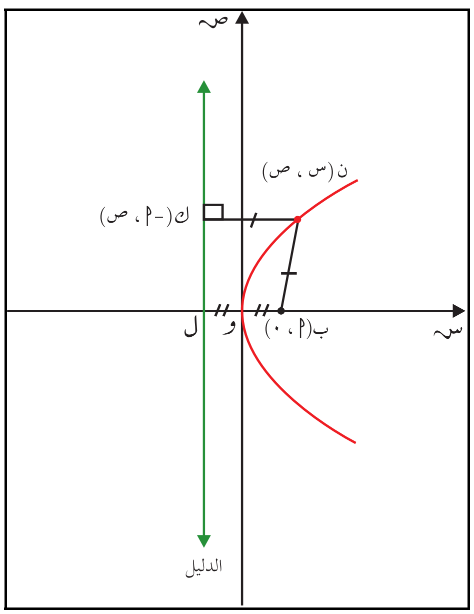
٢ إذا كان e < ١ فإن القطع المخروطي هو قطع ناقص.

٣ إذا كان e > ١ فإن القطع المخروطي هو قطع زائد.

القطع المكافئ :

في الشكل المقابل رأس القطع المكافئ نقطة الأصل.

ليكن ب و = ٲ حيث ب هي البؤرة، ن(س ، ص) أي نقطة على المنحنى، $\overline{\text{ن ك}}$ // $\overline{\text{ب ل}}$، $\overleftrightarrow{\text{ك ل}}$ هو الدليل ومعادلته هي س = -ٲ.



$\because\ e = ١$

$\therefore$ بالتعريف ن ب = ن ك

∴ $(\text{ن ب})^{٢} = (\text{ن ك})^{٢}$

∴ $(\text{ص} - ٠)^{٢} + (\text{س} - \text{أ})^{٢}$

$= (\text{س} + \text{أ})^{٢}$

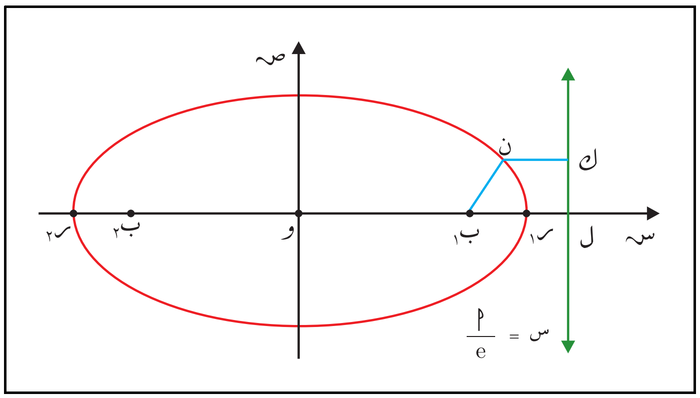
∴ $\text{ص}^{٢} + \text{س}^{٢} - ٢\text{أ}\,\text{س} + \text{أ}^{٢}$

$= \text{س}^{٢} + ٢\text{أ}\,\text{س} + \text{أ}^{٢}$

∴ $\text{ص}^{٢} = ٤\text{أ}\,\text{س}$

القطع الناقص :

في الشكل التالي قطع ناقص مركزه نقطة الأصل، رأساه $\text{ر}_{١}$ ، $\text{ر}_{٢}$ بؤرتاه $\text{ب}_{١}$ ، $\text{ب}_{٢}$ لتكن ن(س ، ص) نقطة على المنحنى، $\overline{\text{ن ك}} \,//\, \overline{\text{ب}_{١}\text{ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ك ل}}$ الدليل ليكن $\text{ر}_{١}\text{ر}_{٢} = ٢\text{أ}$ أي الرأسان هما: $\text{ر}_{١}(\text{أ} ، ٠)$ ، $\text{ر}_{٢}(-\text{أ} ، ٠)$.



لتكن $\text{ب}_{١}$ هي النقطة $\text{ب}_{١}(\text{حـ} ، ٠)$

ولتكن معادلة الدليل هي: س = د

بالتعريف $e = \dfrac{\text{ن ب}_{١}}{\text{ن ك}}$

كذلك بما أن $\text{ر}_{١}$ تقع على المنحنى (مثلها مثل ن)، فإن $e = \dfrac{\text{ر}_{١}\text{ب}_{١}}{\text{ر}_{١}\text{ل}}$

بالمثل $e = \dfrac{\text{ر}_{٢}\text{ب}_{١}}{\text{ر}_{٢}\text{ل}}$

∴ $\text{ر}_{١}\text{ب}_{١} = e\,(\text{ر}_{١}\text{ل})$ ، $\text{ر}_{٢}\text{ب}_{١} = e\,(\text{ر}_{٢}\text{ل})$

لكن $\text{ر}_{١}\text{ب}_{١} = \text{أ} - \text{حـ}$ ، $\text{ر}_{١}\text{ل} = \text{د} - \text{أ}$

$\text{أ} - \text{ج} = e(\text{أ} - \text{د})$ .... (١)

كذلك $\text{ر}_٢\text{ب}_١ = \text{أ} + \text{ج}$ ، $\text{ر}_٢\text{ل} = \text{د} + \text{أ}$

$\therefore \text{أ} + \text{ج} = e(\text{د} + \text{أ})$ .... (٢)

بحل (١) ، (٢): $\text{ج} = \text{أ}e$ ، $\text{د} = \dfrac{\text{أ}}{e}$

$\therefore$ $\text{ب}_١$ هي $\text{ب}_١(\text{أ} ، ٠)$ ومعادلة الدليل $\overleftrightarrow{\text{لَ ل}}$ هي $\text{س} = \dfrac{\text{أ}}{e}$.

$\because$ للقطع الناقص رأسين وبؤرتين، $\therefore$ له دليلان:

$\because$ أحد الدليلين هو $\text{س} = \dfrac{\text{أ}}{e}$

$\therefore$ الدليل الآخر هو $\text{س} = -\dfrac{\text{أ}}{e}$

من التعريف $\text{ن ب}_١ = e(\text{ن ك})$ $\therefore$ $(\text{ن ب}_١)^٢ = e^٢(\text{ن ك})^٢$

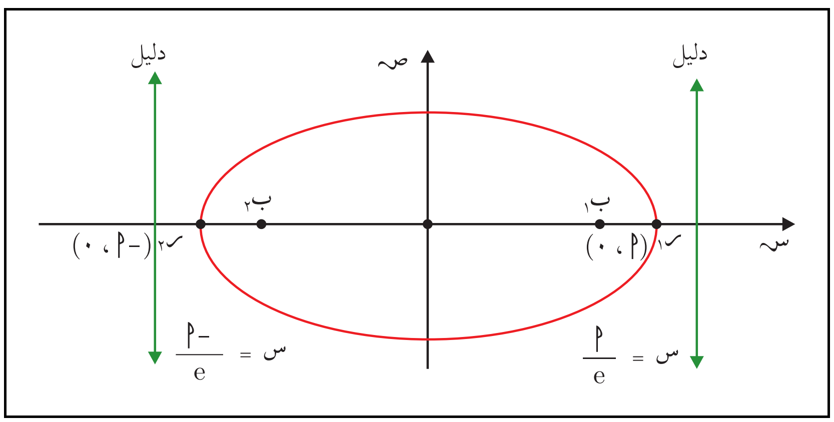
$$\therefore \text{ص}^٢ + (\text{س} - \text{أ}e)^٢ = e^٢\left(\text{س} - \dfrac{\text{أ}}{e}\right)^٢$$

$$\text{ص}^٢ + \text{س}^٢ - ٢\text{أ}e\,\text{س} + \text{أ}^٢e^٢ = \text{أ}^٢ - ٢\text{أ}e\,\text{س} + e^٢\text{س}^٢$$

$$\therefore \text{س}^٢(١ - e^٢) + \text{ص}^٢ = \text{أ}^٢(١ - e^٢)$$

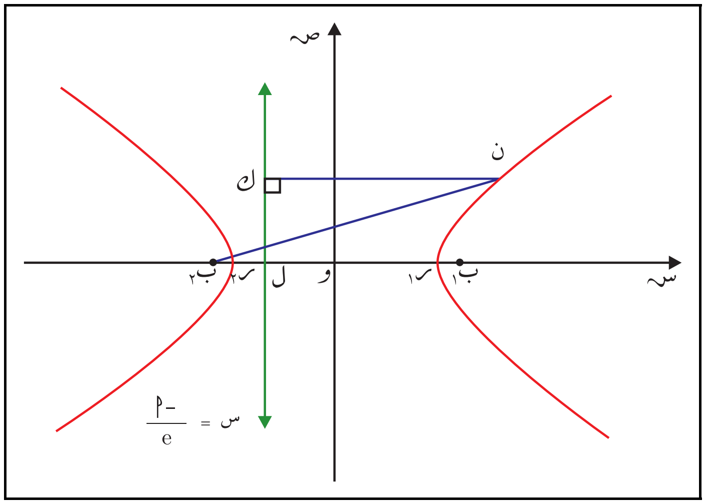
$$\therefore \dfrac{\text{س}^٢}{\text{أ}^٢} + \dfrac{\text{ص}^٢}{١ - e^٢} = ١ \Leftarrow \dfrac{\text{ص}^٢}{\text{أ}^٢} + \dfrac{\text{ص}^٢}{\text{ب}^٢} = ١$$

(بوضع $\text{ب}^٢ = ١ - e^٢$)



القطع الزائد :

في الشكل التالي قطع زائد مركزه نقطة الأصل، رأساه ر١ ، ر٢ ، بؤرتاه هما ب١ ، ب٢ .



لتكن ن(س ، ص) أي نقطة على المنحنى، $\overline{\text{ن ك}}$ // $\overline{\text{ب١ب٢}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ك ل}}$ دليل .

ليكن ر١ر٢ = ٢أ حيث الرأسان هما ر١(أ ، ٠) ، ر٢(-أ ، ٠)، لتكن ب٢ هي النقطة ب٢(-حـ ، ٠) .

ومعادلة الدليل هي س = - ى .

∵ ر١ ، ر٢ تقعان على المنحنى ∴ بالتعريف :

$$e = \frac{\text{ب٢ر٢}}{\text{ر٢ل}} \quad ، \quad e = \frac{\text{ب٢ر١}}{\text{ر١ل}}$$

∴ ب٢ر٢ = e (ر٢ل) ، ب٢ر١ = e (ر١ل)

لكن ب٢ر٢ = حـ - أ ، ر٢ل = أ - ى

∴ حـ - أ = e (أ - ى) .... (١)

كذلك ب٢ر١ = حـ + أ ، ر١ل = أ + ى

∴ حـ + أ = e (أ + ى) .... (٢)

بحل (١) ، (٢) : حـ = أe ، ى = $\frac{\text{أ}}{e}$.

∴ ب٢ هي ب٢(-أe ، ٠) ومعادلة الدليل $\overleftrightarrow{\text{ك ل}}$ هي س = - $\frac{\text{أ}}{e}$

∵ للقطع الزائد رأسين وبؤرتين، ∴ له دليلان .

∵ أحد الدليلين هو $س = -\frac{أ}{e}$

∴ الدليل الآخر هو $س = \frac{أ}{e}$.

من التعريف: $ب_٢ن = e(ن ك) \Leftarrow (ن ب_٢)^٢ = e^٢(ن ك)^٢$

∴ $ص^٢ + (س + أe)^٢ = e^٢\left(س + \frac{أ}{e}\right)^٢$

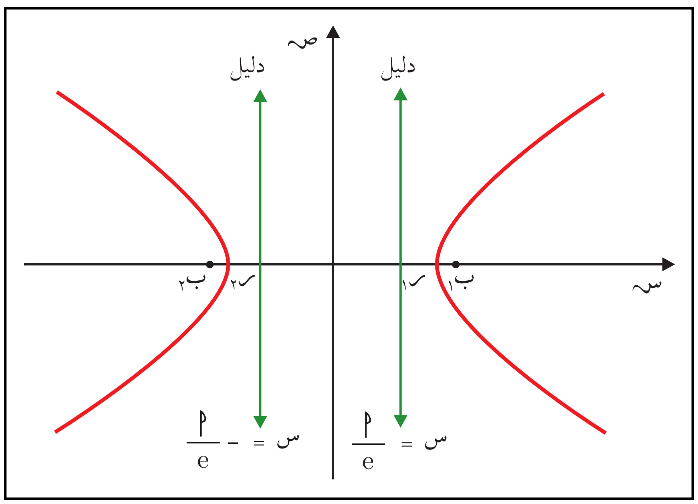
∴ $ص^٢ + س^٢ + ٢أe\,س + أ^٢e^٢ = e^٢س^٢ + ٢أe\,س + أ^٢ \Leftarrow$

$$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{أ^٢(١ - e^٢)} = ١$$ .... (٣)

لكن $e > ١$ ∴ $أ^٢(١ - e^٢) < ٠$

∴ بوضع $ب^٢ = أ^٢(e^٢ - ١)$

∴ المعادلة (٣) تصبح: $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$



- الوسائط التعليمية:

يمكن الاستعانة بالوسائط التالية:

- مسطرة خشبية غير مدرّجة ومسطرة خشبية مدرّجة.
- سبورة المربعات.
- طباشير ملون أو أقلام ملونة.

- جهاز العرض العلوي وبعض الشفافيات.
- لوحات على شفافيات لقطوع مخروطية في أوضاع مختلفة.
- نموذج مجسم لمخروط دائري قائم ثنائي القاعدة.
- نموذج مجسم لمخروط دائري قائم ثنائي القاعدة يقطعه مستوى ليوضح قطعًا مخروطيًا - يمكن فصل المستوى ومشاهدة القطع المخروطي.
(عدّد ٤ نماذج لتوضيح: الدائرة، القطع الناقص، القطع الزائد، القطع المكافئ).
- برمجيات الرياضيات.

- تدريس موضوع القطوع المخروطية:

يقترح تخصيص ١٠ حصص لتدريس موضوع القطوع المخروطية توزع على بنوده المختلفة على النحو المبين في الجدول التالي:

رقم البند	عنوان البند	عدد الحصص
٢ - ١	القطع المخروطي	١
٢ - ٢	القطع المكافئ	٢
٢ - ٣	القطع الناقص	٣
٢ - ٤	القطع الزائد	٢
٢ - ٥	الاختلاف المركزي	١
٢ - ٦	ملخص وتمارين عامة	١
المجموع		١٠

ويمكن أن تراعى الأمور التالية عند تدريس الموضوع:

١ إذا لم يتوافر النموذج المجسم للمخروط الدائري القائم ثنائي القاعدة يستعان بالشفافيات وجهاز العرض العلوي في إعطاء فكرة عامة عن القطع المخروطي باعتباره المنحنى الناتج من تقاطع مستوى مع مخروط دائري قائم ثنائي القاعدة. .

الدائرة، القطع الناقص، القطع المكافئ، القطع الزائد والشكل العام لكل منها في المستوى

القاطع . .

ولا مانع من التذكير بمعادلة الدائرة في صورها المختلفة .

$س^2 + ص^2 = نق^2$ — المركز نقطة الأصل

$(س - ء)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$ — المركز (ء ، هـ)

$س^2 + ص^2 + أ س + ب ص + جـ = ٠$ — الصورة العامة

٢ بعد إعطاء فكرة عامة عن القطوع المخروطية - كما ذكرنا في (١)، نبدأ الدراسة التفصيلية لكل قطع من القطوع المخروطية الثلاثة على حدة بدءًا بالقطع المكافئ ثم القطع الناقص ثم القطع الزائد .

٣ تتابع الأفكار في عرض كل من القطوع الثلاثة على النحو التالي :

- تعريف القطع كمجموعة من النقاط في المستوى تُحقق شرطًا معينًا (مع عرض النموذج الخاص بالمخروط الدائري القائم ثنائي القاعدة والمستوى القاطع له) .
- توظيف التعريف في استنتاج الصور القياسية لمعادلة القطع الذي رأسه/ مركزه نقطة الأصل .
- توظيف القطوع المخروطية (المكافئ، الناقص، الزائد) في حل المسائل الحياتية .

٤ عند تدريس القطع المكافئ :

- اعرض كل صورة من الصور القياسية مع الشكل العام للقطع الذي تمثله موضحًا عليه جميع المعلومات الخاصة به، واستعن في ذلك بالشفافيات وجهاز العرض العلوي .
- ابدأ العرض السابق بالمعادلة :

$\boxed{س^2 = ٤ أ ص}$: $أ \in ح^+$ .... (١)

التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه نقطة الأصل، وبؤرته على محور الصادات، وفتحته لأعلى .

- بعد ذلك تعرض المعادلة :

$\boxed{س^2 = -٤ أ ص}$ .... (٢)

التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه نقطة الأصل، وبؤرته على محور الصادات وفتحته لأسفل .

- بعد ذلك تعرض المعادلة :

$\boxed{ص^2 = ٤ أ س}$: $أ \in ح^+$ .... (٣)

التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه نقطة الأصل، وبؤرته على محور السينات، وفتحته إلى اليمين.

- بعد ذلك تعرض المعادلة:

$$\boxed{ص^٢ = -٤ ﺃ س} \quad : \quad ﺃ \in ح^+ \quad \text{.................} \quad (٤)$$

والتي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه نقطة الأصل، وبؤرته على محور السينات وفتحته إلى اليسار.

- أشر إلى موضوع التناظر ومحور التناظر، فالقطع الذي تمثله المعادلة $س^٢ = ٤ ﺃ ص$ أو $س^٢ = -٤ ﺃ ص$ متناظر حول محور الصادات، في حين أن القطع الذي تمثله المعادلة $ص^٢ = ٤ ﺃ س$ أو $ص^٢ = -٤ ﺃ س$ متناظر حول محور السينات.

تذكر في هذا الصدد أن:

وجود $س^٢$ في المعادلة يعني تناظر حول المحور الصادي.

ووجود $ص^٢$ في المعادلة يعني تناظر حول المحور السيني.

٥ اهتم بعرض الأمثلة الحياتية لتوضيح أهمية دراسة القطع المكافئ مع مراعاة استخدام التقنيات الهادفة التي تساعد على توضيح الأمثلة وتثبيت المفاهيم.

٦ اتبع تسلسل وتتابع عرض الأفكار نفسه عند تناول القطع الناقص، بمعنى أن يعرض التعريف بالاستعانة بنموذج المخروط الدائري القائم ذي القاعدتين أو شفافية توضح ذلك، ثم استنبط الصور القياسية من التعريف، مع عرض الرسم العام الذي تمثله كل معادلة.

ويكون البدء باستنتاج المعادلة $\frac{س^٢}{ﺃ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١ \quad : \quad ﺃ > ب$

ثم $\frac{س^٢}{ب^٢} + \frac{ص^٢}{ﺃ^٢} = ١ \quad : \quad ﺃ > ب$

... وهكذا كما ذكر بالنسبة للقطع المكافئ.

٧ اهتم بتوضيح العلاقة التي تربط ﺃ ، ب ، حـ في حالة القطع الناقص وهي $ﺃ^٢ = ب^٢ + حـ^٢$، وفي حالة القطع الزائد وهي: $حـ^٢ - ﺃ^٢ = ب^٢$ أو $حـ^٢ = ﺃ^٢ + ب^٢$

٨ أبرز الفرق بين الاختلاف المركزي لكل من القطوع المخروطية.

للقطع الناقص $e < ١$

للقطع الزائد $e > ١$

للقطع المكافئ $e = ١$

وللدائرة $e = ٠$ وهي حالة خاصة من القطع الناقص.

٩ لا يختلف تدريس القطع الزائد كثيرًا عن تدريس القطع الناقص، فالمدخل واحد، ولكن ينبغي إدراك الفرق الكبير بين القطعتين:

- في المعادلة بصورها المختلفة.
- في الشكل العام للقطع.
- في العلاقة بين ﻢ ، ب ، حـ .
- في نقاط التقاطع مع المحاور.
- في كون القطع الزائد له خطان تقاربيان، وليس هذا صحيحًا في القطع الناقص.
- المحور الأكبر والمحور الأصغر في القطع الناقص.
- المحور الأساسي والمحور المرافق في القطع الزائد.

١٠ بعد دراسة هذا الموضوع يستطيع الطلاب الإفادة من ذلك في رسم المناطق المطلوب إيجاد مساحتها أو المطلوب إيجاد حجوم الأجسام الناتجة من دورانها حول محور السينات.. ولذلك ينبغي الرجوع إلى موضوع التكامل وتناول بعض المسائل الخاصة بإيجاد المساحة أو إيجاد حجم الجسم الدوراني مع توظيف معلومات هذا الفصل في عمل رسم تخطيطي للمسألة ليتدرب الطلاب على ذلك.

Book Mark
Exit
Index

٢ – ٢

أولًا :

الشكل الأول :

الرأس (٠ ، ٠)، والبؤرة (٢ ، ٠) والقطع فتحته إلى اليمين

∴ المعادلة على الصورة ص^{٢} = ٤م س

معادلة الدليل هي س = –٢ ⇐ م = ٢

∴ المعادلة هي : ص^{٢} = ٨س

الشكل الثاني

الرأس (٠ ، ٠)، والبؤرة (٠ ، –٣) ∴ م = ٣

فتحة القطع إلى أسفل

∴ المعادلة على الصورة س^{٢} = –٤م ص

أو س^{٢} = –١٢ص

ثانيًا :

١ م المعادلة المعطاة في الصورة : ص^{٢} = ٤م س، حيث ٤م = ٨

∴ م = ٢

∴ البؤرة (٢ ، ٠) ومعادلة الدليل هي : س = –٢

ب المعادلة المعطاة في الصورة : ص^{٢} = –٤م س ، حيث ٤م = ١ ∴ م = $\frac{١}{٤}$

البؤرة (–$\frac{١}{٤}$ ، ٠) معادلة الدليل هي س = $\frac{١}{٤}$

حـ المعادلة المعطاة في الصورة س^{٢} = ٤م ص، حيث ٤م = ٤ ∴ م = ١

البؤرة (٠ ، ١) ، معادلة الدليل هي ص = –١

ى المعادلة المعطاة هي س^{٢} + ٦ص = ٠

∴ س^{٢} = –٦ص

وبالتالي تكون المعادلة المعطاة في الصورة $س^٢ = -٤ م ص$

$\therefore$ $٤م = ٦$ $\therefore$ $م = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

البؤرة $(٠ ، -\frac{٣}{٢})$

، معادلة الدليل هي $ص = \frac{٣}{٢}$

٢ م الرأس هو نقطة الأصل (٠ ، ٠) والبؤرة ب(٢ ، ٠)

$\therefore$ المعادلة في الصورة القياسية : $ص^٢ = ٤ م س$ ، حيث $م = ٢$

$\therefore$ المعادلة هي $ص^٢ = ٨س$

ب الرأس هو نقطة الأصل (٠ ، ٠) والبؤرة ب (-٢ ، ٠)

$\therefore$ المعادلة في الصورة القياسية $ص^٢ = -٤ م س$

حيث $م = ٢$ $\therefore$ المعادلة هي $ص^٢ = -٨س$

حـ الرأس هو نقطة الأصل (٠ ، ٠) والبؤرة $(٠ ، \frac{١}{٢})$

$\therefore$ المعادلة في الصورة القياسية $س^٢ = ٤ م ص$

حيث $م = \frac{١}{٢}$ $\therefore$ المعادلة هي $س^٢ = ٢ص$

ء الرأس هو نقطة الأصل (٠ ، ٠) والبؤرة $(-\frac{١}{٢} ، ٠)$

$\therefore$ المعادلة في الصورة القياسية $ص^٢ = -٤ م س$

حيث $م = \frac{١}{٢}$ والمعادلة هي $ص^٢ = -٢س$

٣ م البؤرة ب (١٠ ، ٠) والدليل : $س = -١٠$

$\therefore$ القطع فتحته إلى اليمين ورأسه نقطة الأصل : و(٠ ، ٠)

$\therefore$ المعادلة هي $ص^٢ = ٤٠س$

ب البؤرة ب (-٤ ، ٠) والدليل : $س = ٤$

$\therefore$ المنحنى مفتوح إلى اليسار، ورأسه نقطة الأصل : و(٠ ، ٠)

$\therefore$ المعادلة هي : $ص^٢ = -١٦س$

جـ البؤرة ب (٠ ، ٥) والدليل : ص = −٥

∴ المنحنى مفتوح إلى الأعلى، ورأسه نقطة الأصل : و (٠ ، ٠)

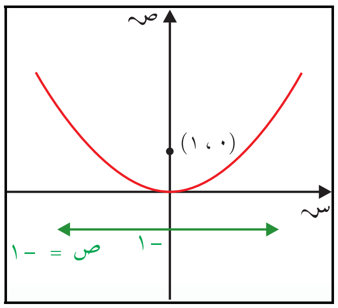
∴ المعادلة هي س^{٢} = ٢٠ ص

د البؤرة ب (٠ ، −٣) والدليل : ص = ٣

∴ المنحنى مفتوح إلى الأسفل ورأسه نقطة الأصل : و (٠ ، ٠)

∴ المعادلة هي : س^{٢} = −١٢ ص

٤ أ المعادلة المعطاة هي ص = $\frac{١}{٤}$ س^{٢}



∴ س^{٢} = ٤ ص وهي على الصورة س^{٢} = ٤ أ ص

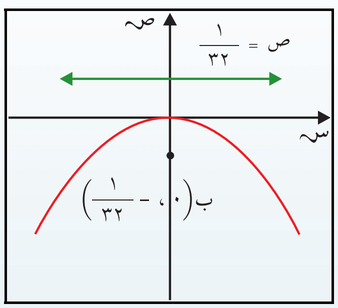
∴ ٤ أ = ٤

∴ أ = ١ والمعادلة تمثل قطعًا مكافئًا فتحته لأعلى

بؤرته (٠ ، ١) رأسه (٠ ، ٠) معادلة الدليل هي

ص = −١ ومحور التناظر هو المحور الصادي .

ب المعادلة المعطاة هي ص = −٨ س^{٢}



∴ س^{٢} = −$\frac{١}{٨}$ ص

وهي على الصورة س^{٢} = −٤ أ ص

∴ ٤ أ = $\frac{١}{٨}$

∴ أ = $\frac{١}{٣٢}$ والمعادلة تمثل قطعًا مكافئًا فتحته لأسفل ورأسه نقطة الأصل

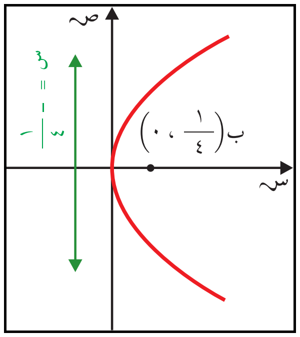
وبؤرته (٠ ، −$\frac{١}{٣٢}$) ومعادلة الدليل هي ص = $\frac{١}{٣٢}$ ومحور التناظر هو

المحور الصادي .

جـ المعادلة المعطاة هي ص^{٢} = س وهي على الصورة ص^{٢} = ٤ أ س

∴ ٤ أ = ١ ∴ أ = $\frac{١}{٤}$

والمعادلة تمثل قطعًا مكافئًا فتحته إلى اليمين ورأسه (٠ ، ٠) وبؤرته $\left(\frac{١}{٤} \text{ ، } ٠\right)$ ومعادلة الدليل هي س = $-\frac{١}{٤}$ ومحور التناظر هو المحور السيني.

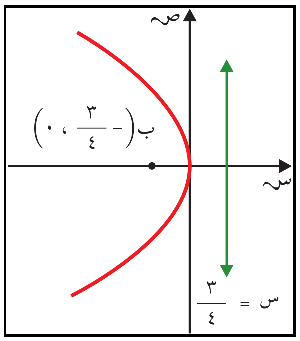


د المعادلة المعطاة هي ص^{٢} = −٣س

وهي على الصورة ص^{٢} = −٤أ س

٤أ = ٣ ∴ أ = $\frac{٣}{٤}$

والمعادلة تمثل قطعًا مكافئًا فتحته إلى اليسار ورأسه (٠ ، ٠) وبؤرته هي $\left(-\frac{٣}{٤} \text{ ، } ٠\right)$ ومعادلة الدليل هي س = $\frac{٣}{٤}$ ومحور التناظر هو المحور السيني.



٥ النقطة الثابتة (−٢ ، ٠) تمثل البؤرة والمستقيم س = ٢ يمثل الدليل. ومجموعة النقط تمثل قطعًا مكافئًا فتحته إلى اليسار ورأسه نقطة الأصل والمحور السيني هو محور تناظر ومعادلته هي ص^{٢} = −٨س

حل آخر: بفرض إحدى مجموعة النقاط هي (س ، ص)

∴ $\sqrt{(\text{س} + ٢)^{٢} + \text{ص}^{٢}} = |\text{س} - ٢|$

$(\text{س} + ٢)^{٢} + \text{ص}^{٢} = (\text{س} - ٢)^{٢}$

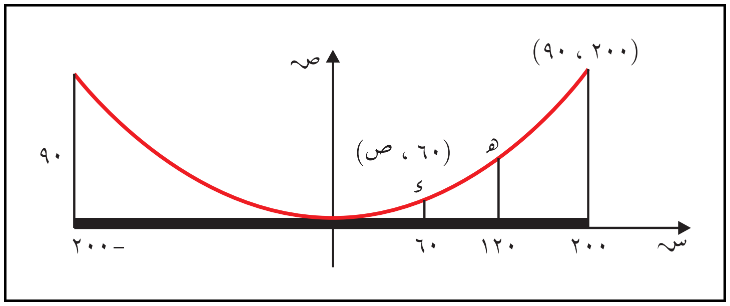
$\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤ + \text{ص}^{٢} = \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤$

∴ $\text{ص}^{٢} = -٨\text{س}$

٦ النقطة (٠ ، ٣) تمثل بؤرة القطع المكافئ والمستقيم ص = −٣ يمثل دليل القطع والقطع تكون فتحته لأعلى والمعادلة على الصورة س^{٢} = ٤أ ص حيث أ = ٣

∴ المعادلة هي $\text{س}^{٢} = ١٢\text{ص}$

٧ بفرض محوري الإحداثيات كما بالشكل



الشكل قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل والنقطة (٢٠٠ ، ٩٠) هي إحدى نقاطه وكذلك النقطة (-٢٠٠ ، ٩٠)

المعادلة على الصورة $س^٢ = ٤ أ ص$ لأن الفتحة لأعلى

$\therefore (٢٠٠)^٢ = ٤أ \times ٩٠$

$\therefore ٤أ = \frac{٢٠٠ \times ٢٠٠}{٩٠} = \frac{٤٠٠٠}{٩}$

$\therefore$ معادلة القطع هي $س^٢ = \frac{٤٠٠٠}{٩} ص$

$\because$ ء $\in$ للقطع $\quad \therefore (٦٠)^٢ = \frac{٤٠٠٠}{٩} ص$

$\therefore ص = \frac{٣٦٠٠ \times ٩}{٤٠٠٠} \quad \therefore ص = ٨,١$

$\therefore$ ارتفاع الجسر المطلوب = ٨,١ مترًا

، هـ $\in$ للقطع $\quad \therefore (١٢٠)^٢ = \frac{٤٠٠٠}{٩} ص$

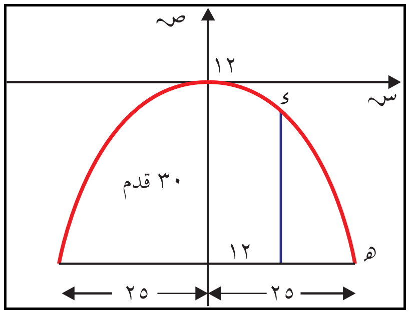
$\therefore ص = \frac{١٢٠ \times ١٢٠ \times ٩}{٤٠٠٠}$

$ص = \frac{١٢ \times ٢٧}{١٠} = ٣٢,٤$

$\therefore$ ارتفاع الجسر هنا = ٣٢,٤ مترًا

٨ بفرض محوري الإحداثيات كما بالشكل ومعادلة القطع تكون على الصورة

س^{٢} = −٤ا ص لاحظ أن النقطة هـ تكون (٢٥ ، −٣٠)



∴ ٦٢٥ = −٤ا × (−٣٠)

∴ ٤ا = $\frac{٦٢٥}{٣٠}$ = $\frac{١٢٥}{٦}$

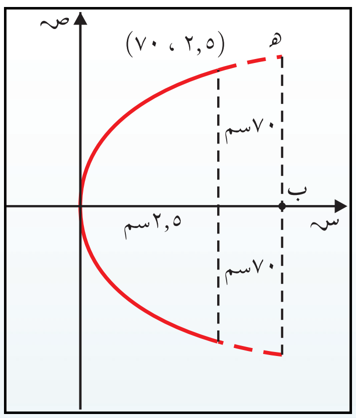
معادلة القطع هي س^{٢} = − $\frac{١٢٥}{٦}$ ص

وبفرض أن ء (١٢ ، ص) ∴ ١٤٤ = − $\frac{١٢٥}{٦}$ ص

∴ ص = − $\frac{١٤٤ \times ٦}{١٢٥}$ ∴ ص = −٦,٩١٢

∴ الارتفاع المطلوب = ٣٠ − ٦,٩١٢ = ٢٣,٠٨٨ قدم

٩ بفرض المنظار على الشكل المرسوم.



∴ معادلته تكون على الصورة ص^{٢} = ٤ا س

ولكن (٢,٥ ، ٧٠) ∈ للقطع

∴ (٧٠)^{٢} = ٤ × ا × ٢,٥

∴ ا = $\frac{٧٠ \times ٧٠}{٤ \times ٢,٥}$ = ٤٩٠

∴ البعد البؤري = ٤٩٠سم

١ أ المعادلة في الصورة: $\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$

حيث $أ^{٢} = ١٦$ ، $ب^{٢} = ٤$

$أ^{٢} - ب^{٢} = حـ^{٢}$ $\therefore$ $حـ^{٢} = ١٢$ $\therefore$ $حـ = ٢\sqrt{٣}$

$\therefore$ المركز هو و(٠ ، ٠) والرأسان هما (٤ ، ٠) ، (–٤ ، ٠)

والبؤرتان هما $(٢\sqrt{٣} ، ٠)$ ، $(-٢\sqrt{٣} ، ٠)$

ب $٤س^{٢} + ٢٥ص^{٢} = ١٠٠$ بالقسمة على ١٠٠

$\frac{س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{٤} = ١$

$\therefore$ $أ^{٢} = ٢٥$ ، $ب^{٢} = ٤$

$حـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢} = ٢٥ - ٤ = ٢١$

$\therefore$ $حـ = \sqrt{٢١}$

المركز هو و(٠ ، ٠) والرأسان هما (٥ ، ٠) ، (–٥ ، ٠)

والبؤرتان هما $(\sqrt{٢١} ، ٠)$ ، $(-\sqrt{٢١} ، ٠)$

حـ $٥س^{٢} + ٣ص^{٢} = ١٥$

$\frac{س^{٢}}{٣} + \frac{ص^{٢}}{٥} = ١$ وذلك بالقسمة على ١٥

$أ^{٢} = ٥$ ، $ب^{٢} = ٣$

$حـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢} = ٥ - ٣ = ٢$ ، $حـ = \sqrt{٢}$

المركز هو نقطة الأصل.

والرأسان هما $(٠ ، \sqrt{٥})$ ، $(٠ ، -\sqrt{٥})$

والبؤرتان هما $(٠ ، \sqrt{٢})$ ، $(٠ ، -\sqrt{٢})$

٢ **أ** ∵ المركز هو و(٠ ، ٠) والبؤرة الأولى ب$_١$(٠ ، ٢)

∴ المحور الأكبر جزء من المحور الصادي

∴ المعادلة في الصورة: $\frac{\text{س}^٢}{\text{ب}^٢} + \frac{\text{ص}^٢}{\text{أ}^٢} = ١$

من البؤرة حـ = ٢ ∴ حـ^٢ = ٤

ولكن أ = ٤ ∴ أ^٢ = ١٦ ∴ ب^٢ = ١٢

∴ المعادلة هي: $\frac{\text{س}^٢}{١٢} + \frac{\text{ص}^٢}{١٦} = ١$

ب المركز هو و(٠ ، ٠) والبؤرة الثانية ب$_٢$(−٣ ، ٠)

∴ المحور الأكبر جزء من المحور السيني

∴ المعادلة في الصورة: $\frac{\text{س}^٢}{\text{أ}^٢} + \frac{\text{ص}^٢}{\text{ب}^٢} = ١$

من البؤرة حـ = ٣ ∴ حـ^٢ = ٩

ولكن أ = ٥ ∴ أ^٢ = ٢٥ ∴ ب^٢ = ١٦

∴ المعادلة هي: $\frac{\text{س}^٢}{٢٥} + \frac{\text{ص}^٢}{١٦} = ١$

٣ **أ** من البؤرتين نلاحظ أن المحور الأكبر جزء من المحور السيني، والمركز هو و(٠ ، ٠)

∴ المعادلة في الصورة: $\frac{\text{س}^٢}{\text{أ}^٢} + \frac{\text{ص}^٢}{\text{ب}^٢} = ١$

∵ طول المحور الأكبر = ٦ ∴ أ = ٣

ومن البؤرتين نلاحظ أن حـ = ٢

∴ ب^٢ = ٩ − ٤ = ٥

∴ المعادلة هي $\frac{\text{س}^٢}{٩} + \frac{\text{ص}^٢}{٥} = ١$

ب كما في الجزء (ﻫ) المعادلة في الصورة: $\frac{س^2}{ﻫ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$

ونلاحظ أن حـ = ٢

طول المحور الأصغر = ٦ $\therefore$ ب = ٣

$\therefore$ ﻫ^2 = ٩ + ٤ = ١٣

$\therefore$ المعادلة هي: $\frac{س^2}{١٣} + \frac{ص^2}{٩} = ١$

حـ طول المحور الأكبر = ١٠ $\therefore$ ﻫ = ٥ $\therefore$ ﻫ^2 = ٢٥

طول المحور الأصغر = ٨ $\therefore$ ب = ٤ $\therefore$ ب^2 = ١٦

$\because$ المحور الأكبر جزء من المحور السيني، $\therefore$ المعادلة هي:

$\frac{س^2}{٢٥} + \frac{ص^2}{١٦} = ١$

ى $\because$ الرأسين هما: (٠ ، ٤) ، (٠ ، −٤) والبؤرتين هما: (٠ ، ٣) ، (٠ ، −٣)

$\therefore$ المركز هو و(٠ ، ٠) والمحور الأكبر جزء من المحور الصادي

$\therefore$ المعادلة في الصورة: $\frac{س^2}{ب^2} + \frac{ص^2}{ﻫ^2} = ١$

من الرأسين ﻫ = ٤ $\therefore$ ﻫ^2 = ١٦

ومن البؤرتين حـ = ٣

$\therefore$ حـ^2 = ٩ $\therefore$ ب^2 = ٧

$\therefore$ المعادلة هي: $\frac{س^2}{٧} + \frac{ص^2}{١٦} = ١$

٤ من تعريف القطع الناقص، ٢ﻫ = ١٠

$\therefore$ ﻫ = ٥ $\therefore$ ﻫ^2 = ٢٥

$\because$ البؤرتين هما ب$_1$(٣ ، ٠) ، ب$_2$(−٣ ، ٠)

∴ المركز هو و $(٠ ، ٠)$ ، حـ = ٣

والمحور الأكبر جزء من المحور السيني

∴ المعادلة في الصورة: $\frac{س^٢}{ٲ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

$ب^٢ = ٲ^٢ - حـ^٢ = ٢٥ - ٩ = ١٦$

∴ المعادلة هي: $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{١٦} = ١$

٥ توضع المعادلات في الصور القياسية فتصبح كما يلي:

ٲ $\frac{س^٢}{٤} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$

∴ المركز نقطة الأصل والمحور الأكبر جزء من المحور الصادي من المعادلة:
الرأسان هما النقطتان $(٠ ، ٣)$ ، $(٠ ، -٣)$ ، $ٲ^٢ = ٩$ ، $ب^٢ = ٤$

∴ $حـ^٢ = ٥$

∴ حـ = $\sqrt{٥}$ (تستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\sqrt{٥}$)

∴ البؤرتان هما $(٠ ، \sqrt{٥})$ ، $(٠ ، -\sqrt{٥})$

ومن ثم يرسم المخطط.

ب $\frac{س^٢}{\frac{١}{٤}} + \frac{ص^٢}{١} = ١$

∴ المركز نقطة الأصل والمحور الأكبر جزء من المحور الصادي حيث المعادلة في الصورة:

$\frac{س^٢}{ب^٢} + \frac{ص^٢}{ٲ^٢} = ١$

∴ $ٲ^٢ = ١$ ∴ ٲ = ١ ، $ب^٢ = \frac{١}{٤}$ ∴ $حـ^٢ = \frac{٣}{٤}$

$\therefore$ حـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore$ الرأسان هما : $ر_١$(٠ ، ١) ، $ر_٢$(٠ ، −١)

والبؤرتان هما : $ب_١$ $\left(٠ ، \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$ ، $ب_٢$ $\left(٠ ، \frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right)$

تستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد الإحداثي الصادي لكل من البؤرتين. ومن ثم يرسم مخطط للقطع.

ملاحظة : يرسم المخطط في كل الحالات على ورقة رسم بياني بمعلومية المركز والرأسين.

٢ – ٤

تمارين

١ أ $\text{أ} = ١$ ، ب = ١ والمركز (٠ ، ٠) والمحور الأساسي أفقيًا .

∴ معادلة القطع الزائد هي $س^٢ - ص^٢ = ١$

ب $\text{أ} = ٢$ ، ب = $\sqrt{٣}$ والمركز (٠ ، ٠) والمحور الأساسي أفقيًا .

∴ معادلة القطع الزائد هي $\frac{س^٢}{٤} - \frac{ص^٢}{٣} = ١$

حـ $\text{أ} = ب = \sqrt{٥}$ والمركز (٠ ، ٠) والمحور الأساسي أفقيًا .

∴ معادلة القطع الزائد هي $\frac{س^٢}{٥} - \frac{ص^٢}{٥} = ١$

∴ $س^٢ - ص^٢ = ٥$

ء $\text{أ} = ٢$ ، ب = ٣ المركز (٠ ، ٠) والمحور الأساسي أفقيًا .

∴ معادلة القطع الزائد هي $\frac{س^٢}{٤} - \frac{ص^٢}{٩} = ١$

٢ $ر_١$(٣ ، ٠) ، $ر_٢$(–٣ ، ٠) رأسي القطع

$ب_١$(٤ ، ٠) ، $ب_٢$(–٤ ، ٠) بؤرتي القطع .

∴ أ = ٣ ، حـ = ٤ والمحور الأساسي أفقيًا

ولكن $حـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$ ∴ $ب^٢ = ١٦ - ٩ = ٧$

∴ معادلة القطع هي $\frac{س^٢}{٩} - \frac{ص^٢}{٧} = ١$

٣ $ر_١$(٠ ، ٢) ، $ر_٢$(٠ ، –٢) رأسي القطع .

$ب_١$(٠ ، ٥) ، $ب_٢$(٠ ، –٥) بؤرتي القطع .

والمحور الأساسي رأسيًا .

$\therefore$ أ = ٢ ، حـ = ٥ ، ب^٢ = ٢٥ − ٤ = ٢١

$\therefore$ معادلة القطع هي $\frac{ص^٢}{٤} - \frac{س^٢}{٢١} = ١$

٤ **أولًا:**

أ $\frac{س^٢}{٩} - ص^٢ = ١$ $\therefore$ أ^٢ = ٩

$\therefore$ أ = ٣ ، ب^٢ = ١ ولكن حـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ = ١٠

$\therefore$ حـ = $\sqrt{١٠}$

$\therefore$ (٣ ، ٠) ، (−٣ ، ٠) رأسي القطع.

($\sqrt{١٠}$ ، ٠) ، (−$\sqrt{١٠}$ ، ٠) بؤرتي القطع.

ب $\frac{س^٢}{١٤٤} - \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$

أ^٢ = ١٤٤ $\therefore$ أ = ١٢ ، ب^٢ = ٢٥

$\therefore$ حـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ = ١٦٩ $\therefore$ حـ = ١٣

$\therefore$ رأسا القطع هما (١٢ ، ٠) ، (−١٢ ، ٠)

بؤرتي القطع هما (١٣ ، ٠) ، (−١٣ ، ٠)

حـ $\frac{ص^٢}{٤٩} + ١ = \frac{س^٢}{٣٦}$

$\therefore$ $\frac{س^٢}{٣٦} - \frac{ص^٢}{٤٩} = ١$

أ^٢ = ٣٦ ، أ = ٦ ، ب^٢ = ٤٩

حـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ = ٣٦ + ٤٩ = ٨٥ $\therefore$ حـ = $\sqrt{٨٥}$

$\therefore$ رأسي القطع هما (٦ ، ٠) ، (−٦ ، ٠)

$\therefore$ بؤرتي القطع هما ($\sqrt{٨٥}$ ، ٠) ، (−$\sqrt{٨٥}$ ، ٠)

د $\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{١٢١}} + \text{١} = \frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{٦٤}}$

$\therefore \quad \frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{٦٤}} - \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{١٢١}} = \text{١}$

$\therefore \quad \text{أ}^{\text{٢}} = \text{٦٤} \qquad \therefore \quad \text{أ} = \text{٨} \text{ ، } \text{ب}^{\text{٢}} = \text{١٢١}$

$\text{حـ}^{\text{٢}} = \text{أ}^{\text{٢}} + \text{ب}^{\text{٢}} = \text{٦٤} + \text{١٢١} = \text{١٨٥}$

$\therefore \quad \text{حـ} = \sqrt{\text{١٨٥}}$

∴ رأسي القطع هما (٠ ، ٨) ، (٠ ، −٨)

بؤرتي القطع هما $(\text{٠} \text{ ، } \sqrt{\text{١٨٥}})$ ، $(\text{٠} \text{ ، } -\sqrt{\text{١٨٥}})$

هـ $\text{٤ص}^{\text{٢}} - \text{٩س}^{\text{٢}} = \text{٣٦}$

$\therefore \quad \frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{٩}} - \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٤}} = \text{١}$

$\text{أ}^{\text{٢}} = \text{٩} \qquad \therefore \quad \text{أ} = \text{٣} \text{ ، } \text{ب}^{\text{٢}} = \text{٤}$

$\text{حـ}^{\text{٢}} = \text{٩} + \text{٤} = \text{١٣} \qquad \therefore \quad \text{حـ} = \sqrt{\text{١٣}}$

∴ رأسي القطع هما (٠ ، ٣) ، (٠ ، −٣)

بؤرتي القطع هما $(\text{٠} \text{ ، } \sqrt{\text{١٣}})$ ، $(\text{٠} \text{ ، } -\sqrt{\text{١٣}})$

ثانيًا:

أ $\text{ص} = \pm \frac{\text{ب}}{\text{أ}} \text{س}$

$\therefore \quad \text{ص} = \pm \frac{\text{١}}{\text{٣}} \text{س}$

ب $\text{ص} = \pm \frac{\text{٥}}{\text{١٢}} \text{س}$

حـ $\text{ص} = \pm \frac{\text{٧}}{\text{٦}} \text{س}$

د $\text{ص} = \pm \dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}\,\text{س}$

$\therefore\ \text{ص} = \pm \dfrac{٨}{١١}\,\text{س}$

هـ $\text{ص} = \pm \dfrac{٣}{٢}\,\text{س}$

٥ المركز (٠ ، ٠) إحدى البؤرتين (٤ ، ٠)

$\therefore$ البؤرة الأخرى (−٤ ، ٠) والمحور الأساسي أفقيًا.

$\therefore$ معادلة القطع الزائد هي $\dfrac{\text{س}^٢}{\text{أ}^٢} - \dfrac{\text{ص}^٢}{\text{ب}^٢} = ١$

(١٤ ، ٢٤) تقع على القطع

$\therefore\ \dfrac{١٩٦}{\text{أ}^٢} - \dfrac{٥٧٦}{\text{ب}^٢} = ١$

$\therefore\ ١٩٦\text{ب}^٢ - ٥٧٦\text{أ}^٢ = \text{أ}^٢\text{ب}^٢$ .... (١)

$\because$ البؤرة (٤ ، ٠) $\therefore\ \text{جـ} = ٤$ ولكن $\text{جـ}^٢ = \text{أ}^٢ + \text{ب}^٢$

$\therefore\ \text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ = ١٦$ $\therefore\ \text{ب}^٢ = ١٦ - \text{أ}^٢$

وبالتعويض في (١):

$١٩٦(١٦ - \text{أ}^٢) - ٥٧٦\text{أ}^٢ = \text{أ}^٢(١٦ - \text{أ}^٢)$

$\therefore\ ١٩٦ \times ١٦ - ١٩٦\text{أ}^٢ - ٥٧٦\text{أ}^٢ = ١٦\text{أ}^٢ - \text{أ}^٤$

$\therefore\ \text{أ}^٤ - (١٩٦ + ٥٧٦ + ١٦)\text{أ}^٢ + ١٩٦ \times ١٦ = ٠$

$\text{أ}^٤ - ٧٨٨\text{أ}^٢ + ٤ \times ٧٨٤ = ٠$

$(\text{أ}^٢ - ٤)(\text{أ}^٢ - ٧٨٤) = ٠$

$\therefore\ \text{أ}^٢ = ٤$ أو $\text{أ}^٢ = ٧٨٤$

ولكن $\text{أ}^٢ = ٧٨٤$ مرفوضة حيث $\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ = ١٦$

Book Mark
Exit
Index

$\therefore$ $أ^2 = ٤$ $\therefore$ $ب^2 = ١٦ - ٤ = ١٢$

معادلة القطع هي $\frac{س^2}{٤} - \frac{ص^2}{١٢} = ١$

حل آخر:

$\because$ $ب_1(٤ ، ٠)$

$\therefore$ $ب_2(-٤ ، ٠)$

نفرض $ن(١٤ ، ٢٤)$

$ن ب_1 = \sqrt{(١٤ - ٤)^2 + (٢٤ - ٠)^2}$

$= ٢٦$

$ن ب_2 = \sqrt{(١٤ + ٤)^2 + (٢٤ - ٠)^2}$

$= ٣٠$

من تعريف القطع

$ن ب_2 - ن ب_1 = ٢أ$

$\therefore$ $٢أ = ٤ \Leftarrow أ = ٢$

$جـ = ٤$

$جـ^2 = أ^2 + ب^2$

$١٦ = ٤ + ب^2 \Leftarrow ب^2 = ١٦ - ٤$

$\therefore$ $ب^2 = ١٢$

$\therefore$ المعادلة هي: $\frac{س^2}{٤} - \frac{ص^2}{١٢} = ١$

٦ المحور الأساسي أفقيًا والمركز $(٠ ، ٠)$

$\therefore$ معادلة القطع تكون على الصورة $\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = ١$

(٢ ، ١) تقع على القطع $\therefore \frac{٤}{\text{أ}^{٢}} - \frac{١}{\text{ب}^{٢}} = ١$

$\therefore ٤\text{ب}^{٢} - \text{أ}^{٢} = \text{أ}^{٢}\text{ب}^{٢}$ .... (١)

(٤ ، ٣) إحدى نقاط القطع $\therefore \frac{١٦}{\text{أ}^{٢}} - \frac{٩}{\text{ب}^{٢}} = ١$

$١٦\text{ب}^{٢} - ٩\text{أ}^{٢} = \text{أ}^{٢}\text{ب}^{٢}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) $\therefore ١٦\text{ب}^{٢} - ٩\text{أ}^{٢} = ٤\text{ب}^{٢} - \text{أ}^{٢}$

$\therefore ١٢\text{ب}^{٢} = ٨\text{أ}^{٢} \quad \therefore \text{أ}^{٢} = \frac{٣}{٢}\text{ب}^{٢}$ .... (٣)

بالتعويض في (١) $\therefore ٤\text{ب}^{٢} - \frac{٣}{٢}\text{ب}^{٢} = \frac{٣}{٢}\text{ب}^{٤}$

$٨\text{ب}^{٢} - ٣\text{ب}^{٢} = ٣\text{ب}^{٤} \quad \therefore ٣\text{ب}^{٤} = ٥\text{ب}^{٢}$

$\text{ب}^{٢} = \frac{٥}{٣}$ وبالتعويض في (٣) $\therefore \text{أ}^{٢} = \frac{٣}{٢} \times \frac{٥}{٣} = \frac{٥}{٢}$

$\therefore$ معادلة القطع هي $\frac{\text{س}^{٢}}{\frac{٥}{٢}} - \frac{\text{ص}^{٢}}{\frac{٥}{٣}} = ١$

$\therefore \frac{٢\text{س}^{٢}}{٥} - \frac{٣\text{ص}^{٢}}{٥} = ١ \quad \therefore ٢\text{س}^{٢} - ٣\text{ص}^{٢} = ٥$

هي المعادلة المطلوبة.

ملاحظة:

يمكن حل المعادلتين كما يلي:

$\frac{٤}{\text{أ}^{٢}} - \frac{١}{\text{ب}^{٢}} = ١$ .... (١)

$\frac{١٦}{\text{أ}^{٢}} - \frac{٩}{\text{ب}^{٢}} = ١$ .... (٢)

بضرب طرفي (١) في (−٤) والجمع: $\frac{-٥}{\text{ب}^{٢}} = -٣$

$\therefore \text{ب}^{٢} = \frac{٥}{٣}$

بالتعويض في (١)

$$\therefore \quad \text{م}^{٢} = \frac{٥}{٢}$$

٧ القطع الزائد هو ٣س^{٢} − ص^{٢} = ١٢

$$\therefore \quad \frac{\text{س}^{٢}}{٤} - \frac{\text{ص}^{٢}}{١٢} = ١ \qquad \therefore \text{ المحور الأساسي أفقيًا.}$$

م^{٢} = ٤ ، ب^{٢} = ١٢ ولكن حـ^{٢} = م^{٢} + ب^{٢}

= ٤ + ١٢ = ١٦

∴ حـ = ٤ ∴ البؤرتين هما (٤ ، ٠) ، (−٤ ، ٠)

القطع الناقص هو ٩س^{٢} + ٢٥ص^{٢} = ٢٢٥

$$\therefore \quad \frac{\text{س}^{٢}}{٢٥} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٩} = ١$$

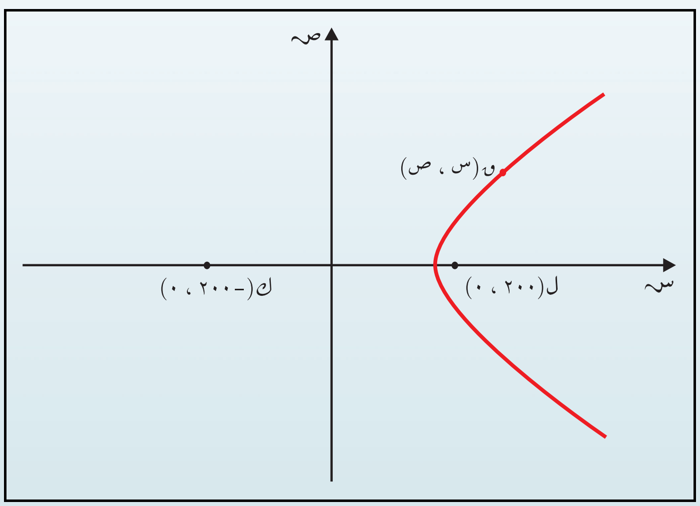
م^{٢} = ٢٥ ، ب^{٢} = ٩ نلاحظ أن م^{٢} > ب^{٢}

∴ المحور الأكبر أفقيًا. ولكن حـ^{٢} = م^{٢} − ب^{٢}

∴ حـ^{٢} = ٢٥ − ٩ = ١٦ ∴ حـ = ٤

∴ البؤرتين هما (٤ ، ٠) ، (−٤ ، ٠)

٨ الشكل يوضح وضع النقطتين ل ، ك والنقطة ن



تعلم أن الزمن $= \dfrac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$

زمن وصول الطلق عند ل $= \dfrac{\text{و ل}}{٥٠}$

زمن وصول الطلق عند ك $= \dfrac{\text{و ك}}{٥٠}$

$\therefore \quad \dfrac{\text{و ك}}{٥٠} - \dfrac{\text{و ل}}{٥٠} = ٢$

و ك − و ل = ١٠٠

∴ مجموعة النقط و(س ، ص) يكون الفرق بين بعدها عن النقطة ل وبعدها عن النقطة ك ثابتًا.

∴ هي تمثل قطعًا زائدًا. محوره الأساسي أفقيًا.

وبؤرتيه (٢٠٠ ، ٠) ، (−٢٠٠ ، ٠).

∴ حـ = ٢٠٠

وعندما و ∈ للمحور السيني يكون

و ك − و ل = ٢أ $\qquad$ ∴ ٢أ = ١٠٠

أ = ٥٠

ولكن $\text{حـ}^{٢} = \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}$ $\qquad$ ∴ $\text{ب}^{٢} = (٢٠٠)^{٢} - (٥٠)^{٢}$

$\text{ب}^{٢} = ٣٧٥٠٠$

∴ معادلة القطع هي $\dfrac{\text{س}^{٢}}{٢٥٠٠} - \dfrac{\text{ص}^{٢}}{٣٧٥٠٠} = ١$

∴ معادلة القطع هي $١٥\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢} = ٣٧٥٠٠$

١ **أ** أ = ٥ ، ب = ٣ ∴ حـ^{٢} = ٢٥ − ٩ = ١٦

∴ حـ = ٤ ∴ $e = \frac{٤}{٥}$

ب حـ = ٩ ، ب = ١٢ ∴ أ^{٢} = ٨١ + ١٤٤ = ٢٢٥

∴ أ = ١٥

∴ $e = \frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥}$

حـ $\frac{س^{٢}}{٧} + \frac{ص^{٢}}{١٦} = ١$ ،

∴ المعادلة في الصورة: $\frac{س^{٢}}{ب^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{أ^{٢}} = ١$

∴ أ^{٢} = ١٦ ∴ أ = ٤ ، ب^{٢} = ٧

∴ حـ^{٢} = ٩ ∴ حـ = ٣ ∴ $e = \frac{٣}{٤}$

ملاحظة: لاحظ أن $e < ١$ حيث أن القطع قطعًا ناقصًا.

٢ **أ** أ = ٥ ، ب = ١٢.

لكن حـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} = ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩

∴ حـ = ١٣ ∴ $e = \frac{١٣}{٥}$

ب ب = ١٥ ، حـ = ١٧ ∴ أ^{٢} = ٢٨٩ − ٢٢٥ = ٦٤

∴ أ = ٨ ∴ $e = \frac{١٧}{٨}$

ملاحظة: لاحظ أن $e > ١$ حيث أن القطع قطعًا زائدًا.

٣ أ البؤرتان $\text{ب}_1(\text{٠ ، ٨})$ ، $\text{ب}_2(\text{٠ ، −٨})$

∴ المحور الأساسي رأسيًا والمعادلة تكون في الصورة: $\frac{\text{ص}^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{س}^2}{\text{ب}^2} = \text{١}$

من البؤرتين: حـ = ٨

∵ $e = \frac{\text{٤}}{\text{٣}} = \frac{\text{٨}}{\text{أ}}$ ∴ أ = ٦

لكن $\text{حـ}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2$

∴ $\text{ب}^2 = \text{٦٤} - \text{٣٦} = \text{٢٨}$

∴ المعادلة هي: $\frac{\text{ص}^2}{\text{٣٦}} - \frac{\text{س}^2}{\text{٢٨}} = \text{١}$

ب $\text{ب}_1(\text{٤ ، ٠})$ ، $\text{ب}_2(\text{−٤ ، ٠})$

∴ المحور الأساسي أفقيًا والمعادلة تكون في الصورة $\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = \text{١}$

من البؤرة حـ = ٤

$e = \frac{\text{٥}}{\text{٢}}$ ∴ $\frac{\text{٥}}{\text{٢}} = \frac{\text{٤}}{\text{أ}}$ ∴ $\text{أ} = \frac{\text{٨}}{\text{٥}}$

ولكن $\text{حـ}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2$ ∴ $\text{ب}^2 = \text{١٦} - \frac{\text{٦٤}}{\text{٢٥}} = \frac{\text{٣٣٦}}{\text{٢٥}}$

∴ المعادلة هي $\frac{\text{س}^2}{\frac{\text{٦٤}}{\text{٢٥}}} - \frac{\text{ص}^2}{\frac{\text{٣٣٦}}{\text{٢٥}}} = \text{١}$

∴ المعادلة هي $\frac{\text{٢٥س}^2}{\text{٦٤}} - \frac{\text{٢٥ص}^2}{\text{٣٣٦}} = \text{١}$

حـ من تعريف القطع الزائد نستنتج أن:

$\text{ب}_1(\text{٠ ، ٥})$ ، $\text{ب}_2(\text{٠ ، −٥})$ هما بؤرتا قطع زائد، ٨ = ٢أ

∴ أ = ٤ ، من البؤرتين نلاحظ أن المحور الأساسي رأسيًا، حـ = ٥ .

∴ $\text{ب}^2 = \text{٢٥} - \text{١٦} = \text{٩}$

∴ معادلة القطع الزائد هي: $\frac{\text{ص}^2}{\text{١٦}} - \frac{\text{س}^2}{\text{٩}} = \text{١}$

Book Mark
Exit
Index

٤ أ $e = \frac{٣}{٢}$ أحد الرؤوس (٠ ، ٢)

نلاحظ أن المحور الأساسي رأسيًا.

$\text{أ} = ٢$ ولكن $e = \frac{\text{حـ}}{\text{أ}}$

$\therefore \frac{٣}{٢} = \frac{\text{حـ}}{٢}$ $\therefore \text{حـ} = ٣$

$\text{ب}^٢ = \text{حـ}^٢ - \text{أ}^٢ = ٩ - ٤ = ٥$

معادلة القطع الزائد هي $\frac{\text{ص}^٢}{٤} - \frac{\text{س}^٢}{٥} = ١$

ب $e = \frac{٥}{٣}$ أحد الرؤوس (−٤ ، ٠)

نلاحظ أن المحور الأساسي أفقيًا:

$\text{أ} = ٤$ $e = \frac{٥}{٣}$ $\therefore \frac{٥}{٣} = \frac{\text{حـ}}{٤}$

$\therefore \text{حـ} = \frac{٢٠}{٣}$

$\text{ب}^٢ = \text{حـ}^٢ - \text{أ}^٢ = \frac{٤٠٠}{٩} - ١٦ = \frac{٢٥٦}{٩}$

معادلة القطع الزائد هي: $\frac{\text{س}^٢}{١٦} - \frac{\text{ص}^٢}{\frac{٢٥٦}{٩}} = ١$

$\therefore$ المعادلة تكون $١٦\text{س}^٢ - ٩\text{ص}^٢ = ٢٥٦$

٥ الرأس $\text{ر}_١(٢ ، ٠)$

المحور الأكبر أفقيًا. $\therefore \text{أ} = ٢$

$e = \frac{٣}{٤}$ $e = \frac{\text{حـ}}{\text{أ}}$

$\frac{٣}{٤} = \frac{\text{حـ}}{٢}$ $\therefore \text{حـ} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

ولكن $حـ^٢ = أ^٢ - ب^٢$

$$ب^٢ = أ^٢ - حـ^٢ = ٤ - \frac{٩}{٤} = \frac{٧}{٤}$$

معادلة القطع الناقص هي $\frac{س^٢}{٤} + \frac{ص^٢}{\frac{٧}{٤}} = ١$

أي أن المعادلة هي $\frac{س^٢}{٤} + \frac{٤ص^٢}{٧} = ١$

٦ $٢أ = ٣٠٠٠٠٠$ $\therefore$ $أ = ١٥٠٠٠٠$

ولكن $e = ٠,٠١٧ = \frac{حـ}{أ}$

$$حـ = ١٥٠٠٠٠ \times ٠,٠١٧ = ٢٥٥٠$$

أصغر بعد للأرض عن الشمس $= أ - حـ = ١٤٧٤٥٠$كم

أكبر بعد للأرض عن الشمس $= أ + حـ = ١٥٢٥٥٠$كم

Index Exit Book Mark

بنود موضوعية :

١	أ	٢	جـ	٣	أ	٤	ب
٥	ب	٦	أ	٧	أ	٨	د
٩	أ	١٠	أ	١١	أ	١٢	جـ
١٣	أ	١٤	جـ				

أسئلة مقالية :

١ س^{٢} = –١٢ص المعادلة على الصورة س^{٢} = –٤أ ص

٤أ = ١٢ ∴ أ = ٣

∴ البؤرة هي (٠ ، –٣)

ومعادلة الدليل ص = ٣ .

٢ القطع المكافئ في الوضع القياسي.

∴ رأس القطع (٠ ، ٠) ، معادلة الدليل هي ص = ٤

∴ بؤرة القطع هي (٠ ، –٤)

أ = ٤ والمعادلة للقطع على الصورة:

س^{٢} = –٤أ ص = –١٦ص

٣ أحد رأسي القطع الناقص (٦ ، ٠)

∴ المحور الأكبر أفقيًا أ = ٦ ، e = $\frac{١}{٢}$

∴ $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{١}{٢}$ $\frac{جـ}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ جـ = ٣

البؤرتين هما (٣ ، ٠) ، (–٣ ، ٠)

Book Mark
Exit
Index

٤ أحد رأسي القطع الناقص (٠ ، −٤)

المحور الأكبر رأسيًا. ولكن أ = ٤

$e = \frac{٣}{٨}$ ، $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٣}{٨}$ ∴ $\frac{\text{جـ}}{٤} = \frac{٣}{٨}$

جـ $= \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$.

البؤرتين هما (٠ ، $\frac{٣}{٢}$) ، (٠ ، $\frac{-٣}{٢}$)

٥ (٨ ، ٠) بؤرة للقطع الناقص.

∴ جـ = ٨

، (١٠ ، ٠) إحدى رؤوس القطع.

∴ أ = ١٠ والمحور الأكبر أفقيًا.

أ $e = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٨}{١٠} = ٠{,}٨$ (لاحظ أن $e < ١$)

ب طول المحور الأكبر = ٢أ = ٢٠ وحدة طول

نعلم أن ب^{٢} = أ^{٢} − جـ^{٢}

= ١٠٠ − ٦٤ = ٣٦

ب = ٦

طول المحور الأصغر = ٢ب = ١٢ وحدة طول

٦ ٢ب = ١٢ ∴ ب = ٦

(٠ ، ٤) إحدى البؤرتين ∴ جـ = ٤

والمحور الأكبر رأسيًا.

جـ^{٢} = أ^{٢} − ب^{٢} ∴ أ^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢}

= ٣٦ + ١٦

= ٥٢

معادلة القطع الناقص هي: $\frac{\text{س}^{٢}}{٣٦} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٥٢} = ١$

٧

$٤س^{٢} + ٩ص^{٢} = ٦٤$

$\therefore \quad \frac{س^{٢}}{١٦} + \frac{٩ص^{٢}}{٦٤} = ١$

$\frac{س^{٢}}{١٦} + \frac{ص^{٢}}{\frac{٦٤}{٩}} = ١$ $\quad \therefore$ المحور الأكبر أفقيًا

$أ^{٢} = ١٦ \quad \therefore \quad أ = ٤$

، $ب^{٢} = \frac{٦٤}{٩} \quad \therefore \quad ب = \frac{٨}{٣}$

$جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢} = ١٦ - \frac{٦٤}{٩} = \frac{٨٠}{٩}$

$جـ = \frac{٤\sqrt{٥}}{٣}$

البؤرتين هما $(\frac{٤\sqrt{٥}}{٣} ، ٠)$ ، $(-\frac{٤\sqrt{٥}}{٣} ، ٠)$

طول المحور الأكبر $= ٢أ = ٨$ وحدة طول

طول المحور الأصغر $= ٢ب = \frac{١٦}{٣}$ وحدة طول

٨

$(٠ ، ٤)$ بؤرة للقطع الزائد.

المحور الأساسي رأسيًا.

$جـ = ٤$ ولكن $e = \frac{١٢}{٥}$

$\frac{١٢}{٥} = \frac{٤}{أ}$ ، $أ = \frac{٢٠}{١٢} = \frac{٥}{٣}$

ولكن $جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} \quad \therefore \quad ب^{٢} = ١٦ - \frac{٢٥}{٩} = \frac{١١٩}{٩}$

معادلة القطع الزائد هي: $\frac{ص^{٢}}{\frac{٢٥}{٩}} - \frac{س^{٢}}{\frac{١١٩}{٩}} = ١$

أي $\frac{٩ص^{٢}}{٢٥} - \frac{٩س^{٢}}{١١٩} = ١$

Book Mark
Exit
Index

٩ ($\sqrt{41}$ ، ٠) إحدى بؤرتي القطع الزائد.

المحور الأساسي أفقيًا.

$حـ = \sqrt{41}$ ∴ $أ^2 + ب^2 = 41$ .... (١)

المعادلة تكون على الصورة: $\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = 1$

ولكن (٥ ، ٠) هي إحدى نقاط القطع

∴ $\frac{25}{أ^2} - 0 = 1$ ∴ $أ^2 = 25$

∴ $أ = 5$

(لاحظ أن النقطة (٥ ، ٠) هي إحدى رأسي القطع ومنها $أ = 5$)

من (١) ∴ $ب^2 = 41 - 25 = 16$

معادلة القطع الزائد هي: $\frac{س^2}{25} - \frac{ص^2}{16} = 1$

أي $16س^2 - 25ص^2 = 400$

١٠ (٥ ، ٠) رأس من رؤوس القطع الزائد.

∴ $أ = 5$ والمحور الأساسي أفقيًا

$e = \frac{7}{5}$ ∴ $\frac{حـ}{أ} = \frac{7}{5}$ ∴ $\frac{حـ}{5} = \frac{7}{5}$

∴ $حـ = 7$ ولكن $حـ^2 = أ^2 + ب^2$

∴ $ب^2 = 49 - 25 = 24$

$ب = 2\sqrt{6}$ ويكون:

ﺃ البؤرتين هما (٧ ، ٠) ، (-٧ ، ٠)

ب معادلة القطع الزائد هي : $\frac{س^{٢}}{٢٥} - \frac{ص^{٢}}{٢٤} = ١$

حـ معادلتي الخطين التقريبيين هما :

$$ص = \pm \frac{ب}{ﺃ} س$$

$$= \pm \frac{٢\sqrt{٦}}{٥} س$$

- تقويم التحصيل :

أولًا - أكمل كل مما يلي :

١ بؤرة القطع المكافئ $ص^٢ = ١٦س$ هي ....

٢ معادلة الدليل للقطع المكافئ $س^٢ = -١٠٠ص$ هي ....

٣ رأسا القطع الزائد $٢٥س^٢ - ٣ص^٢ = ٧٥$ هما النقطتان ....

٤ بؤرتا القطع الناقص $٤س^٢ + ص^٢ = ١٢$ هما النقطتان ....

٥ فتحة القطع المكافئ $س^٢ - ٢ص = ٠$ نحو ....

٦ فتحة القطع المكافئ $ص^٢ + ٨س = ٠$ نحو ....

٧ الاختلاف المركزي للقطع المكافئ يساوي ....

٨ الاختلاف المركزي للقطع الناقص .... من الواحد.

٩ إذا كان لقطع مخروطي $أ = ٥$ ، $حـ = ٥,٥$ فإن هذا القطع قطعًا ....

١٠ لأي قطع ناقص يكون أ .... حـ.

ثانيًا - ضع (✓) أمام العبارة الصحيحة، (×) أمام العبارة غير الصحيحة :

١ المعادلة $٥س - ٧ص^٢ = ٠$ تمثل قطعًا مكافئًا.

٢ فتحة القطع المكافئ $س^٢ = -٨ص$ إلى اليسار.

٣ إذا كان $ص = -٥$ هي معادلة الدليل لقطع مكافئ فإن معادلة هذا القطع المكافئ هي $س^٢ = ٢٠ص$.

٤ إذا كانت (٢ ، ٠) هي بؤرة قطع مكافئ فإن معادلة القطع هي $س^٢ = ٨ص$.

٥ المعادلة $٢س^٢ + \frac{١}{٢}ص^٢ = ٥$ تمثل قطعًا ناقصًا.

٦ المعادلة $٣ص^٢ - ٤س = ٠$ تمثل قطعًا زائدًا.

٧ المعادلة $(س - ٢ص)(س + ٢ص) = ١$ تمثل قطعًا زائدًا.

٨ المعادلة $\frac{س^٢}{٤} - \frac{ص^٢}{٩} = ٠$ تمثل قطعًا زائدًا.

٩ المحور الأساسي للقطع الزائد $٣س^٢ - ص^٢ = ٥$ رأسيًا.

١٠ المحور الأكبر للقطع $٢ص^٢ + ١٠س^٢ = ٥$ أفقيًا.

ثالثًا - ظلل دائرة الإجابة الصحيحة:

١ معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (٢ ، ٠) هي:

(أ) $ص^٢ = ٨س$ (ب) $ص^٢ = \frac{١}{٨}س$

(جـ) $س^٢ = ٨ص$ (د) $س^٢ = \frac{١}{٨}ص$

٢ معادلة الدليل للقطع المكافئ الذي معادلته $ص = ٤س^٢$ هي:

(أ) $ص = ١٦$ (ب) $ص = -١٦$

(جـ) $ص = \frac{١}{١٦}$ (د) $ص = \frac{-١}{١٦}$

٣ معادلة دليل القطع المكافئ الذي معادلته $ص^٢ = -٤س$ هي:

(أ) $ص = ١$ (ب) $ص = -١$

(جـ) $س = ١$ (د) $س = -١$

٤ الاختلاف المركزي للقطع الزائد $\frac{س^٢}{١٦} - \frac{ص^٢}{٢٠} = ١$ هو:

(أ) ٢ (ب) $\frac{٣}{٢}$

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{١}{٢}$

٥ الاختلاف المركزي للقطع الناقص $\frac{س^٢}{١٦} + \frac{ص^٢}{٢٠} = ١$ هو:

(أ) $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ (ب) $\sqrt{٥}$

(جـ) ٢ (د) $\frac{١}{٢}$

٦ طول المحور الأكبر في القطع الناقص $\frac{٤\text{س}^{٢}}{٩} + \frac{٢٥\text{ص}^{٢}}{٤٩} = ١$ بوحدات الطول:

(أ) ٣ (ب) $\frac{٣}{٢}$

(جـ) $\frac{١٤}{٥}$ (د) $\frac{٧}{٥}$

٧ معادلتي الخطوط التقاربية للقطع الزائد $\frac{\text{س}^{٢}}{٩} - \frac{\text{ص}^{٢}}{١٦} = ١$ هما:

(أ) $\text{ص} = \pm \frac{٤}{٣}\text{س}$ (ب) $\text{ص} = \pm \frac{٣}{٤}\text{س}$

(جـ) $\text{ص} = \pm \frac{١٦}{٩}\text{س}$ (د) $\text{ص} = \pm \frac{٩}{١٦}\text{س}$

٨ إن $\text{ص} = \pm\text{س}$ تمثلان معادلتي الخطين التقاربيين للقطع الزائد الذي معادلته:

(أ) $٤\text{س}^{٢} - ٩\text{ص}^{٢} = ٣٦$ (ب) $٥\text{س}^{٢} - ٥\text{ص}^{٢} = ٣$

(جـ) $\frac{٢}{٣}\text{س}^{٢} - \frac{٣}{٢}\text{ص}^{٢} = ١$ (د) $٢\text{س}^{٢} - ١ = ٨\text{ص}^{٢}$

٩ لأي قطع ناقص يكون:

(أ) $\text{أ} = \text{جـ}$ (ب) $\text{أ} < \text{جـ}$

(جـ) $\text{أ} > \text{جـ}$ (د) $\text{أ} + \text{ب} = \text{جـ}$

١٠ لأي قطع زائد يكون:

(أ) $\text{أ} = \text{جـ}$ (ب) $\text{أ} > \text{جـ}$

(جـ) $\text{أ} + \text{ب} < \text{جـ}$ (د) $\text{أ} - \text{ب} < \text{جـ}$

تدريس هندسة الفضاء

Space Geometry

الفصل الثالث

عرض موضوع «هندسة الفضاء» في الفصل الثالث من الجزء الثاني في كتاب الطالب، وقد جاء في سبعة بنود على النحو التالي :

- تحليل المحتوى العلمي :

أولًا : مفاهيم ومصطلحات ورموز

- المستوي π
- الفضاء ف.
- الشكل ذو البعدين، والشكل ذو الثلاثة أبعاد.
- السطح.
- السطح، المستوى، والسطح غير المستوي.
- موضوعة.
- نقط على استقامة واحدة في مستوي.
- نقط مستقيمة في الفضاء.
- مستقيمات مستوية.
- مستقيمان متخالفان - الزاوية بين مستقيمين متخالفين.
- توازي مستقيمين في الفضاء: ل ، م $\supseteq \pi$ ، ل $\cap$ م $= \phi$ أو م = ل
- توازي مستقيم لمستوى: ل $\supseteq \pi$ أو ل $\cap\ \pi = \phi$
- تعامد مستقيم على مستوى.
- تقاطع مستقيم مع مستوى: ل $\cap\ \pi = \{$أ$\}$
- تقاطع مستويين.
- تقاطع مستويين: $\pi_1 \cap \pi_2 = \phi$ أو $\pi_1 = \pi_2$
- خط تقاطع مستويين.
- الزاوية بين مستويين - الزاوية الزوجية.
- الزاوية المستوية لزاوية زوجية.
- تعامد مستويين.

ثانيًا : حقائق وتعميمات

- كل مستقيم يحوي على الأقل نقطتين مختلفتين.
- أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد.

- في كل مستو يوجد على الأقل ثلاث نقط ليست مستقيمة .
- إذا كانت أ ، ب ، حـ ثلاث نقط مختلفة وغير مستقيمة فيوجد مستو وحيد يحويهما .
- يحوي الفضاء على الأقل أربع نقاط مختلفة غير مستوية .
- إذا اشترك مستقيم **ل** ومستوى π في نقطتين مختلفتين فإن المستقيم **ل** يقع بكامله في المستوى π .
- إذا اشترك مستويان في نقطة فإنه يوجد على الأقل نقطة أخرى مشتركة بين هذين المستويين .
- إذا تقاطع مستويان فإنهما يتقاطعان في مستقيم .
- يوجد مستقيم وحيد يوازي مستقيمًا معلومًا ويمر بنقطة معلومة .
- يوجد مستوي وحيد يوازي مستويًا معلومًا ويمر بنقطة معلومة .
- يتعين المستوي في الفضاء بأي مما يلي :
  - ثلاث نقاط مختلفة ليست مستقيمة .
  - مستقيم ونقطة لا تنتمي إليه .
  - مستقيمين متقاطعين .
  - مستقيمان متوازيان ومختلفين .
- تنحصر الأوضاع المختلفة لمستقيمين مختلفين في حالات ثلاث :
  - يتقاطع المستقيمان في نقطة .
  - يتوازى المستقيمان .
  - يتخالف المستقيمان .
- تنحصر الأوضاع المختلفة لمستقيم ومستوي في حالات ثلاث :
  - يقطع المستقيم المستوي .
  - يقع المستقيم بتمامه في المستوي .
  - لا يشترك المستقيم مع المستوي في أية نقطة .

- تنحصر الأوضاع المختلفة لمستويين في حالات ثلاث:
  - يتقاطع المستويان في مستقيم.
  - يتطابق المستويان (يشتركان في جميع نقطهما).
  - لا يشترك المستويان في أية نقطة.

  ويكون المستويان متوازيين في الحالتين الأخيرتين.
- إذا وازى مستقيم خارج مستوى مستقيمًا في المستوي فإنه يوازي المستوى.
- إذا وازى مستقيم مستويًا فكل مستوي مار بالمستقيم وقاطع المستوي المعلوم يقطعه في مستقيم يوازي المستقيم المعلوم.
- إذا قطع مستوي كلًا من مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.
- المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديًا على مستوييهما.
- المستقيمان العمودان على مستوي متوازيان.
- إذا توازى مستقيمان أحدهما عمودي على مستوي كان المستقيم الآخر عموديًا على المستوي أيضًا.
- المستقيمان الموازيان لثالث في الفضاء متوازيان.
- إذا توازى مستقيمان ومر بهما مستويان متقاطعان فإن خط التقاطع يوازي كلًا من المستقيمين.
- إذا كان مستقيم معلوم عموديًا على مستوي معلوم فكل مستوي يمر بذلك المستقيم يكون عموديًا على المستوي المعلوم.
- إذا تعامد مستويان ورسم في أحدهما مستقيم عمودي على خط تقاطعهما فإنه يكون عموديًا على المستوي الآخر.
- إذا كان كل من مستويين متقاطعين عموديًا على مستوي ثالث فإن خط تقاطع المستويين يكون عموديًا على المستوي الثالث.

ثالثًا: مهارات وخوارزميات

- قراءة وكتابة الرموز والتعبيرات الرياضية المتضمنة في الموضوع، والتعبير اللفظي عن مدلول هذه الرموز والتعبيرات.

- ترجمة المسائل اللفظية بأشكال هندسية.
- قراءة الأشكال الهندسية.
- حل تمارين تتعلق بالمستقيمات والمستويات في الفضاء.
- استخلاص المعطيات والمطلوب من منطوق النظرية.
- استخلاص المعطيات والمطلوب في التمرين الهندسي.
- استخدام الأدوات الهندسية المناسبة في رسم الأشكال.
- تصور المستقيمات والمستويات المتضمنة في التمرين الهندسي.

رابعًا: المسائل والتطبيقات

تنمية أساليب التفكير من خلال:

- استخدام أسلوب التفكير الاستقرائي في التوصل إلى قاعدة عامة من عدد كاف من الحالات الخاصة.
- استخدام أسلوب التفكير الاستنتاجي في تطبيق قاعدة عامة على حالات خاصة.
- استخدام أسلوب التفكير التأملي والعلاقي لحل التمارين الهندسية الواردة في الموضوع.
- استخدام أسلوب التفكير التركيبي في التوصل إلى البرهان أو الحل.
- استخدام أسلوب التفكير الناقد في تتبع الخطوات الواردة في برهان أو حل تمرين هندسي.
- استخدام أساليب التفكير المناسبة في حل التمارين والتطبيقات.

- الأهداف السلوكية:

ينبغي أن يكون الطالب في نهاية دراسته لموضوع هندسة الفضاء قادرًا على أن:

- يقرأ ويكتب الرموز والتعبيرات الرياضية الخاصة بهندسة الفضاء في حدود محتوى الموضوع.
- يترجم منطوق نظرية إلى شكل هندسي.
- يترجم منطوق تمرين إلى شكل هندسي.
- يقرأ الشكل الهندسي.
- يتعرف المستوي.
- يتعرف الفضاء.

- يذكر موضوعات الفضاء.
- يذكر النظريات الخاصة بالمستقيمات والمستويات.
- يذكر الحالات الأربع لتعيين مستوي في الفضاء.
- يذكر الأوضاع المختلفة لمستقيمين مختلفين في الفضاء.
- يذكر الأوضاع المختلفة لمستقيم ومستوي في الفضاء.
- يذكر الأوضاع المختلفة لمستويين في الفضاء.
- يذكر متى تكون مجموعة من النقط في الفضاء مستقيمة.
- يذكر متى يتقاطع مستقيمان في الفضاء.
- يعرّف المستقيمين المتخالفين.
- يعرّف توازي مستقيمين في الفضاء.
- يعرّف الزاوية بين مستقيمين متخالفين.
- يعرّف الزاوية الزوجية.
- يتحقق بالرسم أن المستويين المختلفين غير المتوازيين يتقاطعان في مستقيم.
- يتعرف الزاوية بين مستويين.
- يتعرف الزاوية المستوية لزاوية زوجية.
- يعرّف توازي مستويين.
- يعرّف تعامد مستويين.
- يعين الزاوية بين مستويين معلومين.
- يبرهن النظريات الواردة في الموضوع.
- يربط بين المفاهيم والتعميمات الواردة في الموضوع وبين الأشكال المحسوسة في البيئة.
- يحل تطبيقات هندسية على كل من النظريات المتضمنة في الموضوع.
- يستخلص المعطيات من منطوق نظرية أو مسألة.
- يستخلص المطلوب التوصل إليه من منطوق نظرية أو مسألة.
- يعطي أمثلة من البيئة توضح:
  - توازي مستقيم ومستوي.
  - توازي مستويين.

- تقاطع مستويين .
- تعامد مستويين .
- تقاطع مستقيم مع مستوي .
- تعامد مستقيم مع مستوي .

- يتحقق من صحة النظريات والنتائج المتضمنة في الموضوع من خلال نماذج محسوسة في البيئة .

- الوسائط التعليمية :

- ملصقات لصور مجسمات من البيئة (بنايات - جسور - قلاع - أبراج . . . إلخ) .
- شفافيات لصور من البيئة توضح :
  - تقاطع مستويين .
  - خط تقاطع مستويين .
  - تعامد مستويين .
  - توازي مستويين .
  - تقاطع مستقيم مع مستوي، نقطة التقاطع .
  - تعامد مستقيم مع مستوي .
  - توازي مستقيم مع مستوي .

  . . . . . إلخ .
- شفافيات لتوضيح النظريات ونتائجها .
- نماذج مجسمة لبعض التمارين - جاهزة أو مصنعة بورق الكرتون أو الأسلاك والقطع البلاستيكية من قبل الطلاب بإشراف المعلم .
- أدوات هندسية مناسبة لرسم الأشكال الهندسية .
- السبورة والطباشير الملون أو الأقلام الملونة .
- جهاز العرض العلوي والشفافيات المعدة مسبقًا لتوضيح النظريات ونتائجها، ولتوضيح الأمثلة المحلولة، وبعض التطبيقات .
- مجسمات مركبة قابلة للفك والتركيب توضح بعض التعميمات الواردة في الموضوع من نظريات أو نتائج .
- برمجيات الرياضيات .

- تدريس الموضوع :

يقترح تخصيص ٢٥ حصة لتدريس الموضوع، توزع على بنوده على النحو التالي :

رقم البند	عنوان البند	عدد الحصص
٣ - ١	الفضاء ذو الثلاث أبعاد - موضوعات الفضاء	٣
٣ - ٢	أوضاع المستقيمات والمستويات في الفضاء	٣
٣ - ٣	المستقيمات والمستويات المتوازية	٤
٣ - ٤	تقاطع مستوي مع مستويين متوازيين	٣
٣ - ٥	تعامد مستقيم مع مستوي	٣
٣ - ٦	الزاوية بين مستويين - تعامد مستويين	٦
٣ - ٧	ملخص وتمارين عامة	٣
	المجموع	٢٥

وينبغي مراعاة ما يلي عند تدريس الموضوع :

- استعن بالمحسوسات دائمًا وقدر المستطاع في توضيح المفاهيم والعلاقات والنظريات الواردة في الموضوع.
- استعن بالأشكال والصور المعدة على شفافيات للعرض على جهاز العرض العلوي لتوضيح المفاهيم والعلاقات والنظريات الواردة في الموضوع.
- بعد الانتقال من المحسوس إلى شبه المحسوس (الوارد في الفترة السابقة) يمكن البدء في التجريد المتمثل في قراءة النظرية (أو التمرين) والرسم واستخلاص المعطيات والمطلوب ثم البرهنة أو الحل.
- استخدام الطباشير الملون أو الأقلام الملونة يساعد على وضوح الأشكال ويزيد من قدرة الطلاب على تصوّر الشكل الهندسي باعتباره شكلًا في الفضاء وليس في مستوي، وإدراك العلاقات القائمة.
- يلزم تدريب الطلاب على الرسم، أي ترجمة النظرية أو التمرين إلى شكل هندسي، وتعويدهم

على حسن اختيار الأدوات الهندسية اللازمة لذلك، وأهمية الدقة في رسم الأشكال حيث إن الرسم الدقيق يساعد على رؤية العلاقات بين عناصر الشكل . . .

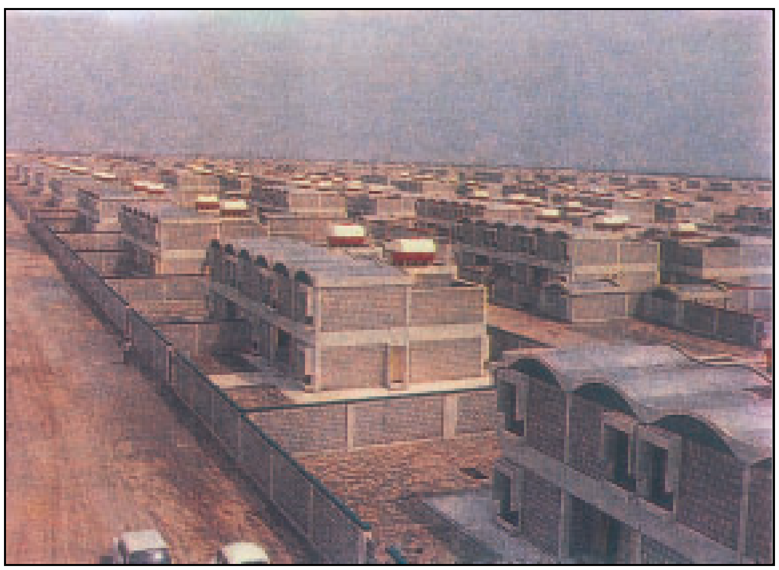
- بجانب العمل على تنمية مهارة الرسم - كما ذكر في العبارة السابقة - يلزم تنمية مهارة قراءة الأشكال الهندسية . . أي ترجمة الشكل إلى مشكلة هندسية مع تحديد المعطيات والمطلوب التوصل إليه . .
- المجال الفكري غالب في موضوع هندسة الفضاء بالإضافة إلى الجانب المهاري وهذا يتطلب مزيدًا من التدريب والمران . . . ونعتقد أن عدد الحصص المقترح لتدريس الموضوع يكفي لتحقيق ذلك .
- يفضل عند تناول الأمثلة المحلولة إعداد نماذج مجسمة لها باستخدام الورق المقوى أو الأسلاك أو القطع البلاستيكية وخاصة في بداية دراسة الموضوع وذلك لمزيد من الوضوح وحتى تنمو قدرة الطلاب على التصور الأمر الضروري جدًا والمهم في دراسة هندسة الفضاء .
- حبذا لو سبق تقديم كل معلومة بعرض أشكال وصور من البيئة أو نماذج لمجسمات تمثل جوانب في بيئة الطالب : قاعة الدراسة أو المدرسة أو المجتمع ، فمثلًا :
  - تتقاطع حافتي السبورة في نقطة واحدة .
  - في أي ركن من أركان حجرة الدراسة الأربع تتقاطع ثلاثة خطوط في نقطة واحدة .
  - يتقاطع أحد حوائط حجرة الدراسة مع أرضية الحجرة في خط مستقيم .
  - يكون خط تقاطع حائطين في حجرة الدراسة عموديًا على مستوى أرضية الغرفة .
  - تكون سارية العلم عمودية على مستوى أرضية فناء المدرسة .
  - يكون عمود المروحة الكهربائية في حجرة الدراسة عموديًا على مستوى سقف الحجرة .
  - تكون حجرة الدراسة على شكل شبه مكعب (متوازي مستطيلات) وفيها يمكن تحديد :
    - مجموعة أزواج من المستقيمات المتوازية، مجموعة من المستقيمات المتقاطعة .
    - مجموعة أزواج من المستقيمات المتخالفة .
    - مجموعة أزواج من المستويات المتقاطعة والمتعامدة .
    - مجموعة من المستقيمات الموازية لمستوٍ ما .
  - أرضيات الأدوار المتكررة في مبنى المدرسة تكون سطوح متوازية : مستوى أرضية الدور الأرضي يوازي مستوى أرضية الدور الأول، ومستوى أرضية الدور الأول يوازي مستوى أرضية الدور الثاني . . . وهكذا .

- من أهداف تدريس الهندسة تنمية القدرات العقلية ومنها مهارة البرهنة الرياضية، وعلى المعلم البُعد عن تشجيع الحفظ دون فهم وعدم دفع الطلاب إلى استظهار براهين النظريات والتمارين الهندسية.

ويمكن للمعلم في هذا الصدد اتباع الخطوط الإرشادية التالية:

  - دع الطلاب يترجمون التمارين الهندسية (والنظريات ونتائجها) إلى أشكال هندسية (نماذج بصرية) مع توضيح العلاقات المعطاة بوضع العلامات الدالة عليها.
  - ساعد الطلاب على تحديد ما هو معطى وما هو مطلوب مع التمييز بينهما.
  - استخدم الطريقة التحليلية في مناقشة خطوات الحل مع تقديم التعليلات لكل خطوة من هذه الخطوات.
  - ساعد الطلاب على استنتاج «العمل» في حالة ما إذا كان يتطلب البرهان ذلك.
  - لا تملي الحل كاملًا على الطلاب، وإنما يمكن إعطائهم الأفكار المفتاحية في التمارين الهندسية المتقدمة.
  - عوِّد الطلاب على كتابة الحل بالطريقة التركيبية، وذلك بالسير من المعلومات المتاحة (المعطيات) واستخدامها منطقيًا للوصول إلى المطلوب إثباته.

- استخدم المجسمات الجاهزة أو المعدة من قبل المعلم أو بمساعدة الطلاب باستخدام ورق مقوى أو الورق اللاصق الملون أو باستخدام الأسلاك الرفيعةو أو قطع البلاستيك الشفاف.
- استخدم الأدوات الهندسية المناسبة والسبورة الطباشيرية أو اللوحة الوبرية لتقديم العروض التوضيحية لرسم الأشكال الهندسية.
- استخدم الألوان لإبراز أشكال (أو أجزاء منها) أو علاقات معينة في شكل هندسي ما.
- استخدم المجسمات المركبة القابلة للفك والتركيب، متى توافرت، فهي من الوسائل المفيدة في تدريس هندسة الفضاء.
- يمكن نقل الأشكال التالية على شفافيات والاستعانة بها في توضيح:
  - تقاطع مستويين في مستقيم.
  - توازي مستقيمين.
  - توازي مستقيمين في الفضاء... إلخ.



- خلفية تاريخية :

من مشاهير الرياضيين العرب الذين اشتغلوا بالهندسة :

١ - أبو يوسف يعقوب بن إسحق الكندي (٨٠١م - ٨٦٧م) :

ولد في الكوفة أثناء ولاية والده، وكانت الولاية من قبل معقودة لجده، ويشير لقبه إلى أنه ينتمي إلى قبيلة كنده من اليمن، ويعرف الكندي في الغرب باسمه المحرَّف Alkindus، كما أنه عرف بين قومه «بفيلسوف العرب»، وهو يمت بالنسب إلى أحد ملوك العرب. ومن ضمن الكثير من الكتب التي وضعها الكندي في المنطق والفلسفة والهندسة والرياضيات والموسيقى والتنجيم، كتاب في الهندسة.

وباستخدام نموذج هندسي تمكن الكندي من تقديم البرهان على :

١ هيئة العالم لا بد أن تكون كروية.

٢ يتعين أن تكون الأرض كروية وأن تقع في مركز العالم.

٣ لا يمكن أن يكون سطح الماء غير كروي.

وقد كتب أعمالًا كثيرة عن الهندسة الكروية وتطبيقاتها على العالم.

٢ - أبو الحسن بن الحسن بن الهيثم (٩٦٥م - ١٠٣٩م) :

ولد في البصرة، وقضى معظم حياته بالقاهرة ودفن فيها، كان رياضيًا وفلكيًا ومشتغلًا بالفيزياء وبالطب، وكانت إلهاماته في المعرفة تفوق المألوف تمامًا، وقد كان مهندسًا كبيرًا بمقاييس عصره، فهو أول من أشار إلى فكرة تخزين مياه النيل عند أسوان للانتفاع بها في فصول الجفاف. وكثير من مسائل الهندسة والجبر التي حلها كانت نواتج لدراسته في علم الضوء.

٣ - أبو الريحان محمد بن أحمد أبو الريحان البيروني (٩٧٣م - ١٠٤٨م) :

ولد بالقرب من الخرطوم ودرس في شبابه العلوم واللغات. ومن إسهاماته العديدة رسالته الضخمة في الفلك والرياضيات والمعروفة باسم «القانون المسعودي في الهيئة والنجوم» وهي تنقسم إلى اثنى عشر بابًا، وتعتبر من أكبر موسوعات الفلك والهندسة والجغرافيا.

وبالاستعانة بالرياضيات تمكن من تحديد رسمة القبلة (اتجاه مكة المكرمة) في جميع أنحاء العالم. وعيّن طول محيط الكرة الأرضية، كما شملت دراساته الدائرة والكرة وخواصها. وامتازت كتاباته بطابع خاص فهو دائمًا يدعم أقواله وآراءه بالبراهين المادية والحجج المنطقية.

٤ - بهاء الدين محمد بن حسين بن عبدالصمد الحارثي العاملي (١٥٤٧م - ١٦٢٢م):

وهو من الذين ظهروا في القرن السادس عشر للميلاد وبرزوا في العلوم الرياضية. أحضره والده إلى العجم حيث أخذ العلم عن كبار علماء زمانه. ومن أشهر كتبه «كتاب خلاصة الحساب» الذي انتشر كثيرًا بين الأقطار والطلاب، وكتب بابًا خاصًا فيه لتعيين مساحات الأشكال الهندسية المستوية وحجوم الأجسام المنتظمة.

أجوبة وحلول التمارين

٣ – ١

بنود موضوعية :

- أولًا :

١ ب

٢ ب

أسئلة مقالية

- أولًا :

١ نقطتين مختلفتين

٢ مستويًا وحيدًا

٣ $\binom{٣}{٢} = ٣$

٤ متقاطعان أو منطبقان

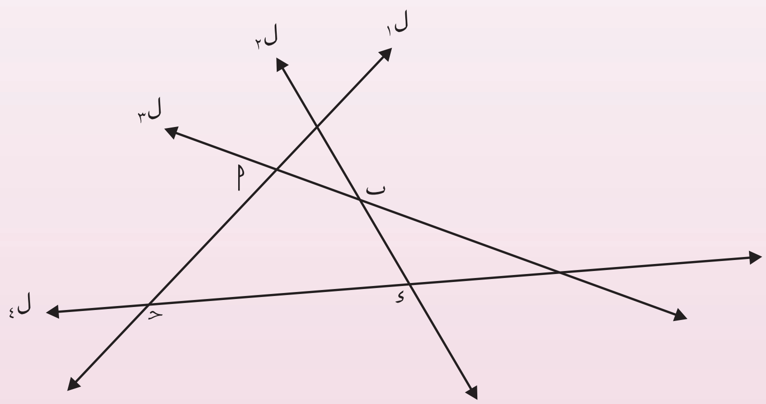
٥ ل $\subseteq \pi$

٦ أ يجمعهما مستو واحد

ب غير متقاطعين

- ثانيًا : المعطيات :

ل$_١$ ، ل$_٢$ ، ل$_٣$ ، ل$_٤$ أربعة مستقيمات مختلفة متقاطعة مثنى مثنى



المطلوب:

1. إثبات أنها جميعًا تقع في مستو واحد.
2. إيجاد عدد نقاط التقاطع.

البرهان:

$ل_1$ ، $ل_2$ مستقيمان متقاطعان

$\therefore$ يعينان مستويًا وليكن π .... (١)

$ٲ \in ل_1 \Leftarrow ٲ \in \pi$

$ب \in ل_2 \Leftarrow ب \in \pi$

$\therefore \overleftrightarrow{ٲب} \subseteq \pi$

أي أن $ل_3 \subseteq \pi$ .... (٢)

$ح \in ل_1 \Leftarrow ح \in \pi$

$ء \in ل_2 \Leftarrow ء \in \pi$

$\therefore \overleftrightarrow{حء} \subseteq \pi$

أي أن: $ل_4 \subseteq \pi$ .... (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) نستنتج أن:

المستقيمات $ل_1$ ، $ل_2$ ، $ل_3$ ، $ل_4$ تقع في مستو واحد

عدد نقاط التقاطع = $\binom{4}{2}$ = ٦ نقاط

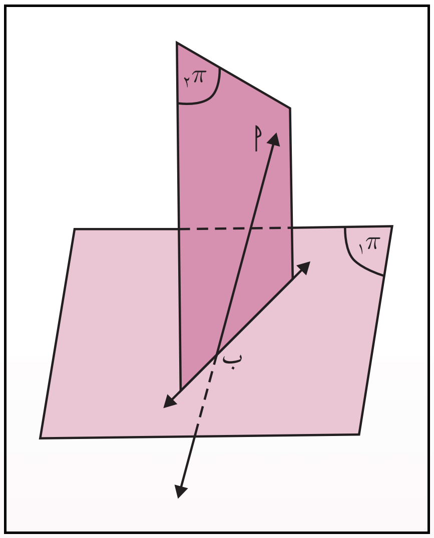
٣ – ٢

بنود موضوعية :

العبارات الصحيحة هي ١ ، ٢، ٤ ، ٩

أسئلة مقالية

١ كما في الشكل



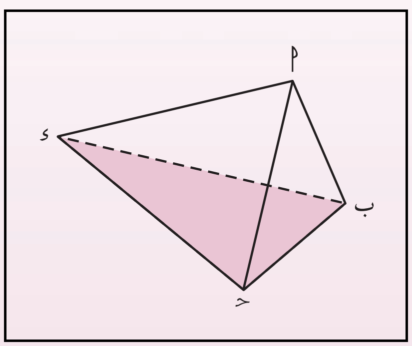
٢ أ عدد الوجه = ٤

ب عدد الأحرف = ٦

حـ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ أو

$\overline{\text{أء}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ أو

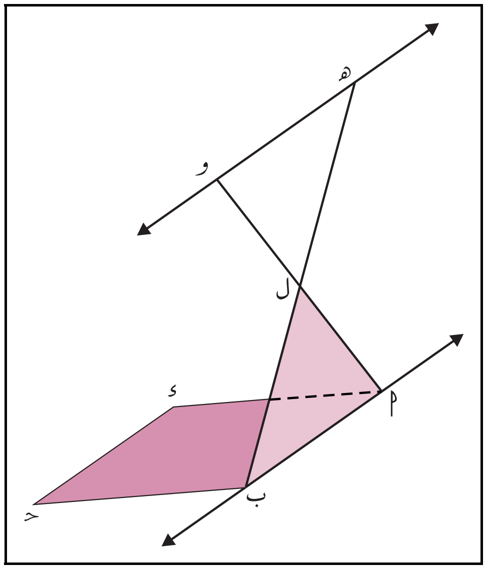
$\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$



١ **المعطيات:**

أ ب حـ ء متوازي أضلاع،

$\overleftrightarrow{\text{أ و}} \cap \overleftrightarrow{\text{ب هـ}} = \{\text{ل}\}$ ، $\frac{\text{ل أ}}{\text{ل ب}} = \frac{\text{ل و}}{\text{ل هـ}}$



المطلوب:

إثبات أن:

$\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // المستوى أ ب حـ ء

البرهان:

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ مستقيمان متقاطعان

∴ يعينان مستويًا فيه

في المثلثان ل أ ب ، ل و هـ:

ق $(\text{أ}\,\hat{\text{ل}}\,\text{ب})$ = ق $(\text{و}\,\hat{\text{ل}}\,\text{هـ})$ ، $\frac{\text{ل أ}}{\text{ل ب}} = \frac{\text{ل و}}{\text{ل هـ}} \Leftarrow \frac{\text{ل أ}}{\text{ل و}} = \frac{\text{ل ب}}{\text{ل هـ}}$

وبالتالي فإن المثلثين ل أ ب ، ل و هـ متشابهان

ومن تشابه المثلثين ينتج أن قياسات زواياهما المتناظرة متساوية،

ويكون ق $(\text{ل}\,\hat{\text{ب}}\,\text{أ})$ = ق $(\text{ل}\,\hat{\text{هـ}}\,\text{و})$

ولكن الزاويتين ل $\hat{\text{ب}}$ أ ، ل $\hat{\text{هـ}}$ و متبادلتان

∴ $\overline{\text{هـ و}} \parallel \overline{\text{أ ب}} \Leftarrow \overleftrightarrow{\text{هـ و}} \parallel \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

وحيث إن: $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \subseteq$ المستوى أ ب حـ ء ،

$\overleftrightarrow{\text{هـ و}} \parallel \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

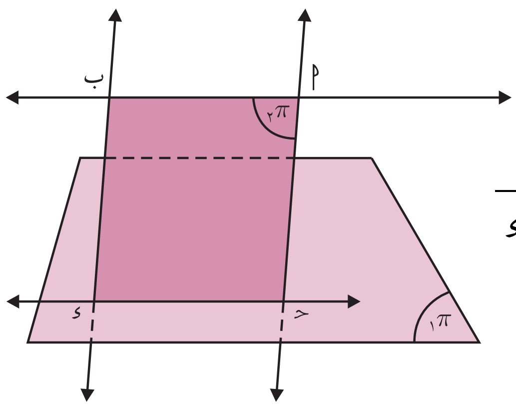
∴ $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ يوازي المستوي أ ب حـ ء .

٢ $\because$ $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ب ء}}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$

يعينان مستوى وليكن π_2 فيه $\overline{\text{أ حـ}} \parallel \overline{\text{ب ء}}$

$\because$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \parallel \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \subseteq \pi_2$ ، $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$



$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}} \parallel \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ (نظرية)

ويكون $\overline{\text{أ ب}} \parallel \overline{\text{حـ ء}}$

وحيث إن $\overline{\text{أ حـ}} \parallel \overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{أ ب}} \parallel \overline{\text{حـ ء}}$

$\therefore$ أ حـ ء ب متوازي أضلاع.

٣ المستوى م ن هـ ل $\cap$ المستوى أ ب حـ $= \overleftrightarrow{\text{م ن}}$

$\because$ $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}} \parallel$ المستوى م ن هـ ل

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}} \parallel \overleftrightarrow{\text{م ن}}$

في Δ أ ب حـ

فيه $\overline{\text{أ حـ}} \parallel \overline{\text{م ن}}$

$\therefore$ $\dfrac{\text{ب م}}{\text{م أ}} = \dfrac{\text{ب ن}}{\text{ن حـ}}$ .... (١)

المستوى م ن هـ ل $\cap$ المستوى أ ء حـ $= \overleftrightarrow{\text{ل هـ}}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ل هـ}}$

Δ أ ء حـ فيه $\overline{\text{أ حـ}} \parallel \overline{\text{ل هـ}}$

$\dfrac{\text{ء هـ}}{\text{هـ حـ}} = \dfrac{\text{ء ل}}{\text{ل أ}}$ .... (٢)

المستوى م ن هـ ل $\cap$ المستوى ب حـ ء $= \overleftrightarrow{\text{ن هـ}}$

$\because$ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}} \parallel$ المستوى م ن هـ ل

∴ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ن ه}}$

Δ ب حـ ء فيه $\overline{\text{ب ء}} \parallel \overline{\text{ن ه}}$

$\frac{\text{ب ن}}{\text{ن حـ}} = \frac{\text{ء ه}}{\text{ه حـ}}$ .... (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن:

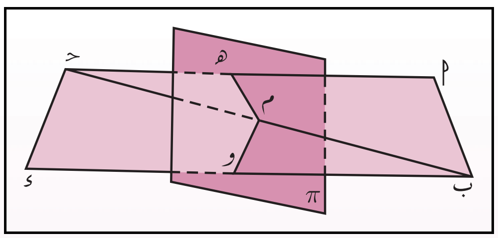
$$\frac{\text{ب م}}{\text{م أ}} = \frac{\text{ب ن}}{\text{ن حـ}} = \frac{\text{د ه}}{\text{ه حـ}} = \frac{\text{ء ل}}{\text{ل أ}}$$

∴ المستوي ل م ن ه يقسم كلًا من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ ، $\overline{\text{ء أ}}$ إلى أجزاء أطوالها متناسبة.

٤ **العمل:**

نصل $\overline{\text{ب حـ}}$ فيقطع المستوي π في النقطة (م)، ونرسم $\overline{\text{م و}}$ ، $\overline{\text{م ه}}$

البرهان:



$\overline{\text{حـ ء}}$ والنقطة ب تحددان مستوي وليكن π_1

$\pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{\text{م و}}$

∵ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}} \parallel \pi$

∴ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}} \parallel \overleftrightarrow{\text{و م}}$

في Δ حـ ء ب ∵ $\overline{\text{حـ ء}} \parallel \overline{\text{و م}}$

∴ $\frac{\text{ب و}}{\text{و ء}} = \frac{\text{ب م}}{\text{م حـ}}$ .... (١)

بالمثل $\overline{\text{أ ب}}$ ، نقطة حـ تحددان مستوي وليكن π_2

$\pi_2 \cap \pi = \overleftrightarrow{\text{م ه}}$

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \parallel \pi$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{م ه}}$

في المثلث أ ب حـ $\because \overline{أب} \parallel \overline{هـم}$

$\therefore \dfrac{أهـ}{حـهـ} = \dfrac{بم}{محـ}$ .... (٢)

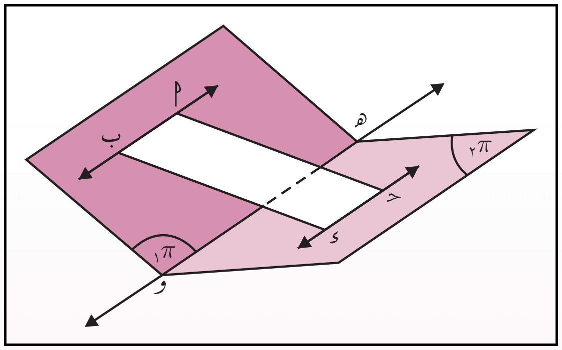
من (١) ، (٢)

$\therefore \dfrac{بو}{وء} = \dfrac{أهـ}{هـحـ}$

٥ $\because \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{هـو}$ ،

$\because \overleftrightarrow{أب} \subseteq \pi_1$ ،

$\because \overleftrightarrow{أب} \parallel \pi_2$



$\therefore \overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{هـو}$ .... (١)

$\because \overleftrightarrow{حـء} \subseteq \pi_2$ ،

$\because \overleftrightarrow{حـء} \parallel \pi_1$

$\therefore \overleftrightarrow{حـء} \parallel \overleftrightarrow{هـو}$ .... (٢)

من (١) ، (٢)

$\therefore \overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{حـء}$

٦ $\because$ أ ب حـ ء متوازي أضلاع

$\therefore \overline{أب} \parallel \overline{حـء}$ ، أب = حـء .... (١)

∵ أ ب و هـ متوازي أضلاع

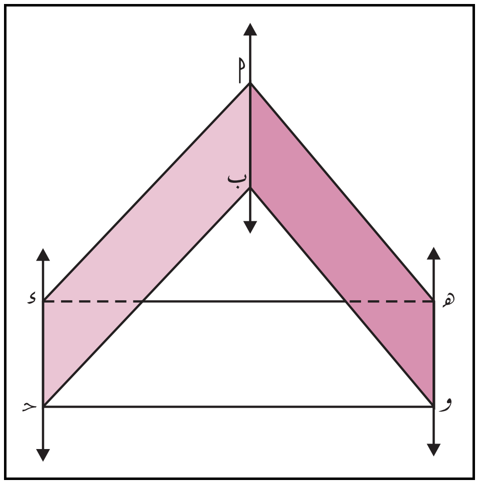
∴ أب // هـ و ، أ ب = هـ و ...... (٢)

∴ من (١) ، (٢)

∴ حـ ء // هـ و ،

حـ ء = هـ و

∴ الشكل حـ ء هـ و متوازي أضلاع



٧ **أولًا:**

في المثلث أ ب حـ

س منتصف أب ،

ص منتصف ب حـ

∴ س ص // أ حـ

∴ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ .... (١)

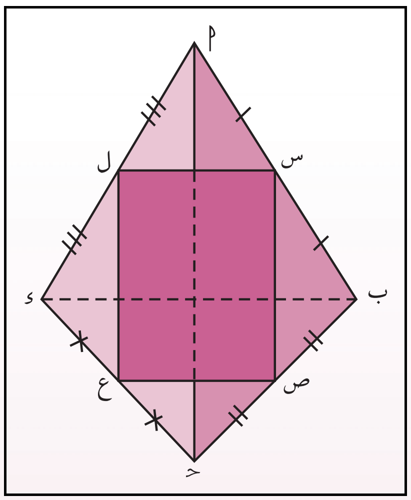
في المثلث أ ء حـ

ع منتصف ء حـ ،

ل منتصف ء أ ،

∴ ع ل // أ حـ

∴ $\overleftrightarrow{\text{ع ل}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ .... (٢)



من (١) ، (٢)

∴ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ع ل}}$ .... (٣)

∴ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$، $\overleftrightarrow{\text{ع ل}}$ يحددان مستوي وحيد س ص ع ل

∴ الشكل الرباعي س ص ع ل أضلاعه تقع في مستوي واحد (وهو المطلوب أولًا).

ثانيًا: من (٣) ∴ $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ // المستوي س ص ع ل

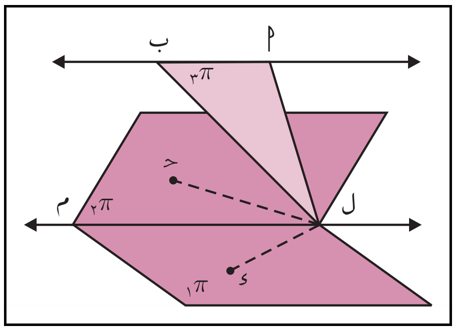
∴ $\overline{\text{أ جـ}}$ // المستوي س ص ع ل

بالمثل يمكن إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{ص ع}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ // $\overleftrightarrow{\text{س ل}}$

∴ $\overline{\text{ب ء}}$ // المستوي س ص ع ل (وهو المطلوب ثانيًا).

ملحوظة: في التمرين السابق يكون الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع.

٨ **البرهان:**



يتعين المستوي π_3 بالمستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ والنقطة ل

ويقطع المستوي π_3 المستوي π_1 في المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل ء}}$

وكذلك يقطع المستوي π_2 في المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل جـ}}$

وبالتالي فإن المستوي π_3 يقطع المستوي π_1 في المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل ء}}$ ويمر بالمستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ الذي يوازي المستوي π_1

ويكون $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ء ل}}$ لماذا؟

وبالمثال $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ ل}}$

إذن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يوازي كلًا من $\overleftrightarrow{\text{ء ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ل}}$ ويستحيل هذا إلا إذا انطبق كل من $\overleftrightarrow{\text{ء ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ل}}$ على $\overleftrightarrow{\text{ل م}}$ الذي هو خط تقاطع المستويين.

ويكون $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ل م}}$

Book Mark
Exit
Index

تمارين

بنود موضوعية :

١ ب   ٢ حـ   ٣ ء

أسئلة مقالية :

١ أ المستوى ء ء′ حـ′ حـ

ب ϕ

حـ $\{$ء$\}$

ء $\overleftrightarrow{\text{ء ء}'}$

هـ $\overline{\text{أأ}'}$ ، $\overline{\text{ب ب}'}$ ، $\overline{\text{حـ حـ}'}$

و $\overleftrightarrow{\text{حـ حـ}'}$

ز ٤٥°

ح ٩٠°

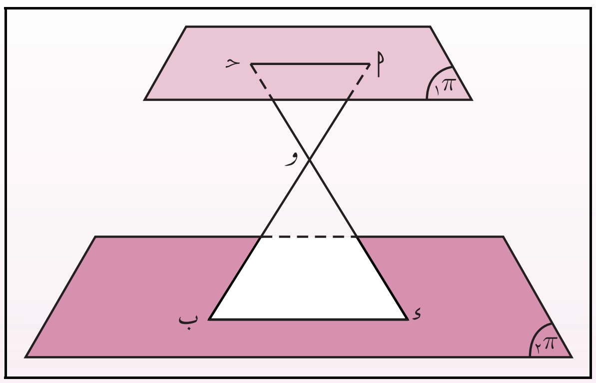
٢ **المعطيات :**

π_1 ، π_2 مستويان، $\pi_1 \;//\; \pi_2$

و $\in$ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، و $\in$ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

أ $\in \pi_1$ ، حـ $\in \pi_1$ ،

ء $\in \pi_2$ ، ب $\in \pi_2$



المطلوب : إثبات أن : $\frac{\text{و أ}}{\text{و ب}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{ب ء}}$

البرهان :

$\because$ $\overleftrightarrow{\text{أب}} \cap \overleftrightarrow{\text{حـ ء}} = \{\text{و}\}$

$\therefore$ يعينان مستويًا وليكن π_3 ، حيث يقطع المستوي π_3 المستويين المتوازيين π_1 ، π_2 في $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ء ب}}$.

وبالتالي فإن $\overleftrightarrow{\text{أحـ}} \;//\; \overleftrightarrow{\text{ء ب}}$ .... نظرية

Book Mark
Exit
Index

المستوي π_3 فيه المثلثين و أ حـ ، و ب ء :

ق (و $\hat{\text{أ}}$ حـ) = ق (و $\hat{\text{ب}}$ ء) بالتبادل ،

ق (أ $\hat{\text{حـ}}$ و) = ق (ب $\hat{\text{ء}}$ و) بالتبادل

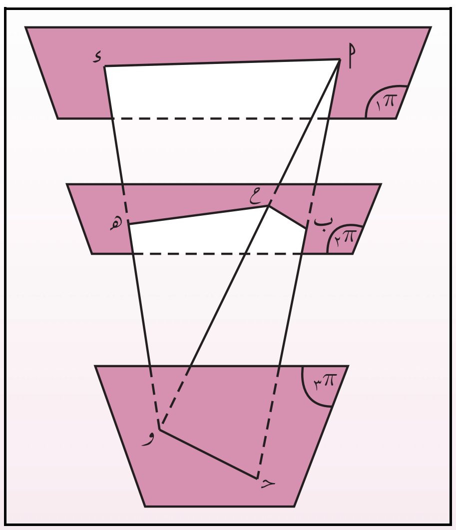
ق (أ $\hat{\text{و}}$ حـ) = ق (ب $\hat{\text{و}}$ ء) .... بالتقابل بالرأس

وبالتالي فإن المثلثين و أ حـ ، و ب ء متشابهان لتطابق زواياهما المتناظرة، ويكون

$$\frac{\text{و أ}}{\text{و ب}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{ب ء}}$$

٣ **المعطيات:**

π_1 ، π_2 ، π_3 ثلاثة مستويات ، π_1 // π_2 // π_3 يقطع المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ء و}}$ الثلاثة مستويات π_1 ، π_2 ، π_3 في أ ، ب ، حـ (على الترتيب)، ويقطع المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ء و}}$ المستويات الثلاثة في ء ، هـ ، و (على الترتيب).



المطلوب:

إثبات أن: $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ و}}$

العمل:

نرسم $\overline{\text{أ و}}$ تقطع المستوى π_2 في نقطة ولتكن ح .

ثم نرسم $\overline{\text{ح هـ}}$ ، $\overline{\text{ء أ}}$ ، $\overline{\text{و حـ}}$ ، $\overline{\text{ح ب}}$

البرهان:

$\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ء و}}$ يعينان مستويًا وليكن ء أ و

∴ المستوي ء أ و يقطع المستويين المتوازيين في π_1 ، π_2

في $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ح هـ}}$ (على الترتيب)

∴ $\overline{\text{ء أ}}$ // $\overline{\text{ح هـ}}$ .... نظرية

ويكون في المثلث ء أ و : $\frac{\text{أ ح}}{\text{ح و}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ و}}$ .... (١)

وبالمثل ∵ المستوي أ و حـ يقطع المستويين المتوازيين π_2 ، π_3 في $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و حـ}}$ (على الترتيب).

∴ $\overline{\text{ب ح}}$ // $\overline{\text{و حـ}}$ .... نظرية

ويكون في المثلث أ و حـ : $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{أ ح}}{\text{ح و}}$ .... (٢)

وينتج من (١) ، (٢) أن :

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ و}}$$

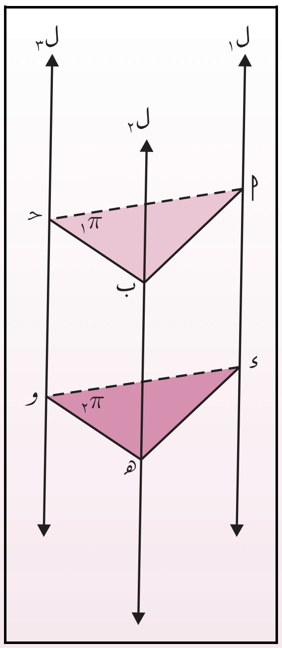
٤ **المعطيات :**

$ل_1$ ، $ل_2$ ، $ل_3$ ثلاثة مستقيمات متوازية وغير مستوية

π_1 // π_2

π_1 يقطع $ل_1$ ، $ل_2$ ، $ل_3$ في أ ، ب ، حـ على الترتيب

π_2 يقطع $ل_1$ ، $ل_2$ ، $ل_3$ في ء ، هـ ، و على الترتيب



المطلوب :

إثبات أن المثلثين أ ب حـ ، ء هـ و متطابقان

البرهان :

∵ $ل_1$ // $ل_2$ ⇐ $ل_1$ ، $ل_2$ يحددان مستويًا وحيدًا π_3

المستوى π_3 يقطع المستويين المتوازيين

π_1 ، π_2 في $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ على الترتيب

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$

∴ الشكل أ ء هـ ب متوازي أضلاع.

Book Mark
Exit
Index

∴ أب = د هـ .... (١)

∵ ل$_1$ // ل$_3$ $\Leftarrow$ ل$_1$ ، ل$_3$ يحددان مستويًا وحيدًا π_4

المستوى π_4 يقطع المستويين المتوازيين π_1 ، π_2 في $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{د و}}$ على الترتيب

∴ $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{د و}}$

∵ $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ // $\overleftrightarrow{\text{حـ و}}$

∴ الشكل أ د و حـ متوازي أضلاع.

∴ أحـ = د و .... (٢)

∵ ل$_2$ // ل$_3$ $\Leftarrow$ ل$_2$ ، ل$_3$ يحددان مستويًا وحيدًا π_5

المستوى π_5 يقطع المستويين المتوازيين π_1 ، π_2 في $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ على الترتيب

∴ $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

∵ $\overleftrightarrow{\text{بهـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{حـ و}}$

∴ الشكل ب هـ و حـ متوازي أضلاع.

∴ بحـ = هـ و .... (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣)

∴ المثلثين أب حـ ، د هـ و متطابقان

بنود موضوعية:

● أولًا:

١ x ٢ x ٣ x

٤ x ٥ x

● ثانيًا:

١ حـ ٢ حـ ٣ حـ

أسئلة مقالية:

١ **المعطيات:**

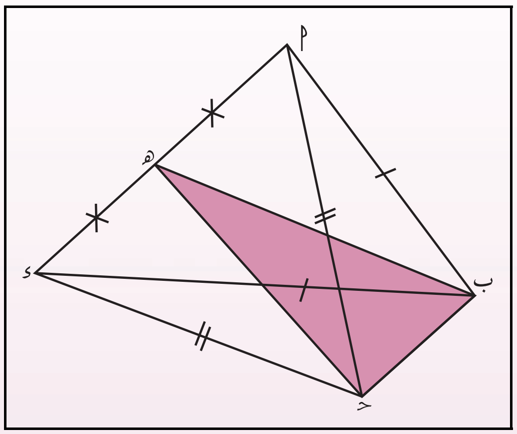
أ ب حـ ء هرم ثلاثي فيه: أ ب = ب ء ، أ حـ = حـ ء ،

هـ منتصف $\overline{\text{أ ء}}$ ، ب هـ حـ مستوي

المطلوب:

إثبات أن: $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ مستوي المثلث ب حـ هـ ،

$\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$



البرهان:

في المثلث أ ب ء

∵ أ ب = ب ء ،

هـ منتصف $\overline{\text{أ ء}}$

∴ $\overline{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$

في المثلث أ حـ ء

∵ أ حـ = حـ ء ،

هـ منتصف $\overline{\text{أ ء}}$

∴ $\overline{\text{حـ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$

∵ $\overline{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{حـ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$

∴ $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ المستوي ب هـ حـ .... نظرية

∴ $\overline{\text{أ ء}}$ عمودي على أي مستقيم يحويه المستوي ب هـ حـ

∴ $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$

٢ **المعطيات:**

الدائرة (م) فيها:

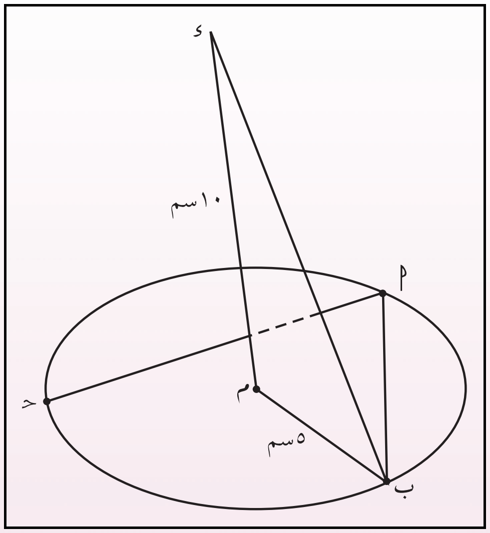
نق = ٥سم ، $\overline{\text{أب}}$ وتر ، $\overline{\text{أحـ}}$ وتر

ء ∉ الدائرة ،

$\overline{\text{ء م}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$ ،

$\overline{\text{ء م}}$ ⊥ $\overline{\text{أحـ}}$ ،

ء م = ١٠سم



المطلوب:

إيجاد طول $\overline{\text{ب ء}}$

العمل:

نصل $\overline{\text{م ب}}$

البرهان:

∵ $\overline{\text{ء م}}$ عمودي على كل من $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$

∴ $\overline{\text{ء م}}$ عمودي على مستوي الدائرة .... نظرية

∴ $\overline{\text{ء م}}$ ⊥ $\overline{\text{م ب}}$ ، حيث $\overline{\text{م ب}}$ ⊇ مستوي الدائرة.

∴ الزاوية ء م ب قائمة

∴ (ء ب)^{٢} = (ء م)^{٢} + (م ب)^{٢} .... نظرية فيثاغورث

∴ (ء ب)^{٢} = (١٠)^{٢} + (٥)^{٢} = ١٠٠ + ٢٥ = ١٢٥

ء ب = $\sqrt{١٢٥}$ = ٥$\sqrt{٥}$ سم

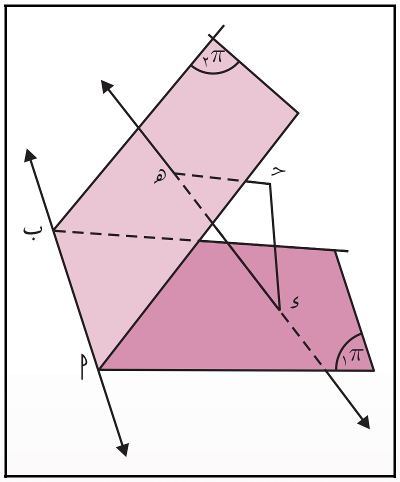
٣ المعطيات:

يتقاطع المستويان $\pi_{١}$ ، $\pi_{٢}$ في $\overleftrightarrow{أب}$

حـ $\not\ni$ $\pi_{١}$ ، حـ $\not\ni$ $\pi_{٢}$ ،

$\overleftrightarrow{حـ ء}$ $\perp$ المستوي $\pi_{١}$ ،

$\overleftrightarrow{حـ هـ}$ $\perp$ المستوي $\pi_{٢}$



المطلوب:

إثبات أن: $\overleftrightarrow{أب}$ $\perp$ $\overleftrightarrow{ء هـ}$

البرهان:

∵ $\overleftrightarrow{حـ ء}$ $\perp$ المستوي $\pi_{١}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ $\subseteq$ $\pi_{١}$

∴ $\overleftrightarrow{حـ ء}$ $\perp$ $\overleftrightarrow{أب}$ .... (١)

وبالمثل: ∵ $\overleftrightarrow{حـ هـ}$ $\perp$ المستوي $\pi_{٢}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ $\subseteq$ $\pi_{٢}$

∴ $\overleftrightarrow{حـ هـ}$ $\perp$ $\overleftrightarrow{أب}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن:

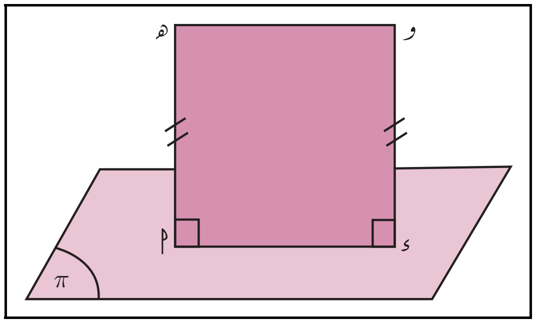
$\overleftrightarrow{أب}$ عمودي على كل من $\overleftrightarrow{حـ ء}$ ، $\overleftrightarrow{حـ هـ}$ الواقعين في المستوي هـ حـ ء :

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ عمودي على المستوي هـ حـ ء .... نظرية

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ $\perp$ $\overleftrightarrow{ء هـ}$ حيث $\overleftrightarrow{ء هـ}$ $\subseteq$ المستوي هـ حـ ء

٤ **المعطيات :**

$\overline{\text{هـ أ}} \perp \pi$ ، $\overline{\text{و ء}} \perp \pi$ ، هـ أ = و ء



المطلوب :

إثبات أن : $\overline{\text{هـ و}} \parallel \pi$

البرهان :

$\because$ $\overline{\text{هـ أ}} \perp \pi$ ، $\overline{\text{و ء}} \perp \pi$

$\therefore$ $\overline{\text{هـ أ}} \parallel \overline{\text{و ء}}$ .... نظرية

$\because$ هـ أ = و ء .... معطى .

$\therefore$ الشكل هـ أ ء و متوازي أضلاع

وبالتالي فإن : $\overline{\text{هـ و}} \parallel \overline{\text{أ ء}}$ ،

$\overline{\text{أ ء}} \subseteq \pi$

$\therefore$ $\overline{\text{هـ و}} \parallel \pi$

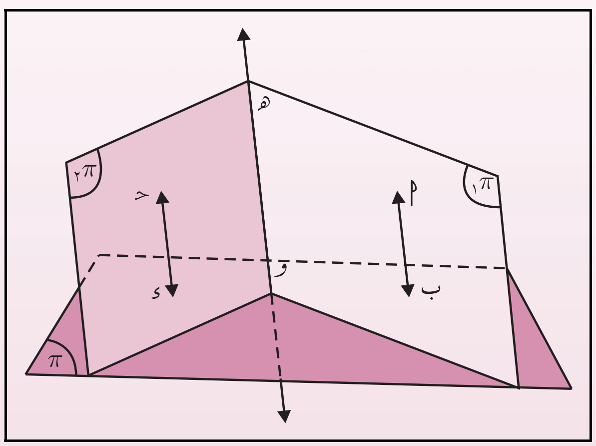
٥ **المعطيات :**

كل من المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ عمودي على المستوي π ،

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \subseteq \pi_1$ ،

$\overleftrightarrow{\text{حـ ء}} \subseteq \pi_2$ ،

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{\text{هـ و}}$



المطلوب :

إثبات أن : $\overleftrightarrow{\text{هـ و}} \perp \pi$

البرهان :

$\because$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp \pi$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}} \perp \pi$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ .... نظرية

Book Mark
Exit
Index

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}} \subset \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}} \subset \pi_2$ ، $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ يوازي كلًا من المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ .... نتيجة

∴ $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ يوازي $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \pi$

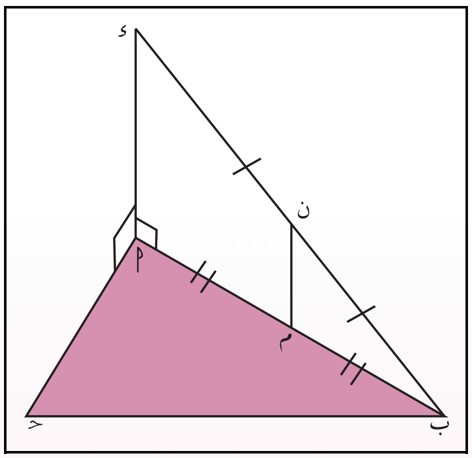
∴ $\overleftrightarrow{\text{هـ و}} \perp$ المستوي π .... نتيجة

٦ **المعطيات:**

أب حـ ، ء $\notin$ المستوي أب حـ ،

$\overline{\text{أء}} \perp \overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أء}} \perp \overline{\text{أحـ}}$ ،

م منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ن منتصف $\overline{\text{حـ ء}}$



المطلوب:

إثبات أن: $\overline{\text{م ن}} \perp$ المستوي أب حـ ،

البرهان:

المثلث أب ء ، فيه:

م منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، ن منتصف $\overline{\text{ب ء}}$

∴ $\overline{\text{م ن}} \parallel \overline{\text{ء أ}}$ .... (١)

∵ $\overline{\text{ء أ}} \perp \overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ء أ}} \perp \overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{أب}} \subset$ المستوي أب حـ ،

$\overline{\text{أحـ}} \subset$ المستوي أب حـ

∴ $\overline{\text{ء أ}} \perp$ المستوي أب حـ .... (٢)

وينتج من (١) ، (٢) أن:

$\overline{\text{م ن}} \perp$ المستوي أب حـ .... نتيجة

٧ في المثلث ب حـ ء قياس $\widehat{\text{ب حـ ء}}$ = ٩٠°

∴ (ب ء)^{٢} = (ء حـ)^{٢} + (ب حـ)^{٢}

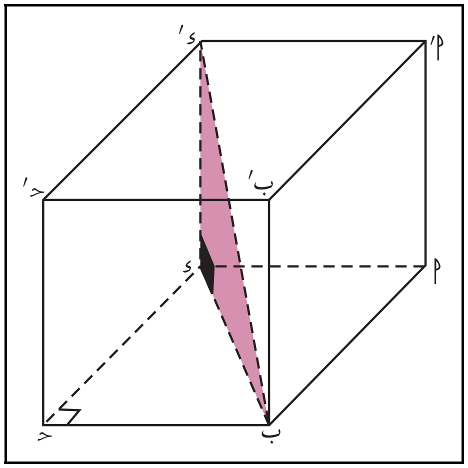
= ل^{٢} + ل^{٢} = ٢ل^{٢}

∴ ب ء = $\sqrt{٢}$ ل وحدة طول .... (١)

$\overline{\text{ء ء}'}$ ⊥ $\overline{\text{ء أ}}$ ، $\overline{\text{ء ء}'}$ ⊥ $\overline{\text{ء حـ}}$

∴ $\overline{\text{ء ء}'}$ ⊥ المستوي أ ب حـ ء

∴ $\overline{\text{ء ء}'}$ ⊥ $\overline{\text{ب ء}}$



في المثلث ء ء' ب قياس $\widehat{\text{ب ء ء}'}$ = ٩٠°

∴ (ب ء')^{٢} = (ب ء)^{٢} + (ء ء')^{٢}

= ٢ل^{٢} + ل^{٢} = ٣ل^{٢}

∴ ب ء' = $\sqrt{٣}$ ل وحدة طول .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن:

$\frac{\text{ب ء}'}{\text{ب ء}} = \frac{\sqrt{٣}\ \text{ل}}{\sqrt{٢}\ \text{ل}} = \frac{\sqrt{٦}}{٢}$ وهو المطلوب

١ **المعطيات:**

أ ب حـ مثلث فيه ق $(\hat{أ})$ = ٣٠° ، أ ب = ١٠ $\sqrt{٣}$ سم ، $\overline{ب ء}$ ⊥ مستوى المثلث

أ ب حـ بحيث ب ء = ٥سم ، $\overline{ء هـ}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{ب هـ}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$

المطلوب:

إثبات أن قياس الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب حـ ، أ حـ ء يساوي ٣٠°

البرهان:

يتقاطع المستويان أ ب حـ ، أ حـ ء في $\overleftrightarrow{أ حـ}$

∵ $\overline{ء هـ}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{ب هـ}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$

∴ ق $(ء \hat{هـ} ب)$ يساوي قياس الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب حـ ، أ حـ ء

∵ المثلث أ هـ ب قائم الزاوية في هـ ، ق $(\hat{أ})$ = ٣٠°

∴ ب هـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ $\sqrt{٣}$ = ٥ $\sqrt{٣}$ سم

∵ $\overline{ء ب}$ ⊥ المستوي أ ب حـ

∴ $\overline{ء ب}$ ⊥ $\overline{ب هـ}$

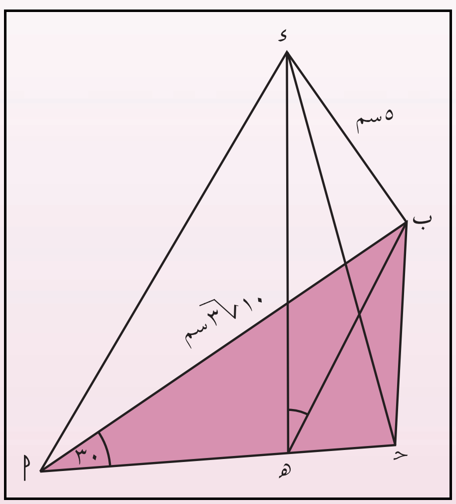
∴ △ ء ب هـ قائم الزاوية في ب

∴ ظا $(ء \hat{هـ} ب)$ = $\frac{ء ب}{ب هـ}$

= $\frac{٥}{٥\sqrt{٣}}$

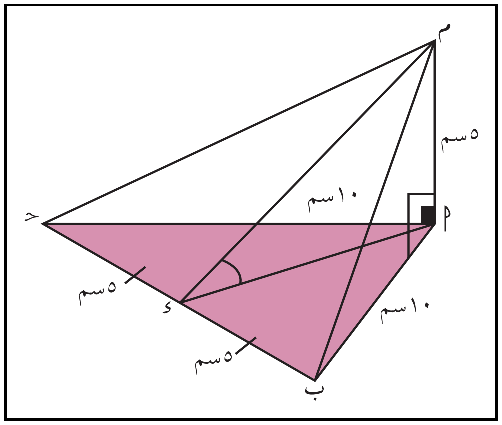
= $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ ق $(ء \hat{هـ} ب)$ = ٣٠°



٢ **المعطيات:**

م أ ب حـ هرم ثلاثي فيه: (م) رأس الهرم، وقاعدته المثلث أ ب حـ متطابق الأضلاع.



أ ب = ب حـ = أ حـ = ١٠سم،

ق (م أ̂ ب) = ق (م أ̂ حـ) = ٩٠°،

م أ = ٥ سم،

ب ء = حـ ء

المطلوب:

أ إثبات أن $\overline{\text{ب حـ}}$ ⊥ المستوي م أ ء

ب إيجاد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين م ب حـ، أ ب حـ

البرهان:

أ ∵ ق (م أ̂ ب) = ق (م أ̂ حـ) = ٩٠°

∴ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ حـ}}$

⇐ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ المستوي أ ب حـ

∴ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$ .... (١)

في Δ أ ب حـ المتطابق الأضلاع: ء ب = ء حـ

∴ $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$ .... (٢)

من (١)، (٢)

∴ $\overline{\text{ب حـ}}$ ⊥ المستوي م أ ء (وهو المطلوب أولًا).

ب قياس الزاوية م ء أ هو قياس الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب حـ، م ب حـ

وحيث إن $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ المستوي أ ب حـ

∴ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$

∴ ق (م أ̂ ء) = ٩٠°

Book Mark
Exit
Index

$\therefore$ ظا(م ى $\hat{\text{أ}}$) $= \dfrac{\text{م أ}}{\text{أ ى}}$

حا(أ ب $\hat{\text{ى}}$) $=$ حا $٦٠^\circ = \dfrac{\text{أ ى}}{\text{أ ب}}$

(حيث إن Δ أ ى ب قائم الزاوية $\hat{\text{ى}}$ ، ق (أ ب $\hat{\text{ى}}$) $= ٦٠^\circ$)

$\therefore \dfrac{\sqrt{٣}}{٢} = \dfrac{\text{أ ى}}{١٠} \Leftarrow$ أ ى $= \dfrac{١٠\sqrt{٣}}{٢} = ٥\sqrt{٣}$ سم

$\therefore$ ظا(م ى $\hat{\text{أ}}$) $= \dfrac{٥}{٥\sqrt{٣}} = \dfrac{١}{\sqrt{٣}}$

$\therefore$ ق (م ى $\hat{\text{أ}}$) $= ٣٠^\circ$ وهو المطلوب ثانيًا.

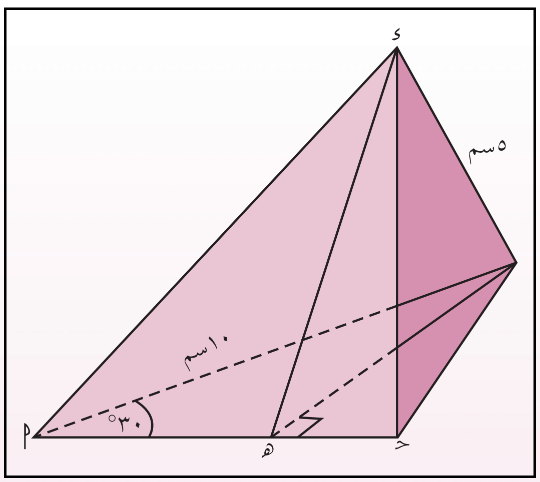
٣ **المعطيات:**

المثلث أ ب حـ فيه:

ق(ب $\hat{\text{أ}}$ حـ) $= ٣٠^\circ$ ، أ ب = ١٠سم.

$\overline{\text{ب ى}}$ عمودي على المستوي أ ب حـ ،

ب ى = ٥سم



المطلوب:

إيجاد قياس الزاوية الزوجية

بين المستويين أ ى حـ ، أ ب حـ

العمل:

نرسم $\overline{\text{ب هـ}}$ بحيث يكون عموديًا على $\overline{\text{أ حـ}}$.

البرهان:

$\because$ $\overline{\text{ى ب}}$ $\perp$ المستوي أ ب حـ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ $\subseteq$ المستوي أ ب حـ

$\therefore$ $\overline{\text{ى ب}}$ $\perp$ $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ $\perp$ $\overline{\text{أ حـ}}$

$\therefore$ $\overline{\text{أ حـ}}$ $\perp$ المستوي ى ب هـ

قياس الزاوية ى هـ ب هو قياس الزاوية الزوجية بين المستويين: أ ى حـ ، أ ب حـ

Book Mark
Index
Exit

في المثلث ﺃ ب هـ القائم الزاوية $\hat{\text{هـ}}$

حا ٣٠° = $\frac{\text{ب هـ}}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ ب هـ = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥سم

∵ $\overline{\text{ء ب}}$ ⊥ المستوي ﺃ ب جـ ∴ $\overline{\text{ء ب}}$ ⊥ $\overline{\text{ب هـ}}$

المثلث ء ب هـ القائم الزاوية في ب

∴ ظا (ء $\hat{\text{هـ}}$ ب) = $\frac{\text{ء ب}}{\text{ب هـ}}$ = $\frac{٥}{٥}$ = ١

∴ ق (ء $\hat{\text{هـ}}$ ب) = ٤٥°

٤

المعطيات:

س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، $\overline{\text{س ء}}$ ⊥ المستوي س ص ع ، ء س = س ص

المطلوب:

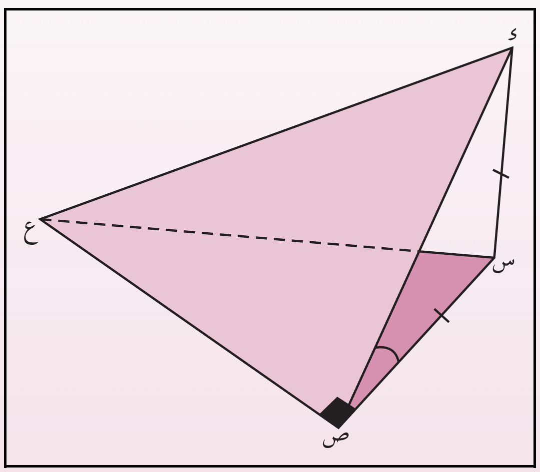
تعيين قياس الزاوية الزوجية بين المستويين س ص ع ، ء ص ع

البرهان:

المستوي س ص ع ∩ المستوي ء ص ع = $\overleftrightarrow{\text{ص ع}}$ ،

$\overline{\text{ص س}}$ ⊆ المستوي س ص ع ،

$\overline{\text{ص ء}}$ ⊆ المستوي ء ص ع ،



∵ $\overline{\text{ء س}}$ ⊥ المستوي س ص ع ،

∴ $\overline{\text{ء س}}$ ⊥ $\overline{\text{ص ع}}$ ،

∵ $\overline{\text{ص ع}}$ ⊥ $\overline{\text{ص س}}$

∴ $\overline{\text{ص ع}}$ ⊥ المستوي ء س ص ،

∴ $\overline{\text{ص ع}}$ ⊥ $\overline{\text{ص ء}}$

∴ كل من $\overline{\text{ص س}}$ ، $\overline{\text{ص ء}}$ عمودي على $\overline{\text{ص ع}}$

∴ ق ($\widehat{د ص س}$) هو قياس الزاوية الزوجية بين المستويين س ص ع ، د ص ع

∵ $\overline{د س}$ ⊥ المستوي س ص ع

∴ $\overline{د س}$ ⊥ $\overline{س ص}$

في المثلث د س ص القائم الزاوية في س:

$$ظا(\widehat{د ص س}) = \frac{د س}{س ص} = ١$$

∴ ق ($\widehat{د ص س}$) = ٤٥° (وهو المطلوب)

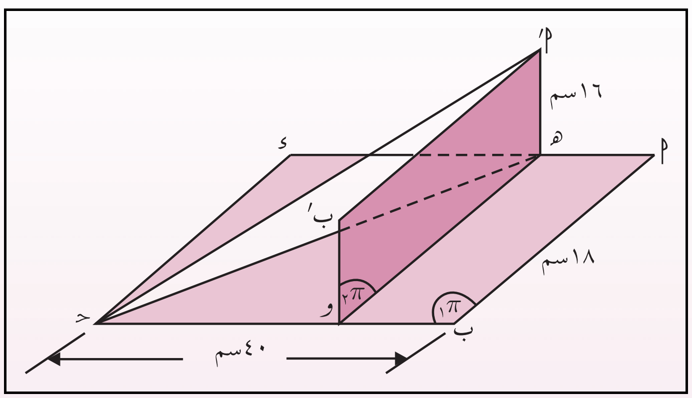
٥ **المعطيات:**

$\pi_1 \perp \pi_2$ ،

أ ب حـ د مستطيل ، أ′ هـ و ب′ مستطيل

أ ب = ١٨سم ، ب حـ = ٤٠سم ،

أ هـ = أ′ هـ = ب′ و = ب و = ١٦



المطلوب: طول $\overline{أ′ حـ}$

البرهان:

∵ أ هـ = ب و ، $\overline{أ هـ}$ // $\overline{ب و}$ ، $\hat{أ}$ قائمة

∴ أ هـ و ب مستطيل.

∴ $\overline{هـ و}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$

في المثلث هـ و حـ ، ق ($\widehat{هـ و حـ}$) = ٩٠°

Book Mark
Exit
Index

و حـ = ٤٠ − ١٦ = ٢٤سم

هـ و = ١٨سم

∴ (هـ حـ)^{٢} = (هـ و)^{٢} + (و حـ)^{٢}

= (١٨)^{٢} + (٢٤)^{٢} = ٣٢٤ + ٥٧٦

(هـ حـ)^{٢} = ٩٠٠

هـ حـ = $\sqrt{٩٠٠}$ = ٣٠سم

∵ $\pi_١ \perp \pi_٢$ ، $\pi_١ \cap \pi_٢$ = $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ ، $\overline{\text{أ' هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

∴ $\overline{\text{أ' هـ}} \perp \pi_١$

∴ $\overline{\text{أ' هـ}} \perp \overline{\text{هـ حـ}}$

في Δ أ' هـ حـ

(أ' حـ)^{٢} = (أ' هـ)^{٢} + (هـ حـ)^{٢} = (١٦)^{٢} + (٣٠)^{٢}

(أ' حـ)^{٢} = ٢٥٦ + ٩٠٠ = ١١٥٦

أ' حـ = $\sqrt{١١٥٦}$ = ٣٤سم (وهو المطلوب)

٦ **المعطيات:**

أ ب حـ مثلث

ق ($\widehat{\text{أ ب حـ}}$) = ٩٠°

$\overline{\text{ب ى}} \perp$ أ ب حـ

المطلوب:

إثبات أن المستويين ى ب أ ، ى ب حـ متعامدان

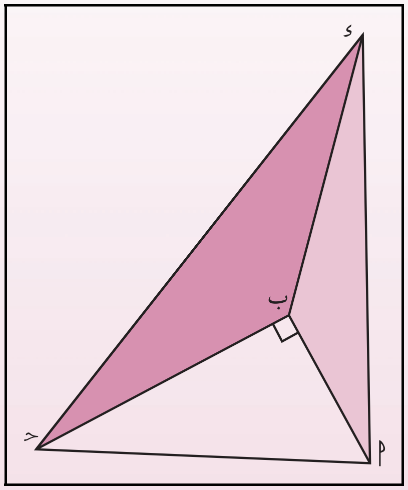
البرهان:

∵ $\overline{\text{ب ى}} \perp$ مستوي المثلث أ ب حـ ،

$\overline{\text{ب حـ}} \subseteq$ مستوي المثلث أ ب حـ

∴ $\overline{\text{ب ى}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

∵ المثلث أ ب حـ قائم الزاوية في ب ،



$\overline{\text{أب}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

∴ $\overline{\text{ب حـ}}$ عمودي على كل من $\overline{\text{ء ب}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$

∵ $\overline{\text{ء ب}} \subseteq$ ء أ ب ، $\overline{\text{أ ب}} \subseteq$ أ ء ب

∴ $\overline{\text{ب حـ}}$ عمودي على المستوى ء أ ب

ولكن المستوى ء ب حـ يمر بالقطعة المستقيمة $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ المستوى ء ب حـ عمودي على المستوى ء ب أ

٧ **المعطيات:**

$\pi_1 \perp \pi_2$

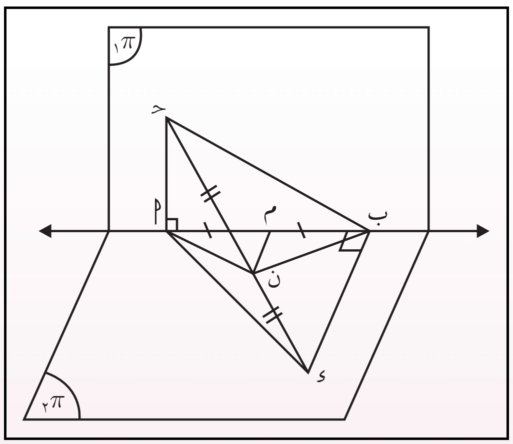
$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

Δ أ ب حـ $\subseteq \pi_1$

ق $(\widehat{\text{ب أ حـ}}) = 90°$

Δ أ ب ء $\subseteq \pi_2$ ، ق $(\widehat{\text{ء ب أ}}) = 90°$

م منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، ن منتصف $\overline{\text{حـ ء}}$



العمل:

نرسم $\overline{\text{أ ن}}$ ، $\overline{\text{ب ن}}$

المطلوب:

إثبات أن: $\overline{\text{ن م}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

البرهان:

∵ $\pi_1 \perp \pi_2$ ويتقاطعان في $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ،

$\overline{\text{أ حـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ (حيث $\overline{\text{أ حـ}} \subseteq \pi_1$)

∴ $\overline{\text{أ حـ}} \perp$ المستوى π_2 .... نتيجة (١) على نظرية (٦)

∴ $\overline{\text{أ حـ}} \perp \overline{\text{أ ء}}$ (حيث $\overline{\text{أ ء}} \subseteq$ المستوى π_2)

∴ في Δ أ حـ ء : حـ $\widehat{\text{أ}}$ ء قائمة، $\overline{\text{حـ ء}}$ وتر

∴ $\text{أ ن} = \frac{١}{٢} \text{حـ ء}$

(حيث $\overline{\text{أ ن}}$ واصل من رأس القائمة إلى منتصف الوتر $\overline{\text{حـ ء}}$)

وبالمثال:

$\text{ب ن} = \frac{١}{٢} \text{حـ ء}$

أي أن $\text{أ ن} = \text{ب ن} = \frac{١}{٢} \text{حـ ء}$

ويكون المثلث ن أ ب متطابق الساقين

وحيث إن م هي منتصف قاعدة المثلث ن أ ب (أي منتصف $\overline{\text{أ ب}}$)

∴ $\overline{\text{ن م}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

أي أن: $\overline{\text{ن م}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

◄ بنود موضوعية :

أولًا :

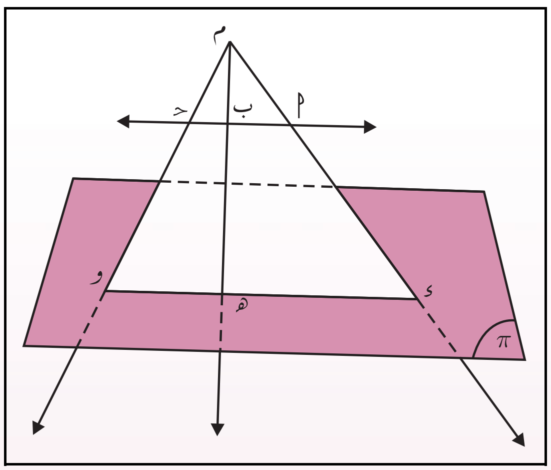
العبارات الصحيحة هي : (١) ، (٢) ، (٣)

ثانيًا :

١ ب   ٢ د   ٣ د   ٤ أ

◄ أسئلة مقالية :

١ **المعطيات :**



$\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ // المستوي π

م $\notin$ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، م $\notin$ المستوي π

د ، هـ ، و $\in \pi$ ،

$\overline{\text{أجـ}} \cap \overline{\text{م هـ}} = \{\text{ب}\}$

المطلوب :

إثبات أن : $\dfrac{\text{أب}}{\text{ب جـ}} = \dfrac{\text{د هـ}}{\text{هـ و}}$

البرهان :

$\because$ يتقاطع $\overline{\text{م د}}$ ، $\overline{\text{م هـ}}$ في النقطة م

$\therefore$ يعينان مستويًا وهو مستوي المثلث م د هـ حيث $\overline{\text{أب}} \subseteq \Delta$ م د هـ

$\because$ $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ // المستوي π

$\therefore$ $\overline{\text{أجـ}}$ // المستوي π

$\because$ $\overline{\text{أب}} \subseteq$ المستوي م د هـ ،

$\because$ المستوي م د هـ $\cap\ \pi = \overleftrightarrow{\text{د هـ}}$

∴ $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{ءهـ}}$ .... نتيجة على نظرية (١)

ويكون المثلثان م ء هـ ، م أ ب متشابهين، ويكون:

$$\frac{\text{م أ}}{\text{م ء}} = \frac{\text{م ب}}{\text{م هـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}}$$ .... (١)

وبالمثال: $\overline{\text{ب حـ}} \parallel$ المستوي π ،

$\overline{\text{ب حـ}} \subseteq$ المستوي م هـ و ،

المستوي م هـ و $\cap$ المستوي π = $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

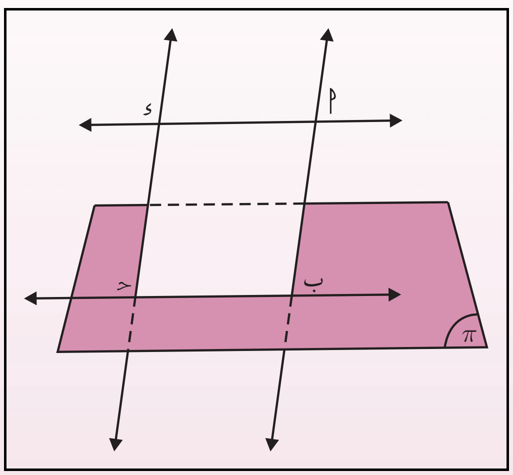
∴ $\overline{\text{ب حـ}} \parallel \overline{\text{هـ و}}$

ويكون المثلثان م ب حـ ، م هـ و متشابهين، ويكون:

$$\frac{\text{م ب}}{\text{م هـ}} = \frac{\text{م حـ}}{\text{م و}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{هـ و}}$$ .... (٢)

ينتج من (١) ، (٢) أن: $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{هـ و}} \Leftarrow \frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ و}}$

٢ **المعطيات:**



$\overleftrightarrow{\text{أء}} \not\subseteq \pi$ ، $\overleftrightarrow{\text{أء}} \parallel \pi$ ،

$\overleftrightarrow{\text{أب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ء حـ}}$ ، ب ، حـ $\in \pi$

المطلوب:

إثبات أن: أ ء = ب حـ ، أ ب = ء حـ

البرهان:

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ء حـ}}$

∴ المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ء حـ}}$ يعينان مستويًا وليكن أ ء حـ ب

∴ $\overleftrightarrow{\text{أء}} \parallel$ المستوي π ، $\overleftrightarrow{\text{أء}} \subseteq$ المستوي أ ء حـ ب

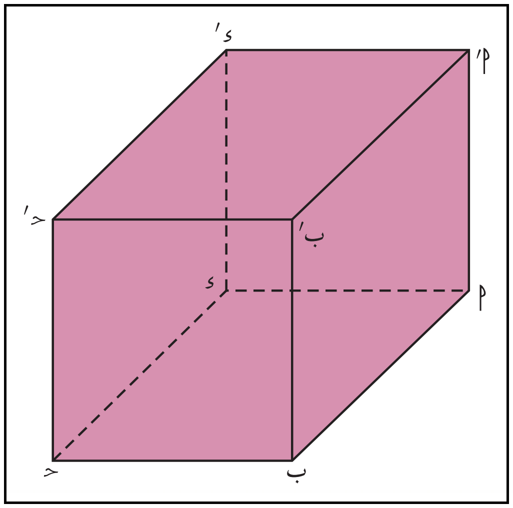
والمستوي أ ء حـ ب $\cap$ المستوي π = $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ،

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ء حـ}}$ – (معطى)

يكون $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ء حـ}}$ ويكون الشكل أ ء حـ ب متوازي أضلاع وبالتالي يكون كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقين

∴ أ ء = ب حـ ، أ ب = ء حـ



٣ **المعطيات:**

أ ب حـ ء أ' ب' حـ' ء' مكعب

المطلوب:

إثبات أن: $\overline{\text{أ ب}}$ عمودي على

كل من الوجهين: أ ء ء' أ' ، ب حـ حـ' ب'

البرهان:

∵ المستوي أ ب حـ ء وجه في المكعب أ ب حـ ء أ' ب' حـ' ء'

∴ أ ب حـ ء مربع ويكون فيه:

$\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$ .... (١)

وبالمثال: أ ب ب' أ' مربع وفيه

$\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{أ أ'}}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن:

$\overline{\text{أ ب}}$ عمودي على كل من $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{أ أ'}}$

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ عمودي على المستوي (الوجه) الذي يحوي القطعتين المستقيمتين $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{أ أ'}}$

أي أن: $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ المستوي أ ء ء' أ'

وبالمثال يمكننا إثبات أن: $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ المستوي ب حـ حـ' ب'

Book Mark
Exit
Index

٤ **المعطيات :**

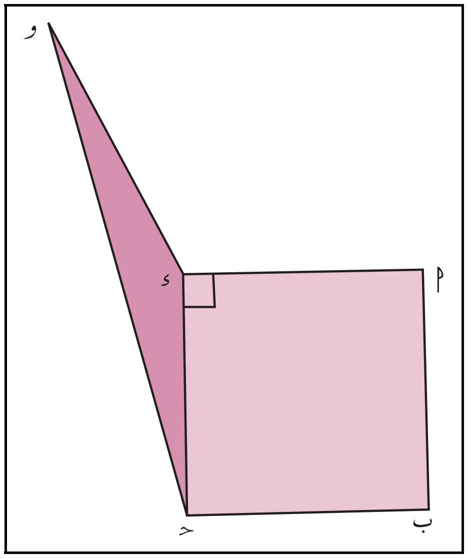
أ ب حـ ء مربع .

و $\not\in$ المستوي أ ب حـ ء ،

$\overline{\text{ء و}}$ $\perp$ المستوي أ ب حـ ء

المطلوب :

إثبات أن : $\overline{\text{و حـ}}$ $\perp$ $\overline{\text{أ ء}}$



البرهان :

$\because$ $\overline{\text{ء و}}$ $\perp$ المستوي أ ب حـ ء ،

$\overline{\text{أ ء}}$ $\subseteq$ المستوي أ ب حـ ء

$\overline{\text{ء و}}$ $\perp$ $\overline{\text{أ ء}}$

أي أن : $\overline{\text{أ ء}}$ $\perp$ $\overline{\text{ء و}}$ .... (١)

ولكن : $\overline{\text{أ ء}}$ $\perp$ $\overline{\text{ء حـ}}$ .... (٢)

(حيث إن المستوي أ ب حـ ء على شكل مربع)

ينتج من (١) ، (٢) أن $\overline{\text{أ ء}}$ عمودي على كل من $\overline{\text{ء و}}$ ، $\overline{\text{ء حـ}}$

$\therefore$ $\overline{\text{أ ء}}$ $\perp$ المستوي الذي يحوي $\overline{\text{ء و}}$ ، $\overline{\text{ء حـ}}$

$\therefore$ $\overline{\text{أ ء}}$ $\perp$ المستوي و ء حـ

$\therefore$ $\overline{\text{أ ء}}$ عمودي على أي مستقيم يحويه المستوي و ء حـ .

$\therefore$ $\overline{\text{أ ء}}$ $\perp$ $\overline{\text{و حـ}}$ (حيث $\overline{\text{و حـ}}$ $\subseteq$ المستوي و ء حـ)

أي أن : $\overline{\text{و حـ}}$ $\perp$ $\overline{\text{أ ء}}$

٥ المعطيات :

أ ب حـ ء هرم ثلاثي

$\triangle$ أ ب حـ فيه : أ حـ = ب حـ

$\triangle$ أ ب ء فيه : أ ء = ب ء

ق $(\widehat{\text{أ حـ ء}})$ = ٩٠°

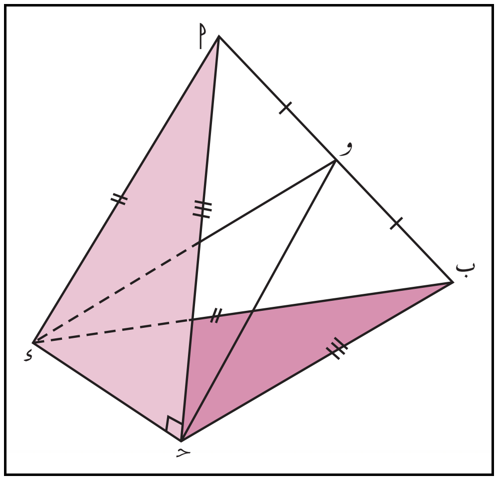
و منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

المطلوب :

إثبات أن :

أولًا : $\overline{\text{أ ب}}$ $\perp$ المستوي و حـ ء

ثانيًا : المستوي أ حـ ء $\perp$ المستوي أ ب حـ



البرهان :

أولًا :

$\because$ أ ء = ء ب

$\therefore$ المثلث ء أ ب متطابق الضلعين ،

و منتصف قاعدة المثلث ء أ ب (أي و منتصف $\overline{\text{أ ب}}$)

$\therefore$ $\overline{\text{ء و}}$ $\perp$ $\overline{\text{أ ب}}$

ويكون $\overline{\text{أ ب}}$ $\perp$ $\overline{\text{و ء}}$ .... (١)

$\because$ أ حـ = ب حـ حيث إن $\triangle$ أ ب حـ متطابق الضلعين، ومنتصف قاعدة المثلث أ ب حـ

(أي و منتصف $\overline{\text{أ ب}}$)

$\because$ $\overline{\text{حـ و}}$ $\perp$ $\overline{\text{أ ب}}$

$\therefore$ $\overline{\text{أ ب}}$ $\perp$ $\overline{\text{و حـ}}$ .... (٢)

ينتج من (١) ، (٢) أن $\overline{\text{أ ب}}$ عمودي على كل من $\overline{\text{و ء}}$ ، $\overline{\text{و حـ}}$

وحيث إن كلًا من $\overline{\text{و ء}}$ ، $\overline{\text{و حـ}}$ $\subseteq$ المستوي و حـ ء

∴ $\overline{\text{أب}}$ ⊥ المستوي و حـ ء .

ثانيًا: يتطابق المثلثان أ حـ ء ، ب حـ ء

(أ حـ = ب حـ ، أ ء = ب ء ، $\overline{\text{حـ ء}}$ ضلع مشترك)

وينتج من تطابقهما أن:

ق (أ $\hat{\text{حـ}}$ ء) = ق (ب $\hat{\text{حـ}}$ ء)

= ٩٠°

∴ $\overline{\text{حـ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{حـ ب}}$

ولكن $\overline{\text{حـ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{حـ أ}}$ لأن ق (أ $\hat{\text{حـ}}$ ء) = ٩٠°

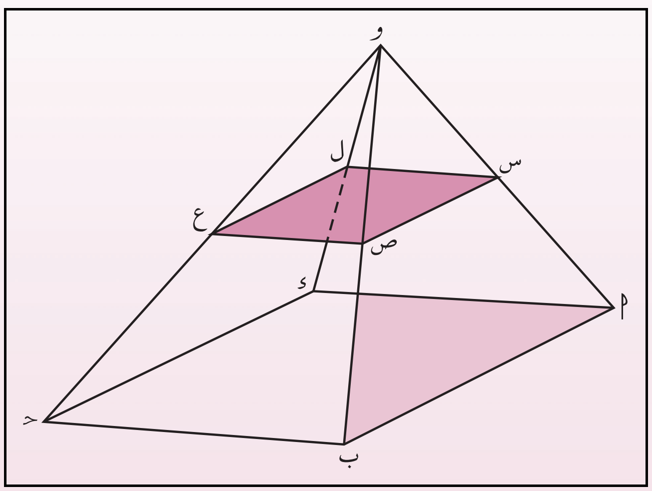
∴ $\overline{\text{حـ ء}}$ عمودي على المستوي الذي يحوي كلًا من $\overline{\text{حـ ب}}$ ، $\overline{\text{حـ أ}}$

∴ $\overline{\text{حـ ء}}$ ⊥ المستوي أ ب حـ

، ∵ $\overline{\text{حـ ء}}$ ⊆ المستوي أ حـ ء

∴ المستوي أ حـ ء ⊥ المستوي أ ب حـ (وهو المطلوب ثانيًا)

٦ **المعطيات:**



أ ب حـ ء متوازي أضلاع

و ∉ المستوي أ ب حـ ء .

رسمت كل من :

$\overline{\text{و أ}}$ ، $\overline{\text{و ب}}$ ، $\overline{\text{و حـ}}$ ، $\overline{\text{و د}}$.

المستوي س ص ع ل // المستوي أ ب حـ د

المطلوب :

إثبات أن : الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع .

البرهان :

∵ المستويان أ ب حـ د ، س ص ع ل متوازيان،

ويقطعهما المستوي و أ ب في $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{س ص}}$ على الترتيب .

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{س ص}}$ .... نظرية

وبالمثال يمكن إثبات أن : $\overline{\text{د حـ}}$ // $\overline{\text{ل ع}}$

وحيث إن : $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{د حـ}}$

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{د حـ}}$ .... (١)

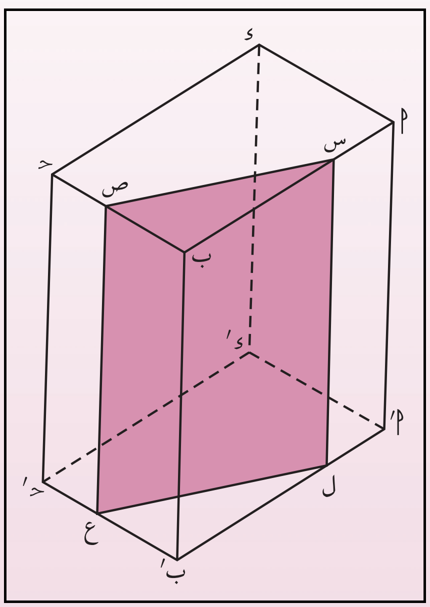
∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ل ع}}$ .... (٢)

وبالمثل يمكن إثبات أن :

$\overline{\text{س ل}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$

وينتج من (١) ، (٢)

أن الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع .



٧ **المعطيات :**

أ ب حـ د أ' ب' حـ' د' شبه مكعب فيه :

المقطع س ص ع ل يوازي $\overline{\text{ب ب'}}$

المطلوب :

إثبات أن : المقطع س ص ع ل مستطيل .

Book Mark
Exit
Index

البرهان :

$\overline{\text{ب ب}'}$ توازي المستوي س ص ع ل

∵ ب ب′ ⊇ المستوي ﻫ ب ب′ ﻫ′ ، ﻫ ب ب′ ﻫ′ ∩ س ص ع ل = $\overleftrightarrow{\text{ل س}}$

∴ $\overline{\text{ل س}}$ // $\overline{\text{ب ب}'}$ .... نظرية

وبالمثل يمكن إثبات أن :

$\overline{\text{ع ص}}$ // $\overline{\text{ب ب}'}$

∴ $\overline{\text{ل س}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ .... (١)

∵ $\overline{\text{ب ب}'}$ ⊥ المستوي ﻫ ب ﺣ ﺀ

∴ $\overline{\text{ل س}}$ عمودي على المستوي ﻫ ب ﺣ ﺀ الذي يحوي $\overline{\text{س ص}}$

∴ $\overline{\text{ل س}}$ ⊥ $\overline{\text{س ص}}$ .... (٢)

∵ المستويان ﻫ′ب′ﺣ′ﺀ′ ، ﻫ ب ﺣ ﺀ يحويان قاعدتي شبه المكعب المتوازيين

∴ المستوي ﻫ′ب′ﺣ′ﺀ′ // المستوي ﻫ ب ﺣ ﺀ

يقطع المستوي س ص ع ل قاعدتي شبه المكعب ﻫ ب ﺣ ﺀ ، ﻫ′ب′ﺣ′ﺀ′

في $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ل ع}}$ (على الترتيب)

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ل ع}}$ نظرية .... (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن :

كل ضلعين متقابلين متوازيين في الشكل س ص ع ل ، $\overline{\text{ل س}}$ ⊥ $\overline{\text{س ص}}$

أي أن : س ص ع ل مستطيل .

٨ **المعطيات :**

ﻫ ب ﺣ مثلث قائم الزاوية في ب

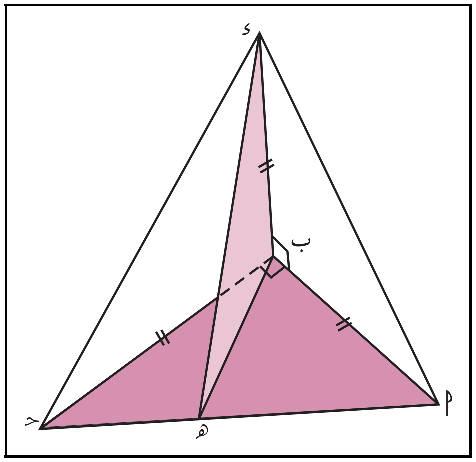
$\overline{\text{ب ﺀ}}$ ⊥ المستوي ﻫ ب ﺣ

ب ﻫ = ب ﺣ = ب ﺀ

المطلوب:

١ إثبات أن: المثلث ء أ حـ متطابق الأضلاع.

٢ تعيين قياس الزاوية الزوجية بين المثلثين ء أ حـ ، ب أ حـ .



البرهان:

١ ∵ $\overline{\text{ب ء}}$ ⊥ المستوي أ ب حـ ،

$\overline{\text{ب حـ}}$ ⊆ المستوي أ ب حـ

∴ $\overline{\text{ب ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

وبالتالي يكون المثلث ء ب حـ قائم الزاوية في ب.

كما أن المثلث ء ب حـ متطابق الضلعين.

نفرض أن:

ب ء = ب حـ = ب أ = س سم،

∴ ء حـ = $\sqrt{٢}$ س سم

وبالمثل: $\overline{\text{ء ب}} \perp \overline{\text{ب أ}}$

ويكون: ء أ = $\sqrt{٢}$ س سم، وبالمثل: $\overline{\text{أ ب}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ يكون:

حـ أ = $\sqrt{٢}$ س سم،

ويكون المثلث ء أ حـ متطابق الأضلاع. (وهو المطلوب (١))

يتقاطع المستويان ء أ حـ ، ب أ حـ في $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$

لتكن النقطة (هـ) هي منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

ونرسم $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$

∵ المثلث ب أ حـ متطابق الضلعين،

حـ هـ = أ هـ

∴ $\overline{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{حـ أ}}$

بالمثل: $\overline{\text{ء هـ}} \perp \overline{\text{حـ أ}}$

Book Mark
Exit
Index

فيكون قياس الزاوية $\widehat{\text{ب هـ ء}}$ هو قياس الزاوية الزوجية بين المستويين المعينين

$$\text{ظا}(\widehat{\text{ب هـ ء}}) = \frac{\text{ء ب}}{\text{ب هـ}}$$

في Δ ٲ ب حـ :

$\because$ ق $(\widehat{\text{ٲ ب حـ}}) = 90°$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ٲ حـ}}$

$\therefore$ ب هـ $= \frac{1}{2}$ ٲ حـ $= \frac{\sqrt{2}}{2}$ س

$$\therefore \text{ظا}(\widehat{\text{ب هـ ء}}) = \frac{\text{س}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\text{س}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$= 1{,}414$ تقريبًا

$\therefore$ ق $(\widehat{\text{ب هـ ء}}) = 54' \, 54°$ (وهو المطلوب (٢))

٩ **المعطيات:**

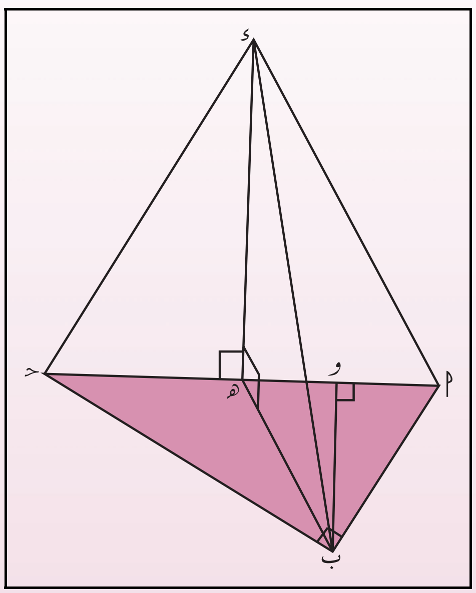
ٲ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب.

ء $\notin$ المستوي ٲ ب حـ .

هـ $\in \overline{\text{ٲ حـ}}$

$\overline{\text{ء هـ}} \perp \overline{\text{ٲ حـ}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}} \perp \overline{\text{ب هـ}}$

و $\in \overline{\text{ٲ حـ}}$ ، $\overline{\text{ب و}} \perp \overline{\text{ٲ حـ}}$



المطلوب:

إثبات أن: $\overline{\text{و ب}} \perp$ المستوي ء ٲ حـ

البرهان:

$\because \overline{\text{ء هـ}} \perp \overline{\text{ٲ حـ}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}} \perp \overline{\text{هـ ب}}$

∴ $\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ

ولكن المستوي ء أ جـ يمر بالقطعة المستقيمة $\overline{\text{ء هـ}}$.

∴ المستوي ء أ جـ عمودي على المستوي أ ب جـ

المستوي ء أ جـ ∩ المستوي أ ب جـ = $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$

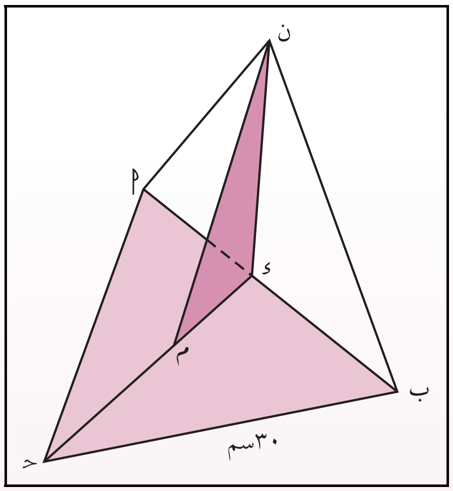
وحيث إن $\overline{\text{ب و}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ $\overline{\text{ب و}}$ عمودي على خط تقاطع المستويين المتعامدين ء أ جـ ، أ ب جـ

$\overline{\text{ب و}}$ ⊆ المستوى أ ب جـ

∴ $\overline{\text{ب و}}$ ⊥ المستوى ء أ جـ

١٠ **المعطيات:**



أ ب جـ مثلث متطابق الأضلاع. طول ضلعه ٣٠سم،

م ملتقى القطع المتوسط فيه.

$\overline{\text{ن م}}$ ⊥ المستوي أ ب جـ

م ن = ٥سم

ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

المطلوب:

١ إثبات أن $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ المستوي ن م ء

٢ قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ن أ ب ، أ ب جـ

البرهان:

∵ المثلث أ ب جـ متطابق الأضلاع

، ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

∴ $\overline{\text{جـ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

∵ $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ المستوي أ ب جـ

∴ $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

$\because$ $\overline{أب}$ عمودي على كل من $\overline{حـ ء}$ ، $\overline{م ن}$

$\therefore$ $\overline{أب}$ $\perp$ المستوي ن م ء (وهو المطلوب أولًا)

$\because$ المستوي أ ب حـ $\cap$ المستوي ن أ ب = $\overleftrightarrow{أب}$

$\therefore$ ق ($\widehat{ن ء م}$) = قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ن أ ب ، أ ب حـ

$\because$ $\overline{ن م}$ $\perp$ المستوي أ ب حـ

$\therefore$ $\overline{ن م}$ $\perp$ $\overline{م ء}$

$\therefore$ Δ ن م ء قائم الزاوية في م

$\therefore$ ظا ($\widehat{ن ء م}$) = $\frac{م ن}{ء م}$

$\because$ م ن = ٥سم ،

ء حـ = ب حـ حا ٦٠° = ٣٠ $\times$ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ١٥ $\sqrt{٣}$ سم

$\because$ ء م = $\frac{١}{٣}$ ء حـ

$\therefore$ ء م = $\frac{١}{٣}$ $\times$ ١٥ $\sqrt{٣}$ = ٥ $\sqrt{٣}$ سم

$\therefore$ ظا ($\widehat{ن ء م}$) = $\frac{٥}{٥\sqrt{٣}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

$\therefore$ ق ($\widehat{ن ء م}$) = ٣٠° (وهو المطلوب ثانيًا)

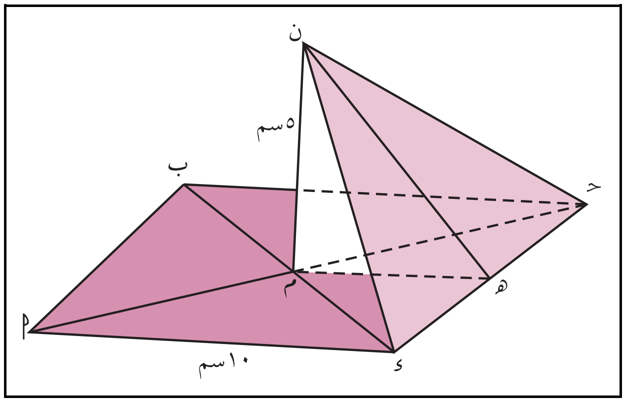
١١ **المعطيات:**

أ ب حـ ء مستطيل فيه ب حـ = ١٠سم،

م ملتقى قطري المستطيل ،

$\overline{م ن}$ $\perp$ المستوي أ ب حـ ء

م ن = ٥سم



المطلوب :

قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ن حـ ء ، أ ب حـ ء

العمل : نصل $\overline{\text{ن هـ}}$ حيث هـ منتصف $\overline{\text{حـ ء}}$.

البرهان : هـ منتصف $\overline{\text{حـ ء}}$

∴ $\overline{\text{م هـ}} \perp \overline{\text{حـ ء}}$ (من خواص المستطيل)

∵ المستوي ن حـ ء ∩ المستوي أ ب حـ ء = $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

∵ $\overline{\text{م ن}} \perp$ المستوي أ ب حـ ء

∴ $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{حـ ء}}$

∵ $\overline{\text{م ن}} \subseteq$ المستوي م ن هـ ،

$\overline{\text{م هـ}} \subseteq$ المستوي م ن هـ

∴ المستوي م ن هـ $\perp \overline{\text{حـ ء}}$

∴ $\overline{\text{ن هـ}} \perp \overline{\text{حـ ء}}$

∴ في المستوي ن هـ م يكون ق (ن $\hat{\text{هـ}}$ م) = قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ن حـ ء ، أ ب حـ ء

∵ $\overline{\text{ن م}} \perp$ المستوي أ ب حـ ء

∴ $\overline{\text{ن م}} \perp \overline{\text{م هـ}}$

∴ Δ ن ه م قائم الزاوية في م

ظا (ن ه̂ م) = $\frac{\text{ن م}}{\text{م ه}}$

= $\frac{٥}{٥}$ = ١

∴ ق (ن ه̂ م) = ٤٥°

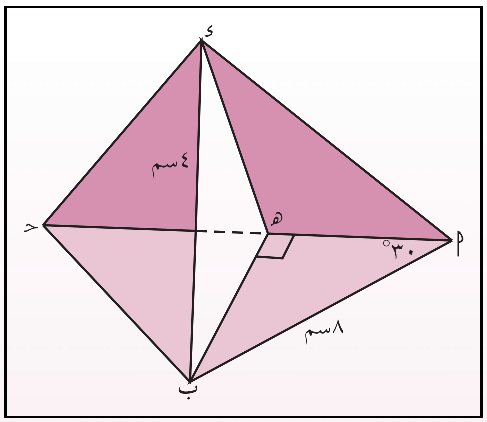
١٢ **المعطيات :**

أ ب ح مثلث فيه أ ب = ٨سم ، ق (أ̂) = ٣٠°

$\overline{\text{ب ء}}$ ⊥ المستوي أ ب ح حيث ب ء = ٤سم

المطلوب :

قياس الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب ح ، أ ء ح



العمل : نرسم من ب العمود $\overline{\text{ب ه}}$ على $\overline{\text{أ ح}}$

البرهان :

∵ $\overline{\text{ب ه}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ح}}$

، $\overline{\text{ب ء}}$ ⊥ المستوي أ ب ح

∴ $\overline{\text{ب ء}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ح}}$

∴ المستوي ب ء ه ⊥ $\overline{\text{أ ح}}$

∴ $\overline{\text{ء ه}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ح}}$

∴ ق (ب ه̂ ء) = قياس الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب ح ، أ ء ح

Δ أ ب ه قائم الزاوية في ه

، ق (أ̂) = ٣٠°

∴ ب ه = $\frac{١}{٢}$ أ ب = ٤سم

، $\because$ $\overline{\text{ءب}}$ $\perp$ المستوي أب ﺣ

$\therefore$ $\overline{\text{ءب}}$ $\perp$ $\overline{\text{ﻫب}}$

$\therefore$ Δ ء ﻫ ب قائم الزاوية في ب

$\therefore$ ظا$(\widehat{\text{ب ﻫ ء}})$ $= \dfrac{\text{ب ء}}{\text{ب ﻫ}}$

$= \dfrac{٤}{٤} = ١$

$\therefore$ ق$(\widehat{\text{ب ﻫ ء}}) = ٤٥°$

أودع بمكتبة الوزارة تحت رقم ٢١٨ بتاريخ ٨/ ١٠/ ٢٠٠٨

فيلمز 4 Films
شركة مجموعة فور فيلمز للطباعة
Four Films Printing Group Company

تلفون: ٤٨٢٠١٥٠ - فاكس: ٤٨٢٣٨٧٢

Book Mark

Exit

Index