المركز الوطني لتطوير المناهج والتقويم
National Center for Curriculum Development and Evaluation

المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الصف الثامن - كتاب الطالب

الفصل الدراسي الأول

8

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي — إبراهيم أحمد عمايرة — د. عيسى عبدالوهاب الطراونة

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج والتقويم

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج والتقويم استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

قـرَّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطويـر المناهـج والتقويـم في جلسـته رقـم (2021/3)، تاريـخ 2021/6/10 م، وقـرار مجلس التربيـة والتعليـم رقم (2021/107) تاريـخ 2021/6/30 م بـدءًا مـن العـام الـدراسي 2021 / 2022 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development and Evaluation. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development and Evaluation. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 358 - 6

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2022/4/2049)

375.001

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

الرياضيـات الصـف الثامـن: كتـاب الطالـب (الفصـل الدراسـي الأول)/ المركز الوطنـي لتطويـر المناهـج. -ط2؛ مزيدة ومنقحـة.- عمان: المركـز، 2022

(147) ص.

ر.إ.: 2022/4/2049

الواصفات: / الرياضيات/ / المناهج/ / التعليم الاعدادي/

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مُصنَّفه، ولا يعبّر هذا المُصنَّف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى 1442 هـ / 2021 م
الطبعة الثانية 1447 هـ / 2026 م

منهاجي
متعة التعليم الهادف

المقدّمة

الحمد لله ربّ العالمين، والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين، وبعد؛ فانطلاقًا من إيمان المملكة الأردنية الهاشمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج والتقويم بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون معينًا على الارتقاء بمستوى الطلبة المعرفي، ومجاراة الأقران في الدول المتقدمة. ولمّا كانت الرياضيات إحدى أهمّ الموادّ الدراسية التي تنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحَلِّ المشكلات، فقد أَوْلى المركز هذا المبحث عنايةً كبيرةً، وحرص على إعداد كتب الرياضيات وفق أفضل الطرائق المُتَّبَعة عالميًّا على أيدي خبرات أردنية؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لاحتياجات طلبتنا.

ورُوعي في إعداد كتب الرياضيات تقديم المحتوى بصورة سلسة، ضمن سياقات حياتية شائقة، تعزز دافعية الطلبة نحو التعلم. وتمّ التأكيد على توظيف التكنولوجيا بشكل حصيف بوصفها أداة فاعلة في بناء المفاهيم الرياضية وتطوير المهارات التقنية لدى الطلبة، كما احتوت الكتب على أنشطة مفاهيمية تُسهم بشكل فاعل في استكشاف المفاهيم الرياضية لدى الطلبة وتعميق فهمهم لها. وقد احتوت الكتب على مشروع لكل وحدة؛ لتعزيز تعلُّم الطلبة المفاهيم والمهارات الواردة فيها وإثرائها، ولأن التدريب المكثّف على حلّ المسائل يُعدّ إحدى أهم طرق ترسيخ المفاهيم الرياضية وزيادة الطلاقة الإجرائية لدى الطلبة؛ فقد أُعدّ كتاب التمارين على نحو يقدّم للطلبة ورقة عمل في كل درس، تُحلّ بعضُها واجبًا منزليًّا، أو داخل الغرفة الصفية إن توافر الوقت الكافي. ولأنّنا ندرك جيدًا حرص الكوادر التعليمية الأردنية على تقديم أفضل ما لديها للطلبة؛ فقد جاء كتاب التمارين أداةً مساعدة توفّر عليها جهد إعداد أوراق العمل وطباعتها.

وانطلاقًا من أهمية الاتساق والتتابع في بناء تعلُّم الرياضيات، روعي في إعداد هذا الكتاب أن يكون جزءًا من بنية منهجية موحّدة تمتد عبر الصفوف الدراسية المتتابعة، بحيث تتدرّج المفاهيم والمهارات بصورة مترابطة ومنظمة، وتبنى الخبرات الجديدة على ما سبقها من تعلُّم. ويهدف هذا التنظيم إلى ضمان سلاسة انتقال الطلبة بين الصفوف، وتعزيز الفهم العميق للمفاهيم، وتجنُّب التكرار غير المُبرَّر أو الفجوات المعرفية، بما يسهم في تحقيق نمو رياضي متوازن ومتراكم لدى الطلبة.

ونحن إذ نقدّم هذا الكتاب، نأمل أن ينال إعجاب طلبتنا والكوادر التعليمية الأردنية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونعد بأن نستمرَّ في تحسين هذا الكتاب في ضوء ما يصلنا من ملاحظات.

المركز الوطني لتطوير المناهج والتقويم

قائمةُ المحتوياتِ

قائمةُ المحتوياتِ

الوحدةُ 1

الأعدادُ الحقيقيّةُ

ما أهميَّةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُشكِّل الأعدادُ الحقيقيةُ الأساسَ الذي تقومُ عليهِ التطبيقاتُ الرياضيةُ في شتّى مجالاتِ الحياةِ العمليةِ، بدءًا منَ العملياتِ الحسابيةِ اليوميــةِ والمعــاملاتِ الماليــةِ، ووصولًا إلى التصاميمِ الهندســيةِ الدقيقةِ والأنظمةِ التكنولوجيــةِ المُتطوِّرةِ. وتكمــنُ أهميتُها الواقعيةُ في كونِها الأداةَ الأكثرَ دقّةً لوصفِ الكمّياتِ والقياســاتِ المختلفةِ في العلومِ الطبيعيةِ والتطبيقيةِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- التمييــزَ بَيْنَ الأعــدادِ النســبيةِ وغيرِ النسبيةِ.
- توظيفَ نظريةِ فيثاغورس وعكسَها في حلِّ مسائلَ حياتيةٍ.
- حلَّ مسائلَ حياتيةٍ على النسبةِ المئويةِ.

تعلَّمْتُ سابِقًا:

- ✓ حلَّ مســائلَ حياتيةٍ باســتعمالِ التناسبِ والتقسيمِ التناسبيِّ.
- ✓ تحويلَ النسبِ المئويةِ إلى كسورٍ عشريةٍ.
- ✓ إيجادَ النسبةِ المئويةِ منْ عددٍ.

مشروعُ الوحدةِ: الأعدادُ الحقيقيةُ في الفنِّ

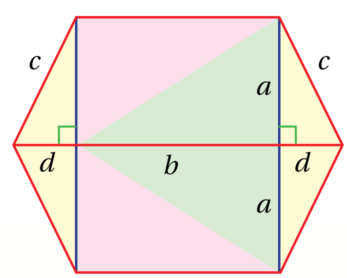
أستعدُّ ومجموعتي لتنفيذِ مشروعِنا الخاصِّ الّذي نوظّفُ فيـهِ ما نتعلّمُهُ في هـذِهِ الوحدةِ حولَ الأعـدادِ الحقيقيةِ ونظريةِ فيثاغورس في رسمِ زخرفةٍ هندسيةٍ على الزجاجِ.

الأدواتُ اللازمةُ:

أنبـوبُ تحديدٍ على الزجـاجِ، فُرَشٌ للتلوينِ، ألوانُ زجاجٍ، لوحٌ زجاجيٌّ

خُطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

أختارُ قياسـاتٍ مناسبةً للشكلِ أدناهُ، ثُمَّ أرسمُهُ على الزّجاجِ باتّباعِ الخطواتِ الآتيةِ:



1. أختارُ مربعَينِ كاملَينِ يشـكّلُ جذراهُما بُعدَيِ المستطيلِ a وَ b، ثُمَّ أرسـمُ المسـتطيلَينِ في الأعلى والأسفلِ على ورقةٍ.

2. أختارُ جذرًا أصمَّ ليشـكّلَ المسـافةَ d، وأسـتخدمُ خطَّ الأعدادِ لتحديدِهِ بدقةٍ. أرسـمُ الضلعَينِ اللّذَينِ طولُ كلٍّ منهُما d.

3. أستعملُ نظريةَ فيثاغورس لتحديدِ طولِ الوترِ c. أستعملُ خـطَّ الأعدادِ لتحديدِ c -إذا لزمَ الأمرُ- ثُمَّ أرسـمُ الوترَ، وأكملُ باقيَ الشكلِ.

4. أكملُ الجدولَ الآتيَ بوضعِ إشارةِ (✓) أَوْ (✗) في الخانةِ المناسبةِ:

العددُ	نسبيٌّ	غيرُ نسبيٍّ	جذرٌ أصمٌّ	جذرٌ غيرُ أصمَّ
a				
b				
d				
c				

5. ألوّنُ الشكلَ على الورقةِ؛ تمهيدًا لمحاكاتِهِ على الزجاجِ.

6. أرسمُ الشـكلَ على الزجاجِ محافظًا على القياساتِ الّتي اخترْتُها، وألوّنُهُ.

عرضُ النتائجِ:

تعرضُ المجموعاتُ زخارفَها على الزجاجِ وجداولَها، وتناقشُ كيفيةَ اختيارِ الأطوالِ.

الدرسُ 1 الجذورُ التربيعيةُ

فكرةُ الدرسِ

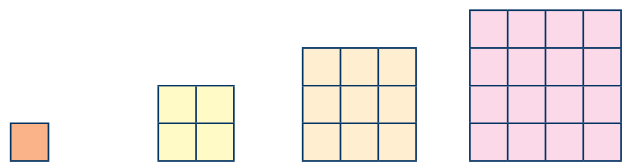
أجدُ قيمةَ الجذرِ التربيعيِّ لعددٍ، وأستخدمُهُ في حلِّ مسائلَ حياتيةٍ.

المصطلحاتُ

الجذرُ التربيعيُّ، الجذرُ التربيعيُّ الرئيسُ، المجذورُ

أستكشفُ

إذا استمرَّ النمطُ في الشكلِ الآتي، فما رقمُ أولِ شكلٍ يحتوي أكثرَ مِنْ 180 وَحدةً مربعةً؟



الشكلُ 4 الشكلُ 3 الشكلُ 2 الشكلُ 1

الجذرُ التربيعيُّ (square root) لعددٍ ما هُوَ أحدُ عاملَيهِ المتساويَينِ. ولأيِّ عددٍ موجبٍ جذرانِ تربيعيانِ، أحدُهُما موجبٌ والآخرُ سالبٌ، ويُسمّى الموجبُ منهُما **الجذرَ التربيعيَّ الرئيسَ** (principal square root). ويستعملُ رمزُ الجذرِ التربيعيِّ $\sqrt{}$ للدلالةِ على الجذرِ التربيعيِّ الرئيسِ، ويُسمّى العددُ أسفلَ الجذرِ **المجذورَ** (radicand).

رمزُ الجذرِ → $\sqrt{a}$ ← المجذورُ

الجذرُ التربيعيُّ الرئيسُ للعددِ 64	$\sqrt{64}$
معكوسُ الجذرِ التربيعيِّ الرئيسُ للعددِ 64	$-\sqrt{64}$
الجذرانُ التربيعيّانُ للعددِ 64	$\pm\sqrt{64}$

لغةُ الرياضياتِ

يُقرأُ الرمزُ ± موجبًا أَوْ سالبًا، ويدلُّ على كِلا الجذرَينِ التربيعيَّينِ للعددِ الموجبِ.

مثال 1

أجدُ كلًّا ممّا يأتي:

1) $\sqrt{36}$

$\sqrt{36} = 6$ أجدُ الجذرَ التربيعيَّ الموجبَ للعددِ 36

2) $\pm\sqrt{1.69}$

$\pm\sqrt{1.69} = \pm 1.3$ أجدُ الجذرَينِ التربيعيَّينِ للعددِ 1.69

3 $-\sqrt{\frac{25}{64}}$

$-\sqrt{\frac{25}{64}} = -\sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2} = -\frac{5}{8}$ أجدُ الجذرَ التربيعيَّ السالبَ للعددِ $\frac{25}{64}$

أتحققُ من فهمي:

4 $\sqrt{81}$

5 $-\sqrt{1.96}$

6 $\pm\sqrt{\frac{4}{121}}$

يمكنُني استعمالُ تعريفِ الجذرِ التربيعيِّ لعددٍ موجبٍ في حلِّ معادلاتٍ تتضمنُ متغيراتٍ مربعةً، فإذا كانَ $n^2 = c$ فإنَّ $n = \pm\sqrt{c}$

مثال 2

أحلُّ كلًّا مِنَ المعادلاتِ الآتيةِ، وأتحققُ مِنْ صحةِ الحلِّ:

1 $x^2 = 144$

$x^2 = 144$ المعادلةُ الأصليةُ

$x = \pm\sqrt{144}$ تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ

$= \pm 12$ أجدُ قيمةَ الجذرِ

أتحققُ مِنْ صحةِ الحلِّ:

عندما $x = 12$

$(12)^2 \stackrel{?}{=} 144$

$144 = 144$ ✓

عندما $x = -12$

$(-12)^2 \stackrel{?}{=} 144$

$144 = 144$ ✓

2 $t^2 = \frac{1}{36}$

$t^2 = \frac{1}{36}$ المعادلةُ الأصليةُ

$t = \pm\sqrt{\frac{1}{36}}$ تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ

$= \pm\frac{1}{6}$ أجدُ قيمةَ الجذرِ

أتحققُ مِنْ صحةِ الحلِّ:

عندما $x = \frac{1}{6}$

$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{36}$

$\frac{1}{36} = \frac{1}{36}$ ✓

عندما $x = -\frac{1}{6}$

$\left(-\frac{1}{6}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{36}$

$\frac{1}{36} = \frac{1}{36}$ ✓

أتحققُ من فهمي:

4) $x^2 = \frac{16}{169}$

3) $y^2 = 2.25$

يُستعمَلُ الجذرُ التربيعيُّ الموجبُ عادةً في المواقفِ الحياتيةِ والعمليةِ.

مثال 3: منَ الحياةِ

أهرامٌ: هرمُ الشمسِ في المكسيكِ ثالثُ أكبرِ هرمٍ في العالمِ، قاعدتُهُ مربعةُ الشكلِ مساحتُها $50625\ m^2$، أجدُ طولَ ضلعِ قاعدتِهِ.

الْخُطْوَةُ 1 أكتبُ المسألةَ على صورةِ معادلةٍ.

أفرضُ أَنَّ x طولُ ضلعِ قاعدةِ الهرمِ، وبما أَنَّ القاعدةَ مربعةُ الشكلِ، فإنَّ مساحتَها تساوي مربعَ طولِ الضلعِ.

مساحةُ المربعِ	$A = x^2$
أعوضُ لأكوّنَ معادلةً	$x^2 = 50625$

الْخُطْوَةُ 2 أبحثُ عَنْ عاملَينِ متساويَينِ.

لحلِّ المعادلةِ، أبحثُ عَنْ عاملَينِ متساويَينِ للعددِ 50625، وذلكَ بتحليلِهِ إلى عواملِهِ الأوليةِ:

أحللُ العددَ إلى عواملِهِ الأوليةِ	$50625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
الخاصيةُ التجميعيةُ	$= (5 \times 5 \times 3 \times 3)\ (5 \times 5 \times 3 \times 3)$
أضربُ	$= 225 \times 225$

الْخُطْوَةُ 3 أجدُ طولَ ضلعِ قاعدةِ الهرمِ.

لإيجادِ طولِ ضلعِ قاعدةِ الهرمِ أحلُّ المعادلةَ $x^2 = 50625$

أكتبُ المعادلةَ	$x^2 = 50625$
تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ	$x = \pm\sqrt{50625}$
أجدُ قيمةَ الجذرِ	$x = \pm 225$

وبما أَنَّ الطولَ لا يمكنُ أَنْ يكونَ سالبًا، إذنْ، طولُ ضلعِ قاعدةِ الهرمِ هُوَ $\sqrt{50625}$ ويساوي $225\ m$

أتحققُ من فهمي:

صورةٌ مربعةُ الشكلِ مساحتُها $3136\ cm^2$، أرادَتْ ريما وضعَها في برواز مربعِ الشكلِ طولُ ضلعِهِ الداخليِّ $58\ cm$، هَلْ يمكنُها ذلكَ؟ أبرّرُ إجابتي.

أتدرب وأحل المسائل

أجدُ كلًّا ممّا يأتي:

1) $\sqrt{\frac{49}{169}}$

2) $-\sqrt{2.56}$

3) $\pm\sqrt{576}$

4) $\sqrt{0.0001}$

إرشاد
أستعملُ الحقيقةَ
$576 = 4 \times 9 \times 16$
لحلِّ المسألةِ 3

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي، وأبرّرُ إجابتي:

5) $(\sqrt{81})^2$

6) $(-\sqrt{0.01})^2$

7) $\frac{\sqrt{100-36}}{\sqrt{16}}$

8) $\sqrt{0.25+1.44}$

9) $\sqrt{2.61-0.36}$

10) $0.4^2+\sqrt{1.96}$

أحلُّ كلًّا مِنَ المعادلاتِ الآتيةِ، وأتحققُ مِنْ صحةِ الحلِّ:

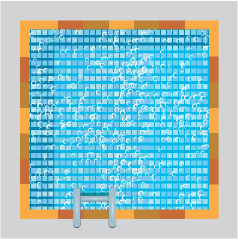
11) $t^2 = \frac{64}{100}$

12) $y^2 = 0.0144$

13) $\sqrt{y} = \frac{3}{5}$

إرشاد
لحلِّ المعادلةِ في المسألةِ 13، أجدُ مربعَ طرفَيِ المعادلةِ.

14) **بناءٌ:** بلّطَ بنّاءٌ أرضيةَ غرفةٍ مربعةِ الشكلِ بـ 75 بلاطةً بيضاءَ وَ75 بلاطةً صفراءَ وَ75 بلاطةً بُنّيّةً. ما عددُ البلاطاتِ الّتي تشكّلُ طولَ ضلعِ قاعدةِ الغرفةِ؟ علمًا بأنَّ البلاطاتِ جميعَها مربعةُ الشكلِ ومتساويةٌ في المساحةِ.



15 **مسابحُ:** مسبحٌ مربعُ الشكلِ، مساحتُهُ $169\ m^2$، يحيطُ بِهِ ممرٌّ عرضُهُ $1\ m$. أجدُ محيطَ الممرِّ.

أضعُ إشارةَ < أَوْ > أَوْ = في □ لأكوِّنَ عبارةً صحيحةً في كلٍّ ممّا يأتي:

16 $\sqrt{2.61-0.65}$ □ 1.6

17 1.3^2 □ $\sqrt{1.27+1.29}$

18 $\sqrt{0.81}$ □ 0.9^2

19 $\sqrt{1.24+0.2}$ □ 1.2

20 **أنماطٌ:** أعودُ إلى فقرةِ (أستكشفُ) بدايةَ الدرسِ، وأحلُّ المسألةَ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

21 **تبرير:** في حفلِ تخريجٍ للطلبةِ في إحدى الجامعاتِ، وُزِّعَتِ المقاعدُ على 4 أقسامٍ كلٌّ مِنْها على شكلِ مربعٍ فيهِ العددُ نفسُهُ مِنَ المقاعدِ، لتشكِّلَ الأقسامُ الأربعةُ معًا مربعًا كبيرًا. إذا كانَ في أحدِ الأقسامِ 625 مقعدًا، فما عددُ المقاعدِ الموضوعةِ على ضلعِ المربعِ الكبيرِ؟ أبرِّرُ إجابتي.

أفكِّرُ
ما العلاقةُ بَيْنَ عددِ المقاعدِ على طولِ ضلعِ المربعِ الكبيرِ وعددِ المقاعدِ على طولِ ضلعِ المربعِ الصغيرِ؟

22 **تبرير:** هَلْ يمكنُ إيجادُ $\sqrt{-100}$؟ أبرِّرُ إجابتي.

23 **تحدٍّ:** قرّرتْ مصمِّمةٌ تغطيةَ أرضيةِ مسرحٍ مربعةِ الشكلِ بنوعٍ خاصٍّ مِنَ الخشبِ سعرُ المترِ المربعِ الواحدِ مِنْهُ 4 JD، فبلغَتِ التكلفةُ 1024 JD. أجدُ طولَ المسرحِ.

أفكِّرُ
ما العلاقةُ بَيْنَ مساحةِ أرضيةِ المسرحِ والتكلفةِ؟

24 **أكتشفُ الخطأَ:** يقولُ مالكٌ: إنَّ $\sqrt{64} = \pm 8$؛ لأنَّ $(\pm 8)^2 = 64$. هَلْ ما يقولُهُ مالكٌ صحيحٌ؟ أبرِّرُ إجابتي.

25 **أكتبُ** كيفَ أجدُ الجذرَ التربيعيَّ لعددٍ ما؟

الدرسُ 2 الجذورُ الصّمّاءُ

فكرةُ الدرسِ

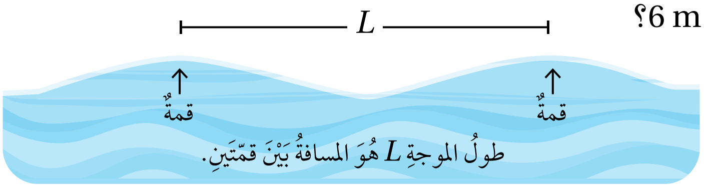
أقدّرُ قيمةَ الجذرِ التربيعيِّ.

المصطلحاتُ

الجذورُ الصّمّاءُ، إنطاقُ المقامِ.

أستكشفُ

تمثلُ المعادلةُ $2\pi s^2 = 9.8\ L$ العلاقةَ بَيْنَ سرعةِ سلسلةٍ مِنَ المَوجاتِ s بالمترِ لكلِّ ثانيةٍ في المياهِ العميقةِ، وطولِ المَوجةِ L بالأمتارِ. أجدُ سرعةَ سلسلةٍ مِنَ المَوجاتِ طولُها الموجيُّ 6 m؟



الجذورُ الصّمّاءُ (surds) هِيَ جذورٌ لا يمكنُ إيجادُ قيمةٍ دقيقةٍ لَها، فمثلًا $\sqrt{3}$ جذرٌ أصمُّ لعدمِ وجودِ إجابةٍ دقيقةٍ لَهُ؛ لأنَّ 3 ليسَ مربعًا كاملًا، أمّا $\sqrt{4}$ فيمكنُ إيجادُ قيمةٍ دقيقةٍ لَهُ وَهِيَ 2؛ لأنَّهُ مربعٌ كاملٌ، إذنْ فَهُوَ ليسَ جذرًا أصمَّ. ولكنْ يمكنُ تقديرُ قيمةِ الجذورِ الصّمّاءِ باستعمالِ طرائقَ عدّةٍ مِنْها: خطُّ الأعدادِ، والآلةُ الحاسبةُ.

مثال 1

أقدّرُ قيمةَ $\sqrt{55}$ لأقربِ عددٍ صحيحٍ.

الطريقةُ 1: خطُّ الأعدادِ

الخُطْوَةُ 1 أحددُ مربعَينِ كاملَينِ يقعُ بينَهُما العددُ 55 ويكونانِ أقربَ ما يمكنُ إليهِ.

- أكبرُ مربعٍ كاملٍ **أقلَّ مِنْ** 55 هُوَ 49
- أصغرُ مربعٍ كاملٍ **أكبرَ مِنْ** 55 هُوَ 64

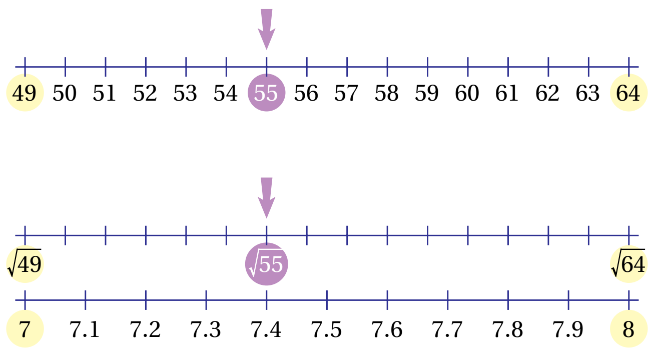
إذنْ، العددُ 55 يقعُ بَيْنَ المربعَينِ الكاملَينِ 49 وَ 64، ويمكنُ التعبيرُ عَنْ هذهِ الجملةِ على النحوِ الآتي:

$$49 < 55 < 64$$

الخُطْوَةُ 2 أجدُ الجذرَ التربيعيَّ لكلِّ عددٍ.

$49 < 55 < 64$	أكتبُ المتباينةَ
$\sqrt{49} < \sqrt{55} < \sqrt{64}$	أجدُ الجذرَ التربيعيَّ لكلِّ عددٍ
$7 < \sqrt{55} < 8$	أبسطُ

الْخُطْوَةُ 3 أستعملُ خطَّ الأعدادِ لتحديدِ أفضلِ تقديرٍ.



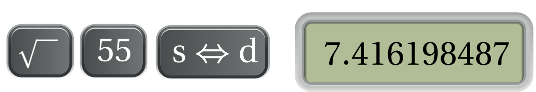
- أعيّنُ الجذرَينِ على خطِّ الأعدادِ.
- ألاحظُ أنَّ 55 أقربُ إلى 49 مِنْهُ إلى 64

إذنْ، $\sqrt{55}$ أقربُ إلى 7 مِنْهُ إلى 8

لذا فإنَّ أفضلَ تقديرٍ لِـ $\sqrt{55}$ لأقربِ عددٍ صحيحٍ هُوَ 7

الطريقةُ 2: الآلةُ الحاسبةُ

يمكنُ استعمالُ الآلةِ الحاسبةِ لتقديرِ $\sqrt{55}$ بالضغطِ على الأزرارِ الآتيةِ:



إذنْ، أفضلُ تقديرٍ لِـ $\sqrt{55}$ لأقربِ عددٍ صحيحٍ هُوَ 7

أتحققُ من فهمي:

أقدّرُ قيمةَ كلِّ جذرٍ تربيعيٍّ ممّا يأتي لأقربِ عددٍ صحيحٍ باستعمالِ خطِّ الأعدادِ والآلةِ الحاسبةِ:

3 $\sqrt{160}$ 2 $\sqrt{125}$ 1 $\sqrt{83}$

يكونُ المقدارُ الجذريُّ في أبسطِ صورةٍ حينَ لا يحتوي:

- جذرًا في المقامِ.
- مجذورًا أحدُ عواملِهِ مربعٌ كاملٌ باستثناءِ العددِ 1
- مجذورًا على صورةِ كسرٍ.

ويمكنُ تبسيطُ الجذورِ التربيعيةِ الصّمّاءِ باستعمالِ خواصِّ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ وقسمتِها.

مفهومٌ أساسيٌّ — خواصُّ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ وقسمتُها

- **مثال:**

$$\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$$

$$\sqrt{9\times 7}=\sqrt{9}\times\sqrt{7}=3\sqrt{7}$$

$$\sqrt{\frac{11}{4}}=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$$

- **بالرموزِ:**

$$\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a\,,\ a\geq 0$$

$$\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}\ ,\ a\geq 0, b\geq 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ ,\ a\geq 0, b>0$$

وللحصــولِ على مقدارٍ جــذريٍّ لا يحتوي مقامُهُ جــذرًا أصمَّ، نضربُ البســطَ والمقامَ في هذا الجذرِ الأصمِّ، وتُسمّى هذهِ العمليةُ **إنطاقَ المقامِ** (rationalizing the denominator).

أتعلَّمُ

لتبسيطِ جذرٍ أصمَّ على الصورةِ $\sqrt{a}\,, a\geq 0$ أحلِّلُ العددَ الواقعَ تحتَ رمزِ الجذرِ، على أنْ يكونَ أحدُهُما أكبرَ مربعٍ كاملٍ ممكنًا، ثُمَّ أطبقُ خاصيةَ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ.

مثال 2

أُبسّطُ كلًّا ممّا يأتي:

1 $\sqrt{675}$

$\sqrt{675}=\sqrt{225\times 3}$ — أحللُ العددَ 675 إلى عاملَينِ أحدُهُما مربعٌ كاملٌ

$=\sqrt{225}\times\sqrt{3}$ — خاصيةُ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ

$=15\sqrt{3}$ — أبسطُ

2 $\sqrt{\frac{48}{81}}$

$\sqrt{\frac{48}{81}}=\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{81}}$ — خاصيةُ قسمةِ الجذورِ التربيعيةِ

$=\frac{\sqrt{16\times 3}}{\sqrt{81}}$ — أحللُ العددَ 48 إلى عاملَينِ أحدُهُما مربعٌ كاملٌ

$=\frac{\sqrt{16}\times\sqrt{3}}{\sqrt{81}}$ — خاصيةُ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ

$=\frac{4\sqrt{3}}{9}$ — أبسطُ

3 $\frac{14}{\sqrt{7}}$

أُنطقُ المقامَ $\frac{14}{\sqrt{7}} = \frac{14}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$

خاصيةُ ضربِ الجذرِ في نفسِهِ $= \frac{14\sqrt{7}}{7}$

أبسطُ $= 2\sqrt{7}$

أتحقق من فهمي:

4 $\sqrt{192}$

5 $\sqrt{\frac{180}{25}}$

6 $\frac{30}{\sqrt{6}}$

يُستعملُ تبسيطُ الجذورِ الصّمّاءِ وتقديرُها في كثيرٍ مِنَ المواقفِ الحياتيةِ الّتي لا يمكنُ إيجادُ إجابةٍ دقيقةٍ لَها.

مثال 3: منَ الحياةِ

زراعةٌ: اشترى سميرٌ 6 أكياسٍ مِنَ السّمادِ الطبيعيِّ يكفي الواحدُ مِنْها لتغطيةِ مساحةٍ مقدارُها $156\ m^2$. أقدّرُ طولَ ضلعِ أكبرِ مربعٍ مِنَ الأرضِ يمكنُ أَنْ تغطّيَهُ هذهِ الكمّيّةُ مِنَ السّمادِ.

لتقديرِ طولِ ضلعِ أكبرِ مربعٍ مِنَ الأرضِ يمكنُ أَنْ تغطّيَهُ كمّيّةُ السّمادِ الّتي اشتراها سميرٌ، أجدُ المساحةَ المربعةَ الّتي تغطّيها كمّيّةُ السّمادِ الكلّيّةُ، وذلكَ بضربِ عددِ الأكياسِ في مساحةِ ما يغطّيهِ الكيسُ الواحدُ.

الْخُطْوَةُ 1 أجدُ المساحةَ المربعةَ الّتي تغطّيها كمّيّةُ السّمادِ الكلّيّةُ.

عددُ الأكياسِ × مساحةِ ما يغطّيهِ الكيسُ الواحدُ $6 \times 156 = 936$

إذنْ، تغطي كمّيّةُ السّمادِ كلُّها مساحةً مقدارُها $936\ m^2$

الْخُطْوَةُ 2 أجدُ طولَ ضلعِ مربعِ الأرضِ الّذي تغطّيهِ كمّيّةُ السّمادِ كلُّها.

أفرضُ أَنَّ s طولُ ضلعِ مربعِ الأرضِ الّذي مساحتُهُ $936\ m^2$

مساحةُ المربعِ $A = s^2$

طولُ الضلعِ يساوي الجذرَ التربيعيَّ للمساحةِ $s = \sqrt{A}$

أعوضُ $A = 936$	$= \sqrt{936}$
أحللُ العددَ 936 إلى عاملَينِ أحدُهُما مربعٌ كاملٌ	$= \sqrt{36 \times 26}$
خاصيةُ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ	$= \sqrt{36} \times \sqrt{26}$
أبسطُ	$= 6\sqrt{26}$

أتذكرُ

إيجادُ مربعِ العددِ والجذرِ التربيعيِّ لَـهُ عمليتانِ عكسيتانِ.

الْخُطْوَةُ 3 أقدّرُ طولَ ضلعِ المربعِ.

أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لتقديرِ طولِ ضلعِ المربعِ:

6 √ 26 s⇔d 30.59411708

إذنْ، طولُ ضلعِ مربعِ الأرضِ الّذي تكفي لتغطيتِهِ كمّيةُ السّمادِ الّتي اشتراها سميرٌ 30 m تقريبًا.

أتحققُ من فهمي:

جُسورٌ: تمثلُ المعادلةُ $t = \sqrt{\frac{2d}{9.8}}$ العلاقةَ بَيْنَ الزمنِ t بالثّواني والارتفاعِ بالأمتارِ d الّذي سقطَ مِنْهُ جسمٌ سُقوطًا حُرًّا. أجدُ الزمنَ اللازمَ ليصلَ جسمٌ إلى سطحِ الأرضِ سقطَ مِنْ جسرِ وادي الغفرِ في محافظةِ إربدَ البالغِ ارتفاعُهُ عَنْ سطحِ الأرضِ 72 m

يمكنُ جمعُ الجذورِ التربيعيةِ الصّمّاءِ وطرحُها بطريقةٍ مشابهةٍ لجمعِ الحدودِ الجبريةِ وطرحِها، بشرطِ أنْ يتساوى المجذورُ في كلٍّ منها.

$3\sqrt{5},\ 7\sqrt{5}$ جذرانِ متشابهانِ

$3\sqrt{5},\ 5\sqrt{3}$ جذرانِ غيرُ متشابهَينِ

مثال 4

أبسطُ كلًّا ممّا يأتي:

1 $\sqrt{20} + \sqrt{45}$

أحللُ	$\sqrt{20} + \sqrt{45} = \sqrt{4 \times 5} + \sqrt{9 \times 5}$
خاصيةُ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ	$= \sqrt{4} \times \sqrt{5} + \sqrt{9} \times \sqrt{5}$
$\sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3$	$= 2 \times \sqrt{5} + 3 \times \sqrt{5}$
أجمعُ	$= 5\sqrt{5}$

2 $\sqrt{12} - 6\sqrt{3}$

$$\sqrt{12} - 6\sqrt{3} = \sqrt{4\times3} - 6\sqrt{3}$$ أحللُ

$$= \sqrt{4}\times\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ

$$= 2\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$$ $\sqrt{4} = 2$

$$= -4\sqrt{3}$$ أطرحُ

3 $5\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$

$$5\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 3\sqrt{7} = (5+2-3)\sqrt{7}$$ أجمعُ المعاملاتِ وأطرحُها

$$= 4\sqrt{7}$$ أبسطُ

أتحققُ من فهمي:

4 $\sqrt{243} + \sqrt{48}$

5 $2\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$

6 $4\sqrt{98} + 5\sqrt{2}$

يمكنُ تبسيطُ بعضِ المقاديرِ العدديةِ الّتي تحوي جذورًا صمّاءَ وعملياتٍ باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ وخواصِّ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ وقسمتِها.

مثال 5

أُبسطُ كلًّا ممّا يأتي:

1 $\sqrt{3}(2 - \sqrt{7})$

$$\sqrt{3}(2-\sqrt{7}) = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}\sqrt{7}$$ خاصيةُ التوزيعِ

$$= 2\sqrt{3} - \sqrt{21}$$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ التربيعية

2 $(5 + \sqrt{6})^2$

$$(5+\sqrt{6})^2 = (5+\sqrt{6})(5+\sqrt{6})$$ تعريفُ المربعِ الكاملِ

$$= 25 + 5\sqrt{6} + 5\sqrt{6} + \sqrt{6}\sqrt{6}$$ خاصيةُ التوزيعِ

$$= 25 + 5\sqrt{6} + 5\sqrt{6} + 6$$ خاصيةُ ضربِ الجذرِ في نفسِهِ

$$= 31 + 10\sqrt{6}$$ أجمعُ

أتحقّقُ من فهمي:

3) $\sqrt{2}(\sqrt{8}-1)$

4) $(\sqrt{7}-3)^2$

أتدرب وأحل المسائل

أقـدّرُ قيمـةَ كلِّ جـذرٍ ممّـا يأتـي لأقـربِ عـددٍ صحيـحٍ باسـتعمالِ خـطِّ الأعـدادِ والآلـةِ الحاسـبةِ:

1) $\sqrt{17}$

2) $\sqrt{44}$

3) $\sqrt{70}$

4) $\sqrt{93}$

أكتبُ كلًّا مِنَ المقاديرِ العدديةِ الآتيةِ بأبسطِ صورةٍ:

5) $\sqrt{405}$

6) $\sqrt{\frac{132}{99}}$

7) $\frac{6}{\sqrt{18}}$

8) $(4+\sqrt{3})(5-\sqrt{27})$

9) $4\sqrt{2}-7\sqrt{2}+\sqrt{2}$

10) $\frac{1}{\sqrt{20}}+\sqrt{81}$

11) $(6+\sqrt{3})^2$

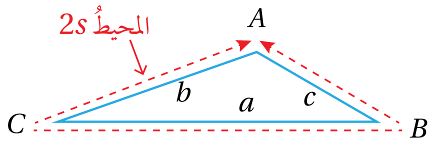
12) $\sqrt{12}-43+2\sqrt{9}$

معلومةٌ

يُعدُّ بَنْدولُ الساعةِ أحدَ الاختراعاتِ الإسلاميةِ الكبرى الّتي غيّرَتْ مسارَ الحضارةِ الإنسانيةِ. ومنذُ عُرِفَ البَنْدولُ تطورَتْ آلاتُ حسابِ الوقتِ بسرعةٍ.

13) **فيزياءُ:** تمثلُ الصيغةُ $\frac{375}{\sqrt{c}}$ عددَ التذبذباتِ الناتجةِ عَنْ حركةِ بَنْدولِ ساعةٍ طولُهُ $\sqrt{c}$ in في الدقيقةِ، أقدّرُ عددَ تذبذباتِ بَنْدولٍ إذا كانَتْ $c = 45$ in

مساحةٌ: يمكنُ حسابُ مساحةِ مثلثٍ باستعمالِ الصيغةِ $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$، حيثُ a وَ b وَ c أطوالُ أضلاعِ المثلثِ وَ s نصفُ المحيطِ.



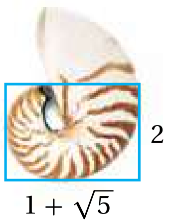
14 أجدُ مساحةَ مثلثٍ أطوالُ أضلاعِهِ 6 وَ 8 وَ 10

15 هَلْ مِساحةُ المثلثِ الناتجةُ عَنِ الفرعِ السابقِ تمثلُ جذرًا أصمَّ أَمْ لا؟ أبرّرُ إجابتي.

معلومةٌ

النسبةُ الذهبيةُ هِيَ نسبةٌ ثابتةٌ بَيْنَ كمّيتَيْنِ، وتظهرُ في الطبيعةِ كثيرًا. ويُسمّى المستطيلُ الّذي تحقّقُ نسبةُ طولِهِ إلى عرضِهِ هذهِ النسبةَ مستطيلًا ذهبيًّا.

16 **قوقعةٌ:** يتكرّرُ وجودُ المستطيلِ الذهبيِّ في قوقعةِ نوتيلوسِ البحريِّ، إذا علمْتُ أنَّ نسبةَ طولِ المستطيلِ الذهبيِّ إلى عرضِهِ تساوي $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$، فأقدّرُ قيمةَ هذهِ النسبةِ.



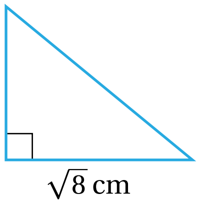
مهاراتُ التفكيرِ العُليا

17 **تبريرٌ:** أجدُ قيمةَ $\square$ في $\left(2.8<\sqrt{\square}<4\right)$، إذا علمْتُ أنَّ $\square$ عددٌ صحيحٌ موجبٌ أقلُّ مِنْ 10، وأبرّرُ إجابتي.

18 **تحدٍّ:** أجدُ الحدَّيْنِ: الأولَ، والثانيَ مِنَ المتتاليةِ الآتيةِ:

$$5\sqrt{5}-8\sqrt{3},\ 3\sqrt{5}-5\sqrt{3},\ \sqrt{5}-2\sqrt{3},\ \_\_\_\_,\ \_\_\_\_$$

19 **تبريرٌ:** أجدُ ارتفاعَ المثلثِ المجاورِ الّذي مساحتُهُ $4+\sqrt{2}\ \text{cm}^2$ بأبسطِ صورةٍ، وأبرّرُ إجابتي.



أتذكّرُ

مساحةُ المثلثِ = $\frac{1}{2}$ × القاعدةِ × الارتفاعِ

20 **أكتبُ** كيفَ أقدّرُ قيمةَ الجذرِ التربيعيِّ لعددٍ؟

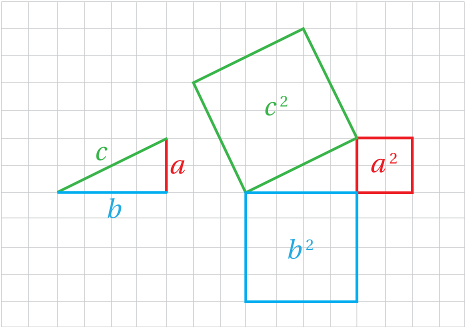
نشاطٌ مفاهيميٌّ نظريةُ فيثاغورس

الهدفُ: أستكشفُ العلاقةَ بَيْنَ أطوالِ أضلاعِ المثلثِ القائمِ الزاويةِ.

نشاطٌ

الْخُطْوَةُ 1 أرسمُ مثلثًا قائمَ الزاويةِ.

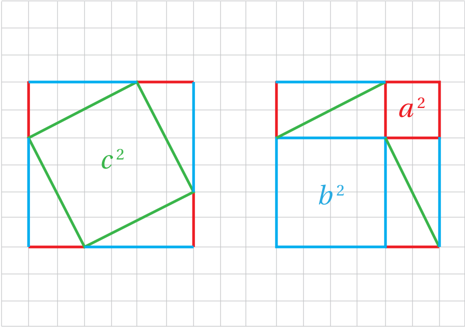
- أرسمُ مثلثًا قائمَ الزاويةِ على ورقةِ مربعاتٍ، وأسمّي أقصرَ ضلعَينِ a وَ b والضلعَ الأطولَ c، كما في الشكلِ المجاورِ.



الْخُطْوَةُ 2 أرسمُ مربعًا على كلِّ ضلعٍ.

- أرسمُ مربعًا على كلِّ ضلعٍ مِنْ أضلاعِ المثلثِ، وأسمّي مساحاتِ المربعاتِ الثلاثةِ: c^2 , b^2 , a^2، كما في الشكلِ المجاورِ.

الْخُطْوَةُ 3 أقصُّ وأعيدُ الترتيبَ.



- أقصُّ المربعاتِ الثلاثةَ.
- أنسخُ مِنَ المثلثِ القائمِ الزاويةِ ثمانيَ نسخٍ، ثُمَّ أقصُّها.
- أعيدُ ترتيبَ الأشكالِ لتكوينِ مربعَينِ متطابقَينِ كبيرَينِ كما في الشكلِ المجاورِ.

أحللُ النتائجَ:

- باعتمادِ المربعَينِ الكبيرَينِ المتطابقَينِ الناتجَينِ مِنَ النشاطِ؛ أصفُ العلاقةَ بَيْنَ a^2 وَ b^2 وَ c^2
- أستعملُ النتيجةَ الّتي توصلْتُ إِلَيْها في الفرعِ السابقِ لكتابةِ معادلةٍ تصفُ العلاقةَ بَيْنَ a^2 وَ b^2 وَ c^2

أفكّرُ: كيفَ يمكنُ استعمالُ المعادلةِ الّتي توصلْتُ إِلَيْها في إيجادِ طولِ الضلعِ الأطولِ في مثلثٍ قائمِ الزاويةِ، إذا كانَ طولا ضلعَيهِ الآخَرينِ 6 cm, 8 cm؟

الدرسُ 3 نظريةُ فيثاغورس

فكرةُ الدرسِ

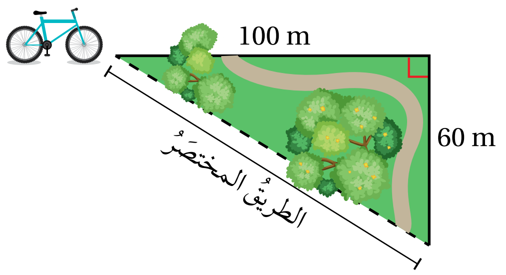
أستعملُ نظريةَ فيثاغورس لإيجادِ طولِ ضلعٍ مجهولٍ في مثلثٍ قائمِ الزاويةِ.

المصطلحاتُ

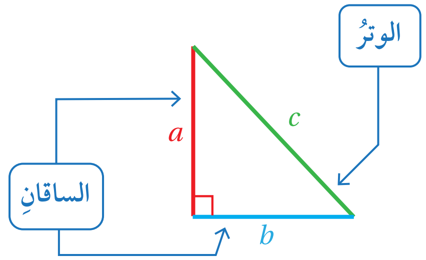
نظريةُ فيثاغورس، الوَترُ، الساقانِ، عكسُ نظريةِ فيثاغورس

أستكشفُ

أرادَ خالدٌ الخروجَ مِنَ الحديقةِ راكبًا دراجتَهُ الهوائيةَ مارًّا بالطريقِ المختصَرِ كما يظهرُ في الشكلِ المجاورِ. ما طولُ الطريقِ المختصَرِ؟



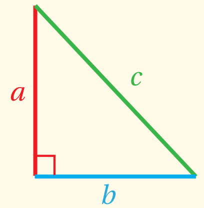
المثلثُ القائمُ الزاويةِ هُوَ مثلثٌ إحدى زواياهُ قائمةٌ. ويُسمّى الضلعُ المقابلُ للزاويةِ القائمةِ **الوَتَرَ** (hypotenuse)، وَهُوَ الضلعُ الأطولُ في المثلثِ. ويُسمّى الضلعانِ الآخرانِ **الساقَينِ** (legs)، وَهُما الضلعانِ اللّذانِ يشكّلانِ القائمةَ.



تصفُ **نظريةُ فيثاغورس** (pythagorean theorem) العلاقةَ بَيْنَ طولَيْ الساقينِ وطولِ الوترِ في المثلثِ القائمِ الزاويةِ.

مفهومٌ أساسيٌّ — نظريةُ فيثاغورس

- **بالكلماتِ:** في المثلثِ القائمِ الزاويةِ مربعُ طولِ الوترِ يساوي مجموعَ مربعَي طولَيْ ساقَيْهِ.
- **بالرموزِ:** $c^2 = a^2 + b^2$

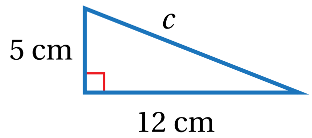


يمكنُ استعمالُ حلِّ المعادلاتِ ونظريةِ فيثاغورس في إيجادِ طولِ ضلعٍ مجهولٍ في مثلثٍ قائمِ الزاويةِ إذا عُلِمَ طولا ضلعَيهِ الآخَرَينِ.

مثال 1

أجدُ طولَ الضلعِ المجهولَ في كلِّ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ ممّا يأتي (أقرّبُ إجابتي لأقربِ جزءٍ مِنْ عشرةٍ إذا لزمَ الأمرُ):

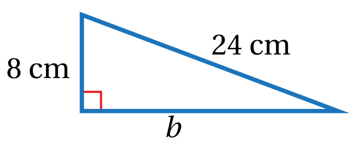
1



نظريةُ فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
أعوضُ $a = 5, b = 12$	$5^2 + 12^2 = c^2$
أجدُ القوى	$25 + 144 = c^2$
أجمعُ	$169 = c^2$
تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ	$c = \pm\sqrt{169}$
أبسطُ	$= \pm 13$

للمعادلةِ حلّانِ: 13 وَ 13−، وبما أنَّ الطولَ يجبُ أنْ يكونَ عددًا موجبًا، إذنْ طولُ الوترِ 13 cm

2

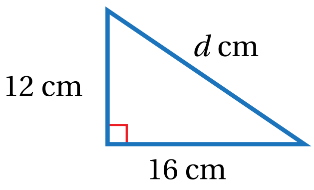


نظريةُ فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
أعوضُ $a = 8, c = 24$	$8^2 + b^2 = 24^2$
أجدُ القوى	$64 + b^2 = 576$
أطرحُ 64 مِنْ كِلا الطرفَينِ	$64 - 64 + b^2 = 576 - 64$
أبسطُ	$b^2 = 512$
تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ	$b = \pm\sqrt{512}$
أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ	$b \approx \pm 22.6$

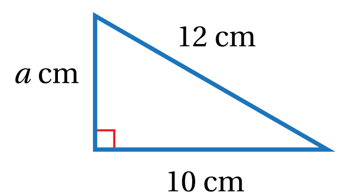
إذنْ، طولُ الضلعِ المجهولُ b يساوي 22.6 cm

أتحققُ من فهمي:

3



4



إنَّ **عكـــسَ نظريةِ فيثاغـــورس** (converse of pythagorean theorem) صحيحٌ أيضًا، ويُســـتعملُ لتحديدِ ما إذا كانَ المثلثُ المعطاةُ أطوالُ أضلاعِهِ الثلاثةِ قائمَ الزاويةِ أَمْ لا.

نظريةُ فيثاغورس: إذا كانَ المثلثُ قائمَ الزاويةِ، فإنَّ $c^2 = a^2 + b^2$

عكسُ نظريةِ فيثاغورس: إذا كانَ $c^2 = a^2 + b^2$، فإنَّ المثلثَ قائمُ الزاويةِ.

مفهومٌ أساسيٌّ — عكسُ نظريةِ فيثاغورس

- **بالكلماتِ:** إذا كانَ مربعُ طولِ الضلعِ الأطولِ في مثلثٍ يساوي مجموعَ مربعَيْ طولَيِ الضلعَينِ الآخَرينِ، فإنَّ المثلثَ قائمُ الزاويةِ.
- **بالرموزِ:** إذا كانَ $c^2 = a^2 + b^2$ ، فإنَّ المثلثَ قائمُ الزاويةِ.

مثال 2

أحددُ ما إذا كانَ المثلثُ المعطاةُ أطوالُ أضلاعِهِ في كلٍّ ممّا يأتي قائمَ الزاوية أَمْ لا:

1 **12, 9, 15**

بما أنَّ أطولَ ضلعٍ طولُهُ 15، فأفرضُ أنَّ $c = 15$، وَ $a = 9$، وَ $b = 12$، ثُمَّ أحددُ أنَّ هذهِ الأطوالَ تحققُ المعادلةَ $c^2 = a^2 + b^2$ أَمْ لا.

$c^2 = a^2 + b^2$	نظريةُ فيثاغورس
$15^2 \stackrel{?}{=} 9^2 + 12^2$	أعوضُ $a = 9, b = 12, c = 15$
$225 \stackrel{?}{=} 81 + 144$	أجدُ القوى
$225 = 225$ ✓	أجمعُ

بما أنَّ $c^2 = a^2 + b^2$، إذنْ، المثلثُ قائمُ الزاويةِ.

2 3, 5, 6

بمــا أنَّ أطولَ ضلعٍ طولُهُ 6، فأفرضُ أنَّ $c = 6$، وَ $a = 5$، وَ $b = 3$، ثُمَّ أحددُ أنَّ هذهِ الأطوالَ تحققُ المعادلةَ $c^2 = a^2 + b^2$ أَمْ لا.

نظريةُ فيثاغورس	$c^2 = a^2 + b^2$
أعوضُ $a = 5, b = 3, c = 6$	$6^2 \stackrel{?}{=} 5^2 + 3^2$
أجدُ القوى	$36 \stackrel{?}{=} 25 + 9$
أبسطُ	$36 \neq 34$

بما أنَّ $c^2 \neq a^2 + b^2$، إذنْ، المثلثُ ليسَ قائمَ الزاويةِ.

أتحققُ من فهمي:

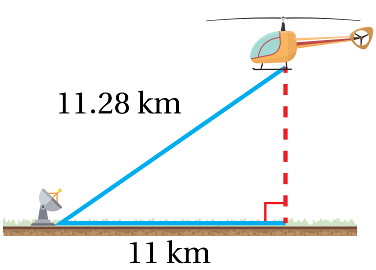
3 12, 5, 13

4 24, 18, 25

يمكنُ استعمالُ نظريةِ فيثاغورس في كثيرٍ مِنَ التطبيقاتِ الحياتيةِ.

مثال 3: منَ الحياةِ

رادارٌ: رصدَ رادارٌ طائرةً مروحيةً على بُعدِ 11.28 km مِنْهُ، كما يظهرُ في الشــكلِ المجــاورِ. أجدُ ارتفــاعَ الطائرةِ عَنْ ســطحِ الأرضِ لأقربِ جزءٍ مِنَ العشــرةِ مِنَ الكيلومترِ.



أفرضُ أنَّ a هِيَ ارتفاعُ الطائرةِ عَنْ سطحِ الأرضِ، ولإيجادِ قيمةِ a أستعملُ نظريةَ فيثاغورس:

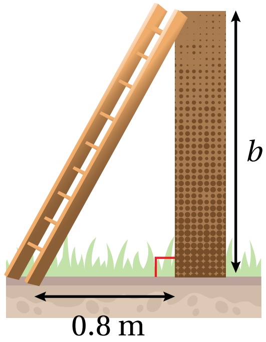
نظريةُ فيثاغورس	$c^2 = a^2 + b^2$
أعوضُ $c = 11.28, b = 11$	$11.28^2 = a^2 + 11^2$
أجدُ القوى	$127.2384 = a^2 + 121$
أطرحُ 121 مِنْ كِلا الطرفَينِ	$a^2 = 6.2384$
تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ	$a = \pm\sqrt{6.2384}$
أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ	$a \approx \pm 2.5$

إذنْ، ارتفاعُ الطائرةِ عَنْ سطحِ الأرضِ 2.5 km تقريبًا.

أتحقق من فهمي:

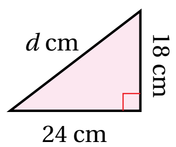
يستندُ سلّمٌ طولُهُ $2\ \mathbf{m}$ إلى حائطٍ عموديٍّ، وتبعدُ قاعدتُهُ $0.8\ \mathbf{m}$ عَنِ الحائطِ.

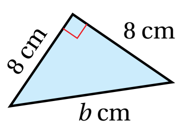
أجدُ ارتفاعَ أعلى السلّمِ عَنِ الأرضِ (b).

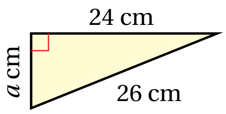


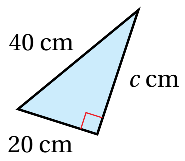
أتدرب وأحل المسائل

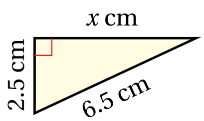
أجدُ طولَ الضلعِ المجهولَ في كلِّ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ ممّا يأتي (أقرّبُ إجابتي لأقربِ جزءٍ مِنْ عشرةٍ إذا لزمَ الأمرُ):

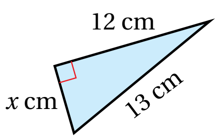
1 

2 

3 

4 

5 

6 

أتذكّر

أفترضُ أنَّ الضلعَ الأطولَ هُوَ c عندَ التعويضِ في القاعدةِ $c^2 = a^2 + b^2$

أحددُ ما إذا كانَ المثلثُ المعطاةُ أطوالُ أضلاعِهِ في كلٍّ ممّا يأتي قائمَ الزاويةِ أمْ لا:

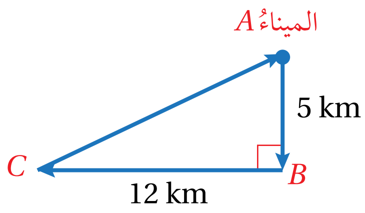
7) 3, 4, 6

8) 12, 35, 37

9) 4, 8, 9

10) 11, 60, 61

سُفُنٌ: أبحرَتْ سفينةٌ $5\ \mathbf{km}$ مِنَ الميناءِ A باتجاهِ الجنوبِ، ثُمَّ $12\ \mathbf{km}$ باتجاهِ الغربِ، ثُمَّ عادَتْ مباشرةً إلى الميناءِ كما في الشكلِ المجاورِ:



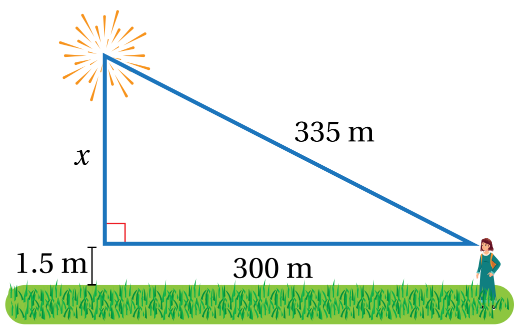
11) أجدُ المسافةَ الّتي قطعَتْها السفينةُ.

12) أجدُ المسافةَ الّتي تختصرُها السفينةُ لَوْ أبحرَتْ مباشرةً مِنَ النقطةِ A إلى النقطةِ C ذهابًا وإيابًا.

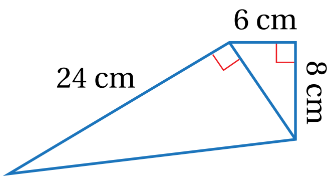
إرشادٌ

عندَ إيجادِ ارتفاعِ الألعابِ الناريةِ عَنْ سطحِ الأرضِ آخذُ في الحسبانِ طولَ المُشاهِدِ للألعابِ الناريةِ.

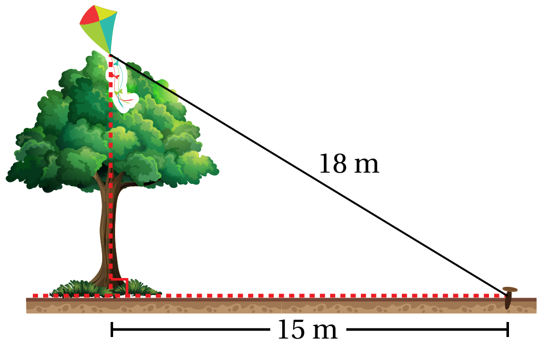
13 **ألعابٌ ناريّةٌ:** رصدَتْ بثينةُ عرضًا للألعابِ الناريةِ على بُعدِ 335 m مثلَما يظهرُ في الشكلِ الآتي. أجدُ ارتفاعَ الألعابِ الناريةِ عَنْ سطحِ الأرضِ.



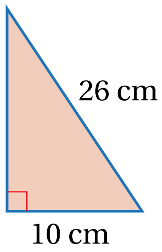
14 أجدُ محيطَ الشكلِ المجاورِ.



15 علقَتْ طائرةُ عبدِ اللهِ الورقيةُ أعلى شجرةٍ، فربطَ الخيطَ في وتدٍ على الأرضِ يبعدُ 15 m عَنْ قاعدةِ الشجرةِ مثلَما يظهرُ في الشكلِ الآتي. إذا كانَ طولُ خيطِ الطائرةِ 18 m فأجدُ ارتفاعَ الشجرةِ.



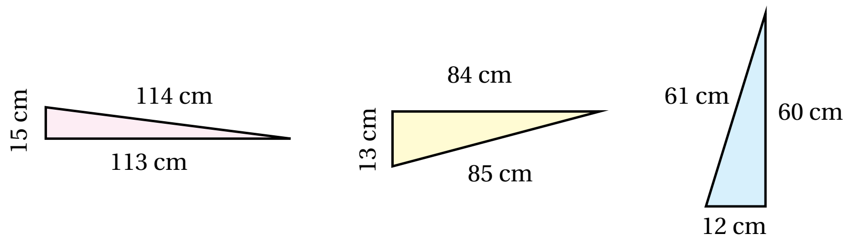
16 أجدُ مساحةَ المثلثِ المجاورِ.



17 أعودُ إلى فقرةِ (أستكشفُ) بدايةَ الدرسِ، وأحلُّ المسألةَ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

18 **أكتشفُ المختلفَ:** أيُّ المثلثاتِ الآتيةِ مختلفٌ؟ أبرّرُ إجابتي:

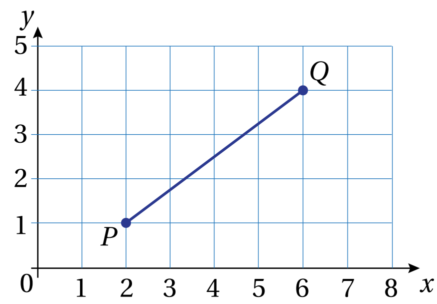


19 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** ثلاثيّاتُ فيثاغورس هِيَ مجموعاتٌ مِنْ ثلاثةِ أعدادٍ موجبةٍ a وَ b وَ c تحققُ نظريةَ فيثاغورس؛ أيْ تشكّلُ أطوالًا لمثلثٍ قائمِ الزاويةِ. مثلًا: 3 وَ 4 وَ 5 . أجدُ مجموعتَينِ مِنْ ثلاثياتِ فيثاغورس.

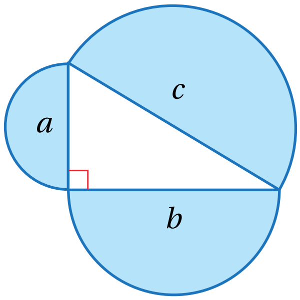
أفكّرُ

هَلْ يمكنُ استعمالُ التشابهِ في إيجادِ مجموعاتٍ أُخرى مِنْ ثلاثياتِ فيثاغورس؟

20 **تحدٍّ:** في الشكلِ الآتي، أجدُ طولَ $\overline{PQ}$ مِنْ دونِ استعمالِ المسطرةِ.



21 **تبريرٌ:** أقارنُ بَيْنَ مساحةِ نصفِ الدائرةِ الكبيرةِ ومساحةِ نصفَي الدائرتَينِ الصغيرتَينِ، وأبرّرُ إجابتي.



أتذكّرُ

مساحةُ الدائرةِ $A = \pi r^2$

22 **أكتبُ** كيفَ أجدُ طولَ ضلعٍ مجهولًا في مثلثٍ قائمِ الزاويةِ باستخدامِ نظريةِ فيثاغورس؟

الدرسُ 4 الأعدادُ الحقيقيةُ

فكرةُ الدرسِ

أميّزُ الأعدادَ النسبيةَ والأعدادَ غيرَ النسبيةِ.

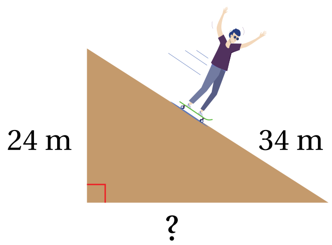
المصطلحاتُ

العددُ غيرُ النسبيِّ، العددُ الحقيقيُّ

أستكشفُ

يبيّنُ الشكلُ المجاورُ منظرًا جانبيًّا لمنحدَرِ تزحلقٍ في مدينةٍ للألعابِ:

1. أجدُ طولَ قاعدةِ المنحدَرِ.
2. هَلِ العددُ الّذي يمثّلُ طولَ قاعدةِ المنحدَرِ عددٌ نسبيٌّ؟ أبرّرُ إجابتي.



تعلمْتُ سابقًا أنَّ العددَ النسبيَّ عددٌ يمكنُ كتابتُهُ على صورةِ $\frac{a}{b}$ حيثُ a وَ b عددانِ صحيحانِ، $b \neq 0$، وأنَّ الأعدادَ النسبيةَ جميعَها عندَ كتابتِها بالصورةِ العشريةِ تكونُ إمّا منتهيةً أَوْ دوريةً، وَمِنْ أمثلتِها الجذورُ التربيعيةُ للمربعاتِ الكاملةِ.

ولكنَّ الجذورَ الصّمّاءَ مثلَ $\sqrt{3}$ لا يمكنُ تصنيفُها أعدادًا نسبيةً؛ لأنّهُ لا يمكنُ كتابتُها على صورةِ كسرٍ عشريٍّ مُنْتَهٍ أَوْ دوريٍّ.

وعندَ استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ لإيجادِ قيمةِ $\sqrt{3}$ تعطي الآلةُ الحاسبةُ القيمةَ الآتيةَ:

$$\sqrt{3} = 1.73205080 \ldots \ldots$$

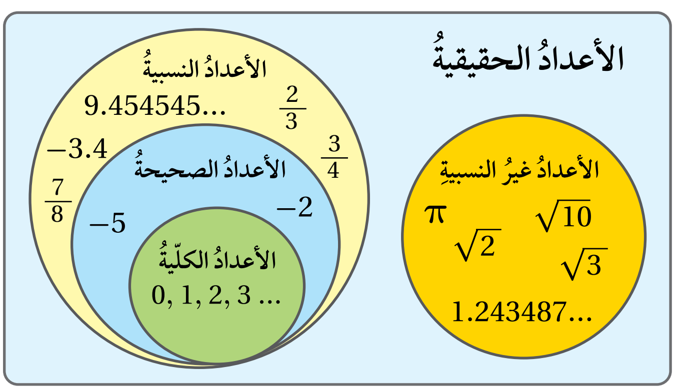
وهذا يعني أنَّهُ غيرُ مُنْتَهٍ وغيرُ دوريٍّ، ويُسمّى هذا النوعُ مِنَ الأعدادِ **الأعدادَ غيرَ النسبيةِ** (irrational numbers).

مفهومٌ أساسيٌّ — **الأعدادُ غيرُ النسبيةِ**

- **بالكلماتِ:** العددُ غيرُ النسبيِّ عددٌ لا يمكنُ كتابتُهُ على صورةِ $\frac{a}{b}$ حيثُ a وَ b عددانِ صحيحانِ، $b \neq 0$
- **أمثلةٌ:** $\sqrt{5} = 2.236067978 \ldots \ldots$

$$\pi = 3.141592654 \ldots \ldots$$

تُشكّلُ الأعدادُ النسبيةُ والأعدادُ غيرُ النسبيةِ معًا **الأعدادَ الحقيقيةَ** (real numbers)، ويوضحُ شكلُ (فن) المجاورُ العلاقةَ بَيْنَها.



مثال 1 **أصنّفُ الأعدادَ الحقيقيةَ الآتيةَ أعدادًا نسبيةً أَوْ أعدادًا غيرَ نسبيةٍ:**

1) $\frac{7}{21}$

بما أنَّ 7 وَ 21 عددانِ صحيحانِ، إذنْ $\frac{7}{21}$ عددٌ نسبيٌّ.

2) $\sqrt{81}$

بما أنَّ $\sqrt{81} = 9$، و9 عددٌ كلّيٌّ، إذنْ $\sqrt{81}$ عددٌ نسبيٌّ.

3) $-\frac{27}{9}$

بما أنَّ $-\frac{27}{9} = -3$، وَ -3 عددٌ صحيحٌ، إذنْ $-\frac{27}{9}$ عددٌ نسبيٌّ.

4) $0.55555\ldots\ \ldots$

بما أنّ $0.55555\ldots\ \ldots$ كسرٌ عشريٌّ دوريٌّ وغيرُ مُنْتَهٍ، إذنْ هُوَ عددٌ نسبيٌّ.

5) $\sqrt{19}$

بما أنَّ $\sqrt{19} = 4.35889894\ldots$، وَهُوَ كسرٌ عشريٌّ غيرُ دوريٍّ وغيرُ منتهٍ، إذنْ هُوَ عددٌ غيرُ نسبيٍّ.

أتحقّقُ من فهمي:

6) $\sqrt{12}$ 7) $-\sqrt{64}$ 8) $0.181818\ldots$ 9) $-3\frac{2}{5}$

تعلمْتُ سابقًا تمثيلَ الأعدادِ النسبيةِ على خطِّ الأعدادِ، ويمكنُني أيضًا تمثيلُ بعضِ الأعدادِ غيرِ النسبيةِ على خطِّ الأعدادِ باستعمالِ المثلثِ القائمِ الزاويةِ.

مثال 2 **أُمثّلُ $\sqrt{53}$ على خطِّ الأعدادِ.**

الْخُطْوَةُ 1 أبحثُ عَنْ عددَيْنِ مجموعُ مربعَيهما 53

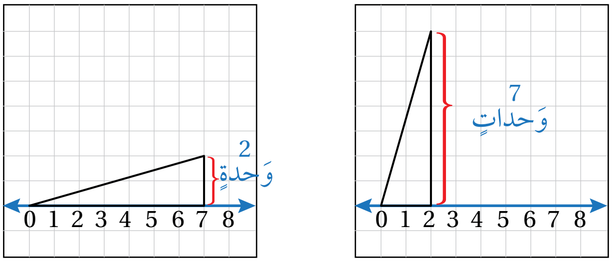
$$53 = 49 + 4$$

$$53 = 7^2 + 2^2$$

إذنْ، طولُ أحدِ ساقَيِ المثلثِ 7 وَحداتٍ وطولُ الآخَرِ 2 وَحدةٍ.

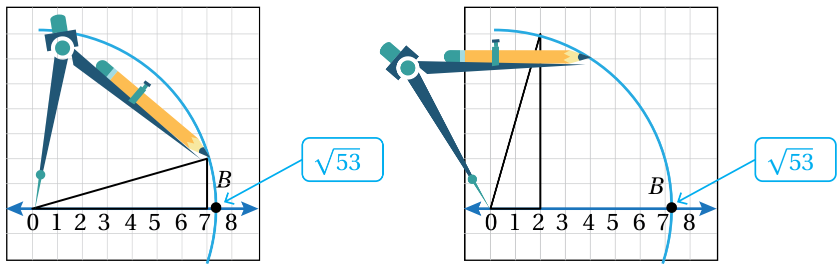
الْخُطْوَةُ 2 أرسمُ مثلثًا قائمَ الزاويةِ.

- أرسمُ خطَّ أعدادٍ على ورقةِ مربعاتٍ.
- أرســمُ مثلثًا قائمَ الزاويةِ طولا ضلعَــي القائمةِ فيهِ 7 وَحداتٍ وَ 2 وَحدةٍ. يمكنُ رســمُ المثلثِ بطريقتَينِ مثلَما يظهرُ في الشكلِ المجاورِ.



الْخُطْوَةُ 3 أعيّنُ $\sqrt{53}$ على خطِّ الأعدادِ.

- أفتحُ الفرجارَ فتحةً مقدارُها طولُ وَترِ المثلثِ.
- أضعُ رأسَ الفرجارِ على 0، وأرسمُ قوسًا يقطعُ خطَّ الأعدادِ في النقطةِ B.



أتحققُ مِنْ صحةِ التمثيلِ:

ألاحظُ مِنَ التمثيلِ أَنَّ $\sqrt{53} \approx 7.3$، وَهُوَ يتوافقُ مَعَ قيمةِ $\sqrt{53}$ عَلى الآلةِ الحاسبةِ وَهِيَ:

$$\sqrt{53} \approx 7.280109889$$

أتحققُ من فهمي:

أمثّلُ كلَّ عددٍ غيرِ نسبيٍّ ممّا يأتي على خطِّ الأعدادِ:

3) $\sqrt{45}$ 2) $\sqrt{20}$ 1) $\sqrt{5}$

يمكنُني المقارنةُ بَيْنَ عددَينِ حقيقيَّينِ بتحويلِهما إلى الصورة العشريةِ أولًا؛ لتسهيلِ المقارنةِ بينَهما. ويمكنُني استعمالُ الآلةِ الحاسبةِ في ذلكَ.

مثال 3

أضعُ إشارةَ $<$ أَوْ $>$ أَوْ $=$ في ☐ لأكوّنَ عبارةً صحيحةً في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $4\sqrt{3}$ ☐ $\frac{13}{2}$

الْخُطْوَةُ 1 أحوّلُ العددَينِ إلى الصورة العشريةِ.

أستعملُ الآلةَ الحاسبة

$4\sqrt{3} \approx 6.928203\ldots\ \ldots$

$\frac{13}{2} = 6.5$

الْخُطْوَةُ 2 أقارنُ بَيْنَ العددَينِ.

بما أنَّ $6.928203\ldots\ \ldots > 6.5$

إذنْ $4\sqrt{3} > \frac{13}{2}$

2 $-\frac{1}{2}$ ☐ $-\sqrt{2}$

الْخُطْوَةُ 1 أحوّلُ العددَينِ إلى الصورة العشريةِ.

أستعملُ الآلةَ الحاسبة

$-\frac{1}{2} = -0.5$

$-\sqrt{2} \approx -1.4142\ \ldots$

الْخُطْوَةُ 2 أقارنُ بَيْنَ العددَينِ.

بما أنَّ $-0.5 > -1.4142\ \ldots$

إذنْ $-\frac{1}{2} > -\sqrt{2}$

3 $\frac{5}{2}$ ☐ $\sqrt{6.25}$

الْخُطْوَةُ 1 أحوّلُ العددَينِ إلى الصيغةِ العشريةِ.

أستعملُ الآلةَ الحاسبة

$\frac{5}{2} = 2.5$

$\sqrt{6.25} = 2.5$

الْخُطْوَةُ 2 أقارنُ بَيْنَ العددَينِ.

بما أنَّ $2.5 = 2.5$

إذنْ $\frac{5}{2} = \sqrt{6.25}$

أتحققُ من فهمي:

4 $\sqrt{0.5}$ ☐ 0.9

5 $-\sqrt{16}$ ☐ $-\sqrt{18}$

6 4.5 ☐ $\sqrt{20.25}$

يمكنُ ترتيبُ مجموعةٍ مِنَ الأعدادِ الحقيقيةِ تصاعديًّا (مِنَ الأصغرِ إلى الأكبرِ) أَوْ تنازليًّا (مِنَ الأكبرِ إلى الأصغرِ)، وذلكَ بتحويلِ كلٍّ مِنْها إلى الصورة العشريةِ أولًا؛ لتسهيلِ المقارنةِ بينَها وترتيبِها.

مثال 4

أرتّبُ الأعدادَ في كلٍّ ممّا يأتي تصاعديًّا:

1) $\frac{11}{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{10}, -1.\overline{7}$

الْخُطْوَةُ 1 أحوّلُ الأعدادَ إلى الصورة العشريةِ.

أحوّلُ الأعدادَ إلى الصيغةِ العشريةِ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ:

$$\frac{11}{3} = 3.6666666\ldots\ \ldots$$
$$-\sqrt{3} = -\ 1.73205\ldots\ \ldots$$
$$\sqrt{10} = 3.1622\ldots.$$
$$-1.\overline{7} = -1.77777\ldots\ \ldots.$$

أتعلّمُ

يسهّلُ تحويلُ الأعدادِ إلى الصيغةِ العشريةِ المقارنةَ بَيْنَ الأعدادِ القريبةِ مِنْ بعضِها، مثلِ $-\sqrt{3}$ و $-1.\overline{7}$

الْخُطْوَةُ 2 أقارنُ بَيْنَ الأعدادِ، ثُمَّ أرتّبُها تصاعديًّا.

الترتيبُ التصاعديُّ للأعدادِ هُوَ:

$$-1.\overline{7}\ ,\ -\sqrt{3}\ ,\ \sqrt{10}\ ,\ \frac{11}{3}$$

أتحققُ من فهمي:

2) $\frac{5}{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{6}, -1.4$

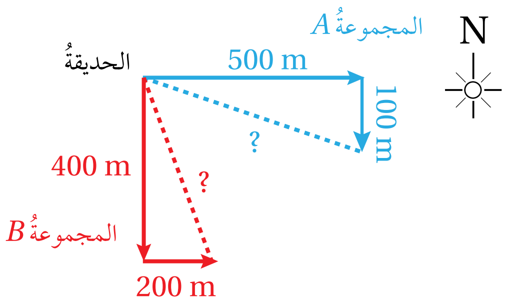
3) $-\sqrt{5}, \frac{9}{5}, -2, \sqrt{3}$

يوجدُ كثيرٌ مِنَ التطبيقاتِ الحياتيةِ والعلميةِ للأعدادِ الحقيقيةِ.

مثال 5: منَ الحياةِ

كشافةٌ: وقفَتِ المجموعتانِ A وَ B مِنْ طلبةِ الكشافةِ في حديقةِ الشاطئِ الجنوبيِّ في العقبةِ، ثُمَّ بدأَتِ المجموعتانِ السيرَ في اللحظةِ نفسِها، فسارَتِ المجموعةُ A باتجاهِ الشرقِ 500 m ثُمَّ 100 m باتجاهِ الجنوبِ. وسارَتِ المجموعةُ B مسافةَ 400 m باتجاهِ الجنوبِ ثُمَّ 200 m باتجاهِ الشرقِ. أيُّ المجموعتَينِ هِيَ الأقربُ إلى حديقةِ الشاطئِ الجنوبيِّ؟

الْخُطْوَةُ 1 أرسمُ شكلًا تقريبيًّا يمثلُ المسألةَ، وأحددُ المطلوبَ.



- أعتمدُ الاتجاهاتِ والمسافاتِ الموجودةَ في المسألةِ لرسمِ شكلٍ تقريبيٍّ يمثلُ المعطَياتِ.
- ألاحظُ أنَّ مساريِ المجموعتَينِ يصنعانِ مثلثَينِ قائمَيِ الزاويةِ.
- لإيجادِ أيِّ المجموعتَينِ هِيَ الأقربُ إلى حديقةِ الشاطئِ الجنوبيِّ، أجدُ طولَ وترِ كلِّ مثلثٍ، ثُمَّ أقارنُ بَيْنَ الطولَينِ.

الْخُطْوَةُ 2 أستعملُ نظريةَ فيثاغورس.

- أستعملُ نظريةَ فيثاغورس لأجدَ بُعدَ المجموعةِ A عَنْ حديقةِ الشاطئِ الجنوبيِّ:

نظريةُ فيثاغورس	$c^2 = a^2 + b^2$
أعوضُ $a = 500, b = 100$	$c^2 = 500^2 + 100^2$
أجدُ القوى	$c^2 = 250000 + 10000$
أجمعُ	$c^2 = 260000$
تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ	$c = \pm\sqrt{260000}$
أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ	$\approx \pm 509.9$

إذنْ، بُعدُ المجموعةِ A عَنْ حديقةِ الشاطئِ الجنوبيِّ 509.9 m تقريبًا.

- أستعملُ نظريةَ فيثاغورس لأجدَ بُعدَ المجموعةِ B عَنْ حديقةِ الشاطئِ الجنوبيِّ:

نظريةُ فيثاغورس	$c^2 = a^2 + b^2$
أعوضُ $a = 400, b = 200$	$c^2 = 400^2 + 200^2$
أجدُ القوى	$c^2 = 160000 + 40000$
أجمعُ	$c^2 = 200000$
تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ	$c = \pm\sqrt{200000}$
أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ	$\approx \pm 447.2$

إذنْ، بُعدُ المجموعةِ B عَنْ حديقةِ الشاطئِ الجنوبيِّ 447.2 m تقريبًا.

الْخُطْوَةُ 3 أقارنُ بَيْنَ المسافتَينِ.

ألاحظُ أنَّ المجموعةَ B أقربُ إلى حديقةِ الشاطئِ الجنوبيِّ مِنَ المجموعةِ A.

أتحققُ من فهمي:

جسمُ الإنسانِ: تمثّلُ المعادلةُ $S=\sqrt{\frac{h \times m}{3600}}$ مساحةَ سطحِ جسمِ الإنسانِ S بالأمتارِ المربعةِ حيثُ h الطولُ بالسنتيمتراتِ وَ m الكتلةُ بالكيلوغراماتِ. أجدُ مساحةَ سطحِ جسمِ شابٍّ طولُهُ 180 cm وكتلتُهُ 75 kg. أقرّبُ الإجابةَ لأقربِ جزءٍ مِنْ عشرةٍ.

أتدرب وأحل المسائل

أميزُ العددَ النسبيَّ مِنْ غيرِ النسبيِّ في ما يأتي:

1) $-\frac{2}{3}$ 2) $\sqrt{20}$ 3) $5.\overline{2}$ 4) $\frac{18}{6}$

أمثّلُ كلَّ عددٍ غيرِ نسبيٍّ ممّا يأتي على خطِّ الأعدادِ:

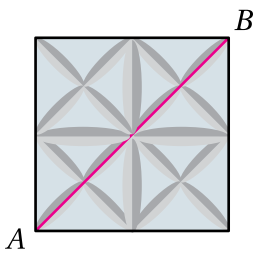
5) $\sqrt{10}$ 6) $\sqrt{97}$ 7) $\sqrt{104}$

أضعُ إشارةَ < أَوْ > أَوْ = في ☐ لأكوّنَ عبارةً صحيحةً في كلٍّ ممّا يأتي:

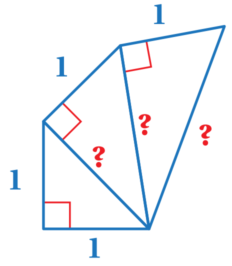
8) $\sqrt{15}\ \square\ 3.9$ 9) $-3.1\ \square\ -\sqrt{9.61}$ 10) $\sqrt{36}\ \square\ \frac{20}{3}$

11) أرتبُ مجموعةَ الأعدادِ $5.\overline{6}$, $\frac{21}{4}$, 4 , $\sqrt{30}$ تنازليًّا.

12) بلاطٌ: يبيّنُ الشكلُ المجاورُ بلاطةً مِنَ السيراميكِ مربعةَ الشكلِ طولُ ضلعِها 15 cm، أجدُ طولَ قُطرِ البلاطةِ، ثُمَّ أحددُ ما إذا كانَ العددُ نسبيًّا أَمْ غيرَ نسبيٍّ.



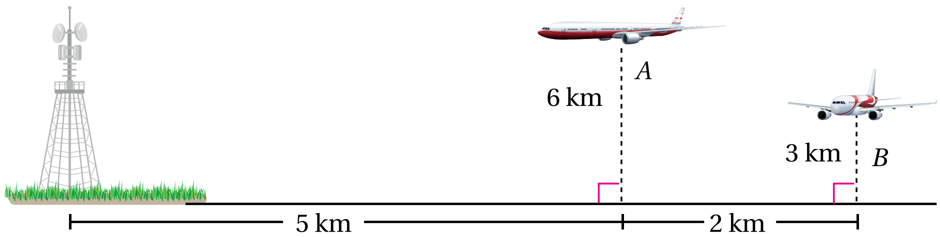
13) أجدُ أطوالَ الأضلاعِ المجهولةَ في الشكلِ المجاورِ.



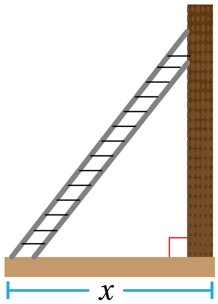
إرشاد

أستعملُ نظريةَ فيثاغورس في الحلِّ.

14 أيُّ الطائرتَينِ في الشكلِ الآتي أقربُ إلى قاعدةِ البرجِ؟



15 **إجراءاتُ السلامةِ:** لأضعَ السّلّمَ المستنِدَ إلى حائطٍ في وضعٍ آمنٍ، يجبُ أنْ يكونَ طولُهُ $0.3\sqrt{17x^2}$ حيثُ x بُعدُ قاعدةِ السّــلّمِ عَنِ الحائطِ بالمترِ. إذا كانَتْ قاعدةُ السّلمِ تبعدُ عَنِ الحائطِ 1.5 m، فَهَلْ طولُ السّلّمِ عددٌ نسبيٌّ أَمْ غيرُ نسبيٍّ؟



مهاراتُ التفكيرِ العُليا

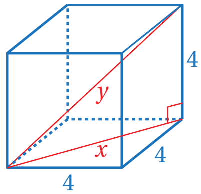
تبريــرٌ: أبيّنُ ما إذا كانَتْ كلُّ عبارةٍ ممّا يأتي صحيحــةً أَمْ غيرَ صحيحةٍ، وأدعّمُ إجابتي بأمثلةٍ مناسبةٍ:

16 الجذورُ التربيعيةُ للأعدادِ الموجبةِ أعدادٌ غيرُ نسبيةٍ.

17 العددُ الحقيقيُّ عددٌ نسبيٌّ.

18 الأعدادُ العشريةُ المنتهيةُ أعدادٌ نسبيةٌ.

19 **تحدٍّ:** أجدُ طولَي الضلعَينِ المجهولَينِ في الشكلِ المجاورِ بأبسطِ صورةٍ.



إرشادٌ

أســتعملُ الحقيقةَ (تلتقي أحــرفُ المكعبِ في زوايا قائمةٍ).

20 **أكتشــفُ الخطــأَ:** تقولُ ســماحُ: إنَّ $\sqrt{5}$ عددٌ نســبيٌّ؛ لأنّــهُ يمكنُ كتابتُــهُ على الصورةِ $\frac{\sqrt{5}}{1}$. هــل ما تقولُهُ ســماحُ صحيحٌ؟ أبــرّرُ إجابتي.

21 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أعطي مثالًا على عددَينِ نسبيَّينِ يقعُ بينَهُما عددانِ غيرُ نسبيَّينِ.

22 **أكتبُ** كيفَ أميّزُ الأعدادَ النسبيةَ مِنْ غيرِ النسبيةِ؟

الدرسُ 5 النسبةُ المئويةُ

فكرةُ الدرسِ

أحلُّ مسائلَ على النسبةِ المئويةِ.

المصطلحاتُ

النسبةُ المئويةُ للتغيرِ، نسبةُ الزيادةِ المئويةُ، نسبةُ النقصانِ المئويةُ، النسبةُ المئويةُ العكسيةُ

أستكشفُ

في عــامِ 2018 أنتجَ الأردنُّ 21 ألفَ طنٍّ مِنْ زيتِ الزيتونِ، وفي عــامِ 2019 أنتجَ 119% ممّا أنتجَهُ عامَ 2018. ما معنى النسبةِ 119%؟ وَكَمْ أنتجَ الأردنُّ مِنَ الزيتِ عامَ 2019؟

النسبةُ المئويةُ هِيَ نسبةٌ تقارنُ عددًا بالعددِ 100، فإذا كانَ العددُ أكبرَ مِنْ 100، فإنَّ النســبةَ المئويةَ تكونُ أكبرَ مِنْ 100%، أمّا إذا كانَ العددُ الّذي أقارنُ بِهِ أقلَّ مِنْ 1، فإنَّ النسبةَ المئويةَ تكونُ أقلَّ مِنْ 1%

أتذكرُ

لإيجادِ النسبةِ المئويةِ مِنْ كمّيةٍ، أحوّلُ النسبةَ المئويةَ إلى كسرٍ أَوْ كسرٍ عشريٍّ، ثُمَّ أضربُ الكسرَ الناتجَ في الكمّيةِ.

مثال 1

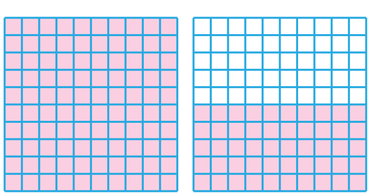
أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

1 150% مِنْ 5

$150\% \times 5$ أضربُ النسبةَ المئويةَ في العددِ

$= 1.5 \times 5$ أحوّلُ النسبةَ المئويةَ إلى كسرٍ عشريٍّ

$= 7.5$ أضربُ



150%

أتعلمُ

150% تعني 100% + 50%

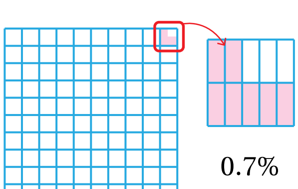
إذنْ 150% مِنْ 5 تساوي 7.5

2 0.7% مِنْ 2000

$0.7\% \times 2000$ أضربُ النسبةَ المئويةَ في العددِ

$= 0.007 \times 2000$ أحوّلُ النسبةَ المئويةَ إلى كسرٍ عشريٍّ

$= 14$ أضربُ



0.7%

0.7% هِيَ نسبةٌ كسريةٌ بَيْنَ 0% وَ 1%

إذنْ 0.7% مِنْ 2000 تساوي 14

أتحققُ من فهمي:

3) 350% مِنْ 10

4) 0.1% مِنْ 5000

يوجدُ الكثيرُ مِنَ التطبيقاتِ الحياتيةِ المهمةِ على النسبةِ المئويةِ.

مثال 2: منَ الحياةِ

1) **راتبٌ: تتقاضى فاطمةُ راتبًا شهريًّا قدرُهُ JD 750، كَمْ يصبحُ هذا الراتبُ إذا زادَ بنسبةِ 12%؟**

إنَّ زيادةَ الراتبِ بنسبةِ 12% تكافئُ نسبةَ 100% الأصليةَ مضافًا إِلَيْها 12%، وهذا يعني أنَّ المجموعَ الكلّيَّ للنسبِ 112%، وَمِنْ ثَمَّ، فإنّهُ يمكنُ إيجادُ راتبِ فاطمةَ بعدَ الزيادةِ بضربِ الراتبِ القديمِ في 112%

$112\% \times 750$ أضربُ النسبةَ المئويةَ في الكمّيّةِ الأصليةِ

$= 1.12 \times 750$ أحولُ النسبةَ المئويةَ إلى كسرٍ عشريٍّ

$= 840$ أضربُ

إذنْ، راتبُ فاطمةَ بعدَ الزيادةِ JD 840

أفكّرُ
هَلْ يمكنُ إيجادُ راتبِ فاطمةَ بعدَ الزيادةِ بطريقةٍ أُخرى؟

2) **سيارةٌ: اشترى كريمٌ سيارةً بمبلغِ JD 6500 العامَ الماضيَ، كَمْ يصبحُ السعرُ إذا انخفضَ سعرُ السيارةِ هذا العامَ بنسبةِ 15%؟**

إنَّ انخفاضَ سعرِ السيارةِ بنسبةِ 15% يكافئُ نسبةَ 100% الأصليةَ مطروحًا مِنْها 15%، وهذا يمثلُ 85% مِنَ السعرِ الأصليِّ؛ لذا يمكنُ إيجادُ سعرِ السيارةِ بعدَ الانخفاضِ بضربِ سعرِها القديمِ في 85%

$85\% \times 6500$ أضربُ النسبةَ المئويةَ في الكمّيّةِ الأصليةِ

$= 0.85 \times 6500$ أحولُ النسبةَ المئويةَ إلى كسرٍ عشريٍّ

$= 5525$ أضربُ

إذنْ، سعرُ السيارةِ هذا العامَ JD 5525

أفكّرُ
هَلْ يمكنُ إيجادُ سعرِ السيارةِ بعدَ النقصانِ بطريقةٍ أُخرى؟

أتحققُ من فهمي:

3 ازدادَ طولُ نبتةٍ بنسبةِ 25% ممّا كانَ عليهِ طولُها قبلَ أسبوعٍ. أجدُ طولَ النبتةِ الآنَ إذا كانَ طولُها في الأسبوعِ السابقِ 40 cm

4 قرّرَتْ إدارةُ أحدِ المصانعِ تخفيضَ عددِ عمّالِها بتســريحِ 30% مِنْهُمْ. إذا كانَ عددُ العمالِ في المصنعِ 416 عاملًا، فَكَمْ عاملًا سيبقى في المصنعِ؟

النسبةُ المئويةُ للتغيرِ (percentage change)(pc) هِيَ النسبةُ المئويةُ لمقدارِ التغيرِ مِنَ الكمّيةِ الأصليةِ، ويمكنُ أَنْ تكونَ النسبةُ المئويةُ للتغيرِ **نسبةَ زيادةٍ مئويةً** (percentage increase) أَوْ **نسبةَ نقصانٍ مئويةً** (percentage decrease)

مفهومٌ أساسيٌّ — النسبةُ المئويةُ للتغيرِ

- **بالكلماتِ:** النسبةُ المئويةُ للتغيرِ هِيَ النسبةُ المئويةُ بَيْنَ التغيرِ في كمّيةٍ ما والكمّيةِ الأصليةِ.

$$\text{(النسبةُ المئويةُ للتغيرِ)} = \frac{\text{(مقدارَ التغيرِ)}}{\text{(الكمّيةِ الأصليةِ)}} \times 100\%$$

مثال 3: منَ الحياةِ

1 آلةٌ حاسبةٌ: باعَ محلٌّ للإلكترونياتِ 80 آلةً حاسبةً في شهرِ أيلولَ، وَ104 آلاتٍ حاسبةٍ في شهرِ تشرينِ الأولِ. أجدُ النسبةَ المئويةَ للتغيرِ في عددِ الآلاتِ الحاسبةِ المَبيعةِ مِنْ شهرِ أيلولَ إلى شهرِ تشرينِ الأولِ.

الْخُطْوَةُ 1 أجدُ مقدارَ التغيرِ.

لأجدَ مقدارَ التغيرِ، أطرحُ الكمّيةَ الأصليةَ مِنَ الكمّيةِ الجديدةِ.

الكميةُ الجديدةُ – الكميةُ الأصليةُ $\quad 104 - 80 = 24$

إذنْ، مقدارُ التغيرِ يساوي 24

الْخُطْوَةُ 2 أجدُ النسبةَ المئويةَ للتغيرِ.

صيغةُ النسبةِ المئويةِ للتغيرِ

$$(\text{النسبةُ المئويةُ للتغيرِ}) = \frac{(\text{مقدارَ التغيرِ})}{(\text{الكمّيةِ الأصليةِ})} \times 100\%$$

أعوضُ

$$= \frac{24}{80} \times 100\%$$

أبسطُ

$$= \frac{3}{10} \times 100\%$$

أضربُ

$$= 30\%$$

إذنْ، زادَتِ المبيعاتُ مِنْ شهرِ أيلولَ إلى شهرِ تشرينِ الأولِ بنسبةِ 30%

2 إذا كانَتْ كتلــةُ عمرَ 95 kg قبلَ اتّباعِــهِ نظامًا غذائيًّا متوازنًــا، وأصبحَتْ كتلتُهُ الآنَ 78 kg، فأجدُ النسبةَ المئويةَ للتغيرِ في كتلةِ عمرَ. أقرّبُ إجابتي لأقربِ عددٍ صحيحٍ.

الْخُطْوَةُ 1 أجدُ مقدارَ التغيرِ.

لأجدَ مقدارَ التغيرِ، أطرحُ الكمّيةَ الأصليةَ مِنَ الكمّيةِ الجديدةِ.

الكميةُ الجديدةُ – الكميةِ الأصليةِ $\quad 78 - 95 = -17$

إذنْ، مقدارُ التغيرِ يساوي -17

أتعلّمُ

بما أنَّ كتلةَ عُمَرَ الجديدةَ أقلُّ من كتلتِهِ الأصليةِ؛ فإنَّ مقدارَ تغيرِ كتلتِهِ يكونُ سالبًا.

الْخُطْوَةُ 2 أجدُ النسبةَ المئويةَ للتغيرِ.

صيغةُ النسبةِ المئويةِ للتغيرِ

$$(\text{النسبةُ المئويةُ للتغيرِ}) = \frac{(\text{مقدارَ التغيرِ})}{(\text{الكمّيةِ الأصليةِ})} \times 100\%$$

أعوضُ

$$= \frac{-17}{95} \times 100\%$$

أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ

$$\approx -18\%$$

إذنْ، خسرَ عمرُ 18% مِنْ كتلتِهِ الأصليةِ.

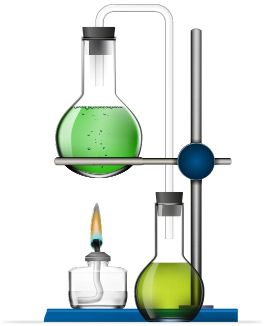
أتحققُ من فهمي:

3 اشترى معاذٌ زهورًا بقيمةِ JD 240 وباعَها بسعرِ JD 300. أجدُ النسبةَ المئويةَ لربحِ معاذٍ.

4 اشــترَتْ فرحُ كاميرا بقيمةِ JD 119 بعدَ التخفيضِ، إذا كانَ ســعرُ الكاميرا قبلَ التخفيضِ JD 140، فأجدُ النسبةَ المئويةَ للخصمِ الّذي حصلَتْ عليهِ فرحُ.

مِنَ التطبيقاتِ المهمةِ على النسبةِ المئويةِ أسئلةُ **النسبةِ المئويةِ العكسيةِ** (reverse percentage)، الّتي تتطلبُ الحلَّ بشكلٍ عكسيٍّ بدءًا مِنَ الكمّيةِ النهائيةِ للحصولِ على الكمّيةِ الأصليةِ.

مثال 4: منَ الحياةِ



1 كيمياءُ: في إحدى التجاربِ الكيميائيةِ سُخِّنَ سائلٌ لرفعِ درجةِ حرارتِهِ بنسبةِ 16% لتصبحَ 80°C، أجدُ درجةَ حرارةِ السائلِ *T* قبلَ الزيادةِ.

بما أنَّ درجةَ الحرارةِ T زادَتْ بنسبةِ 16%، إذنْ، النسبةُ المئويةُ بعدَ الزيادةِ تساوي 116%

أقسمُ الكميةَ بعدَ التغيرِ على النسبةِ المئويةِ بعدَ الزيادةِ $T = \frac{80}{116\%}$

أحولُ النسبةَ المئويةَ إلى كسرٍ عشريٍّ $= \frac{80}{1.16}$

أقسمُ ≈ 69

إذنْ، درجةُ حرارةِ السائلِ قبلَ الزيادةِ 69°C تقريبًا.

أفكرُ

لِمَ نقسمُ على نسبةِ التغيرِ المئويةِ عندَ إيجادِ الكمّيةِ الأصليةِ؟

2 ثلاجاتٌ: أعلنَ متجرٌ للثلّاجاتِ عَنْ خصمٍ نسبتُهُ 20%. إذا كانَ سعرُ ثلاجةٍ بعدَ الخصمِ JD 600، فأجدُ سعرَها *P* قبلَ الخصمِ.

بما أنَّ سعرَ الثلاجةِ نقصَ بنسبةِ 20%، إذنْ، النسبةُ المئويةُ بعدَ النقصانِ تساوي 80%

أقسمُ الكميةَ بعدَ التغيرِ على النسبةِ المئويةِ بعدَ النقصانِ $P = \frac{600}{80\%}$

أحولُ النسبةَ المئويةَ إلى كسرٍ عشريٍّ $= \frac{600}{0.80}$

أقسمُ $= 750$

إذنْ، سعرُ الثلاجةَ قبلَ الخصمِ JD 750

أتحققُ من فهمي:

3 زادَ سعرُ سيارةٍ بنسبةِ 6% ليصبحَ JD 9116. أجدُ سعرَها *P* قبلَ الزيادةِ.

4 في موسمِ التنزيلاتِ، بلغَ سعرُ شاشةِ تلفازٍ JD 500. إذا كانَتْ نسبةُ الخصمِ 7%، فأجدُ ثمنَ الشاشةِ *P* قبلَ الخصمِ.

أتدرب وأحل المسائل

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

1) 300% من 2000

2) 0.14% من 40

3) 250% من 400

4) **ماءٌ:** يزيدُ حجـمُ الماءِ عندَ تجمّدِهِ بنسـبةِ 10%. أجدُ حجمَ 750 mL مِنَ الماءِ بعدَ التجمّدِ.

5) **سياراتٌ:** زادَتْ شركةٌ للسياراتِ سعرَ سيارةٍ رياضيةٍ مِنْ JD 23000 إلى JD 25000. أجدُ النسبةَ المئويةَ للزيادةِ في سعرِ السيارةِ، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جزءٍ مِنْ عشرةٍ.

6) **بطاريةٌ:** تفقدُ بطاريةُ هاتفٍ شـحنَها الكاملَ بعدَ 20 ساعةً. إذا كانَتِ النسـخةُ المطوَّرةُ مِنَ البطاريةِ تسـتمرُّ 30 دقيقةً إضافيةً، فأجدُ النسبةَ المئويةَ للزيادةِ في زمنِ عملِ البطاريةِ.

7) **اختبـاراتٌ:** خضـعَ عمـرانُ ونادية لاختبارَينِ لَهُما النهايةُ العُظمى نفسُـها، وكانَتْ نتائجُهُما مثلما يظهرُ في الجدولِ. مَنْ مِنْهُما كانَتِ النسبةُ المئويةُ للزيادةِ في علاماتِهِ أكبرَ مِنَ الاختبارِ A إلى الاختبارِ B؟ أبيّنُ خطواتِ الحلِّ.

	الاختبار A	الاختبار B
عمرانُ	12	17
ناديةُ	14	20

8) خفّضَتْ شـركةٌ عددَ عمّالِها بنسـبةِ 5% فأصبحَ 228 عاملًا. أجدُ عددَ عمالِ الشركةِ الأصليَّ.

9) **راتـبٌ:** يتقاضـى طبّـاخٌ JD 1431 شـهريًّا بعـدَ زيـادةٍ علـى راتبِهِ بنسـبةِ 8% . أجـدُ راتـبَ الطبّـاخِ قبـلَ الزيادةِ.

10) اشترى أحمدُ كرسيًّا دوّارًا وباعَهُ بمبلغِ JD 63. إذا كانَتْ نسبةُ خسارتِهِ فيهِ 55%، فما الثمنُ الأصليُّ للكرسيِّ؟

معلومةٌ

يُقاسُ معــدّلُ التنفسِ عندَ الإنســانِ بعــددِ الأنفاسِ الّتــي يأخذُها فــي الدقيقةِ الواحدةِ، ويعتمدُ ذلكَ على عــدةِ عواملَ، منهــا: عمرُ الشخصِ، وحالتُهُ الصحيةُ، والجهدُ الّذي يبذلُهُ.

معدّل التنفّسِ: إذا كانَ معدّلُ تنفّسِ لؤيٍّ 20 مرةً في الدقيقةِ، فأجيبُ عمّا يأتي:

11 أجدُ عددَ مراتِ تنفّسِ لؤيٍّ إذا أصبحَتْ 180 % ممّا كانَتْ عليهِ؛ نتيجةَ ممارستِهِ إحدى الرياضاتِ.

12 نتيجةَ لممارســةِ لؤيٍّ رياضةً أشــدَّ أصبحَ معدّلُ تنفّســهِ 120 % مِــنْ عددِ مراتِ الرياضــةِ الأول، أجدُ عددَ مراتِ تنفّسِهِ الجديدَ.

13 أعودُ إلى فقرةِ (أستكشفُ) بدايةَ الدرسِ، وأحلُّ المسألةَ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

14 **تبريرٌ:** اشترَتْ رنادُ سيارةً بمبلغِ JD 32000، إذا انخفضَ سعرُ السيارةِ بنسبةِ 24% بعدَ مرورِ عامٍ منْ تاريخِ الشراءِ، ثمَّ انخفضَ سعرُها في السنةِ التاليةِ بنسبةِ 10% منْ قيمتِها بعدَ السنةِ الأولى، فما سعرُ السيارةِ بعدَ سنتَينِ منْ تاريخِ الشراءِ؟

15 **تَحَدٍّ:** تبلغُ نسبةُ عددِ الرجالِ إلى عددِ النساءِ في إحدى الشركاتِ 2 : 3، ويمثّلُ الرجالُ الذينَ تقلُّ أعمارُهُمْ عنْ 25 عامًا ما نســبتُهُ 40% منْ إجماليِّ عــددِ الرجالِ، وتمثّلُ النســاءُ اللواتي تقلُّ أعمارُهُنَّ عنْ 25 عامًا ما نســبته 10% منْ إجماليِّ عددِ النساءِ. ما النسبةُ المئويةُ منْ إجماليِّ العاملينَ في الشركةِ الذينَ تقلُّ أعمارُهُمْ عنْ 25 عامًا؟

16 **أكتبُ** كيـفَ أجـدُ النسـبةَ المئويـةَ للتغيـرِ؟ وبِـمَ أفسّـرُ معنى النسـبةِ الّتـي تزيدُ علـى 100%؟

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 قيمةُ $\sqrt{2500}$ تساوي:

a) 25 b) −50

c) 50 d) ± 50

2 قيمةُ $(\sqrt{1.44} - 4.2)$ تساوي:

a) 3 b) −3

c) 7.8 d) −5.4

3 أفضلُ تقديرٍ للعددِ $(8 - \sqrt{40})$ هُوَ:

a) 4 b) −16 c) 1 d) 2

4 قيمةُ $(\sqrt{2} \times \sqrt{32})$ تساوي:

a) 6 b) 8 c) 64 d) 16

5 مثلثٌ قائمُ الزاويةِ متطابقُ الضلعَينِ طولُ وترِهِ $\sqrt{72}$ cm . فإن طولَ كلٍّ مِنْ ضلعَي القائمةِ يساوي:

a) 36 cm b) $3\sqrt{2}$ cm

c) 6 cm d) 18 cm

6 أيُّ مجموعاتِ الأطوالِ الآتيةِ تمثلُ أطوالَ أضلاعِ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ؟

a) 6 , 8 , 11 b) $\sqrt{10}$, 4 , 5

c) 6, $2\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$ d) 5 , 12 , 14

7 أحدُ الأعدادِ الآتيةِ عددٌ غيرُ نسبيٍّ:

a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{6.25}$

c) $3\frac{1}{5}$ d) −2

8 قيمةُ $\sqrt{9 \times 3^4}$ تساوي:

a) 81 b) 27 c) 9 d) 3

9 مثلّثٌ قائمُ الزاويةِ طولُ وتـرِهِ 17 cm، وطولُ أحدِ ضلعَي القائمةِ 10 cm. التقديرُ الأفضلُ لطولِ ضلعِ القائمةِ الآخرِ هوَ:

a) 14 cm b) 13 cm c) 15 cm d) 12 cm

10 حلُّ المعادلةِ $\sqrt{2y} = 0.1$ هوَ:

a) $y = 0.1$ b) $y = 0.01$

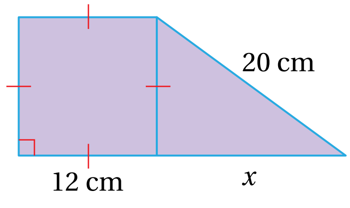
c) $y = 0.005$ d) $y = 0.05$

11 العددُ الأكبرُ بينَ الأعدادِ $0.43, \sqrt{0.18}, \frac{4}{7}, 54\%$ هوَ:

a) 0.43 b) $\sqrt{0.18}$

c) 54% d) $\frac{4}{7}$

12 أجدُ طولَ الضلعِ المجهولَ في الشكلِ الآتي:



أميزُ العددَ النسبيَّ مِنْ غيرِ النسبيِّ في ما يأتي:

13 $-\sqrt{36}$

14 $\sqrt{50}$

15 أجدُ مساحةَ المستطيلِ الآتي بأبسطِ صورةٍ:

$(6+\sqrt{2})$ m

$\sqrt{8}$ m

16 أرتبُ مجموعةَ الأعدادِ الآتيةِ تصاعديًّا:

$\sqrt{24}\ , 5\frac{1}{4}\ , 4.\overline{6}\ , 5\ , \pi$

17 أكتبُ المقدارَ $\frac{\sqrt{75}-\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ على صورةِ عددٍ صحيحٍ.

18 محلولٌ حمضيٌّ يحتوي على 35% حمضًا، والباقي مـاءٌ. إذا كانَ إجماليُّ حجمِ السـائلِ 450 mL فما مقدارُ الماءِ في المحلولِ؟

19 أعلنَتْ شركةُ تصنيعِ سياراتٍ أنَّ الطرازَ القادمَ سيكونُ أرخصَ بنسـبةِ 12.5% منَ الطـرازِ الحاليِّ. إذا كانَ سـعرُ الطرازِ الحاليِّ JD 32500، فكمْ سيكونُ سعرُ طرازِ العامِ القادمِ؟

20 بـاعَ متجرٌ بذلـةً رجاليـةً بمبلغ JD 150، وبربحٍ مقـدارُهُ 30 %. أجدُ سـعرَ التكلفةِ. أقرّبُ إجابتي لأقربِ جزءٍ مِنْ عشرةٍ.

تدريبٌ على الاختباراتِ الدّوليّةِ

21 أبسطُ صورةٍ للمقدارِ $\frac{6}{\sqrt{12}}$ هِيَ:

a) $\sqrt{3}$

b) $\frac{\sqrt{12}}{2}$

c) $2\sqrt{3}$

d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

22 أحدُ الأعدادِ الآتيةِ عددٌ غيرُ نسبيٍّ:

a) $\sqrt{24}$

b) $\sqrt{12.25}$

c) $2\frac{1}{8}$

d) -7

23 أبسطُ صورةٍ للمقدارِ $(2-\sqrt{5})\ (6+\sqrt{5})$ هيَ:

a) 7

b) $-4\sqrt{5}$

c) $7+4\sqrt{5}$

d) $7-4\sqrt{5}$

24 تُشيرُ سـجلّاتُ قسـمِ الولادةِ في أحدِ المستشفياتِ إلى وجـودِ 50 مولودًا 56% مِنْهُمْ إناثٌ. إذا زادَ عددُ المواليدِ الإناثِ 7، فأجدُ النسبةَ المئويةَ لهذهِ الزيادةِ.

الوحدةُ 2
تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ

ما أهميَّةُ هذهِ الوحدةِ؟

يُستعملُ تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ في كثيرٍ مِنَ التطبيقاتِ الحياتيةِ والعلميةِ، فمثلًا يكتبُ المهندسونَ المعماريّونَ النسبةَ بَيْنَ مساحةِ جدرانِ الغرفةِ وحجمِها على صورةِ مقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ، ثُمَّ يستعملونَ التحليلَ؛ لتبسيطِهِ وإيجادِ أقلِّ قيمةٍ لَهُ؛ بهدفِ تقليلِ تكلفةِ تدفئةِ الغرفةِ في فصلِ الشتاءِ.

تعلَّمتُ سابِقًا:

- ✓ إجراءَ العملياتِ الحسابيةِ على الحدودِ والمقاديرِ الجبريةِ، وكتابتَها بأبسطِ صورةٍ.
- ✓ تبسيطَ مقاديرَ عدديةٍ تتضمنُ أُسُسًا باستخدامِ أولوياتِ العملياتِ الحسابيةِ.
- ✓ توظيفَ الأُسسِ والمقاديرِ الجبريةِ في حلِّ مسائلَ حياتيةٍ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- تحليلَ مقاديرَ جبريةٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ وتجميعِ الحدودِ.
- تحليلَ الفرقِ بَيْنَ مربّعَيْ حدَّينِ، وتحليلَ ثلاثيِّ حدودٍ.

مشروعُ الوحدةِ: القطعُ الجبريةُ

أستعدُّ ومجموعتي لتنفيذِ مشروعِيَ الخاصِّ الّذي سأصنعُ فيهِ قطعًا جبريةً، وأستعملُها في تحليلِ المقاديرِ الجبريّةِ.

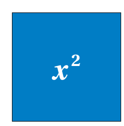
الأدواتُ اللازمةُ:

أوراقٌ مقوّاةٌ متعددةُ الألوانِ (أزرقُ، وأخضرُ، وأحمرُ، وأصفرُ).

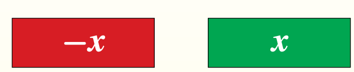
خُطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

أصنعُ القطعَ الجبريةَ

1 أقصُّ 5 مربعاتٍ مِنَ الورقةِ الزرقاءِ بمقاسِ (10 cm × 10 cm)، وأكتبُ x^2 على كلٍّ مِنْها.



2 أقصُّ 10 مستطيلاتٍ مِنَ الورقةِ الخضراءِ بمقاسِ (3 cm×10 cm)، وأكتبُ (x) على كلٍّ مِنْها، وأقصُّ 10 مستطيلاتٍ بالمقاسِ نفسِهِ مِنَ الورقةِ الحمراءِ، وأكتبُ ($-x$) على كلٍّ مِنْها.

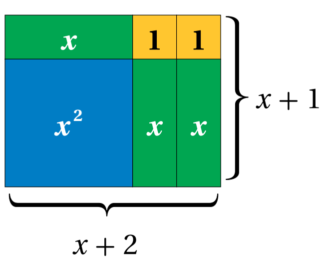


3 أقصُّ 15 مربعًا مِنَ الورقةِ الصفراءِ بمقاسِ 3 cm × 3 cm، وأكتبُ (1) على كلٍّ مِنْها، وأقصُّ 15 مربعًا بالمقاسِ نفسِهِ مِنَ الورقةِ الحمراءِ، وأكتبُ (−1) على كلٍّ مِنْها.

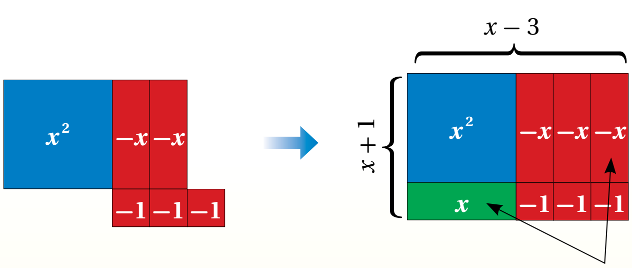
أستعملُ القطعَ الجبريةَ لتمثيلِ مقاديرَ جبريةٍ وتحليلِها:

يستعملُ كلُّ عضوٍ في المجموعةِ القطعَ الجبريةَ لتمثيلِ مقدارٍ جبريٍّ، ثُمَّ ينظمُ القطعَ الجبريةَ على شكلِ مستطيلٍ، وعندئذٍ يكونُ طولُ المستطيلِ وعرضُهُ عامِلَي المقدارِ الجبريِّ كما في الشكلِ الآتي:

$(x^2 + 3x + 2)$



يحتاجُ تمثيلُ بعضِ المقاديرِ الجبريةِ إلى إضافةِ أزواجٍ صفريةٍ مثلِ ($\boxed{1} + \boxed{-1} = 0$) لإكمالِ تشكيلِ المستطيلِ:



زوجٌ صفريٌّ، لأنَّ: $x + (-x) = 0$

عرضُ النتائجِ:

- يعرضُ كلُّ فردٍ في المجموعةِ أمامَ زملائِهِ / زميلاتِها في الصفِّ كيفيةَ تحليلِ مقدارٍ جبريٍّ يختارُهُ باستعمالِ القطعِ الجبريةِ.

تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ

الهدفُ: أحللُ مقدارًا جبريًّا معطًى على صورةِ $ax + b$ أوِ الصورةِ $x^2 + bx$ باستعمالِ القطعِ الجبريةِ.

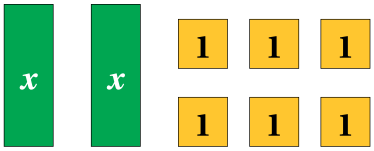
عندَ ضربِ عددَينِ أَوْ أكثرَ فإنَّ كلًّا مِنْهُما يُسمّى عاملًا لناتجِ الضربِ.

في بعضِ الأحيانِ، يكونُ ناتجُ الضربِ معلومًا والمطلوبُ إيجادَ العواملِ، وتُسمَى هذهِ العمليةُ **التحليلَ**. يمكنُ استعمالُ القطعِ الجبريةِ لتحليلِ المقاديرِ الجبريةِ.

نشاطٌ 1

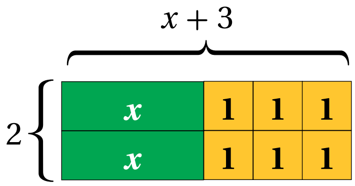
أستعملُ القطعَ الجبريةَ لتحليلِ المقدارِ $2x + 6$

الْخُطْوَةُ 1 أمثلُ المقدارَ $2x + 6$ باستعمالِ قطعٍ جبريةٍ:



الْخُطْوَةُ 2 أرتبُ القطعَ الجبريةَ على هيئةِ مستطيلٍ.

ألاحظُ أنَّ طولَ المستطيلِ $(x+3)$ وعرضَهُ (2) ومساحتَهُ $(2x+6)$.

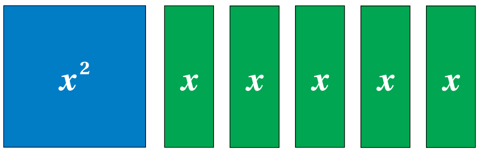


إذنْ، $2x + 6 = (2)(x + 3)$

نشاطٌ 2

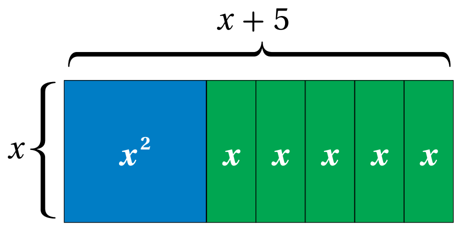
أستعملُ القطعَ الجبريةَ لتحليلِ المقدارِ $x^2 + 5x$

الْخُطْوَةُ 1 أستعملُ القطعَ الجبريةَ لتمثيلِ المقدارِ $x^2 + 5x$



الْخُطْوَةُ 2 أرتبُ القطعَ الجبريةَ على هيئةِ مستطيلٍ.

ألاحظُ أنَّ طولَ المستطيلِ $(x + 5)$ وعرضَهُ (x) ومساحتَهُ $(x^2 + 5x)$



إذنْ، $x^2 + 5x = x\,(x + 5)$

أتدربُ:

أستخدمُ القطعَ الجبريةَ لتحليلِ كلِّ مقدارٍ جبريٍّ ممّا يأتي:

1) $5x + 5$

2) $2x + 8$

3) $x^2 + 7x$

4) $x^2 + 4x$

الدرسُ 1 التحليلُ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ

فكرةُ الدرسِ

أحللُ مقاديرَ جبريةً بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ.

المصطلحاتُ

الصورةُ التحليليةُ، التحليلُ، التجميعُ.

أستكشفُ

شاشةُ تلفازٍ مستطيلةُ الشكلِ، مساحتُها $2x^2 + 60x$ سنتيمترًا مربعًا، وعرضُها $2x$ سنتيمترًا، ما طولُها بدلالةِ x؟

كتابةُ الحدِّ الجبريِّ **بالصورةِ التحليليةِ** (factored form) تعني كتابتَهُ على صورةِ حاصلِ ضربِ أعدادٍ أوليةٍ ومتغيراتٍ كلٌّ مِنْها مرفوعٌ للأُسِّ 1 ، وعندَ كتابةِ الحدِّ الجبريِّ بالصورةِ التحليليةِ فإنَّنا نقولُ إنَّهُ حُلِّلَ **تحليلًا كاملًا**.

$$18x^3 = 6 \times 3 \times x \times x^2$$

ليسَ مكتوبًا بالصورةِ التحليليةِ
(ليسَ تحليلًا كاملًا)

$$18x^3 = 2 \times 3 \times 3 \times x \times x \times x$$

مكتوبٌ بالصورةِ التحليليةِ
(تحليلٌ كاملٌ)

تعلمْتُ سابقًا أنَّ العاملَ المشتركَ الأكبرَ (ع. م. أ) لعددَينِ أَوْ أكثرَ يساوي ناتجَ ضربِ العواملِ الأوليةِ المشتركةِ بينَها، ويمكنُ أيضًا إيجادُ العاملِ المشتركِ الأكبرِ لحدَّينِ جبريَّينِ أَوْ أكثرَ بطريقةٍ مشابهةٍ.

مثال 1

أجدُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ للحدَّينِ الجبريَّينِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $12y^2, 18y$

أكتبُ كلَّ حدٍّ بالصورةِ التحليليةِ

$$12y^2 = 3 \times 2 \times 2 \times y \times y$$

ثُمَّ أحددُ العواملَ الأوليةَ المشتركةَ

$$18y = 3 \times 3 \times 2 \times y$$

إذنْ، العاملُ المشتركُ الأكبرُ للحدَّينِ الجبريَّينِ $2y^2$ وَ $18y$ هُوَ: $3 \times 2 \times y = 6y$

2 $20z^2 d, 10z^5 dc$

$20z^2 d = 5 \times 2 \times 2 \times z \times z \times d$

$10z^5 dc = 5 \times 2 \times z \times z \times z \times z \times z \times d \times c$

أكتبُ كلَّ حدٍّ بالصورةِ التحليليةِ

ثُمَّ أحددُ العواملَ الأوليةَ المشتركةَ

إذنْ، العاملُ المشتركُ الأكبرُ للحدَّينِ الجبريّينِ $20z^2 d$ وَ $10z^5 dc$ هُوَ $5 \times 2 \times z \times z \times d = 10z^2 d$

أتحققُ من فهمي:

3 $14b^2c, 21c^3$

4 $2y^3x^5, 3y^5x^3$

أتذكرُ

يحتوي المقــدارُ الجبريُّ حدًّا جبريًّا أوْ أكثرَ.

تعلمْتُ سابقًا استعمالَ خاصيةِ التوزيعِ لضربِ حدٍّ جبريٍّ في مقدارٍ جبريٍّ:

$$3x(x+8) = 3x(x) + 3x(8)$$

$$= 3x^2 + 24x$$

يمكنُ عكسُ خطواتِ هذهِ العمليةِ لإعادةِ كتابةِ مقاديرَ جبريةٍ على صورةِ حاصلِ ضربِ حدٍّ جبريٍّ في مقدارٍ جبريٍّ:

$$3x^2 + 24x = 3x(x) + 3x(8)$$

$$= 3x(x+8)$$

تحليلُ (factoring) المقدارِ الجبريِّ بإخراجِ العاملِ المشــتركِ الأكبرِ لحدودِهِ يعني تحليلَه تحليلًا كاملًا باستعمالِ عمليةٍ عكسيةٍ لعمليةِ التوزيعِ (خاصيةُ التوزيعِ).

$2y(6y+8)$

ليسَ تحليلًا كامــلًا؛ لأنَّ $(6y+8)$ يمكنُ تحليلُها على صورةِ $2(3y+4)$

$4y(3y+4)$

تحليلٌ كاملٌ

مثال 2 أحللُ كلَّ مقدارٍ جبريٍّ ممّا يأتي تحليلًا كاملًا:

1 $6x + 18$

الْخُطْوَةُ 1 أجدُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ للحدَّينِ $6x$ وَ 18

أحللُ كلَّ حدٍّ إلى عواملِهِ الأوليةِ وأحددُ العواملَ الأوليةَ المشتركةَ

$$6x = 2 \times 3 \times x$$
$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

إذنْ، العاملُ المشتركُ الأكبرُ هُوَ: $2 \times 3 = 6$

الْخُطْوَةُ 2 أكتبُ كلَّ حدٍّ على صورةِ ناتجِ ضربِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ في بقيةِ العواملِ، ثُمَّ أخرجُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ خارجَ القوسِ.

أعيدُ كتابةَ كلِّ حدٍّ باستعمالِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ
$$6x + 18 = 6(x) + 6(3)$$
أُخرجُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ خارجَ القوسِ
$$= 6(x + 3)$$

إذنْ، $6x + 18 = 6(x + 3)$

2 $6b^2k + 8k^3b^5 + 12k^2$

الْخُطْوَةُ 1 أجدُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ للحدودِ الّتي يتكوّنُ مِنْها المقدارُ الجبريُّ.

أحللُ كلَّ حدٍّ إلى عواملِهِ الأوليةِ

$$6b^2k = 2 \times 3 \times b \times b \times k$$
$$8k^3b^5 = 2 \times 2 \times 2 \times k \times k \times k \times b \times b \times b \times b \times b$$
$$12k^2 = 2 \times 2 \times 3 \times k \times k$$

إذنْ، العاملُ المشتركُ الأكبرُ هُوَ: $2 \times k = 2k$

الْخُطْوَةُ 2 أكتبُ كلَّ حدٍّ على صورةِ ناتجِ ضربِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ في بقيةِ العواملِ، ثُمَّ أخرجُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ خارجَ القوسِ.

أعيدُ كتابةَ كلِّ حدٍّ باستعمالِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ
$$6b^2k+8k^3b^5+12k^2 = 2k(3b^2)+2k(4k^2b^5)+2k(6k)$$
أُخرجُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ خارجَ القوسِ
$$= 2k(3b^2 + 4k^2b^5 + 6k)$$

إذنْ، $6b^2k + 8k^3b^5 + 12k^2 = 2k(3b^2 + 4k^2b^5 + 6k)$

أتحققُ من فهمي:

3) $20y + 12$

4) $7d^2 - 5d$

5) $3r^2c^3 + 6r^5 + 21r^7$

6) $2 - 16x + 8y$

يمكـنُ أيضًـا تحليـلُ بعـضِ المقاديـرِ الجبريـةِ الّتـي تحتـوي أربعـةَ حـدودٍ جبريـةٍ أَوْ أكثـرَ باسـتعمالِ طريقـةِ **التجميـع** (grouping)، وذلـكَ بتجميـعِ الحـدودِ الّتـي توجـدُ عوامـلُ مشـتركةٌ بينَهـا، ويمكـنُ أَنْ تكـونَ هـذهِ العوامـلُ المشـتركةُ مقاديـرَ جبريـةً (ليسَـتْ حـدودًا فحسـبُ).

مفهومٌ أساسيٌّ — التحليلُ بتجميعِ الحدودِ

- **بالكلماتِ:** يمكنُ تحليلُ المقدارِ الجبريِّ بالتجميعِ إذا تحققَتْ فيهِ الشروطُ الآتيةُ جميعُها:
  - إذا احتوى أربعةَ حدودٍ أَوْ أكثرَ.
  - إذا احتوى عواملَ مشتركةً بَيْنَ الحدودِ يمكنُ تجميعُها معًا.
  - إذا احتوى عاملَيْنِ مشتركَيْنِ متساويَيْنِ كانَ أحدَهُما نظيرًا جمعيًّا (معكوسًا) للآخَرِ.
- **بالرموزِ:**

$$\begin{aligned} ax + bx + ay + by &= (ax + bx) + (ay + by) \\ &= x(a + b) + y(a + b) \\ &= (a + b)(x + y) \end{aligned}$$

مثال 3

أحللُ كلَّ مقدارٍ جبريٍّ ممّا يأتي تحليلًا كاملًا:

1) $5ab + 10a + 7b + 14$

$5ab + 10a + 7b + 14 = (5ab + 10a) + (7b + 14)$ أُجمِّعُ الحدودَ ذاتَ العواملِ المشتركةِ

$= 5a(b + 2) + 7(b + 2)$ أحللُ كلَّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ

$= (b + 2)(5a + 7)$ أخرجُ $(b + 2)$ عاملًا مشتركًا

2 $6m^3 - 12mn + m^2n - 2n^2$

$6m^3-12mn+m^2n-2n^2 = (6m^3-12mn)+(m^2n-2n^2)$ أُجمِّعُ الحدودَ ذاتَ العواملِ المشتركةِ

$= 6m(m^2-2n) + n(m^2-2n)$ أحللُ كلَّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ

$= (m^2-2n)(6m+n)$ أخرجُ (m^2-2n) عاملًا مشتركًا

أتحققُ من فهمي:

3 $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$

4 $4s^2 - s + 12st - 3t$

عنـدَ تحليـلِ المقاديرِ الجبريةِ، ألاحـظُ أحيانًا وجودَ معكوسِ بعـضِ العواملِ، فمثلًا $(3-x)$ هُـوَ معكوسُ $(x-3)$ لأنَّ $(3-x) = -1(x-3)$

مثال 4

أحللُ كلَّ مقدارٍ جبريٍّ ممّا يأتي تحليلًا كاملًا:

1 $2m(7m-3) + 4(3-7m)$

$2m(7m-3)+4(3-7m) = 2m(7m-3) + 4(-1)(7m-3)$ أكتبُ $(3-7m)$ بصورةِ $-1(7m-3)$

$= 2m(7m-3)-4(7m-3)$ أضربُ: $4(-1) = -4$

$= (7m-3)(2m-4)$ أخرجُ $7m-3$ عاملًا مشتركًا

$= 2(7m-3)(m-2)$ أخرجُ 2 عاملًا مشتركًا

2 $15x - 5xy + 6y^2 - 18y$

$15x - 5xy + 6y^2-18y = (15x-5xy)+(6y^2-18y)$ أُجمِّعُ الحدودَ ذاتَ العواملِ المشتركةِ

$= 5x(3-y) + 6y(y-3)$ احللُ كلَّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ

$= 5x(3-y) + 6y(-1)(3-y)$ أكتبُ $(y-3)$ بصورةِ $-1(3-y)$

$= (3-y)(5x-6y)$ أخرجُ $3-y$

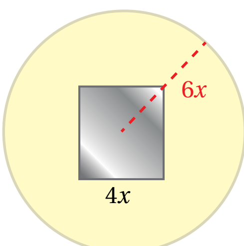
أتحقق من فهمي:

3) $a(r-t) + m(t-r)$

4) $2t - 14st + 7st^2 - t^2$

يُستعملُ تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ في كثيرٍ مِنَ التطبيقاتِ الحياتيةِ والعلميةِ.

مثال 5: منَ الحياةِ



نجارةٌ: يبيّنُ الشكلُ المجاورُ لوحًا خشبيًّا دائريَّ الشكلِ طولُ نصفِ قطرِهِ $6x$ سنتيمترًا، تتوسطُهُ مرآةٌ مربعةٌ طولُ ضلعِها $4x$ سنتيمترًا. أكتبُ مقدارًا جبريًّا يمثلُ مساحةَ المنطقةِ الّتي لا تغطّيها المرآةُ مِنَ اللوحِ الخشبيِّ بدلالةِ x، وأحللُ المقدارَ تحليلًا كاملًا.

الْخُطْوَةُ 1 أجدُ مساحةَ المنطقةِ الّتي لا تغطّيها المرآةُ مِنَ اللوحِ الخشبيِّ بدلالةِ x:

$A_1 = r^2\pi$ قانونُ مساحةِ الدائرةِ

$= (6x)^2\pi = 36\pi x^2$ بتعويضِ $r = 6x$

$A_2 = s^2$ قانونُ مساحةِ المربعِ

$= (4x)^2 = 16x^2$ بتعويضِ $s = 4x$

$A = A_1 - A_2$ مساحةُ المنطقةِ الظاهرةِ مِنَ اللوحِ الخشبيِّ

$= 36\pi x^2 - 16x^2$ بالتعويضِ

إذنْ، مساحةُ المنطقةِ الّتي لا تغطّيها المرآةُ مِنَ اللوحِ الخشبيِّ تساوي $36\pi x^2 - 16x^2$ سنتيمترًا مربعًا.

الْخُطْوَةُ 2 أحللُ المقدارَ $36\pi x^2 - 16x^2$ تحليلًا كاملًا:

أحللُ كلَّ حدٍّ إلى عواملِهِ الأوليةِ وأحددُ العواملَ الأوليةَ المشتركةَ

$$36\pi x^2 = 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times \pi \times x \times x$$

$$16x^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times x \times x$$

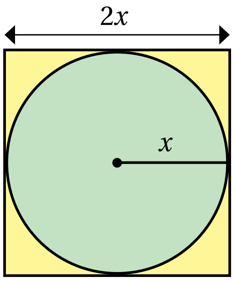
إذنْ، العاملُ المشتركُ الأكبرُ هُوَ: $2 \times 2 \times x \times x = 4x^2$

$36\pi x^2 - 16x^2 = 4x^2(9\pi) - 4x^2(4)$ أعيدُ كتابةَ كلِّ حدٍّ باستعمالِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ

$= 4x^2(9\pi - 4)$ أخرجُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ خارجَ القوسِ

إذنْ، $36\pi x^2 - 16x^2 = 4x^2(9\pi - 4)$

أتحققُ من فهمي:



يبيّنُ الشــكلُ المجاورُ قطعةَ أرضٍ مربعةَ الشكلِ، يتوسطُها حوضُ قمحٍ دائريُّ الشكلِ يُروى بمرشٍّ دوّارٍ. أكتبُ مقدارًا جبريًّا يمثلُ مساحةَ المنطقةِ غيرِ المزروعةِ بالقمحِ بدلالةِ x، وأحللُ المقدارَ تحليلًا كاملًا.

أتدرب وأحل المسائل

أجدُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ للحدَّينِ الجبريَّينِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $12a, 16ab$
2. $8a, 12b$
3. $10x^6y^3, 45xy^7$
4. $12d^2w^2r^5, 4w^3d^{10}$
5. $n^3s^5r^5, 6ns^3r^7$
6. $5k^8w^3h^2, 11k^2h^4$

أحللُ كلَّ مقدارٍ جبريٍّ ممّا يأتي تحليلًا كاملًا:

7. $6r^2-10r$
8. ab^2-2ab
9. $12n^2m-8nm^3$
10. $15wx-10wy^2$
11. $4t^2+2t-12tu$
12. $12p+24q-6$

أحللُ كلَّ مقدارٍ جبريٍّ ممّا يأتي تحليلًا كاملًا:

13. $y-2y^2-18y+9$
14. $48ab-90a+32b-60$

15. **طاقةٌ بديلةٌ:** ركّبَ أحمدُ خلايا شمسيةً على سطحِ منزلِهِ، فإذا علمْتُ أنَّ مساحةَ اللوحِ الشمسيِّ $6y(y-4)+10(4-y)$ وحدةً مربعةً، وطولَهُ $(4-y)$، فأجدُ عرضَهُ بدلالةِ y.

أكملُ التحليلَ في كلٍّ ممّا يأتي:

16. $12y-32=......(3y-8)$
17. $18c-6=.......(.......-1)$
18. $t^2+t=.......(.......+1)$
19. $2a^2+ab=......(2a+......)$

معلومةٌ

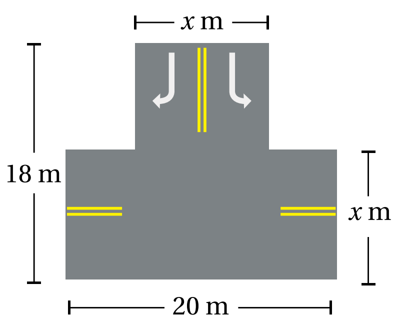
تُطلى واجهةُ القرصِ المدمجِ الّتي تخزنُ البياناتِ بطبقةٍ رقيقةٍ مِنَ الألمنيومِ النقيِّ، وتُستعملُ أشعةُ الليزرِ في تسجيلِ البياناتِ عليها.

20 **حواسيبُ:** حافظةُ أقراصٍ مدمجةٍ مربعةُ الشكلِ، طولُ ضلعِها $4x$، فإذا كانَ طولُ نصفِ قطرِ القرصِ المدمجِ $2x$، فأكتبُ مقدارًا جبريًّا يمثلُ المساحةَ السوداءَ المحيطةَ بالقرصِ في الشكلِ المجاورِ، وأحللُهُ تحليلًا كاملًا.

21 **هندسةٌ:** يمثلُ المقدارُ الجبريُّ $2\pi r^2 + 2\pi rh$ المساحةَ الكليةَ لسطحِ أسطوانةٍ حيثُ r طولُ نصفِ قطرِ القاعدةِ وَ h الارتفاعُ. أحللُ هذا المقدارَ الجبريَّ تحليلًا كاملًا.

22 **أجهزةٌ:** أعودُ إلى فقرةِ (أستكشف)، وأحلُّ المسألةَ.

23 **مرورٌ:** يظهرُ في الشكلِ المجاورِ تقاطعٌ مروريٌّ أُعيدَ تعبيدُهُ. أكتبُ مقدارًا جبريًّا يمثلُ مساحةَ المنطقةِ الّتي أُعيدَ تعبيدُها، وأحلّلُه تحليلًا كاملًا.



مهاراتُ التفكيرِ العُليا

24 **أكتشفُ الخطأَ:** يقولُ كلٌّ مِنْ خالدٍ وسلمانَ ومثنّى إنَّهُ حللَ المقدارَ الجبريَّ تحليلًا كاملًا على النحوِ الآتي، أكتشفُ الخطأَ في حلِّ كلٍّ منهُمْ، وأصحّحُهُ.

خالدٌ	سلمانُ	مثنّى
$4g + 6 = 4(g + 2)$	$2a^2 - 3a = a(2^2 - 3)$	$18h^2 + 45h = 3h(6h + 15)$

مسألةٌ مفتوحةٌ: أملأُ الفراغاتِ في كلٍّ ممّا يأتي بحدودٍ جبريةٍ لأحصلَ على عبارةٍ صحيحةٍ:

25 ..... + ... = ... (..... + ...)

26 ..... − ..... = ... (..... − .....)

27 **أكتبُ** أكتبُ فقرةً أبيّنُ فيها كيفيةَ تحليلِ مقدارٍ جبريٍّ بطريقةِ التجميعِ.

الدرسُ 2 تحليلُ ثلاثياتِ الحدودِ $x^2 + bx + c$

فكرةُ الدرسِ

أحللُ ثلاثياتِ حدودٍ على صورةِ $x^2 + bx + c$

أستكشفُ

لدى عمرانَ بيتٌ زجاجيٌّ للزراعةِ يغطي منطقةً مستطيلةَ الشكلِ، مساحتُها $x^2 + 5x + 6$ مترًا مربعًا وعرضُها $(x + 2)$ مترًا. ما طولُ المنطقةِ الّتي يغطّيها البيتُ الزجاجيُّ؟

عندَ ضربِ مقدارَينِ جبريَّينِ، فإنَّ كلًّا منهُما يكونُ عاملًا لناتجِ الضربِ.

$$(x+2)(x+3) = x^2 + 3x + 2x + 2 \times 3$$ خاصيةُ التوزيعِ

$$= x^2 + (3+2)x + 2 \times 3$$ بتجميعِ الحدَّينِ المتشابهَينِ

$$= x^2 + (5)x + 6$$ بالتبسيطِ

ألاحظُ النمطَ الآتيَ في عمليةِ الضربِ السابقةِ:

$$(x+2)(x+3) = x^2 + (3+2)x + (2 \times 3)$$

$$(x+m)(x+n) = x^2 + (n+m)x + mn$$

$$= x^2 + \underbrace{(m+n)}x + \underbrace{mn}$$

$$= x^2 + bx + c$$ $b = m + n$ and $c = mn$

إذنْ، معاملُ الحدِّ الأوسطِ يساوي مجموعَ m وَ n، وَالحدُّ الأخيرُ يساوي ناتجَ ضربِ m وَ n .

ويمكنُ استعمالُ هذا النمطِ لتحليلِ بعضِ المقاديرِ الجبريةِ التي على صورةِ $x^2 + bx + c$

مفهومٌ أساسيٌّ تحليلُ ثلاثيةِ الحدودِ $x^2 + bx + c$

- **بالكلماتِ:** لتحليلِ ثلاثيةِ حدودٍ على صورةِ $x^2 + bx + c$ أجدُ عددَينِ صحيحَينِ m وَ n مجموعُهُما يساوي (b)، وحاصلُ ضربِهما يساوي (c)، ثُمَّ أكتبُ $x^2 + bx + c$ على صورةِ $(x+m)\ (x+n)$.
- **بالرموزِ:** $x^2 + bx + c = (x+m)(x+n)$ حيثُ $m \times n = c$ ، $m + n = b$

إذا كانَتْ إشارةُ c موجبةً في ثلاثيِّ الحدودِ x^2+bx+c، فيكونُ لِـ m وَ n الإشارةُ نفسُها. ويعتمد تحديدُ إشارةِ كلٍّ مِنْ m وَ n (موجبةً أوْ سالبةً) على إشارةِ b، فإذا كانَتْ إشارةُ b موجبةً فإنَّ إشارتَهُما موجبةٌ، وإذا كانَتْ إشارةُ b سالبةً، فإنَّ إشارتَهُما سالبةٌ.

مثال 1

أحلّلُ $x^2+7x+12$

بما أنَّ $b=7, c=12$ فيجبُ إيجادُ عددَيْنِ موجبَيْنِ مجموعُهُما 7 وحاصلُ ضربِهِما 12

أنشئُ جدولًا، وأنظمُ فيهِ أزواجَ عواملِ العددِ 12 الموجبةِ، وأحددُ العاملَيْنِ اللّذَيْنِ مجموعُهُما 7

أزواجُ عواملِ العددِ 12 الموجبةُ	1 , 12	2 , 6	3 , 4
مجموعُ العاملَيْنِ	13	8	7

العاملانِ الصحيحانِ

أكتبُ القاعدةَ $x^2+7x+12=(x+m)(x+n)$

أعوضُ $m=3, n=4$ $=(x+3)(x+4)$

أتحققُ: أتحققُ مِنْ صحةِ التحليلِ بضربِ العاملَيْنِ:

خاصيةُ التوزيعِ $(x+3)(x+4)=x^2+4x+3x+12$

بالتبسيطِ $=x^2+7x+12$ ✓

أتحققُ من فهمي:

1) $x^2+11x+10$

2) $x^2+9x+14$

إذا كانَتْ c موجبةً، وَ b سالبةً في ثلاثيِّ الحدودِ x^2+bx+c ، فانَّ لكلٍّ مِنْ m وَ n إشارةً سالبةً.

مثال 2 أحلّلُ $x^2-10x+16$

في ثلاثيِّ الحدودِ المُعطى $b=-10, c=16$، وهذا يعني أنَّ $m+n$ سالبةٌ وَ nm موجبةٌ. إذنْ، يجبُ أَنْ تكونَ إشارةُ كلٍّ مِنْ n وَ m سالبةً. أنشئُ جدولًا، وأنظمُ فيهِ أزواجَ عواملِ العددِ 16 السالبةَ، وأحددُ زوجَ العواملِ الّذي مجموعُهُ -10

العاملانِ الصحيحانِ

أزواجُ عواملِ العددِ 16 السالبةُ	$-1, -16$	$-2, -8$	$-4, -4$
مجموعُ العاملَينِ	-17	-10	-8

أكتبُ القاعدةَ $\quad x^2-10x+16=(x+m)(x+n)$

أعوضُ $m=-2, n=-8$ $\quad =(x-2)(x-8)$

أتحققُ: أتحققُ مِنْ صحةِ التحليلِ بضربِ العاملَينِ:

خاصيةُ التوزيعِ $\quad (x-2)(x-8)=x^2-2x-8x+16$

بالتبسيطِ $\quad =x^2-10x+16$ ✓

أتحققُ من فهمي:

1) y^2-5y+6

2) $x^2-11x+30$

إذا كانَتْ إشارةُ c سالبةً في ثلاثيِّ الحدودِ x^2+bx+c، فإنَّ لِكلٍّ مِنْ m وَ n إشارتَينِ مختلفتَينِ.

مثال 3 أحلّلُ x^2+x-20

في ثلاثيِّ الحدودَ المُعطى $b=1, c=-20$، وهذا يعني أنَّ إشارةَ $m+n$ موجبةٌ وَإشارةَ nm سالبةٌ. إذنْ، يجبُ أَنْ تكونَ إشارةُ n أَوْ m سالبةً، وليسَ كلتاهُما. أنشئُ قائمةً منظمةً مِنْ أزواجِ عواملِ العددِ (-20) مختلفةَ الإشارةِ، وأحددُ زوجَ العواملِ الّذي مجموعُهُ 1

العاملانِ الصحيحانِ

أزواجُ عواملِ العددِ (-20) مختلفةُ الإشارةِ	$1, -20$	$-1, 20$	$2, -10$	$-2, 10$	$4, -5$	$-4, 5$
مجموعُ العاملَينِ	-19	19	-8	8	-1	1

أكتبُ القاعدةَ	$x^2 + x - 20 = (x + m)(x + n)$
أعوضُ $m = -4, n = 5$	$= (x - 4)(x + 5)$

أتحققُ: أتحققُ مِنْ صحةِ التحليلِ بضربِ العاملَينِ:

خاصيةُ التوزيعِ	$(x - 4)(x + 5) = x^2 + 5x - 4x - 20$
بالتبسيطِ	$= x^2 + x - 20$ ✓

أتحققُ من فهمي:

1) $x^2 + 2x - 8$

2) $x^2 - x - 42$

يُستعملُ التحليلُ لإيجادِ مقدارٍ جبريٍّ يمثلُ طولَ أوْ عرضَ مستطيلٍ مساحتُهُ معطاةٌ على صورةِ ثلاثيِّ حدودٍ $x^2 + bx + c$، حيثُ يمثلُ الطولُ والعرضُ عاملَيْ ثلاثيِّ الحدودِ.

مثال 4: منَ الحياةِ

يمثلُ ثلاثيُّ الحدودِ $x^2 + 9x + 18$ مساحةَ مرآةٍ مستطيلةِ الشكلِ بالمترِ المربعِ. إذا كانَ عرضُ المرآةِ $(x + 3)$ مترًا، فأجدُ كلًّا مِنْ طولِها ومحيطِها بدلالةِ x.

الخُطْوَةُ 1 أجدُ طولَ المرآةِ بدلالةِ x .

يمثلُ عرضُ المرآةِ $(x + 3)$ أحدَ عاملَيْ $x^2 + 9x + 18$ إذنْ $m = 3$

أبحثُ عَنْ قيمةِ n الّتي ناتجُ ضربِها في 3 يساوي 18 وناتجُ جمعِها إلى العددِ 3 يساوي 9

إذنْ، $n = 6$، والمقدارُ الجبريُّ الّذي يمثلُ طولَ المرآةِ هُوَ $(x + 6)$

الخُطْوَةُ 2 أجدُ محيطَ المرآةِ بدلالةِ x .

قانونُ محيطِ المستطيلِ	$P = 2l + 2w$
أعوضُ: $l = (x + 6), w = (x + 3)$	$= 2(x + 6) + 2(x + 3)$
خاصيةُ التوزيعِ	$= 2x + 12 + 2x + 6$
أجمعُ الحدودَ المتشابهةَ	$= 4x + 18$

إذنْ، محيطُ المرآةِ يساوي $(4x + 18)$ مترًا.

أتحققُ من فهمي:

يمثلُ ثلاثيُّ الحدودِ $x^2 - 25x + 100$ مساحةَ بابٍ مستطيلِ الشكلِ بالمترِ المربعِ. إذا كانَ طولُ البابِ $(x - 5)$ مترًا، فأجدُ كلًّا مِنْ عرضِهِ ومحيطِهِ بدلالةِ x

أتدرب وأحل المسائل

أحللُ كلًّا ممّا يأتي:

1. $x^2 + 2x - 24$
2. $y^2 + 3y - 10$
3. $x^2 + 29x + 100$
4. $w^2 - 6w + 8$
5. $-10q + q^2 + 21$
6. $y^2 + 20y + 100$
7. $a^2 + 5a + 6$
8. $w^2 - 9w - 10$
9. $x^2 + x - 30$
10. $13y + 30 + y^2$
11. $w^2 + 11w + 18$
12. $t^2 - t - 90$
13. $f^2 + 22f + 21$
14. $h^2 - h - 72$
15. $m^2 - 18m + 81$

يمثلُّ كلُّ ثلاثيِّ حدودٍ ممّا يأتي مســاحةَ مستطيلٍ بالمترِ المربعِ. أجدُ مقدارَينِ جبريَّينِ يمثلانِ طولًا وعرضًا ممكنَينِ لكلِّ مستطيلٍ.

إرشادٌ
أولًا: أخـرجُ العامـلَ المشـتركَ الأكبرَ للحدودِ الثلاثةِ، ثُمَّ أحللُ.

18 $x^2 + 2x - 48$

17 $x^2 - 8x - 9$

16 $x^2 + x - 72$

أحللُ كلًّا ممّا يأتي:

20 $2x^3 - 2x^2 - 4x$

19 $3x^3y + 18x^2y - 21xy$

22 $5x^3y - 35x^2y + 50xy$

21 $2x^3 - 4x^2 - 6x$

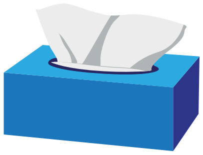
24 $4x^3 - 8x^2 - 12x$

23 $3x^3 + 12x^2 + 9x$

إرشادٌ
مؤسسةُ الحسينِ للسرطانِ مكرّسـةٌ لمكافحةِ مرضِ السـرطانِ، وتتضمـنُ مهامُّها: جمـعَ التبرعاتِ، وحشـدَ الجهودِ لمكافحةِ السـرطانِ، وتنفيـذَ برامجِ الوقايـةِ مِنْـهُ، والكشـفَ المبكرَ عَنْهُ.

25 **صحـةٌ:** تقـومُ مؤسسـةُ الحسـينِ للسـرطانِ بحملـةِ توعيـةٍ بأهميـةِ الفحـصِ المبكـرِ للسـرطانِ، عَـنْ طريـقِ لوحاتٍ إعلانيةٍ مسـتطيلةِ الشـكلِ علـى الطّرقـاتِ. إذا كانَتْ مسـاحةُ إحـدى هـذهِ اللوحـاتِ $(x^2 + 14x + 48)$ متـرًا مربعًـا وعرضُهـا $(x + 6)$ متـرًا، فأجـدُ طـولَ اللوحـةِ ومحيطَها بدلالـةِ (x).

26 **ورقٌ صحيٌّ:** علبةُ ورقٍ صحيٍّ على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ، حجمُهُ $x^3 + 5x^2 + 4x$ سـنتيمترًا مكعبًا. أجدُ قياسًا ممكنًا لكلٍّ مِنْ طولِ العلبةِ وعرضِها وارتفاعِها بدلالةِ x.



مهاراتُ التفكيرِ العُليا

تبريرٌ: أجدُ 3 قيمٍ ممكنةٍ للعددِ الصحيحِ m في كلٍّ ممّا يأتي، بحيثُ يكونُ ثلاثيُّ الحدودِ قابلًا للتحليلِ، ثُمَّ أحلِّلُهُ:

27) $x^2 + mx - 15$

28) $x^2 - 7x + m$

29) **تحدٍّ:** أحلِّلُ المقدارَ $(x-3)^2 - 2(x-3) - 8$

إرشادٌ

يمكنُني فكُّ الأقواسِ ثُمَّ التحليلُ، ويمكنُني أيضًا فرضُ أنَّ $y = x - 3$ وإتمامُ الحلِّ.

30) **تحدٍّ:** في الشكلِ المجاورِ مستطيلٌ بُعداهُ $x+a, x+b$، قُسِّمَ إلى أربعةِ أجزاءٍ مساحةُ اثنينِ منها x^2 وَ 6 وحداتٍ مربعةٍ، أبيّنُ أنّهُ توجدُ قيمتانِ ممكنتانِ لكلٍّ مِنْ a وَ b.

x^2	
	6

31) **أكتشفُ الخطأَ:** حللَ كلٌّ مِنْ آدمَ وماريا العبارةَ $y^2+6y-16$ على النحوِ الآتي:

آدمُ

$y^2 + 6y - 16 = (y-2)(y+8)$

ماريا

$y^2 + 6y - 16 = (y+2)(y-8)$

مَنْ منهُما إجابتُهُ صحيحةٌ؟ أبرّرُ إجابتي.

32) **أكتبُ** كيفَ أحددُ قيمةَ كلٍّ مِنْ m وَ n عندَ تحليلِ y^2-3y-4 على صورةِ $(y+m)(y+n)$؟

الدرسُ 3 تحليلُ ثلاثياتِ الحدودِ $ax^2 + bx + c$

فكرةُ الدرسِ

أحلّلُ ثلاثيَّ الحدودِ على الصورةِ $ax^2 + bx + c$.

أستكشفُ

يمثّلُ ثلاثيُّ الحدودِ $6x^2 + 15x - 9$ إجماليَّ الربحِ لمشروعٍ صغيرٍ لبيعِ العصائرِ الطازجةِ. كيفَ يمكنُ تحليلُ هذا المقدارِ الجبريِّ تحليلًا كاملًا؟

تحليلُ ثلاثيِّ الحدودِ $ax^2 + bx + c$

تعلَّمتُ في الدرسِ السابقِ كيفَ أحلّلُ ثلاثيَّ الحدودِ $x^2 + bx + c$، الذي معاملُ x^2 فيهِ يُساوي 1 وَ b وَ c عددانِ صحيحانِ، ويمكنُ أيضًا تحليلُ بعضِ ثُلاثياتِ الحدودِ التي على الصورةِ $ax^2 + bx + c$؛ حيثُ $a \neq 1$ و $a \neq 0$، و a وَ b وَ c أعدادٌ صحيحةٌ، بطريقةٍ مُشابهةٍ.

أُلاحِظُ النمطَ الآتيَ في عمليَّةِ ضربِ المِقداريْنِ الجبريَّيْنِ $(2x + 1)$ وَ $(4x + 5)$:

$ax^2 + mx + nx + c$	$(2x+1)(4x+5) = 8x^2 + 10x + 4x + 5$
$ax^2 + bx + c$	$= 8x^2 + 14x + 5$
$m + n = b$ and $mn = ac$	$10 + 4 = 14$ and $10 \times 4 = 8 \times 5$

أتعلّمُ

عندَ ضربِ مِقداريْنِ جبريَّيْنِ، فإنَّ كُلًّا منهُما يكونُ عاملًا لناتجِ الضَّربِ.

إذنْ، لتحليلِ ثلاثيِّ الحدودِ $8x^2 + 14x + 5$ أَجِدُ عددَيْنِ m وَ n حاصلُ ضربِهِما 8×5 أو 40، ومجموعُهُما 14.

مفهومٌ أساسيٌّ — تحليلُ ثلاثيِّ الحدودِ $ax^2 + bx + c$

لتحليلِ ثلاثيِّ الحدودِ $ax^2 + bx + c$، حيثُ $a \neq 0$، و a وَ b وَ c أعدادٌ صحيحةٌ، أَجِدُ عددَيْنِ صحيحَيْنِ m وَ n حاصلُ ضربِهِما يُساوي (ac)، ومجموعُهُما يُساوي b، ثمَّ أكتبُ $ax^2 + bx + c$ على الصورةِ $ax^2 + mx + nx + c$، ثمَّ أحلّلُ بتجميعِ الحدودِ.

أتعلّمُ

لتسهيلِ عمليّةِ التحليلِ مِنَ الأفضلِ أنْ أجعلَ معاملَ x^2 موجبًا.

إذا كانتْ إشارةُ c موجبةً في ثلاثيِّ الحدودِ $ax^2 + bx + c$، حيث $a > 0$، و a وَ b وَ c أعدادٌ صحيحةٌ، فإنَّ لكلٍّ مِنْ m وَ n الإشارةَ نفسَها، ويعتمدُ تحديدُ إشارتَيْ m وَ n (موجبةٌ أو سالبةٌ) على إشارةِ b، فإذا كانتْ إشارةُ b موجبةً فإنَّ إشارةَ كلٍّ منهُما موجبةٌ، وإذا كانتْ إشارةُ b سالبةً فإنَّ إشارةَ كلٍّ منهُما سالبةٌ.

مثال 1 أُحَلِّلُ $6x^2 + 23x + 7$

بما أنَّ $a = 6, b = 23, c = 7$، فأبحثُ عنْ عددَيْنِ حاصلُ ضربِهِما $6 \times 7 = 42$ ومجموعُهُما 23

وبما أنَّ إشارةَ كلٍّ مِنْ c وَ b موجبةٌ، فأُنشئُ جدولًا أنظّمُ فيهِ أزواجَ عواملِ العددِ 42 الموجبةَ، ثمَّ أحدّدُ العاملَيْنِ اللّذَيْنِ مجموعُهُما 23

مجموعُ العاملَيْنِ	أزواجُ عواملِ العددِ 42
43	1, 42
23	2, 21

العاملانِ الصحيحانِ

$6x^2 + 23x + 7 = 6x^2 + mx + nx + 7$ بكتابةِ القاعدةِ

$= 6x^2 + 2x + 21x + 7$ بتعويضِ $m = 2, n = 21$

$= (6x^2 + 2x) + (21x + 7)$ بتجميعِ الحدودِ ذاتِ العواملِ المُشترَكةِ

$= 2x(3x + 1) + 7(3x + 1)$ بتحليلِ كلِّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ

$= (3x + 1)(2x + 7)$ بإخراجِ $(3x + 1)$ عاملًا مُشترَكًا

أتحقّقُ: أتحقّقُ مِنْ صحّةِ التحليلِ بضربِ العاملَيْنِ:

$(3x+1)(2x+7) = 6x^2 + 21x + 2x + 7$ خاصيّةُ التوزيعِ

$= 6x^2 + 23x + 7$ ✓ بالتبسيطِ

أتحقّقُ من فهمي: أحلّلُ $2x^2 + 7x + 6$

إذا كانـتْ إشـارةُ c موجبـةً وَإشـارةُ b سـالبةً في ثُلاثِيِّ الحـدودِ $ax^2 + bx + c$، حيـث $a > 0$، و a وَ b وَ c أعـدادٌ صحيحةٌ، فـإنَّ إشـارةَ كلٍّ مِنْ m وَ n تكونُ سـالبةً.

مثال 2 أحلّلُ كُلًّا ممّا يأتي:

1 $3x^2 - 14x + 8$

بما أنَّ $a = 3, b = -14, c = 8$، فأبحثُ عنْ عددَيْنِ حاصلُ ضربِهِما $3\times 8 = 24$ ومجموعُهُما -14

بما أنَّ إشارةَ b سالبةٌ وَإشارةَ c موجبةٌ، فأُنشئُ جدولًا أنظِّمُ فيهِ أزواجَ عواملِ العددِ 24 السالبةَ، ثمَّ أحدّدُ العاملَيْنِ اللّذَيْنِ مجموعُهُما -14

مجموعُ العاملَيْنِ	أزواجُ عواملِ العددِ 24
-25	$-1, -24$
-14	$-2, -12$

العاملانِ الصَّحيحانِ

$3x^2 - 14x + 8 = 3x^2 + mx + nx + 8$ بكتابةِ القاعدةِ

$= 3x^2 - 2x - 12x + 8$ بتعويضِ $m = -2, n = -12$

$= (3x^2 - 2x) + (-12x + 8)$ بتجميعِ الحدودِ ذاتِ العواملِ المُشترَكةِ

$= x(3x-2) + (-4)(3x-2)$ بتحليلِ كلِّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ

$= (3x-2)(x-4)$ بإخراجِ $(3x - 2)$ عاملًا مُشترَكًا

أتحقَّقُ: أتحقّقُ مِنْ صِحَّةِ التحليلِ بضربِ العاملَيْنِ:

$(3x-2)(x-4) = 3x^2 - 12x - 2x + 8$ خاصيَّةُ التوزيعِ

$= 3x^2 - 14x + 8$ ✓ بالتبسيطِ

2 $20x^2 - 80x + 35$

أتعلَّمُ

في بعضِ الأحيانِ يكونُ عاملٌ مشترَكٌ بينَ جميعِ حدودِ ثُلاثيِّ الحدودِ، وفي هذهِ الحالةِ أستعملُ خاصيَّةَ التوزيعِ لتحليلِ ثُلاثيِّ الحدودِ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ أوَّلًا قبلَ البَدءِ بعمليَّةِ التحليلِ.

الخُطْوَةُ 1 أُخرِجُ العاملَ المُشترَكَ الأكبرَ أوَّلًا.

$20x^2 - 80x + 35 = 5(4x^2 - 16x + 7)$ بالتحليلِ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ

الخُطْوَةُ 2 أحلِّلُ المقدارَ $4x^2 - 16x + 7$

بما أنَّ $a = 4, b = -16, c = 7$، فأبحثُ عنْ عددَيْنِ حاصلُ ضربِهِما $4 \times 7 = 28$ ومجموعُهُما -16

بما أنَّ b سالبةٌ وَ c موجبةٌ، فأُنشئُ جدولًا أنظِّمُ فيهِ أزواجَ عواملِ العددِ 28 السالبةِ، ثمَّ أحدِّدُ العاملَيْنِ اللّذَيْنِ مجموعُهُما -16

مجموعُ العاملَيْنِ	أزواجُ عواملِ العددِ 28
-29	$-1, -28$
-16	$-2, -14$

العاملانِ الصحيحانِ

$4x^2 - 16x + 7 = 4x^2 + mx + nx + 7$ بكتابةِ القاعدةِ

$= 4x^2 - 2x - 14x + 7$ بتعويضِ $m = -2, n = -14$

$= (4x^2 - 2x) + (-14x + 7)$ بتجميعِ الحدودِ ذاتِ العواملِ المُشترَكةِ

$= 2x(2x - 1) + (-7)(2x - 1)$ بتحليلِ كلِّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ

$= (2x - 1)(2x - 7)$ بإخراجِ $(2x - 1)$ عاملًا مُشترَكًا

أتحقَّقُ: أتحقَّقُ مِنْ صِحَّةِ التحليلِ بضربِ العاملَيْنِ:

$(2x - 1)(2x - 7) = 4x^2 - 14x - 2x + 7$ خاصيَّةُ التوزيعِ

$= 4x^2 - 16x + 7$ ✓ بالتبسيطِ

إذنْ، $20x^2 - 80x + 35 = 5(2x - 1)(2x - 7)$

أتحققُ من فهمي: أحلّلُ كُلًّا ممّا يأتي:

3) $9x^2 - 33x + 18$

4) $5x^2 - 13x + 6$

إذا كانتْ إشــارةُ c ســالبةً في ثُلاثيِّ الحدودِ $ax^2 + bx + c$، حيث $a > 0$، و a وَ b وَ c أعدادٌ صحيحةٌ، فإنَّ لِـ m وَ n إشارتَيْنِ مختلفتَينِ.

مثال 3 أُحَلِّلُ $3x^2 - 7x - 6$

بما أنَّ $a = 3, b = -7, c = -6$، فأجِدُ عددَيْنِ حاصلُ ضربِهِما $3\times-6 = -18$ ومجموعُهُما -7

بما أنَّ إشــارةَ c سالبةٌ، فأُنشــئُ جدولًا أنظّمُ فيهِ أزواجَ عواملِ العددِ (-18) مختلفةَ الإشارةِ، ثمَّ أحدّدُ العاملَينِ اللّذَينِ مجموعُهُما -7

مجموعُ العاملَينِ	أزواجُ عواملِ العددِ -18
-17	$1, -18$
17	$-1, 18$
-7	$2, -9$ العاملانِ الصحيحانِ

$3x^2 - 7x - 6 = 3x^2 + mx + nx - 6$ بكتابةِ القاعدةِ

$= 3x^2 + 2x - 9x - 6$ بتعويضِ $m = 2, n = -9$

$= (3x^2 + 2x) + (-9x - 6)$ بتجميعِ الحدودِ ذاتِ العواملِ المُشترَكةِ

$= x(3x+2) + (-3)(3x+2)$ بتحليلِ كلِّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ

$= (3x+2)(x-3)$ بإخراجِ $(3x + 2)$ عاملًا مُشترَكًا

أتحقَّقُ: أتحقَّقُ مِنْ صِحَّةِ التحليلِ بضربِ العاملَينِ:

خاصيَّةُ التوزيعِ $(3x+2)(x-3) = 3x^2 - 9x + 2x - 6$

بالتبسيطِ $= 3x^2 - 7x - 6$ ✓

أتحققُ من فهمي:

أحلّلُ $3x^2 - 3x - 6$

أتدرب وأحل المسائل

أحلّلُ كُلًّا ممّا يأتي:

1) $3x^2 + 11x + 6$

2) $8x^2 - 30x + 7$

3) $6x^2 + 15x - 9$

4) $4x^2 - 4x - 35$

5) $12x^2 + 36x + 27$

6) $18t^2 + 9t + 1$

7) $24x^2 - 19x + 2$

8) $6x^2 + 15x - 9$

9) $5x^2 + 8x + 3$

10) $9d^2 - 24d - 9$

11) $8x(x + 1) - 16$

12) $13x^2 - 11 + 2x$

13) $8x - 16 - x^2$

14) $2t^2 - t - 15$

تُصنِّعُ شركةٌ صفائحَ معدنيةً مستطيلةَ الشكلِ كجزءٍ مِنْ مُنتَجٍ جديدٍ، مساحةُ القطعةِ الواحدةِ $4x^2 + 34x + 66$:

$4x^2 + 34x + 66$

15 أكتبُ بدلالةِ x طولًا وعرضًا مُمكِنَينِ للصفيحةِ.

16 إذا كانَ $x = 10$ cm، فأجدُ طولَ الصفيحةِ وعرضَها.

17 أحلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

تبريرٌ: مثلّثٌ مساحتُهُ $(6x^2 + 7x + 1)$ cm^2، وطولُ قاعدتِهِ $(12x + 2)$ cm.

18 أجدُ ارتفاعَ المثلّثِ بدلالةِ x.

19 إذا بقيَتْ مساحةُ المثلّثِ كما هيَ وأصبحَ طولُ قاعدتِهِ $24x + 4$، فكمْ سيصبحُ ارتفاعُهُ بدلالةِ x؟ أبرّرُ إجابتي.

20 **أكتشفُ المُختلِفَ:** أيُّ المقاديرِ الآتيةِ مختلفةٌ؟ أبرّرُ إجابتي.

$x(2x - 3) + 2(2x - 3)$	$(2x - 3)(x + 2)$
$2x(x + 2) - 3(x + 2)$	$(2x + 3)(x - 2)$

21 **تَحَدٍّ:** أَجِدُ جميعَ قِيَمِ الثابتِ k؛ حيثُ يمكنُ تحليلُ ثلاثيِّ الحدودِ $2x^2 + kx + 12$ إلى عامِلَيْنِ باستعمالِ الأعدادِ الصحيحةِ.

الدرسُ 4 حالاتٌ خاصةٌ مِنَ التحليلِ

فكرةُ الدرسِ

- أحللُ مقدارًا جبريًّا يمثلُ فرقًا بَيْنَ مربعَينِ.
- أحللُ مربعًا كاملًا ثلاثيَّ الحدودِ.

المصطلحاتُ

مربعٌ كاملٌ ثلاثيُّ الحدودِ .

أستكشفُ

يُستعملُ المقدارُ الجبريُّ $\frac{1}{2}dv^2 - \frac{1}{2}du^2$ لحسابِ الفرقِ بَيْنَ قيمتَي الضغطِ الجويِّ فوقَ جناحِ الطائرةِ وأسفلَهُ، حيثُ d هِيَ كثافةُ الهواءِ وَ v سرعةُ الهواءِ فوقَ الجناحِ وَ u سرعةُ الهواءِ أسفلَهُ. كيفَ أحللُ هذا المقدارَ الجبريَّ تحليلًا كاملًا؟

تعلمْتُ سابقًا كيفيةَ ضربِ مقدارَينِ جبريَّينِ على صورةِ $(a-b)(a+b)$، حيثُ يكونُ الناتجُ دائمًا فرقًا بينَ مربعَينِ على صورةِ a^2-b^2 . ولتحليلِ الفرقِ بَيْنَ مربعَينِ يمكنُ اتباعُ خطواتٍ عكسيةٍ لعمليةِ ضربِ مجموعِ حدَّينِ في الفرقِ بينَهُما.

تحليلٌ

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

تبسيطٌ

مفهومٌ أساسيٌّ تحليلُ الفرقِ بَيْنَ مربعَينِ

- **بالكلماتِ:** الفرقُ بَيْنَ مربعَيْ حدَّينِ يساوي ناتجَ ضربِ مجموعِ الحدَّينِ في الفرقِ بينَهُما.
- **بالرموزِ:** $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

مثال 1 أحللُ كلًّا ممّا يأتي:

1) $x^2 - 25$

$$x^2 - 25 = x^2 - 5^2$$ أكتبُ المقدارَ على صورةِ $a^2 - b^2$

$$= (x-5)(x+5)$$ أحللُ الفرقَ بَيْنَ مربعَينِ

2) $4y^2 - 9z^2$

$$4y^2 - 9z^2 = (2y)^2 - (3z)^2$$ أكتبُ المقدارَ على صورةِ $a^2 - b^2$

$$= (2y-3z)(2y+3z)$$ أحللُ الفرقَ بَيْنَ مربعَينِ

أتحقق من فهمي:

3) $x^2 - 100$ 4) $100y^2 - 36$ 5) $81d^2 - 49r^2$ 6) $64c^2 - 1$

يحتاجُ تحليلُ بعضِ المقاديرِ الجبريةِ إلى إجراءِ خطوتَينِ، مثلِ إخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ للحدودِ جميعِها، ثُمَّ تحليلِ ما تبقّى مِنَ المقدارِ باستعمالِ قاعدةِ تحليلِ الفرقِ بَيْنَ مربعَينِ.

مثال 2

أحللُ كلًّا ممّا يأتي:

1) $27xy^3 - 3xy$

$27xy^3 - 3xy = 3xy(9y^2 - 1)$ أحللُ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ

$= 3xy(3y - 1)(3y + 1)$ أحللُ المقدارَ $9y^2 - 1$ كفرقٍ بَيْنَ مربعَينِ

2) $y^4 - 1$

$y^4 - 1 = (y^2)^2 - (1)^2$ أكتبُ المقدارَ على صورةِ $a^2 - b^2$

$= (y^2 - 1)(y^2 + 1)$ أحللُ الفرقَ بَيْنَ مربعَينِ

$= (y - 1)(y + 1)(y^2 + 1)$ أحللُ المقدارَ $y^2 - 1$ كفرقٍ بَيْنَ مربعَينِ

3) $2b^2 - 18 + ab^2 - 9a$

$2b^2 - 18 + ab^2 - 9a = (2b^2 - 18) + (ab^2 - 9a)$ أجمعُ الحدودَ ذاتَ العاملِ المشتركِ

$= 2(b^2 - 9) + a(b^2 - 9)$ أحللُ كلَّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ

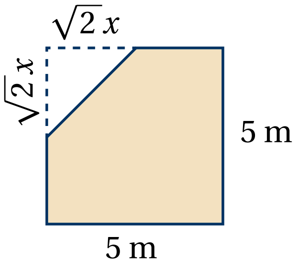
$= (b^2 - 9)(2 + a)$ أخرجُ المقدارَ $(b^2 - 9)$ عاملًا مشتركًا

$= (b - 3)(b + 3)(2 + a)$ أحللُ المقدارَ $(b^2 - 9)$ كفرقٍ بَيْنَ مربعَينِ

أتحقق من فهمي:

4) $b^4 - c^4$ 5) $6w^3 - 24w$ 6) $4m^4 - 9m^2 + 8m^2k - 18k$

مثال 3: منَ الحياةِ



هندسةٌ معماريةٌ: يبيّنُ الشكلُ المجاورُ مخططَ غرفةِ جلوسٍ في منزلِ رغدَ. أكتبُ مقدارًا جبريًّا يمثلُ مساحةَ الغرفةِ، ثُمَّ أحللُهُ.

مساحةُ الغرفةِ تساوي ناتجَ طرحِ مساحةِ المثلثِ مِنْ مساحةِ المربعِ.

الْخُطْوَةُ 1 أكتبُ مقدارًا جبريًّا يمثلُ مساحةَ الغرفةِ:

$A_1 = s^2$ مساحةِ المربعِ

$= (5)^2 = 25$ بتعويضِ $s = 5$

$A_2 = \frac{1}{2} bh$ مساحةِ المثلثِ

$= \frac{1}{2} (\sqrt{2}\,x)\,(\sqrt{2}\,x) = x^2$ بتعويضِ $b = x, h = x$

$A = A_1 - A_2$ مساحةُ الغرفةِ

$= 25 - x^2$ بالتعويضِ

أتذكرُ

$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a, a \geq 0$

إذنْ، مساحةُ الغرفةِ تساوي $25 - x^2$ مترًا مربعًا.

الْخُطْوَةُ 2 أحللُ المقدارَ $25 - x^2$

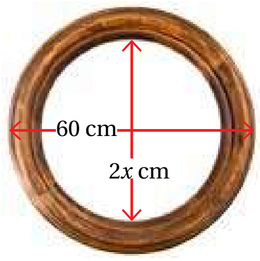
$25 - x^2 = 5^2 - x^2$ أكتبُ المقدارَ على صورةِ $a^2 - b^2$

$= (5 - x)(5 + x)$ أحللُ الفرقَ بَيْنَ مربعَينِ

إذنْ، $25 - x^2 = (5 - x)(5 + x)$

أتحققُ من فهمي:

أعمالٌ فنيةٌ: صنعَ مرادٌ إطارَ صورةٍ خشبيًّا دائريًّا كما في الشكلِ المجاورِ. أكتبُ مقدارًا جبريًّا يمثلُ مساحةَ الإطارِ الخشبيِّ، ثُمَّ أحللُهُ.



تعلمْتُ سابقًا أنَّ أعدادًا مثلَ 64 ,49 ,25 تسمّى مربعاتٍ كاملةً؛ لأنَّ كلًّا مِنْها يساوي ناتجَ ضربِ عددٍ في نفسِهِ:

$$25 = 5 \times 5 = 5^2 \qquad 49 = 7 \times 7 = 7^2 \qquad 64 = 8 \times 8 = 8^2$$

ويعدُّ المقدارُ الجبريُّ الّذي على صورةِ $(a + b)^2$ مربعًا كاملًا أيضًا؛ لأنَّهُ يســاوي ناتجَ ضربِ $(a + b)$ في نفسِهِ. وتعلمْتُ سابقًا أنَّ تبسيطَ $(a + b)^2$ وَ $(a - b)^2$ يتبعُ قاعدةً ثابتةً، وأنَّ النتيجةَ تكونُ دائمًا مقدارًا جبريًّا يحتوي ثلاثةَ حدودٍ كما يأتي:

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= (a - b)(a - b)\\ &= a^2 - ab - ab + b^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b)\\ &= a^2 + ab + ab + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

يسمّى ناتجُ الضربِ في كلٍّ مِنَ الحالتَينِ أعلاهُ **مربعًا كاملًا ثلاثيَّ الحدودِ** (perfect–square trinomial)؛ لأنَّهُ ينتجُ مِنْ ضربِ مقدارٍ جبريٍّ في نفسِــهِ، ويمكنُ بطريقةٍ عكســيةٍ تحليلُ أيِّ ثلاثيِّ حدودٍ على صورةِ $a^2 + 2ab + b^2$ إنْ كانَ يمثلُ مربعًا كاملًا إذا حققَ الشروطَ الثلاثةَ الآتيةَ:

$$9x^2 \quad + \quad 24x \quad + \quad 16$$

1 الحدُّ الأولُ مربعٌ كاملٌ.
$9x^2 = (3x)^2$

2 الحدُّ الأوسطُ يساوي ضعفَ ناتجِ ضربِ الجذرِ التربيعيِّ لكلٍّ مِنَ الحدّينِ: الأولِ، والأخيرِ.
$24x = 2(3x)(4)$

3 الحدُّ الأخيرُ مربعٌ كاملٌ.
$16 = 4^2$

مفهومٌ أساسيٌّ: تحليلُ المربعِ الكاملِ الثلاثيِّ الحدودِ

- **بالرموزِ:**
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

- **مثالٌ:**
$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5)$$
$$25x^2 - 30x + 9 = (5x - 3)^2 = (5x - 3)(5x - 3)$$

مثال 4

أحددُ ما إذا كانَتْ كلُّ ثلاثيّةِ حدودٍ ممّا يأتي تمثلُ مربعًا كاملًا أَمْ لا، وإذا كانَتْ تمثلُهُ فأحللُها:

1 $x^2 + 6x + 9$

- هلِ الحدُّ الأولُ مربعٌ كاملٌ؟ نعم
- هلِ الحدُّ الأوسطُ يساوي $2 \times x \times 3$؟ نعم؛ لأنَّ $6x = 2(x)(3)$
- هلِ الحدُّ الأخيرُ مربعٌ كاملٌ؟ نعم؛ لأنَّ $9 = 3^2$

بما أنّ الشروطَ جميعَها متحققةٌ، فإنَّ $x^2 + 6x + 9$ تشكلُ مربعًا كاملًا.

$$x^2 + 6x + 9 = (x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2$$ أكتبُ بصورةِ $a^2 + 2ab + b^2$

$$= (x+3)^2 = (x+3)(x+3)$$ أحللُ

2 $x^2 + 2x + 16$

- هلِ الحدُّ الأولُ مربعٌ كاملٌ؟ نعم
- هلِ الحدُّ الأوسطُ يساوي $2 \times x \times 4$؟ لا؛ لأنَّ $2x \neq 2(x)(4)$
- هلِ الحدُّ الأخيرُ مربعٌ كاملٌ؟ نعم؛ لأنَّ $16 = 4^2$

بما أنَّ الشرطَ الثانيَ غيرُ متحققٍ، فإنَّ $x^2 + 2x + 16$ ليسَتْ مربعًا كاملًا، ولا يمكنُ تحليلُهُ.

أتحققُ من فهمي:

3 $x^2 - 24x + 144$ **4** $4x^2 - 12x + 9$ **5** $x^2 + 10x + \frac{1}{25}$

حينَ لا تُساوي قيمةُ العاملِ المشتركِ الأكبرِ لحدودِ المقدارِ الجبريِّ 1، فإنَّ مِنَ الأسهلِ البدءَ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ، ثُمَّ اختيارَ طريقةِ التحليلِ المناسبةِ بحسبِ الترتيبِ المبيّنِ في الجدولِ الآتي:

ملخصُ المفهومِ

تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ

عددُ الحدودِ الجبريةِ	طريقةُ التحليلِ	
2 أَوْ أكثرُ	إخراجُ العاملِ المشتركِ الأكبرِ	
2	الفرقُ بَيْنَ مربعَين	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
3	مربعٌ كاملٌ ثلاثيُّ الحدودِ	$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
	$ax^2 + bx + c$	$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
4 أَوْ أكثرُ	التحليلُ بتجميعِ الحدودِ	$ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b)$ $= (a+b)(x+y)$

أتدرب وأحل المسائل

أتذكرُ

أتذكرُ أنَّ:

$a^2 - b^2 = -b^2 + a^2$

أحللُ كلًّا ممّا يأتي:

1) $u^2 - 64$

2) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{25}$

3) $36y^2 - 1$

4) $v^4 - 625r^2$

5) $a^2 - w^2 z^2$

6) $-16y^2 + 49$

أحللُ كلًّا ممّا يأتي:

7) $ab^2 - 100a$

8) $x - x^3$

9) $12b^3 + 2b^2 - 192b - 32$

10) $d^3 - 5d^2 - 100d + 500$

أحددُ أنَّ كلَّ ثلاثيةِ حدودٍ ممّا يأتي تمثلُ مربعًا كاملًا أَمْ لا، وإذا كانَتْ تمثلُهُ فأحللُها:

11) $w^2 - 18w + 81$

12) $x^2 + 2x - 1$

13) $y^2 + 8y + 16$

14) $9x^2 - 30x + 10$

معلومةٌ

درجةُ الانصهارِ هِيَ درجةُ الحرارةِ الّتي تتحوّلُ عندَها المادّةُ مِنَ الحالــةِ الصلبةِ إلى الحالةِ السائلةِ، ودرجةُ انصهارِ النحاسِ $1085°C$

أحللُ كلًّا ممّا يأتي:

15) $3t^3 + 24t^2 + 48t$

16) $50g^2 + 40g + 8$

17) $27g^2 - 90g + 75$

18) $18y^2 - 48y + 32$

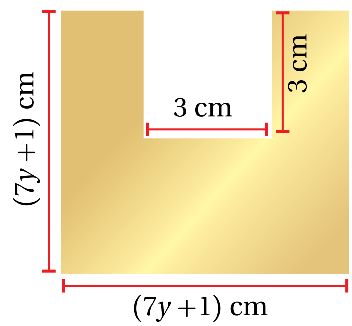
19) $5x^2 - 60x + 180$

20) $16r^3 - 48r^2 + 36r$

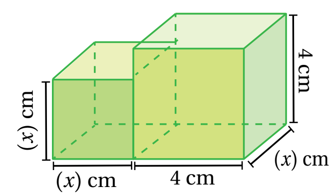
21) $12x^2 - 84x + 147$

22) $4x^2 - 80x + 400$

23) **نحاسٌ**: يبيّـنُ الشـكلُ المجـاورُ صفيحـةً مِـنَ النحـاسِ قبـلَ صهرِهـا وتحويلِها إلى مسـتطيلٍ لَـهُ المسـاحةُ نفسُـها، أجـدُ قياسَـينِ ممكنَيـنِ لطـولِ المسـتطيلِ وعرضِـهِ بدلالـةِ y .



24) يبيّنُ الشكلُ المجاورُ مخططًا لمستودعَيْ تخزينٍ متجاورَينِ. أكتبُ مقدارًا جبريًّا يمثلُ الفرقَ بَيْنَ حجمَيِ المستودعَينِ، ثُمَّ أحللُهُ.



مهاراتُ التفكيرِ العُليا

25) **تحدٍّ**: مثلثٌ قائمُ الزاويةِ مساحتُهُ $9y^2 - 16$ وحدةً مربعةً. أجدُ قياسَينِ ممكنَينِ لطولِ قاعدتِهِ وارتفاعِهِ بدلالةِ y.

26) **أكتشفُ الخطأَ**: حللَ إبراهيمُ المقدارَ $n^2 - 64$ تحليلًا كاملًا على النحوِ الآتي:

$$n^2 - 64 = n^2 - 8^2$$
$$= (n-8)^2$$

✗

هَلْ إجابتُهُ صحيحةٌ؟ أبرّرُ إجابتي.

27) **تبريرٌ**: أصفُ طريقتَينِ لتبسيطِ $(2x-5)^2 - (x-4)^2$، وأبيّنُ أيُّ الطريقتَينِ أسهلُ، وأبرّرُ إجابتي.

28) **أكتبُ** أكتبُ طريقةَ تحليلِ فرقٍ بَيْنَ مربعَينِ.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1 قيمةُ m التـي تجعلُ المقـدارَ (x^2-8x+m) مُربَّعًا كاملًا هيَ:

a) 64 **b)** 4

c) 16 **d)** -16

2 تحليلُ المقـدارِ $(2x^3 + 18x^2 - 10x)$ إلى عواملِهِ الأوليةِ تحليلًا كاملًا هوَ:

a) $2(x^2 + 9x - 5)$ **b)** $2x(x^2 + 9x - 5)$

c) $2x(x^2+18x-10)$ **d)** $x(x^2 + 9x - 5)$

3 المقدارُ الجبريُّ الّذي يمثلُ مربعًا كاملًا هُوَ:

a) $y^2 + 26y + 25$ **b)** $y^2 - 8y - 16$

c) $y^2 - 8y + 16$ **d)** $y^2 - 25$

4 قيمةُ b الّتي تجعلُ المقدارَ $(x^2 + bx + 144)$ مربعًا كاملًا هِيَ:

a) 16 **b)** -12

c) 12 **d)** -24

5 تحليلُ المقـدارِ $(4x^2y-4y)$ إلى عواملِـهِ الأوليةِ تحليلًا كاملًا هوَ:

a) $4y(x-1)(x+1)$ **b)** $4y(x^2 - 1)$

c) $(2x-2)(2x+2)$ **d)** $(x-1)(x+1)$

6 قطعةُ أرضٍ مستطيلةُ الشكلِ، مساحتُها $(x^2+3x-10)$ وحدةً مربعةً، إذا كانَ أحـدُ أبعادِها $(x + 5)$ وحدةٍ، فإنَّ بُعدَها الآخرَ هُوَ:

a) $x - 2$ **b)** $x + 2$

c) $x - 5$ **d)** $x + 10$

7 تحليلُ المقدارِ $(w^4 - 1)$ إلى عواملِهِ الأوليةِ تحليلًا كاملًا هوَ:

a) $(w-1)(w+1)$

b) $(w-1)(w+1)(w^2+1)$

c) $(w-1)(w^3+1)$

d) $(w-1)(w^2+2w+1)$

8 تحليـلُ المقـدارِ $(5x^2 + 16x + 3)$ إلـى عواملِهِ الأوليةِ تحليلًا كاملًا هوَ:

a) $(5x + 1)(x + 3)$

b) $(5x - 1)(x - 3)$

c) $(5x + 3)(x + 1)$

d) $(5x - 1)(x + 3)$

9 يبيّنُ الشكلُ المجاورُ مهبطًا للطائراتِ العموديةِ في إحدى المستشفياتِ، فإذا كانَ طولُ نصفِ قطرِ الدائرةِ الصغرى يقلُّ 8 أمتارٍ عَنْ طولِ نصفِ قطرِ الدائرةِ الكبرى، فأكتبُ مقدارًا جبريًّا يمثلُ الفرقَ بَيْنَ مساحتَيِ الدائرتَينِ، ثُمَّ أحلِّلُهُ تحليلًا كاملًا.

10 كرةُ قدمٍ: ملعبُ كرةِ قدمٍ مساحتُهُ $(x^2-28x-29)$ مترًا مربعًا، وطولُهُ $(x+1)$ مترًا، أجدُ محيطَهُ بدلالةِ x.

أحللُ كلًّا مِنَ المقاديرِ الجبريةِ الآتيةِ تحليلًا كاملًا:

11 $4s^2 - s + 12st - 3t$

12 $6m^3 - 12mn + m^2n - 2n^2$

13 $x^2 - 18x + 72$

14 $3x^2 - 48$

15 $100 - (x + 9y)^2$

16 $3x^2 - 15x + 18$

17 $2x^2 + 13x + 20$

18 $7y^2 + 16y - 15$

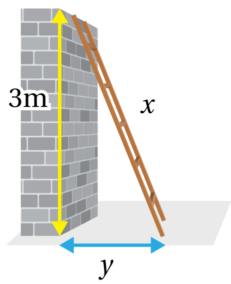
19 $2t^2 - t - 3$

20 $8y^2 - 10y - 3$

21 $2q^2 - 11q - 21$

22 $10w^2 + 11w - 8$

23 يستندُ سلّمٌ إلى حائطٍ كما في الشكلِ المجاورِ. إذا كانَ طولُ السلّمِ x وارتفاعُ الحائطِ 3m، فأجدُ المقدارَ الجبريَّ الذي يمثّلُ مربعَ المسافةِ الأفقيةِ بَيْنَ الحائطِ والسلّمِ، ثُمَّ أحللُهُ.



تدريبٌ على الاختباراتِ الدّوليّةِ

24 أيُّ الآتيةِ عاملانِ لثلاثيِّ الحدودِ $x^2 + x - 42$؟

a) $(x-7)(x-6)$ b) $(x+7)(x-6)$

c) $(x-7)(x+6)$ d) $(x+7)(x+6)$

25 أحدُ المقاديرِ الجبريةِ الآتيةِ ليسَ مُربّعًا كاملًا:

a) $9x^2 + 6x + 1$ b) $x^2 + 0.4x + 0.04$

c) $4x^2 - 4x + 1$ d) $x^2 + 4x + 16$

26 العاملُ المُشتَرَكُ الأكبرُ للحدَّينِ الجبريَّينِ $6a^2b^3, 10a^3b$ هوَ:

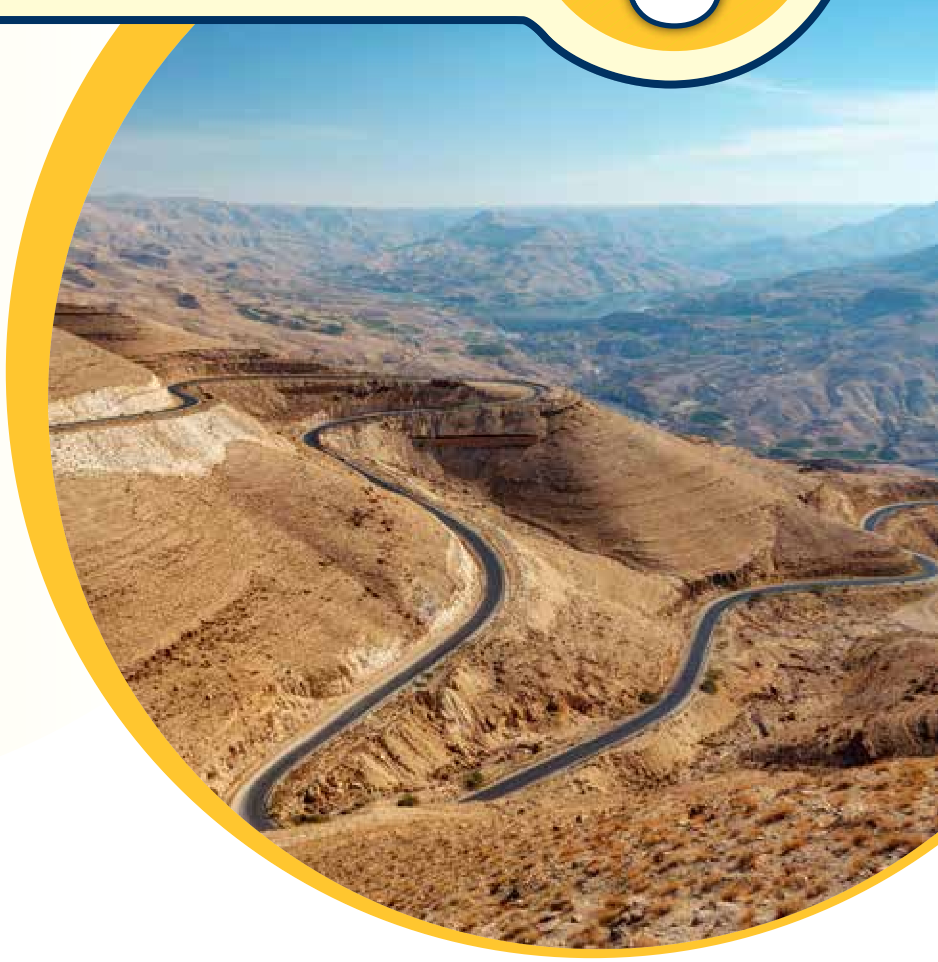
a) $3a^2b$ b) $2a^2b^2$ c) $2a^2b$ d) a^2b

27 إذا كانَ $a-b=3,\ a^2-b^2=33$، فأجدُ قيمةَ $a+b$:

a) 14 b) 30 c) 36 d) 11

الوحدةُ 3

المعادلاتُ الخطّيةُ بمتغيّرينِ



ما أهميَّةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُستعملُ المعادلاتُ الخطيّةُ في نمذجةِ المواقفِ العلميّةِ والحياتيّةِ، ويقدّمُ لنا مفهومُ مَيلِ مُنْحنى المعادلةِ الخطيّةِ تفسيرًا لكيفيّةِ تَغيُّرِ كميّةٍ بالنسبةِ إلى كميّةٍ أخرى، مثلَ تحديدِ شدّةِ انحدارِ الطرقِ بإيجادِ نسبةِ تغيُّرِ الارتفاعِ إلى المسافةِ الأفقيّةِ المقطوعةِ؛ وذلكَ لتنبيهِ السائقينَ على الحذرِ عندَ القيادةِ في الطرقِ الشديدةِ الانحدارِ، مثلَ طريقِ وادي الموجبِ جنوبِ الأردنِّ.

تعلَّمتُ سابِقًا:

- ✓ التعبيرَ عنِ الاقترانِ الخطّيِّ بطرائقَ متعددةٍ.
- ✓ تمثيلَ الاقترانِ الخطّيِّ بيانيًّا.
- ✓ تمثيلَ التناسُبِ الطرديِّ بيانيًّا أو في جدولٍ.

سأتعلّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- إيجادَ ميلِ الخطِّ المستقيمِ.
- إيجادَ معادلةِ الخطِّ المستقيمِ بطرائقَ متعددةٍ.
- العلاقةَ بينَ مَيلَي مستقيمَينِ متوازيَينِ ومتعامِدَينِ.

مشروعُ الوحدةِ: المعادلاتُ الخطيّةُ والخريطةُ

أَستعدُّ ومجموعتي لتنفيذِ مشروعِنا الخاصِّ الذي سنوظِّفُ فيهِ ما نتعلَّمُه في هذهِ الوحدةِ عنْ تمثيلِ المعادلةِ الخطّيّةِ بمتغيّرينِ.

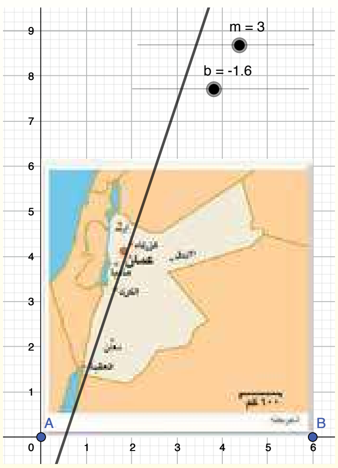
خُطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1 أبحثُ معَ أفرادِ مجموعتي في شبكةِ الإنترنت عنْ خريطةِ المملكـةِ الأردنيّـةِ الهاشـميّةِ، ثمَّ أحفظُهـا على جهازِ الحاسوبِ.

2 أسـتعملُ برمجيّةَ جيوجبرا لتمثيلِ معادلاتٍ خطّيّةٍ تربطُ بعضَ المحافظاتِ الأردنيةِ إحداهـا بالأُخرى منْ خلالِ الخُطواتِ الآتيةِ:

- أَنقُرُ على أيقونةِ Image منْ شـريطِ الأدواتِ، ثمَّ أختارُ صورةَ خريطةِ الأردنِّ.
- أُعدِّلُ موقعَ صورةِ الخريطةِ، وأختارُ مقاسًـا مناسبًا لها بتحريكِ النقطتينِ A و B اللتينِ تَظهرانِ عليها.

3 لإدراجِ مؤشـرٍ للتحكُّمِ في قيمةِ المَيـلِ أَتَّبعُ الإجراءاتِ الآتيةَ:



- أَنقُـرُ علـى أيقونةِ Slider مـنْ شـريطِ الأدواتِ، ثـمَّ أنقـرُ علـى الموقعِ الذي أُريدُه في الشاشـةِ ليظهرَ مربعُ حوارٍ.
- أسـتعملُ الرمزَ m بدلاً مِنَ الرمزِ a فـي مربّعِ الحوارِ ليدلَّ على المَيلِ، ثمَّ أُحدّدُ أقلَّ قيمةٍ وأعلى قيمةٍ للمَيلِ (مثلًا أقلُّ قيمةٍ -20 وأعلى قيمةٍ 20).

4 أكرّرُ الخطوةَ السـابقةَ لإدراجِ مؤشـرٍ للتحكُّـمِ في قيمةِ المقطعِ y، وأستعملُ الرمزَ b بدلاً مِنَ الرمزِ a.

5 أكتبُ في شـريطِ الإدخالِ معادلةَ المستقيمِ بصورةِ المَيلِ والمقطعِ ($y = mx + b$)؛ ليَظهرَ تمثيلٌ بيانيٌّ لمستقيمٍ.

6 أُحرّكُ مؤشّرَ الميلِ ومؤشّـرَ المقطعِ y لتغيُّرِ موقعِ الخطِّ؛ ليمرَّ بمحافظتينِ أختارُهما (مثـلًا: الزرقاءُ والكركُ)، ثُمَّ أجدُ ميلَ المسـتقيمِ المارِّ بالمحافظتينِ والمقطعَ y لهُ منْ خلالِ المعادلةِ في شريطِ الإدخالِ.

7 لتغييرِ صورةِ المعادلةِ إلى الصورةِ القياسيةِ؛ أَنقُرُ بزرِّ الفأرةِ الأيمنِ على صيغةِ المعادلةِ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أَختارُ الصورةَ القياسيةَ للمعادلةِ مِنَ القائمةِ المنسدلةِ.

8 أرسمُ مسـتقيمًا آخرَ في المستوى موازيًا للمسـتقيمِ السابقِ معَ الانتباهِ إلى اختيارِ رمزينِ آخَرينِ للدلالةِ على المَيلِ والمقطعِ y، ثـمَّ أُحرِّكُهُ حتى يمُرَّ في إحـدى المحافظاتِ على الخريطةِ، وأُحدِّدُ معادلتَهُ وميلَهُ والمقطعَ y لهُ.

9 أُكرِّرُ الخُطواتِ السابقةَ معَ محافظاتٍ أُخرى.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ مـعَ أفرادِ مجموعتي عرضًـا تقديميًّا (بوربوينـت) نُبيِّنُ فيهِ خُطواتِ العملِ في المشروعِ، والنتائجَ التي توصَّلْنا إليها موضَّحةً بالصورِ، ثمَّ نعرضُه على الزملاءِ/ الزميلاتِ في مختبرِ الحاسوبِ.

الدرسُ 1 المعادلةُ الخطيّةُ بالصورةِ القياسيّةِ

فكرةُ الدرسِ

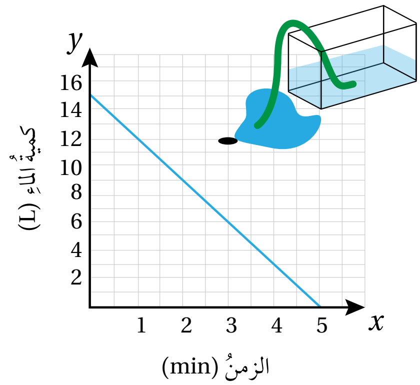
- أتعرّفُ الصيغةَ القياسيّةَ للمعادلةِ الخطيّةِ.
- أُمثِّلُ المعادلةَ الخطيّةَ بيانيًّا.

المصطلحاتُ

الصورةُ القياسيّةُ، الحدُّ الثابتُ، المقطعُ x ، المقطعُ y

أستكشفُ

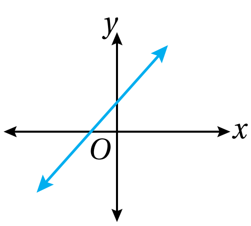
يُبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ العلاقةَ بينَ كميّةِ الماءِ المتبقيّةِ في حوضٍ باللتراتِ والزمنِ المنقضي بالدقائقِ منذُ بَدْءِ تصريفِ الماءِ منَ الحوضِ.



1 ما كميّةُ الماءِ التي كانتْ في الحوضِ عندَ بدْءِ التصريفِ؟

2 كمْ دقيقةً يحتاجُ إليها تصريفُ الحوضِ من الماءِ تصريفًا كاملاً؟

تعلّمْتُ سابقًا أنَّ المعادلةَ الخطّيّةَ هيَ المعادلةُ التي تُمثَّلُ بيانيًّا بخطٍّ مستقيمٍ كما في الشكلِ المجاورِ. وتُكتَبُ المعادلةُ الخطّيّةُ عادةً على الصورةِ $Ax + By = C$، والتي تُسمّى **الصورةَ القياسيةَ** (standard form) للمعادلةِ الخطّيّةِ.



مفهومٌ أساسيٌّ

الصورةُ القياسيّةُ للمعادلةِ الخطّيّةِ

- **بالكلماتِ** الصورةُ القياسيّةُ للمعادلةِ الخطّيّةِ هي:

$$Ax + By = C$$

حيثُ A, B, C أعدادٌ حقيقيةٌ، ولا تكونُ قيمتا A و B معًا صفرًا.

يمكنُ استعمالُ الصورةِ القياسيةِ لتحديدِ ما إذا كانَتِ المعادلةُ خطّيّةً أَمْ لا.

مثال 1

أُحدّدُ ما إذا كانتْ كلُّ معادلةٍ ممّا يأتي خطّيّةً أَمْ لا:

1 $\boldsymbol{y = 6 - 5x}$

أعيدُ كتابةَ المعادلةِ بحيثُ يكونُ كِلا المتغيرينِ في الطَّرفِ نفسِه منَ المعادلةِ.

المعادلةُ الأصليةُ $y = 6 - 5x$

أُضيفُ $5x$ إلى طرفَيِ المعادلةِ $\quad y + 5x = 6 - 5x + 5x$

أُبسّطُ $\quad 5x + y = 6$

المعادلةُ $5x + y = 6$ مكتوبةٌ على الصورةِ $Ax + By = C$، حيثُ $A = 5, B = 1, C = 6$، إذنْ فهيَ معادلةٌ خطّيّةٌ.

2 $\mathbf{3xy - 4x = 7}$

بما أنَّ الحدَّ $3xy$ فيهِ متغيرانِ، فإنَّه لا يمكنُ كتابةُ المعادلةِ على الصورةِ $Ax + By = C$، إذنْ فهيَ ليستْ خطيّةً.

3 $\mathbf{4x^2 - 8y = 12}$

بما أنَّ المتغيرَ x مرفوعٌ للأُسِّ 2، فإنَّهُ لا يمكنُ كتابةُ المعادلةِ على الصورةِ $Ax + By = C$، إذنْ فهيَ ليسَتْ خطّيّةً.

4 $\mathbf{\frac{7}{5}x = -4}$

يمكنُ كتابةُ المعادلةِ $\frac{7}{5}x = -4$ على الصورةِ $Ax + By = C$ كما يلي: $\frac{7}{5}x + 0y = -4$،

حيثُ $A = \frac{7}{5}, B = 0, C = -4$، إذنْ فهيَ معادلةٌ خطّيّةٌ.

أتحققُ من فهمي:

5 $\mathbf{2x = 1 - 3y}$

6 $\mathbf{x^2 - 8y = 3}$

7 $\mathbf{\frac{1}{5}y = 2}$

التمثيلُ البيانيُّ للمعادلةِ الخطيّةِ هو مستقيمٌ يمرُّ في النقاطِ جميعِها التي تمثّلُ حلولاً للمعادلةِ، وأيُّ نقطةٍ تقعُ على هذا المستقيمِ تمثّلُ حلًّا للمعادلةِ.

يمكنُ تمثيلُ المعادلةِ بإنشاءِ جدولِ قيمٍ، وذلكَ باختيارِ قيمٍ للمتغيرِ x وتعويضِها في المعادلةِ لإيجادِ قيمِ y المقابلةِ لها، ثمَّ تمثيلِ الأزواجِ المرتَّبةِ الناتجةِ في المستوى الإحداثيِّ.

أتذكّرُ

حلُّ المعادلةِ الخطيّةِ هو الزوجُ المرتَّبُ الذي ينتجُ عنْ تعويضِه في المعادلةِ عبارةٌ صحيحةٌ.

مثال 2

1 أمثّلُ المعادلةَ $2x - y = 1$ بيانيًّا.

الْخُطْوَةُ 1 أحلُّ المعادلةَ بالنسبةِ إلى y؛ لتسهيلِ عمليةِ إيجادِ قيمِ y المقابلةِ لقيمِ x.

$2x - y = 1$ المعادلةُ الأصليةُ

$2x - y - 2x = 1 - 2x$ أطرحُ $2x$ من كِلا الطرفينِ

$\frac{-y}{-1} = \frac{1-2x}{-1}$ أقسمُ طرَفَيِ المعادلةِ على -1

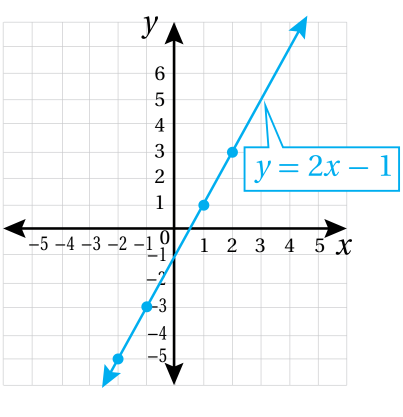
$y = 2x - 1$ أبسّطُ

الْخُطْوَةُ 2 أُنشئُ جدولَ قيمٍ.

أختارُ قيمًا للمتغيرِ x، ثمَّ أعوّضُها في المعادلةِ لأجدَ قيمَ y المقابلةَ لها.

x	$2x - 1$	y	(x, y)
-2	$2(-2) - 1$	-5	$(-2, -5)$
-1	$2(-1) - 1$	-3	$(-1, -3)$
0	$2(0) - 1$	-1	$(0, -1)$
1	$2(1) - 1$	1	$(1, 1)$
2	$2(2) - 1$	3	$(2, 3)$

الْخُطْوَةُ 3 أمثّلُ الأزواجَ المُرتَّبةَ في المستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أرسمُ مستقيمًا يمرُّ بها جميعًا.



أتعلّمُ

عنـدَ تمثيلِ المعادلـةِ بيانيًّا، أسـتعملُ الأسهمَ لتوضيحِ أنَّ المستقيمَ غيرُ مُنْتهٍ.

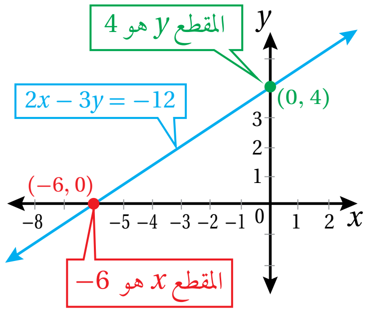
أتحققُ من فهمي:

2 أمثّلُ المعادلةَ $y = 3x$ بيانيًّا.

3 أمثّلُ المعادلةَ $2y - 4x = 6$ بيانيًّا.

بما أنَّهُ يمكنُ تمثيلُ المستقيمِ بنقطتينِ، فإنَّ أسهلَ طريقةٍ لتمثيلِ المعادلةِ الخطيّةِ هي إيجادُ نقطتَيْ تقاطعِ المستقيمِ معَ المحورينِ الإحداثيّينِ (إنْ أمكنَ).

يُسمّى الإحداثيُّ x للنقطةِ التي يقطعُ عندَها المستقيمُ المحورَ x **المقطعَ x** (x–intercept)، ويُسمّى الإحداثيُّ y للنقطةِ التي يقطعُ عندَها المستقيمُ المحورَ y **المقطعَ y** (y–intercept).



عندما تكونُ المعادلةُ الخطّيّةُ مكتوبةً بالصورةِ القياسيةِ، فإنَّهُ يسهلُ تحديدُ المقطعَينِ الإحداثيَّينِ وتمثيلُ المعادلةِ بيانيًّا.

مثال 3

أمثّلُ كلَّ معادلةٍ ممّا يأتي بيانيًّا باستعمالِ المقطعِ x والمقطعِ y:

1 $3x - 2y = 6$

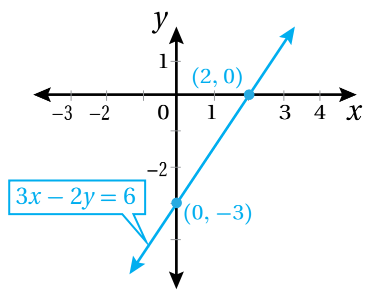
الْخُطْوَةُ 1 أجدُ المقطعَ x والمقطعَ y.

المعادلةُ الأصليةُ	$3x - 2y = 6$
أُعوّضُ $y = 0$	$3x - 2(0) = 6$
أقسمُ كِلا الطرفينِ على 3	$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$
أُبسّطُ	$x = 2$

المعادلةُ الأصليةُ	$3x - 2y = 6$
أُعوّضُ $x = 0$	$3(0) - 2y = 6$
أقسمُ كِلا الطرفينِ على -2	$\frac{-2y}{-2} = \frac{6}{-2}$
أُبسّطُ	$y = -3$

إذنْ، فالمقطعُ x هو 2، والمقطعُ y هو -3

الْخُطْوَةُ 2 أُمثّلُ نقطتَيْ تقاطعِ المستقيمِ معَ المحورينِ الإحداثيّينِ في المستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أرسمُ مستقيمًا يصلُ بينَ النقطتينِ.



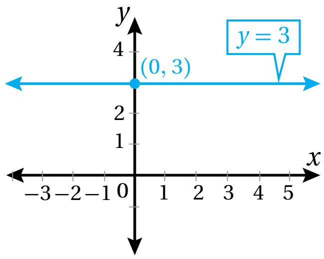
بما أنَّ المقطعَ x هُوَ 2، فإنَّ المستقيمَ يقطعُ المحورَ x في النقطةِ $(2, 0)$، وبما أنَّ المقطعَ y هو -3، فإنَّ المستقيمَ يقطعُ المحورَ y في النقطةِ $(0, -3)$، أُمثّلُ النقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أرسمُ مستقيمًا يصلُ بينَهُما.

2 $y = 3$

الْخُطْوَةُ 1 أكتبُ المعادلةَ بالصورةِ القياسيةِ.

المعادلةُ الأصليةُ	$y = 3$
الصورةُ القياسيةُ للمعادلةِ	$0x + 1y = 3$

الْخُطْوَةُ 2 أجدُ المقطعَ x والمقطعَ y.



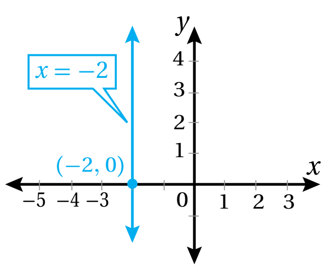
أُلاحظُ أنَّ المقطعَ y هو 3، ولا يوجدُ مقطعُ x، وأُلاحظُ أيضًا أنَّ قيمةَ $y = 3$ لأيِّ قيمةِ x؛ لذا فإنَّ التمثيلَ البيانيَّ للمعادلةِ $y = 3$ هو مستقيمٌ أفقيٌّ يقطعُ المحورَ y في النقطةِ $(0, 3)$.

3 $x = -2$

الْخُطْوَةُ 1 أكتبُ المعادلةَ بالصورةِ القياسيةِ.

المعادلةُ الأصليةُ	$x = -2$
الصورةُ القياسيةُ للمعادلةِ	$1x + 0y = -2$

الْخُطْوَةُ 2 أجدُ المقطعَ x والمقطعَ y.



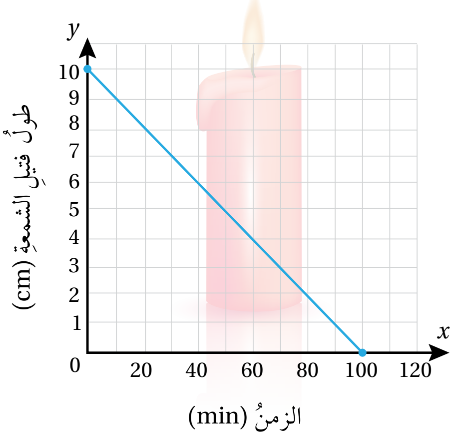
أُلاحظُ أنَّ المقطعَ x هو -2، ولا يوجدُ مقطعُ y، وأُلاحظُ أيضًا أنَّ قيمةَ $x = -2$ لأيِّ قيمةِ y؛ لذا فإنَّ التمثيلَ البيانيَّ للمعادلةِ $x = -2$ هو مستقيمٌ رأسيٌّ يقطعُ المحورَ x في النقطةِ $(-2, 0)$.

أتحققُ من فهمي:

4 $4x - y = 1$ **5** $y = -7$ **6** $x = 5$

مثال 4: منَ الحياةِ

شمعةٌ: يبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ العلاقةَ بينَ طولِ فتيلِ شمعةٍ بالسنتيمتراتِ و الزمنِ بالدقائقِ منذُ بدءِ إشعالِه.



1 أجدُ المقطعَ x والمقطعَ y للعلاقةِ.

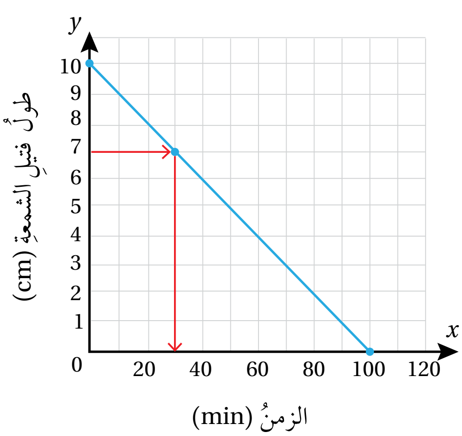
المقطعُ x هو 100   قيمةُ $x = 100$ عندَما قيمةُ $y = 0$

المقطعُ y هو 10   قيمةُ $y = 10$ عندَما قيمةُ $x = 0$

2 أصفُ مدلولَ كلٍّ منَ المقطعينِ في هذهِ الحالةِ.

المقطعُ y يساوي 10 ويعني أنَّ طولَ فتيلِ الشمعةِ 10 cm عندَ إشعالِه، المقطعُ x يساوي 100 ، وهذا يعني أنَّ فتيلَ الشمعةِ احترقَ احتراقًا كاملاً بعدَ 100 دقيقةٍ، ولم يبقَ منهُ شيءٌ.

3 بعدَ كمْ دقيقةٍ يكونُ طولُ فتيلِ الشمعةِ 7 cm؟

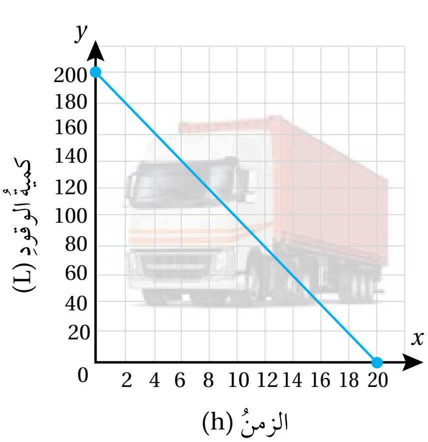


أُحدّدُ 7 cm على المحورِ y، ثمَّ أُحدّدُ النقطةَ التي تقابلُها على المستقيمِ، وأحدّدُ الإحداثيَّ x للنقطةِ وهو 30.

إذنْ، يكونُ طولُ فتيلِ الشمعةِ 7 cm بعدَ 30 دقيقةً منْ إشعالِه.

أتحققُ من فهمي:

وقودٌ: يبينُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ العلاقةَ بينَ عددِ لتراتِ الوقودِ المتبقيةِ في خزانِ شاحنةٍ وعددِ ساعاتِ قيادتِها.



4 أجدُ المقطعَ x والمقطعَ y للعلاقةِ.

5 أصفُ مدلولَ كلٍّ منَ المقطعينِ في هذهِ الحالةِ.

6 بعدَ كمْ ساعةِ قيادةٍ يبقى في خزانِ الشاحنةِ 100 L منَ الوقودِ؟

أتدرب وأحل المسائل

أحدّدُ ما إذا كانتْ كلُّ معادلةٍ ممّا يأتي خطيّةً أم لا:

1) $2x = 7y$

2) $y = 1 - x^2$

3) $9xy + 11x = 6$

أمثّلُ كلَّ معادلةٍ ممّا يأتي بيانيًّا بإنشاءِ جدولِ قيمٍ:

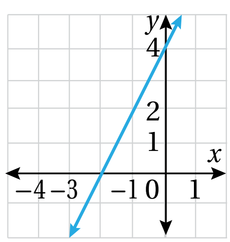
4) $y = -1$

5) $y - x = 8$

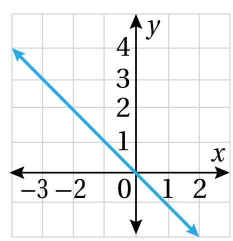
6) $3x + 2y = 15$

أجدُ المقطعَ x والمقطعَ y لكلِّ معادلةٍ ممّا يأتي:

7)



8)



أمثّلُ كلَّ معادلةٍ ممّا يأتي بيانيًّا باستعمالِ المقطعِ x والمقطعِ y:

9) $x = 4y - 6$

10) $x + 6 = 0$

11) $\frac{4x}{3} = \frac{3y}{4} + 1$

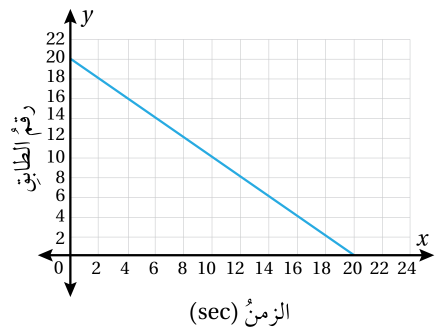
رحلةٌ: ملأَ رامي خزانَ سيارتِه بالوقودِ استعدادًا لرحلةٍ إلى مدينةِ العقبةِ. والمعادلةُ $y = 18 - 2x$ تعطي كميّةَ الوقودِ باللتراتِ المتبقيةِ في خزانِ السيارةِ بعدَ قيادتِها x ساعةً.

12) أجدُ المقطعَ x والمقطعَ y للمعادلةِ المُعطاةِ، ثمَّ أستعملُ المقطعينِ لتمثيلِ المعادلةِ بيانيًّا.

13) أصفُ مدلولَ كلٍّ منَ المقطعينِ في هذهِ الحالةِ.

14) بعدَ كمْ ساعةٍ منْ قيادةِ السيارةِ يتبقى $\frac{1}{4}$ الوقودِ في الخزانِ؟

بنايــةٌ: يبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ العلاقةَ بينَ رقــمِ الطابَقِ في أحدِ الأبراجِ التجاريةِ والزمــنِ الذي يقضيهِ الراكــبُ بالثواني في المِصْعدِ حتى يصلَ إلــى هذا الطابقِ. فإذا علمتُ أنَّ رقمَ الطابقِ الأرضيِّ 0، فأجيبُ عنْ كلٍّ ممّا يأتي:



15 منْ أيِّ طابقٍ صعِدَ الراكبُ إلى المِصْعدِ؟

16 بعـدَ كمْ ثانيةٍ وصلَ الراكــبُ إلى الطابَقِ الأرضيِّ؟

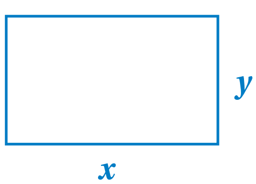
17 بعـدَ كمْ ثانيةٍ وصلَ الراكــبُ إلى الطابقِ الثامنِ؟

أتذكّرُ

الأعدادُ الكليّةُ:

0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

هندسةٌ: محيطُ المستطيلِ في الشكلِ المجاورِ 12 cm



18 أكتبُ معادلةً بالصورةِ القياسيةِ تمثّلُ محيطَ المستطيلِ.

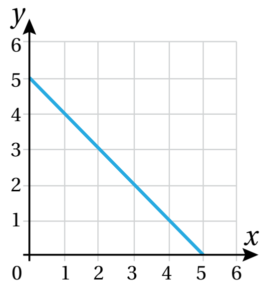
19 أجدُ المقطعَ x والمقطعَ y للتمثيلِ البيانيِّ لمعادلةِ محيطِ المستطيلِ.

20 أمثّلُ المعادلةَ بيانيًّا.

21 أجدُ ثلاثةَ أزواجٍ مرتبةٍ تمثّلُ أبعادَ المستطيلِ، على أنْ تكونَ قيمُ x و y أعدادًا كليّةً.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

22 **تحدٍّ:** يبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ المستقيمَ $x + y = 5$.



أرســمُ مســتقيمًا على الصــورةِ $x = a$، ومســتقيمًا علــى الصورةِ $y = b$، علــى أنْ تكونَ المِســاحةُ بينَ المستقيماتِ الثلاثةِ 4.5 وحداتٍ مربعةٍ.

23 **تبريرٌ:** أمثّلُ المعادلاتِ $x = 5, x = 2, y = -2, y = 1$ في المســتوى الإحداثيِّ نفسِه، ثمَّ أحدّدُ الشكلَ الهندسيَّ المغلقَ الناتجَ عنِ المستقيماتِ. أُبرّرُ إجابتِي.

24 **أكتبُ** كيفَ أكتبُ معادلةً خطيّةً بالصورةِ القياسيةِ؟

الدرسُ 2 ميلُ المستقيمِ

فكرةُ الدرسِ

أجدُ مَيلَ المستقيمِ.

المصطلحاتُ

مَيلُ المستقيمِ، التغيُّرُ الرأسيُّ، التغيّرُ الأفقيُّ، معدلُ التغيُّرِ.

أستكشفُ

تُستعملُ إشارتا المرورِ المجاورتانِ لتنبيهِ السائقينَ على مقدارِ انحدارِ الطريقِ، وذلكَ بإيجادِ نسبةِ الارتفاعِ أو الهبوطِ إلى كلِّ 100 m أفقيًّا. فما الفرقُ بينَ الإشارتينِ؟

ميلُ المستقيمِ (slope of a line) هو مصطلحٌ يُستعملُ لوصفِ مقدارِ انحدارِ المستقيمِ. فالمَيلُ هو نسبةُ **التغيّرِ الرأسيِّ** (rise) إلى **التغيّرِ الأفقيِّ** (run).

$$\text{المَيلُ} = \frac{\text{التغيّرُ الرأسيُّ}}{\text{التغيّرُ الأفقيُّ}}$$

ولإيجادِ ميلِ المستقيمِ غيرِ الرأسيِّ في المستوى الإحداثيِّ يُمكِنُنا إيجادُ نسبةِ التغَيُّرِ في الإحداثيِّ y (التغَيُّرِ الرأسيِّ) إلى التغَيُّرِ في الإحداثيِّ x (التغَيُّرِ الأفقيِّ) بينَ أيِّ نقطتينِ على المستقيمِ.

مفهومٌ أساسيٌّ — مَيلُ المستقيمِ

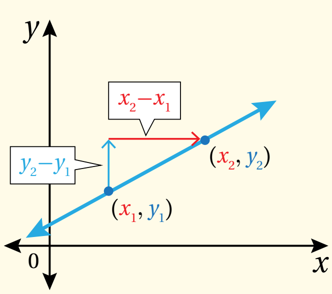
- **بالكلماتِ:** ميلُ المستقيمِ غيرِ الرأسيِّ هو نسبةُ التغيّرِ الرأسيِّ إلى التغيّرِ الأفقيِّ.
- **بالرموزِ:** يمكنُ إيجادُ الميلِ (m) للمستقيمِ غيرِ الرأسيِّ المارِّ بالنقطتينِ (x_1, y_1) و (x_2, y_2) على النحوِ الآتي:

$$m = \frac{\text{التغيّرُ الرأسيُّ}}{\text{التغيّرُ الأفقيُّ}}$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

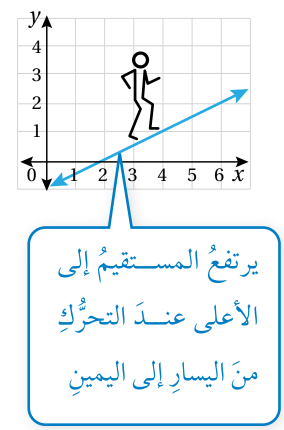
التغيرُ في y

التغيرُ في x

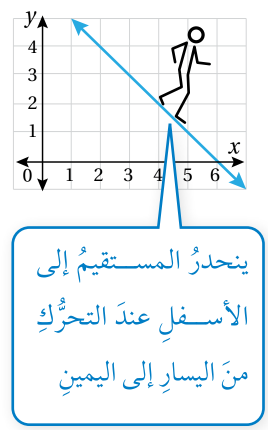


يمكنُ أن يكونَ ميلُ المســتقيمِ سالبًا أو موجبًا أو صفرًا أو غيرَ مُعرَّفٍ كما يظهرُ في التمثيلاتِ البيانيةِ أدناهُ. للمقارنةِ بينَ مَيلِ المستقيماتِ المختلفةِ أتخيّلُ نفسي أسيرُ على كلِّ منحنًى منَ اليسارِ إلى اليمينِ:

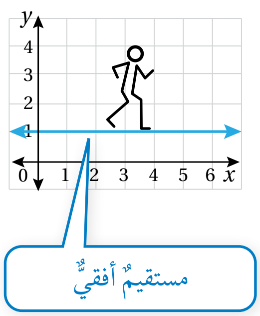
المَيلُ موجبٌ



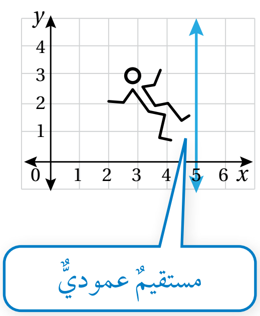
الميلُ سالبٌ



الميلُ صفرٌ



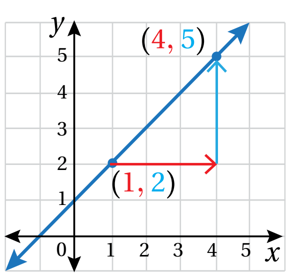
المَيلُ غيرُ مُعرَّفٍ



مثال 1

أجدُ ميلَ المستقيمِ المارِّ بكلِّ نقطتينِ ممّا يأتي:

1 $(1, 2), (4, 5)$



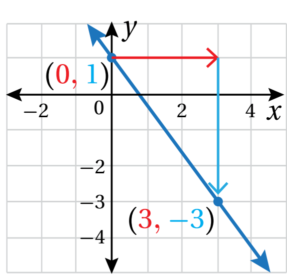
صيغةُ الميلِ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

أعوّضُ عنْ (x_1, y_1) بِـ $(1, 2)$ وعنْ (x_2, y_2) بِـ $(4, 5)$ $= \dfrac{5-2}{4-1}$

أُبسِّطُ $= \dfrac{3}{3} = 1$

إذنْ، مَيلُ المستقيمِ هو 1

2 $(0, 1), (3, -3)$



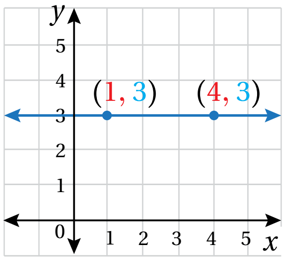
صيغةُ الميلِ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

أعوّضُ عنْ (x_1, y_1) بِـ $(0, 1)$ وعنْ (x_2, y_2) بِـ $(3, -3)$ $= \dfrac{-3-1}{3-0}$

أُبسِّطُ $= -\dfrac{4}{3}$

إذنْ، مَيلُ المستقيمِ هو $-\dfrac{4}{3}$

3 **(1, 3), (4, 3)**



صيغةُ الميلِ

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

أعوّضُ عنْ (x_1, y_1) بِـ $(1, 3)$

وعنْ (x_2, y_2) بِـ $(4, 3)$

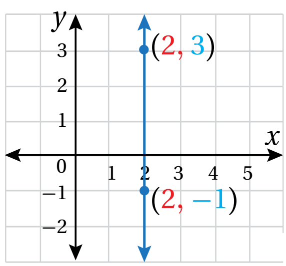
$$= \frac{3 - 3}{4 - 1}$$

أُبسِّطُ

$$= \frac{0}{3} = 0$$

إذنْ، مَيلُ المستقيمِ هو 0

4 **(2, 3), (2, −1)**



صيغةُ الميلِ

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

أعوّضُ عنْ (x_1, y_1) بِـ $(2, 3)$

وعنْ (x_2, y_2) بِـ $(2, -1)$

$$= \frac{-1-3}{2 - 2}$$

أُبسِّطُ

$$= \frac{-4}{0}$$

إذنْ، ميلُ هذا المستقيمِ غيرُ مُعرَّفٍ.

أتحققُ من فهمي:

5 **(−1, 2), (3, 5)**

6 **(−1, −2), (−4, 1)**

7 **(1, 2), (−3, 2)**

8 **(1, 5) ,(1, −4)**

إذا عُلِمَ ميلُ المستقيمِ وإحداثيّا نقطةٍ عليهِ، فيمكنُ إيجادُ الإحداثيِّ المجهولِ لأيِّ نقطةٍ أخرى على المستقيمِ.

مثال 2

1 أجدُ قيمةَ s التي تجعلُ ميلَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(-2, 1)$ و $(3, s)$ يساوي $\frac{3}{5}$

أفترضُ أنَّ النقطةَ $(-2, 1)$ هيَ (x_1, y_1)، والنقطةَ $(3, s)$ هيَ (x_2, y_2)

صيغةُ الميلِ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

أُعوّضُ $x_1 = -2, x_2 = 3, y_1 = 1, y_2 = s$: $\dfrac{3}{5} = \dfrac{s-1}{3-(-2)}$

أُبسِّطُ $\dfrac{3}{5} = \dfrac{s-1}{5}$

خاصيّةُ الضربِ التبادليِّ $5(s-1) = 3 \times 5$

خاصيّةُ التوزيعِ $5s - 5 = 15$

أجمعُ 5 لِكلا الطرفينِ $5s = 20$

أقسمُ طرفَيِ المعادلةِ على 5 $s = 4$

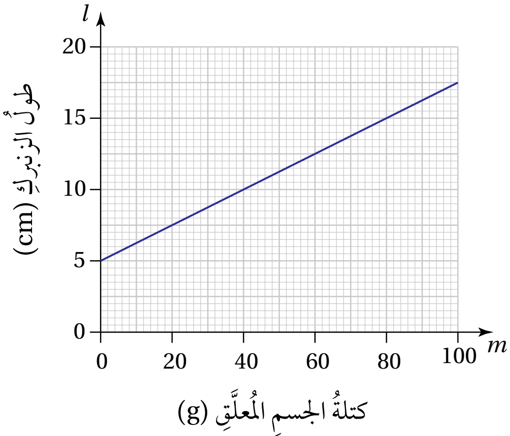
أتحققُ من فهمي:

2 أجدُ قيمةَ k التي تجعلُ ميلَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(3, 1)$ و $(k, 2)$ يساوي $-\frac{1}{6}$

معدّلُ التغيُّرِ (rate of change) هو نســبةٌ تصفُ مقدارَ تغيّرِ كميةٍ بالنســبةِ إلى تغيرِ كميةٍ أخرى، ويمكنُنا اســتعمالُ ميلِ المستقيمِ الذي يمثلُ العلاقةَ بينَ هاتينِ الكميتينِ لتفسيرِ معنى معدلِ التغيُّرِ في المسائلِ الحياتيةِ.

مثال 3: منَ الحياةِ

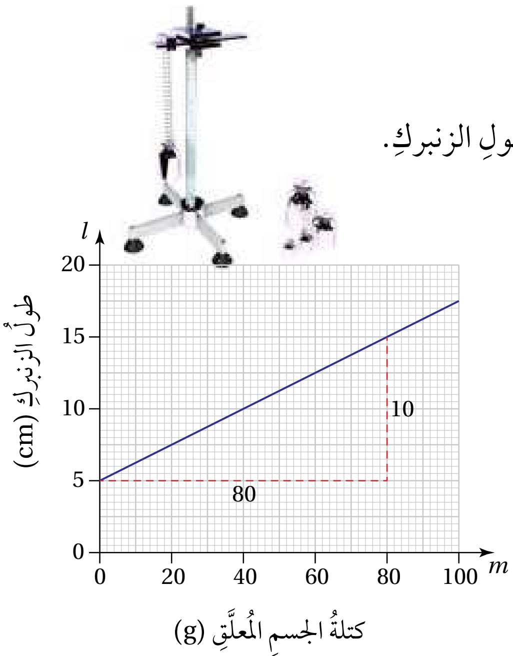
يبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ طولَ زنبركٍ l بالســنتيمتراتِ، عندَ تعليقِ جسمٍ كتلتُهُ m غرام بهِ.



1 أجدُ طولَ الزنبركِ قبلَ تعليقِ أيِّ كتلةٍ بهِ.

طولُ الزنبركِ قبــلَ تعليقِ أيِّ كتلةٍ بــهِ 5 cm، وهي القيمةُ التي تقابلُ الكتلةَ 0 g في التمثيلِ.

2 أجدُ معدّلَ تغيرِ طولِ الزنبركِ بالنسبةِ إلى كتلتِه، ثمَّ أبيّنُ ماذا يمثّلُ.



لإيجادِ معدلِ التغيّرِ أجدُ ميلَ المستقيمِ الذي يمثّلُ العَلاقةَ بينَ الكتلةِ وطولِ الزنبركِ.

أستعملُ النقطتينِ $(0, 5)$ و $(80, 15)$ لإيجادِ مَيلِ المستقيمِ.

صيغةُ الميلِ $\qquad m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

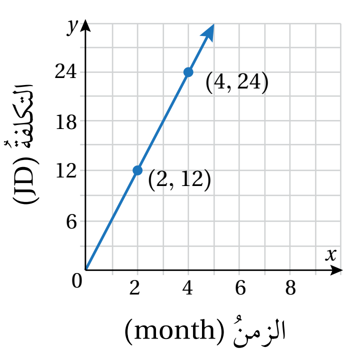
أعوّضُ عن (x_1, y_1) بِـ $(0, 5)$
وعن (x_2, y_2) بِـ $(80, 15)$ $\qquad = \dfrac{15 - 5}{80 - 0}$

أُبسِّطُ $\qquad = \dfrac{10}{80} = \dfrac{1}{8}$

إذنْ، ميلُ المســـتقيمِ هو $\frac{1}{8}$، وهو يمثلُ معدّلَ التغيُّرِ في طولِ الزنبركِ لكلِّ غرامٍ منَ الكتلةِ، حيثُ إنَّ طولَ الزنبركِ يزدادُ بمقدارِ $\frac{1}{8}$ cm لكلِّ غرامٍ يُضافُ إليهِ.

أتحققُ من فهمي:

يبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ متوسطَ تكلفةِ تشغيلِ ثلاجةٍ (بالدينارِ) أشهرًا عدةً.



3 أجدُ تكلفةَ تشغيلِ الثلاجةِ مدةَ 3 أشهرٍ.

4 أجدُ معدّلَ تغيّرِ تكلفةِ تشغيلِ الثلاجةِ بالنسبةِ إلى الزمنِ، ثمَّ أوضّحُ ماذا يمثّلُ.

أتدرب وأحل المسائل

أتذكّرُ

أُراعي الترتيبَ عندَ تعويضِ إحداثياتِ الزوجينِ المُرتّبينِ في صيغةِ المَيلِ $m = \dfrac{\boxed{y_2} - \boxed{y_1}}{\boxed{x_2} - \boxed{x_1}}$

أجدُ ميلَ المستقيمِ المارِّ بكلِّ نقطتينِ ممّا يأتي:

1 $(3, 3), (5, 7)$

2 $(6,1), (4,3)$

3 $(-2, -6), (-2, 6)$

4 $(5, -7), (0, -7)$

5 $(-1, 0), (0, -5)$

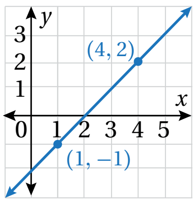
6 $(4, 1), (12, 8)$

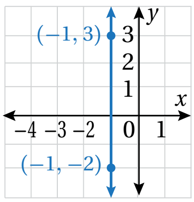
أجدُ قيمةَ s التي تجعلُ مَيلَ المستقيمِ (m) المارِّ بكلِّ نقطتينِ ممّا يأتي على نحوٍ ما هو مُعْطًى:

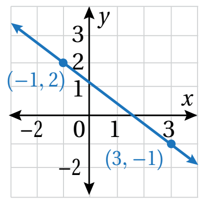
7 $(6, -2), (s, -6)$, $m = 4$

8 $(9, s), (6, 3)$, $m = -\frac{1}{3}$

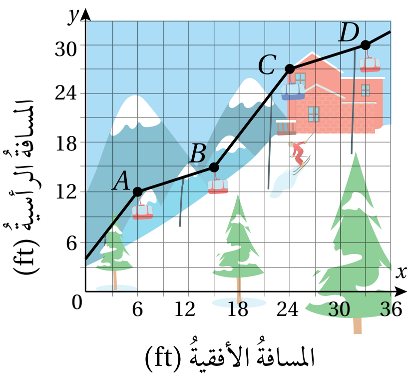
أحدّدُ ما إذا كانَ ميلُ كلِّ مستقيمٍ ممّا يأتي سالبًا أم موجبًا أم صفرًا أم غيرَ معرَّفٍ، ثمَّ أجِدُه:

9


10


11


تزلّجٌ: يبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ المنظرَ الجانبيَّ لِمِصْعدِ تزلُّجٍ.



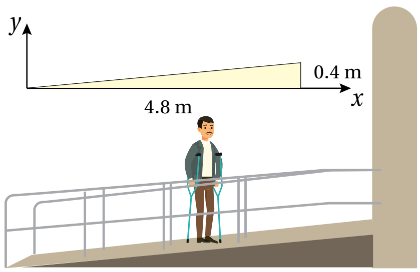
12 أجدُ مَيلَ كلٍّ منْ: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$

13 أيُّ جزءٍ منْ مِصْعدِ التزلُّجِ يُعدُّ الأشدَّ انحدارًا؟ أُبرّرُ إجابتي.

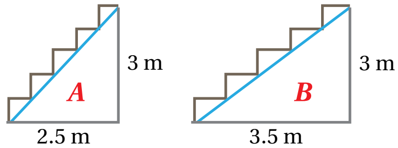
أتعلّمُ

كلّما زادتِ القيمةُ المطلقةُ للمَيلِ، كانَ المستقيمُ أشدَّ انحدارًا.

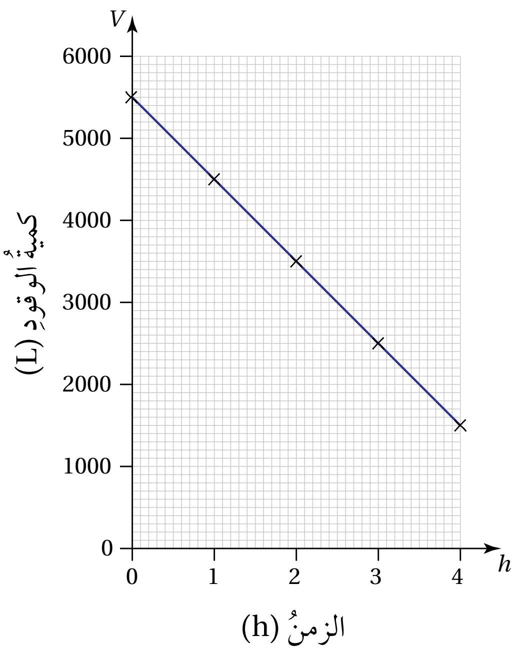
14 **منحَدَراتٌ:** تنصُّ قوانينُ البناءِ المتعلِّقةُ بمنحَدراتِ وصولِ الأشخاصِ ذوي الإعاقةِ الحركيّةِ إلى الأبنيةِ على أنَّ كلَّ ارتفاعٍ رأسيٍّ بمقدارِ 0.4 m يتطلّبُ مسارًا أفقيًّا طولُه 4.8 m. أجدُ مَيلَ هذا المُنحَدَرِ.



15 **درجٌ:** يبيّنُ الشكلُ المجاورُ دَرجَينِ مُصَمَّمينِ للدخولِ إلى أحدِ المباني. فأيُّ الدرجينِ أختارُ صعودَهُ للدخولِ إلى المبنى؟ أبرّرُ إجابتي.



طائـرةٌ: يبيّــنُ التمثيــلُ البيانيُّ المجاورُ كميّةَ الوقودِ V باللتراتِ في خزّانِ طائرةٍ بعدَ h ساعة.



16 ما كميّةُ الوقودِ في خزانِ الطائرةِ عندَ انطلاقِها؟

17 ما كميّةُ الوقودِ فــي الخزانِ بعدَ مرورِ 3.5 h؟

18 أجدُ معدّلَ تغيّرِ كميّةِ الوقودِ في الخزانِ بالنســبةِ إلى الزمنِ، ثمَّ أُبيّنُ ماذا يمثّلُ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

19 **أكتشفُ الخطأَ:** أوجَدَ مهندٌ مَيلَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(0, 2)$,$(5, 4)$، وكانَ حَلُّه على النحوِ الآتي:

$$m = \frac{2-4}{5-0} = -\frac{2}{5}$$ ✗

أُبيّنُ الخطأَ الذي وقعَ فيهِ مهندٌ وأُصحِّحُه.

إرشاد

أوظِّــفُ المَيلَ فــي تبريرِ إجابتي.

20 **تبريرٌ:** هل تقعُ النقاطُ $A(1, 3), B(4, 2), C(-2, 4)$ على المســتقيمِ نفسِــه؟ أبرّرُ إجابتي.

21 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أجدُ نقطتينِ تقعانِ على مستقيمٍ ميلُه -9

22 **أكتبُ** كيفَ أجدُ مَيلَ مستقيمٍ مارٍّ بنقطتينِ؟

الدرسُ 3 معادلةُ المستقيمِ بصيغةِ المَيلِ والمقطعِ

فكرةُ الدرسِ

أكتبُ معادلةَ المستقيمِ بصيغةِ المَيلِ والمقطعِ، وأمثّلُها بيانيًّا.

المصطلحاتُ

صيغةُ المَيلِ والمقطعِ

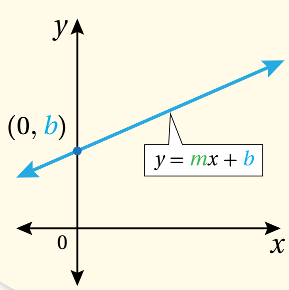
أستكشفُ

يبلغُ متوسطُ درجةِ الحرارةِ على سطحِ الأرضِ 20°C تقريبًا. وترتفعُ درجةُ الحرارةِ تحتَ سطحِ القشرةِ الأرضيةِ بمعدلِ 25°C لكلِّ كيلومترٍ منَ العمقِ. أكتبُ معادلةً بمتغيرينِ تمثّلُ درجةَ الحرارةِ لكلِّ كيلومترٍ تحتَ سطحِ الأرضِ.

تعلّمْتُ سابقًا كيفيّةَ إيجادِ الميلِ والمقطعينِ الإحداثيّينِ للمستقيمِ. ويمكنُني استعمالُ المَيلِ والمقطعِ y لكتابةِ معادلةِ أيِّ مستقيمٍ **بصيغةِ الميلِ والمقطعِ** (slop–intercept form).

مفهومٌ أساسيٌّ — صيغةُ المَيلِ والمقطعِ

- **بالكلماتِ:** صيغةُ الميلِ والمقطعِ للمعادلةِ الخطّيّةِ هيَ: $y = mx + b$، حيثُ m مَيلُ المستقيمِ، وb المقطعُ y لهُ.
- **بالرموزِ:** $y = mx + b$ (المَيلُ: m ، المقطعُ y: b)



مثال 1

1) أكتبُ معادلةَ المستقيمِ الذي ميلُه $\frac{4}{5}$ والمقطعُ y لهُ -7 بصيغةِ الميلِ والمقطعِ.

أعوّضُ المَيلَ والمقطعَ y في صيغةِ المَيلِ والمقطعِ

صيغةُ المَيلِ والمقطعِ	$y = mx + b$
أُعوّضُ $m = \frac{4}{5}, b = -7$	$y = \frac{4}{5}x + (-7)$
أُبسّطُ	$y = \frac{4}{5}x - 7$

إذنْ، معادلةُ المستقيمِ $y = \frac{4}{5}x - 7$

2 **أجدُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطةِ (1, 5) وميلُه 2 بصيغةِ الميلِ والمقطعِ.**

الْخُطْوَةُ 1 أستعملُ الميلَ وإحداثيَّي النقطةِ لإيجادِ قيمةِ b .

صيغةُ المَيلِ والمقطعِ	$y = mx + b$
أعوّضُ $m = 2, y = 5, x = 1$	$5 = 2(1) + b$
أُبسّطُ	$5 = 2 + b$
أَطرحُ 2 منْ كلا الطرفينِ	$5 - 2 = 2 + b - 2$
أُبسّطُ	$3 = b$

الْخُطْوَةُ 2 أعوّضُ الميلَ والمقطعَ y في صيغةِ الميلِ والمقطعِ.

صيغةُ المَيلِ والمقطعِ	$y = mx + b$
أعوّضُ $m = 2\ , b = 3$	$y = 2x + 3$

إذنْ، معادلةُ المستقيمِ $y = 2x + 3$

3 **أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ (2, 1) و (5, −8) بصيغةِ الميلِ والمقطعِ.**

الْخُطْوَةُ 1 أستعملُ النقطتينِ في إيجادِ المَيلِ.

صيغةُ الميلِ	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
أعوّضُ عن (x_1, y_1) بـِ $(2, 1)$ وعن (x_2, y_2) بـِ $(5, -8)$	$= \frac{-8 - 1}{5 - 2}$
أُبسّطُ	$= \frac{-9}{3} = -3$

إذنْ، الميلُ -3

الْخُطْوَةُ 2 أستعملُ الميلَ وإحداثيَّي إحدى النقطتينِ لإيجادِ قيمةِ b

صيغةُ المَيلِ والمقطعِ	$y = mx + b$
أعوّضُ $m = -3, y = 1, x = 2$	$1 = -3(2) + b$
أُبسّطُ	$1 = -6 + b$
أجمعُ 6 إلى الطرفينِ	$1 + 6 = -6 + b + 6$
أُبسّطُ	$7 = b$

إذنْ، فالمقطعُ y هو 7

الْخُطْوَةُ 3 أعوّضُ المَيلَ والمقطعَ y في صيغةِ المَيلِ والمقطعِ.

صيغةُ المَيلِ والمقطعِ $y = mx + b$

أعوّضُ $m = -3, b = 7$ $y = -3x + 7$

إذنْ، معادلةُ المستقيمِ $y = -3x + 7$

أتحقّقُ من فهمي:

4 أكتبُ معادلةَ المستقيمِ الذي ميلُه 5 والمقطعُ y لهُ -2 بصيغةِ المَيلِ والمقطعِ.

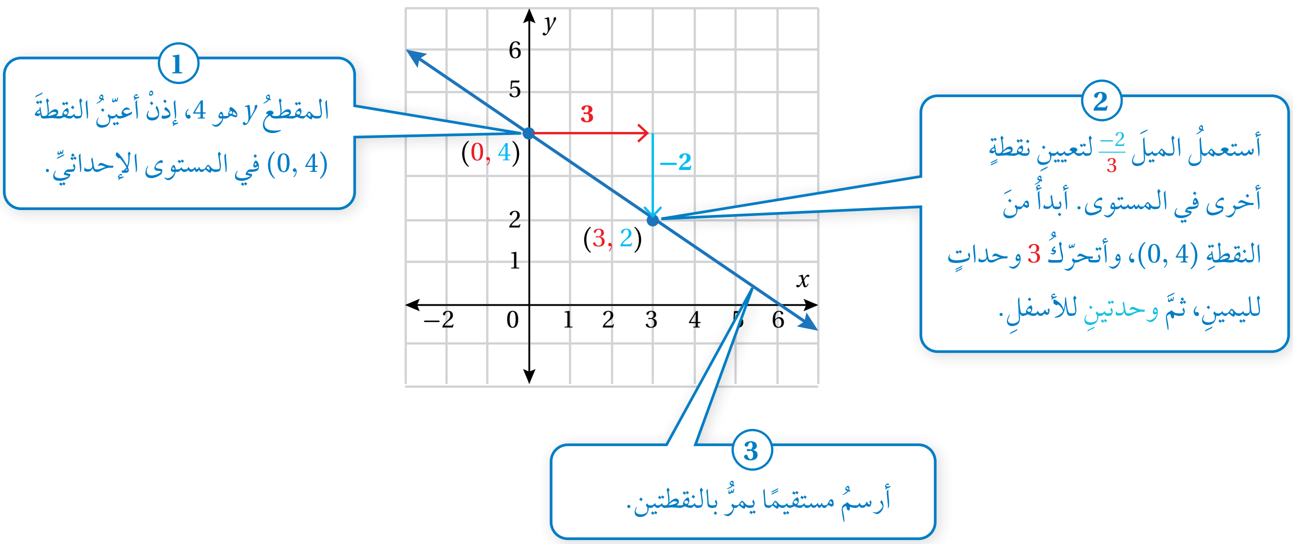
5 أجدُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطةِ $(-1, 0)$ وميلُه $\frac{1}{3}$ بصيغةِ المَيلِ والمقطعِ.

6 أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(0, -4)$ و $(-2, 6)$ بصيغةِ المَيلِ والمقطعِ.

يمكنُ استعمالُ الميلِ والمقطعِ y منَ المعادلةِ الخطّيةِ المكتوبةِ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ لتمثيلِ المستقيمِ.

مثال 2

1 أمثّلُ المعادلةَ $y = -\frac{2}{3}x + 4$ بيانيًّا باستعمالِ الميلِ والمقطعِ y.



أتحقق من فهمي:

2) $y = 2x + 1$

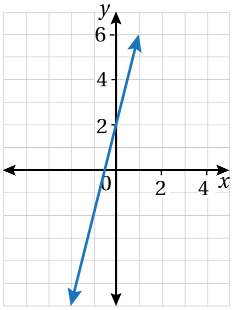
3) $y = x - 4$

4) $y = 3 - x$

تعلّمْتُ سـابقًا كيفيةَ تمثيلِ معادلةٍ خطّيةٍ مكتوبةٍ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ، وبالعكس يُمكِنُني كتابةُ معادلةِ مستقيمٍ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ عُرِفَ تمثيلُها البيانيُّ.

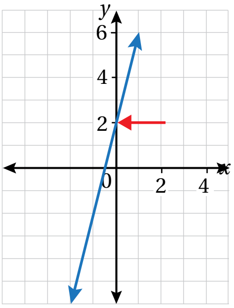
مثال 3

1) أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المُمَثَّلةَ بيانيًّا في الشكلِ المجاورِ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ:



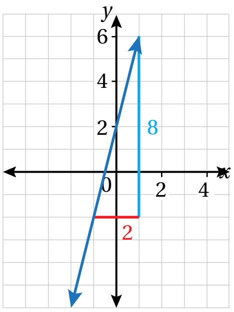
الْخُطْوَةُ 1 أجدُ المقطعَ y.

أُلاحظُ أنَّ المستقيمَ قطعَ المحورَ y عندَ 2، إذنْ، فالمقطعُ y هو 2



الْخُطْوَةُ 2 أجدُ الميلَ.

أختارُ نقطتينِ على المستقيمِ ولْتكونا النقطتَينِ $(-1, -2), (1, 6)$، وأجدُ مقدارَ التغيُّرِ الرأسيِّ والتغيُّرِ الأفقيّ بينَهُما.



عددُ الخطواتِ الأفقيةِ: 2

عددُ الخطواتِ الرأسيةِ: 8

$$\text{المَيلُ} = \frac{\text{التغيّرُ الرأسيُّ}}{\text{التغيّرُ الأفقيُّ}}$$

$$m = \frac{8}{2} = 4$$

الْخُطْوَةُ 3 أكتبُ معادلةً

أعوّضُ الميلَ والمقطعَ y في صيغةِ الميلِ والمقطعِ.

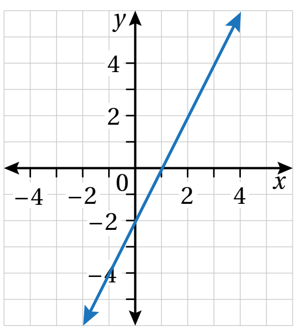
$y = mx + b$	صيغةُ المَيلِ والمقطعِ
$y = 4x + 2$	أعوّضُ $m = 4, b = 2$

إذنْ، معادلةُ المستقيمِ $y = 4x + 2$

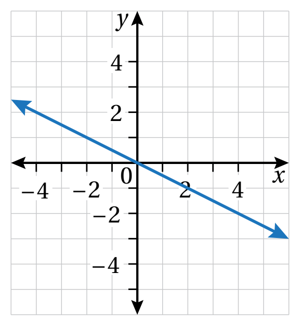
أتحققُ من فهمي:

أكتبُ معادلةَ المستقيمِ الممثَّلِ بيانيًّا في كلِّ شكلٍ ممّا يأتي بصيغةِ الميلِ والمقطعِ:

2



3



غالبًا ما يمثلُ المقطعُ y القيمةَ الابتدائيةَ في المسائلِ الحياتيةِ التي يتمُّ نمذجتُها بمعادلةٍ خطّيةٍ، ويمثلُ المَيلُ معدّلَ التغيُّرِ الثابتِ.

مثال 4: منَ الحياةِ

بطاريةٌ: إذا كانتِ النسبةُ المئويةُ لطاقةِ بطاريةِ جهازِ حاسوبٍ محمولٍ مشحونةٍ شحنًا تامًّا (بالصيغةِ العشريةِ) 1.00 ، وبعدَ تشغيلِ الجهازِ تبدأُ طاقةُ البطاريةِ بالتناقُصِ بنسبةِ 0.2 كلَّ ساعةٍ.

أفكِّرُ

لماذا عُبِّرَ عنْ نسبةِ التناقُصِ في طاقةِ البطاريةِ بـ -0.2 في المعادلةِ؟

1 **أكتبُ معادلةً خطّيةً بمتغيرينِ لإيجادِ نسبةِ الطاقةِ المتبقيّةِ في البطاريةِ بعدَ مرورِ ساعاتٍ عدّةٍ على تشغيلِ جهازِ الحاسوبِ.**

أفرضُ أنَّ x هيَ عددُ ساعاتِ تشغيلِ الحاسوبِ، و y هيَ نسبةُ الطاقةِ المتبقيةِ في البطاريةِ.

نسبةُ الطاقةِ عندَ بدايةِ التشغيلِ		عددُ ساعاتِ التشغيلِ		نسبةُ التناقصِ في الطاقةِ		نسبةُ الطاقةِ المتبقيّةِ
1	+	x	×	-0.2	=	y

$$y = -0.2 \times x + 1$$

2 أصفُ ما يمثِّلُه المقطعُ y والمَيلُ في المسـألةِ.

المقطعُ y يساوي 1، وهو يمثلُ نسبةَ الطاقةِ بدايةَ التشغيلِ بالصيغةِ العشريةِ، وتعني أنَّ البطاريةَ مشحونةٌ بنسبةِ 100%، أمّا المَيلُ فيمثلُ نسبةَ التناقُصِ في طاقةِ البطاريةِ كلَّ ساعةٍ (وهي نسبةٌ ثابتةٌ).

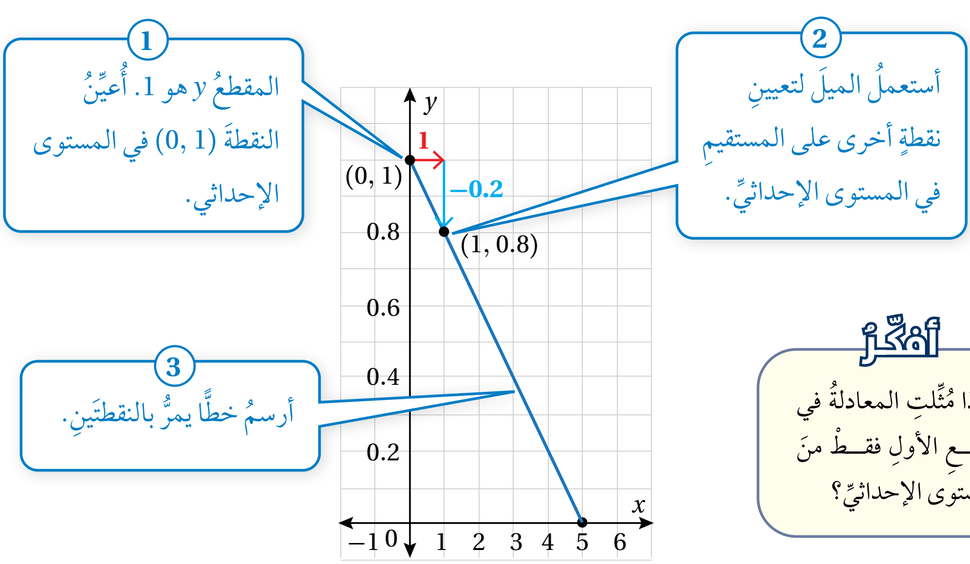
3 أجدُ المقطعَ x للمعادلةِ، ثمَّ أصفُ ما يمثلُه في المسألةِ.

لإيجادِ المقطعِ x، أعوِّضُ $y = 0$، ثمَّ أحلُّ المعادلةَ لأجدَ قيمةَ x.

المعادلةُ الأصليةُ	$y = -0.2x + 1$
أعوّضُ $y = 0$	$0 = -0.2x + 1$
أطرحُ 1 منْ كلا الطرفينِ	$0 - 1 = -0.2x + 1 - 1$
أقسمُ طرفَيِ المعادلةِ على -0.2	$\dfrac{-0.2x}{-0.2} = \dfrac{-1}{-0.2}$
أبسّطُ	$x = 5$

إذنْ، فالمقطعُ x هو 5، وهو يدلُّ على أنَّ البطاريةَ ستفقدُ شحنَها كليًّا بعدَ 5 ساعاتٍ منْ تشغيلِ جهازِ الحاسوبِ.

4 أمثّلُ المعادلةَ بيانيًّا باستعمالِ المَيلِ والمقطعِ y .



أفكّرُ

لماذا مُثِّلتِ المعادلةُ في الربـعِ الأولِ فقــطْ منَ المستوى الإحداثيِّ؟

5 بعدَ كمْ ساعةٍ تكونُ نسبةُ الطاقةِ في البطاريةِ 0.75؟

المعادلةُ الأصليةُ $y = -0.2x + 1$

أعوّضُ $y = 0.75$: $0.75 = -0.2x + 1$

أطرحُ 1 منْ كلا الطرفينِ $0.75 - 1 = -0.2x + 1 - 1$

أقسمُ طرفَي المعادلةِ على -0.2 : $\frac{-0.2x}{-0.2} = \frac{-0.25}{-0.2}$

أبسّطُ $x = 1.25$

إذنْ، ستكونُ نسبةُ الطاقةِ في البطاريةِ 0.75 بعدَ ساعةٍ وربعٍ.

أتحقّقُ من فهمي:

اشتراكُ هاتفٍ: تدفعُ فرحُ اشتراكًا شهريًّا لهاتفِها قيمتُه 5 دنانيرَ، وتدفعُ قرشينِ عنْ كلِّ دقيقةٍ تتحدثُ فيها بالهاتفِ.

1 أكتبُ معادلةً خطيّةً بمتغيرينِ لإيجادِ تكلفةِ ما تدفعُه فرحُ عندَ تحدُّثِها عددًا منَ الدقائقِ خلالَ الشهرِ.

2 أصفُ ما يمثّلُه المقطعُ y والميلُ في المسألةِ.

3 أجدُ المقطعَ x للمعادلةِ، ثمَّ أصفُ ما يمثّلُه في المسألةِ.

4 أمثّلُ المعادلةَ بيانيًّا باستعمالِ الميلِ والمقطعِ y.

أتدرب وأحل المسائل

1 أكتبُ معادلةَ المستقيمِ الذي ميلُه 1 والمقطعُ y لهُ -1 بصيغةِ الميلِ والمقطعِ.

2 أجدُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بنقطةِ الأصلِ وميلُه 4 بصيغةِ الميلِ والمقطعِ.

3 أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(-2, 4)$ و $(3, -1)$ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ.

4 أكتبُ معادلةَ المستقيمِ الأفقيِّ الذي يقطعُ المحورَ y في النقطةِ $(0, -5)$ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ.

أفكّرُ
هلْ يُمكنُ كتابةُ معادلةِ المستقيمِ الرأسيِّ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ؟

أمثلُ كلَّ معادلةٍ ممّا يأتي بيانيًّا باستعمالِ الميلِ والمقطعِ y:

5 $y = 3x + 4$

6 $y = 2x - 5$

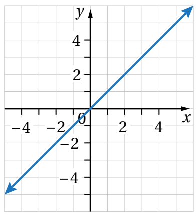
7 $y = \frac{x}{2} - 3$

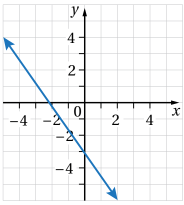
8 $y = 3x + 5$

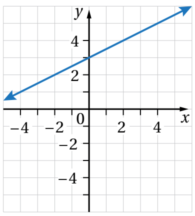
9 $y = \frac{x}{3} + 4$

10 $y = 4 - x$

أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المُمثَّلِ بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي بصيغةِ الميلِ والمقطعِ:

11 

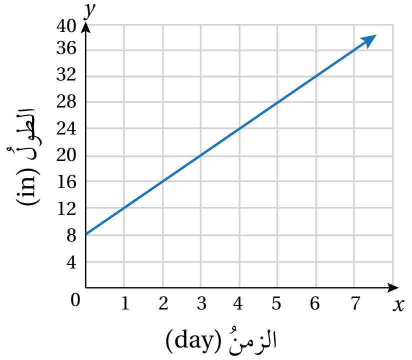
12 

13 

معلومةٌ

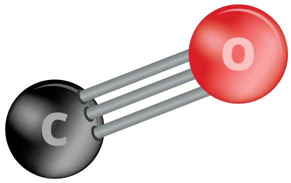
شجرةُ الموزِ هيَ في الحقيقةِ ليستْ شجرةً، بلْ هيَ عشبةٌ عملاقةٌ تقفُ مثلَ الأشجارِ وتُشابِهُ النخيلَ الاستوائيَّ، وتُعَدُّ أطولَ عشبةٍ على وجهِ الأرضِ.

أشجارٌ: يبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ أدناه العلاقةَ بينَ طولِ نبتةِ موزٍ بالإنشِ والزمنِ بالأيامِ منذُ زراعتِها.



14 كمْ كانَ طولُ الشجرةِ عندَ زراعتِها؟

15 أكتبُ معادلةً خطيةً بمتغيرَينِ تمثلُ مقدارَ نموِّ شجرةِ الموزِ بعدَ مرورِ أيامٍ عدّةٍ.



16 **بيئةٌ:** تتناقصُ انبعاثاتُ أولِ أكسيدِ الكربونِ في جميعِ أنحاءِ العالمِ بنحوِ 2.6 مليون طنٍّ متريٍّ كلَّ عامٍ. ففي عامِ 1991 بلغتِ انبعاثاتُ أولِ أكسيدِ الكربونِ 79 مليونَ طنٍّ متريٍّ. أكتبُ معادلةً خطيةً بمتغيرينِ تمثّلُ العلاقةَ بينَ انبعاثاتِ أولِ أكسيدِ الكربونِ والزمنِ. (إرشادٌ: أفترضُ أنَّ $x = 91$ تدلُّ على العامِ 1991).

معلومةٌ

أحدُ مصادرِ الحرارةِ الجوفيةِ للكرةِ الأرضيّةِ هو تقلّصُ الكرةِ الأرضيةِ تحتَ فِعْلِ الجاذبيّةِ عندَ نشأتِها منَ الغبارِ الكونيِّ.

17 **علومُ الأرضِ:** أعودُ إلى فِقْرةِ (أستكشفُ) بدايةَ الدرسِ، وأحلُّ المسألةَ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

18 **أكتشفُ المختلفَ:** أيُّ المعادلاتِ الآتيةِ مختلفةٌ؟ أبرّرُ إجابتي.

$6y = -4x + 24$

$y = 4 - \frac{2}{3}x$

$2x + 3y = 12$

$x = 6 - 1.5y$

$3x - 2y = 12$

19 **تحدٍّ:** أجدُ قيمةَ a في المعادلةِ $2y + ax = -5$ ، علمًا أنَّ ميلَ المعادلةِ $\frac{5}{2}$

20 **أكتبُ** كيفَ أكتبُ معادلةَ مستقيمٍ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ عُلم ميلُه والمقطعُ y لهُ.

الدرسُ 4 معادلةُ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ

فكرةُ الدرسِ

أكتبُ معادلةَ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ وأمثّلُها بيانيًّا.

المصطلحاتُ

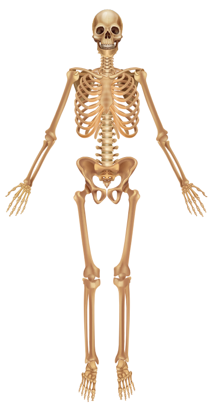
صيغةُ الميلِ ونقطةٍ.

أستكشفُ

تمثّلُ المعادلةُ $y - 60.81 = 5.74(x-5)$، العَلاقةَ بينَ طولِ الأنثى y سنتيمتر، وطولِ ساعدِها x سنتيمتر.

1 أجدُ ميلَ المستقيمِ الذي يمثّلُ المعادلةَ.

2 اكتشفَ علماءُ الآثارِ هيكلًا عظميًّا غيرَ كاملٍ لأنثى بساعدٍ طولُه 23 cm. أجدُ طولَ الهيكلِ العظميِّ.



تعلَّمْتُ في الدرسِ السابقِ كتابةَ معادلةِ مستقيمٍ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ y، وسأتعلّمُ في هذا الدرسِ كتابةَ معادلةِ مستقيمٍ **بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ** (point – slope form) إذا علمْتُ ميلَ المستقيمِ وإحداثيّاتِ نقطةٍ يمرُّ بها.

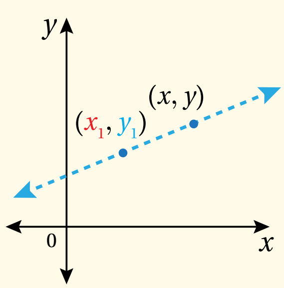
مفهومٌ أساسيٌّ — صيغةُ المَيلِ ونقطةٍ

- **بالكلماتِ:** صيغةُ الميلِ ونقطةٍ للمعادلةِ الخطّيّةِ هيَ: $y-y_1= m(x-x_1)$، حيثُ m ميلُ المستقيمِ، و (x_1, y_1) نقطةٌ مُعطاةٌ.
- **بالرموزِ:**

الميلُ

$$y - y_1 = m(x-x_1)$$

نقطةٌ مُعطاةٌ



مثال 1

1 **أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطةِ $(-3, 6)$ وميلُه -5 بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ.**

أعوّضُ الميلَ والنقطةَ المُعْطاةَ في صيغةِ الميلِ ونقطةٍ.

صيغةُ الميلِ ونقطةٍ	$y - y_1 = m(x-x_1)$
أعوّضُ $m = -5, (x_1, y_1) = (-3, 6)$	$y - 6 = -5(x-(-3))$
أبسّطُ	$y - 6 = -5(x + 3)$

إذنْ، معادلةُ المستقيمِ $y - 6 = -5(x + 3)$

2 أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(-3, 5)$ و $(9, 21)$ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ.

الْخُطْوَةُ 1 أستعملُ النقطتينِ في إيجادِ الميلِ.

صيغةُ الميلِ	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
أعوّضُ عن (x_1, y_1) بـِ $(-3, 5)$ وعن (x_2, y_2) بـِ $(9, 21)$	$= \dfrac{21 - 5}{9 - (-3)}$
أُبسّطُ	$= \dfrac{16}{12} = \dfrac{4}{3}$

إذنْ، الميلُ $\frac{4}{3}$

الْخُطْوَةُ 2 أعوّضُ الميلَ وإحداثياتِ إحدى النقطتينِ في صيغةِ الميلِ ونقطةٍ.

صيغةُ الميلِ ونقطةٍ	$y - y_1 = m(x - x_1)$
أعوّضُ $m = \frac{4}{3}, (x_1, y_1) = (9, 21)$	$y - 21 = \frac{4}{3}(x - 9)$

إذنْ، معادلةُ المستقيمِ $y - 21 = \frac{4}{3}(x - 9)$

أتحققُ من فهمي:

3 أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطةِ $(8, -4)$ و ميلُه $\frac{2}{3}$ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ.

4 أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(7, 2)$ و $(1, -8)$ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ.

يمكنُ استعمالُ الميلِ والنقطةِ المُعْطاةِ منَ المعادلةِ الخطّيّةِ المكتوبةِ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ لتمثيلِ المستقيمِ.

مثال 2

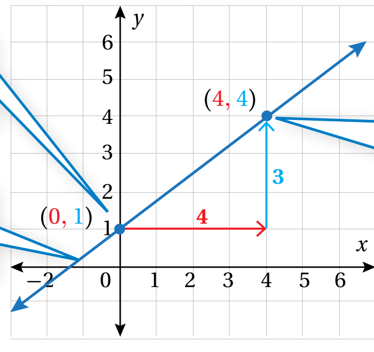
1 أمثّلُ المعادلةَ $y - 1 = \frac{3}{4}x$ بيانيًّا باستعمالِ الميلِ ونقطةٍ.

يمكنُ إعادةُ كتابةِ المعادلةِ على الصورةِ: $y - 1 = \frac{3}{4}(x - 0)$ ، وعليهِ فإنَّ الميلَ $\frac{3}{4}$ والنقطةَ $(0, 1)$.

1 أعيّنُ النقطةَ $(0, 1)$ في المستوى الإحداثيِّ.

2 أستعملُ الميلَ $\frac{3}{4}$ لتعيينِ نقطةٍ أخرى على المستقيمِ في المستوى الإحداثيِّ. أبدأُ منَ النقطةِ $(0, 1)$، وأتحرّكُ 4 وَحَداتٍ نحْوَ اليمينِ ثمَّ 3 وَحَداتٍ إلى الأعلى.

3 أرسمُ مستقيمًا يمرُّ بالنقطتينِ.



أتحققُ من فهمي:

أمثّلُ كلَّ معادلةٍ ممّا يأتي بيانيًّا باستعمالِ الميلِ ونقطةٍ:

2 $y - 4 = 2\,(x-3)$

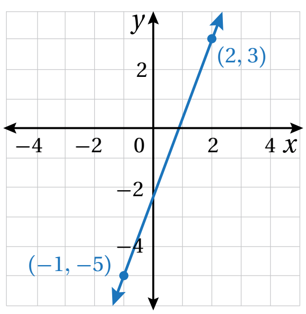
3 $y - 5 = -3(x + 1)$

4 $y + 7 = -\frac{4}{5}\,(x-4)$

تعلّمتُ في المثالِ الســابقِ كيفيــةَ التمثيلِ البيانيِّ لمعادلةٍ خطّيّةٍ مكتوبةٍ بصورةِ الميلِ ونقطــةٍ، وبالعكسِ يمكنُ كتابةُ معادلةِ مستقيمٍ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ إذا عُرِفَ تمثيلُها البيانيُّ.

مثال 3

1 أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المُمَثَّلِ بيانيًّا في الشكلِ المجاورِ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ:



الْخُطْوَةُ 1 أجدُ الميلَ.

أختارُ نقطتينِ على المستقيمِ وأجدُ الميلَ.

صيغةُ الميلِ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

أعوّضُ عن (x_1, y_1) بِـ $(-1, -5)$ وعن (x_2, y_2) بِـ $(2, 3)$ $= \frac{3 - (-5)}{2 - (-1)}$

أُبسّطُ $= \frac{8}{3}$

الْخُطْوَةُ 2 أعوّضُ في صيغةِ الميلِ ونقطةٍ.

أعوّضُ الميلَ وإحداثياتِ إحدى النقطتينِ في صيغةِ الميلِ ونقطةٍ.

صيغةُ الميلِ ونقطةٍ $y - y_1 = m(x-x_1)$

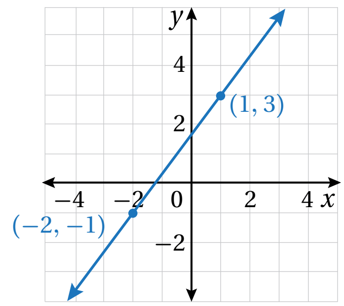
أعوّضُ $m = \frac{8}{3}, (x_1, y_1) = (2, 3)$ $y - 3 = \frac{8}{3}\,(x-2)$

إذنْ، معادلةُ المستقيمِ $y - 3 = \frac{8}{3}\,(x - 2)$

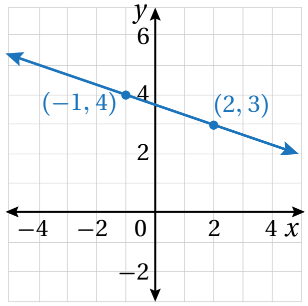
أتحقق من فهمي:

أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المُمَثَّلِ بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ:

3



2



يمكنُ كتابةُ معادلةٍ خطيّةٍ لنمذجةِ بياناتٍ مُمثَّلةٍ في جدولٍ، إذا كانَ معدّلُ التغيُّرِ نفسُه بينَ الأزواجِ المرتَّبةِ المتتاليةِ فيه، ويكونُ معدّلُ التغيّرِ في هذهِ الحالةِ هو الميلَ.

مثال 4: منَ الحياةِ

ضغطُ الماءِ: يبيّنُ الجدولُ المجاورُ العلاقةَ بينَ ضغطِ الماءِ والعمقِ.

الضغطُ (atm)	العمقُ (m)
1	0
2	10
5	40
6	50

أتعلّمُ

يُقاسُ ضغطُ الماءِ بوَحدةِ الأتموسفير (atm)

1 أبيّنُ أنَّ العَلاقةَ بين ضغطِ الماءِ والعمقِ خطيّةٌ.

أجدُ معدلَ التغيُّرِ بينَ الأزواجِ المرتَّبةِ المتتاليةِ في الجدولِ.

الضغطُ (atm)	العمقُ (m)
1	0
2	10
5	40
6	50

1، 3، 1 (تغيرات الضغط) — 10، 30، 10 (تغيرات العمق)

$\frac{1}{10} = 0.1$, $\frac{3}{30} = 0.1$, $\frac{1}{10} = 0.1$

إذنْ، العلاقةُ بينَ ضغطِ الماءِ والعمقِ خطيّةٌ، ومعدّلُ التغيُّرِ هو 0.1 atm لكلِّ مترٍ.

2 **أكتبُ معادلةً خطيةً بمتغيرينِ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ يمكنُ استعمالُها لإيجادِ ضغطِ الماءِ عندَ أيِّ عمقٍ.**

بِما أنَّ معدّلَ التغيّرِ يمثّلُ الميلَ، إِذَنْ أعوّضُ الميلَ وإحداثياتِ أيِّ نقطةٍ في الجدولِ في صيغةِ الميلِ والنقطةِ.

صيغةُ الميلِ ونقطةٍ $y - y_1 = m(x - x_1)$

أعوّضُ $m = 0.1,\ (x_1, y_1) = (40, 5)$ $y - 5 = 0.1\ (x - 40)$

إذنْ، معادلةُ المستقيمِ $y - 5 = 0.1(x - 40)$

أتحققُ من فهمي:

منطادٌ: **يبيّنُ الجدولُ المجاورُ العلاقةَ بينَ ارتفاعِ منطادِ هواءٍ ساخنٍ والزمنِ.**

الارتفاعُ (m)	الزمنُ (s)
640	10
590	30
490	70
440	90

3 أُبيّنُ أنَّ العلاقةَ بينَ ارتفاعِ المنطادِ والزمنِ خطيّةٌ.

4 أكتبُ معادلةً خطيّةً بمتغيرينِ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ يمكنُ استعمالُها لإيجادِ ارتفاعِ المنطادِ عندَ أيِّ لحظةٍ.

أتدرب وأحل المسائل

أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطةِ المُعْطاةِ والمعلومِ ميلُه m في كلٍّ ممّا يأتي بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ:

1 $(4, -3),\ m = \frac{3}{4}$

2 $(-2, -7),\ m = -5$

أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بكلِّ نقطتينِ ممّا يأتي بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ:

3 $(3, 7), (-3, 5)$

4 $(-1, 8), (9, -6)$

5 $(-1, 6), (-3, 10)$

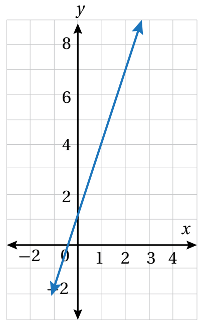
أمثّلُ كلَّ معادلةٍ ممّا يأتي بيانيًّا باستعمالِ الميلِ ونقطةٍ:

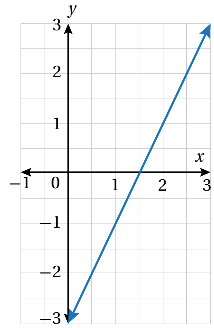
6 $y + 3 = 2(x - 1)$

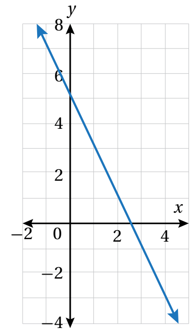
7 $y - 1 = -3(x + 2)$

8 $y - 2 = \frac{4}{9}(x - 3)$

أكتبُ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ معادلةَ المستقيمِ الممثَّلِ بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي:

9


10


11


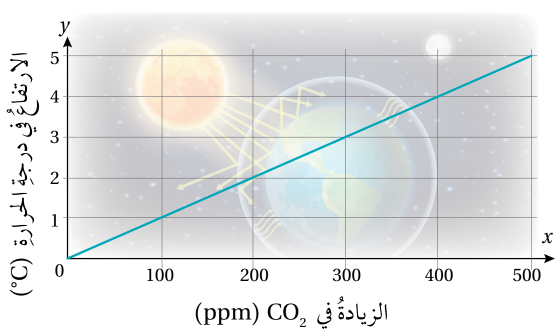
12 **جَبْـــرٌ:** إذا كانَ ميلُ المســـتقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(3p, -5)$، $(-1, p)$ يساوي $-\frac{4}{5}$، فأجدُ قيمةَ الثابتِ p.

بَعوضٌ: تمثّلُ المعادلةُ $N-50 = 2(t-10)$ عددَ البعوضِ N (بالآلافِ) في مستنقعٍ صغيرٍ بعدَ t يومًا من بدايةِ شهرِ حزيرانَ.

13 أمثّلُ المعادلةَ بيانيًّا، حيثُ $t \geq 0$.

14 بعدَ كمْ يومٍ منْ بدايةِ الشهرِ يكونُ عددُ البعوضِ في المستنقعِ 46000؟

بيئةٌ: التمثيـلُ البيانيُّ المجاورُ للتنبُّؤِ بالعَلاقــةِ بينَ زيادةِ ثاني أكســيدِ الكربونِ فــي الغلافِ الجــويِّ بالأجزاءِ مــنْ مليونِ (ppm) وارتفــاعِ متوســطِ درجةِ الحرارةِ في العالمِ بالسّيليسيوسِ.



معلومة

يُعَدُّ ثاني أكسـيدِ الكربونِ أحدَ الغـازاتِ الّتي تحبسُ الحـرارةَ الناتجـةَ مِـنَ الإشـعاعِ الشمسـيِّ، ممّا يؤثّرُ في المناخِ.

15 إذا زادَ CO_2 بمقدارِ 300 ppm، فما الارتفاعُ المتوقَّعُ في درجةِ الحرارةِ؟

16 ارتفعتْ درجةُ الحرارةِ بينَ عامَيْ 1980 م و 2000 بمقدارِ 0.4 °C أجدُ مقدارَ الزيادةِ في كميّةِ ثاني أكسيدِ الكربونِ.

17 أكتبُ معادلــةً خطّيّةً بمتغيرينِ يمكنُ اســتعمالُها لإيجادِ مقــدارِ الارتفاعِ في درجةِ الحرارةِ عندَ أيِّ ارتفاعٍ في كميّةِ CO_2 في الغلافِ الجويِّ.

معلومة

بعضُ الأشـجارِ التي قُطِعَ جِذْعُها لديهـا القدرةُ على جذبِ النيتروجينِ منَ الجوِّ وتسميدِ المنطقةِ المحيطةِ بها.

أشـجارٌ: يبيّنُ الجـدولُ المجاورُ العلاقةَ بيـنَ محيطِ جذعِ شـجرةٍ والزمنِ.

الزمنُ (بالسنواتِ)	محيطُ جذعِ الشجرةِ (cm)
1	2
2	4
3	6
4	8

18 أبيّـنُ أنَّ العلاقةَ بيـنَ محيطِ جِذْعِ الشجرةِ والزمنِ خطّيّةٌ.

19 أكتبُ معادلةً خطّيّةً بمتغيرينِ يمكنُ اسـتعمالُها لإيجـادِ محيـطِ جذعِ الشجرةِ في أيِّ سنةٍ.

20 أتنبّأُ بمحيطِ جذعِ الشجرةِ بعدَ 10 سنواتٍ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

21 **تبريرٌ:** أوجَدَ كلٌّ منْ باسمٍ ولينَ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(1, 6)$, $(-2, -6)$ على النحوِ الآتي:

باسمٌ

$y - 6 = 4(x - 1)$

لينُ

$y + 6 = 4(x + 2)$

هلْ إجابةُ كلٍّ منهُما صحيحةٌ؟ أبرّرُ إجابتِي.

22 **تبريرٌ:** كيفَ سيتغيّرُ التمثيلُ البيانيُّ للمعادلةِ $y - 12 = 8(x - 2)$، إذا تغيّرتْ إشاراتا الطرحِ في المعادلةِ إلى إشـاراتي جمعٍ؟ أبرّرُ إجابتي دونَ اللجوءِ إلى تمثيلِ المعادلةِ بيانيًّا.

23 **تبريرٌ:** أجدُ معادلةَ المسـتقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(5, 5)$, $(9, 1)$ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ، ثمَّ أُبيّنُ أنَّ المقطعَ x يساوي 10، وأبرّرُ إجابتِي.

24 **أكتبُ** كيفَ أكتبُ معادلةَ مستقيمٍ إذا عُلمَ ميلُهُ ونقطةٌ يمرُّ بها؟

الدرسُ 5 المستقيماتُ المتوازيةُ والمتعامدةُ

فكرةُ الدرسِ

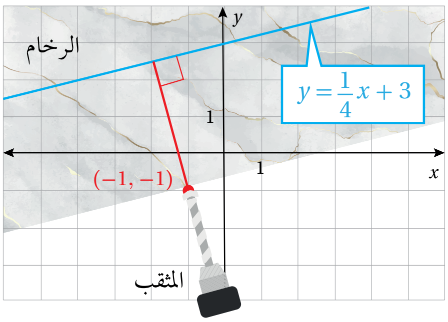
- أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بنقطةٍ مُعْطاةٍ ويوازي مستقيمًا معلومًا.
- أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بنقطةٍ مُعطاةٍ ويعامِدُ مستقيمًا معلومًا.

المصطلحاتُ

مستقيمانِ متوازيانِ، مستقيمانِ مُتعامِدانِ، معكوسُ المقلوبِ.

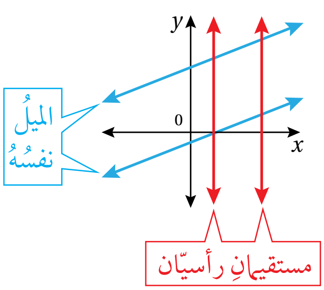
أستكشفُ

يُوصَلُ رأسُ مِثْقَبِ رُخامٍ بالحاسوبِ؛ لتحديدِ إحداثيّاتِ نقطةِ الثَّقْبِ والعمقِ الذي يجبُ أنْ يبلُغَهُ المِثقبُ.



أفترضُ أنَّ رأسَ المِثقبِ عندَ النقطةِ $(-1, -1)$، أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ برأسِ المِثقبِ والعموديِّ على مستقيمٍ يقعُ على سطحِ الرّخامِ ومعادلتُهُ هِيَ: $y = \frac{1}{4}x + 3$.

يُسمّى المستقيمانِ الواقعانِ في المستوى نفسِه ولا يقطعُ أحدُهُما الآخرَ **مستقيمين متوازيين** (parallel lines)، ويكونُ لهُما الميلُ نفسُه. والمستقيماتُ الرأسيةُ جميعُها متوازيةٌ.



مثال 1

1 أكتبُ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطةِ $(-2, 5)$ والموازي للمستقيمِ $y = \frac{3}{2}x - 7$.

الخُطْوَةُ 1 أجدُ ميلَ المستقيمِ المُعْطى.

ميلُ المستقيمِ $y = \frac{3}{2}x - 7$ هوَ $\frac{3}{2}$

الخُطْوَةُ 2 أكتبُ معادلةَ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ باستعمالِ الميلِ والنقطةِ المُعْطاةِ.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ أبدأُ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ

$y - 5 = \frac{3}{2}(x - (-2))$ أعوّضُ $m = \frac{3}{2}, (x_1, y_1) = (-2, 5)$

$y - 5 = \frac{3}{2}(x + 2)$ أبسّطُ

$y - 5 = \frac{3}{2}x + 3$ خاصيّةُ التوزيعِ

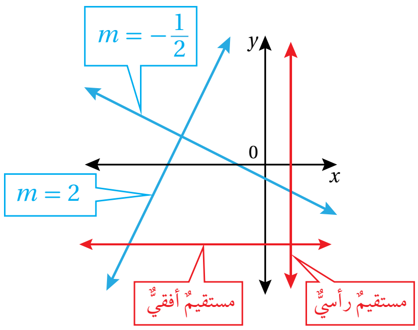
$y - 5 + 5 = \frac{3}{2}x + 3 + 5$ أجمعُ 5 إلى الطرفينِ

$y = \frac{3}{2}x + 8$ أبسّطُ

أتحققُ من فهمي:

أكتبُ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطةِ $(3, -1)$ والموازي للمستقيمِ $y = 2x + 5$.

يُسَمّى المستقيمانِ اللذانِ يتقاطعانِ مُكوِّنَينِ زوايا قوائمَ **مستقيمين متعامدين** (perpendicular lines). ويكونُ ميلُ أحدِهما **معكوسَ مقلوب** (opposite reciprocals) مَيلِ الآخرِ، وهذا يعني أنَّ حاصلَ ضربِ مَيْلَيْهِما يساوي -1 والمستقيماتُ الرأسيّةُ والأفقيّةُ متعامِدةٌ.



أتعلّم

$\frac{3}{4}$ معكوسُ مقلوبِ $-\frac{4}{3}$ لأنَّ:

$\frac{3}{4} \times -\frac{4}{3} = -1$

مثال 2

أكتبُ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطةِ $(4, 0)$ والعموديِّ على المستقيمِ $4y = -8x + 1$

الخُطْوَةُ 1 أجدُ ميلَ المستقيمِ المُعْطى.

لإيجادِ ميلِ المستقيمِ المُعْطى أحتاجُ إلى كتابةِ المعادلةِ بصورةِ الميلِ والمقطعِ.

$$4y = -8x + 1$$ معادلةُ المستقيمِ المُعْطى

$$\frac{4y}{4} = \frac{-8x}{4} + \frac{1}{4}$$ أقسمُ طَرَفَي المعادلةِ على 4

$$y = -2x + \frac{1}{4}$$ أبسّطُ

ميلُ المستقيمِ $y = -2x + \frac{1}{4}$ هوَ -2

الخُطْوَةُ 2 أجدُ ميلَ المستقيمِ العموديِّ على المستقيمِ المُعْطى.

ميلُ المستقيمِ العموديِّ على المستقيمِ المُعْطى يساوي معكوسَ مقلوبِ العددِ -2 ؛ أيْ $\frac{1}{2}$

الخُطْوَةُ 3 أكتبُ معادلةَ المستقيمِ العموديِّ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$ أبدأُ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 4)$$ أعوّضُ $m = \frac{1}{2}, (x_1, y_1) = (4, 0)$

$$y = \frac{1}{2}(x - 4)$$ أبسّطُ

$$y = \frac{1}{2}x - 2$$ خاصيّةُ التوزيعِ

أتحققُ من فهمي:

أكتبُ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطةِ $(1, 8)$ والمُعامِدِ للمستقيمِ $3y - 9x = 12$.

يمكنُ تحديدُ ما إذا كانَ المستقيمانِ متوازيينِ أو متعامِدينِ أو غيرَ ذلكَ منْ خلالِ الميلِ.

مثال 3

1 أحدّدُ ما إذا كانَ المستقيمانِ $-3x + 4y = 32$ و $y - 1 = \frac{3}{4}(x + 2)$ متوازيينِ أو متعامدينِ أو غيرَ ذلكَ.

الْخُطْوَةُ 1 أجدُ ميلَ كلِّ مستقيمٍ.

- ميلُ المستقيمِ $-3x + 4y = 32$

$$-3x + 4y = 32$$ معادلةُ المستقيمِ المُعْطى

$$-3x + 4y + 3x = 32 + 3x$$ أجمعُ $3x$ إلى كِلا الطَّرَفينِ

$$\frac{4y}{4} = \frac{3x}{4} + \frac{32}{4}$$ أقسمُ طَرَفَيِ المعادلةِ على 4

$$y = \frac{3}{4}x + 8$$ أبسّطُ

إذنْ، ميلُ المستقيمِ $-3x + 4y = 32$ يساوي $\frac{3}{4}$

- ميلُ المستقيمِ $y - 1 = \frac{3}{4}(x + 2)$ يساوي $\frac{3}{4}$

الْخُطْوَةُ 2 أحدّدُ العلاقةَ بينَ المستقيمينِ.

بما أنَّ ميلَيِ المستقيمَينِ متساويانِ، إذنْ، فالمستقيمانِ متوازيانِ.

2 أحدّدُ ما إذا كانَ $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيينِ أو متعامِدينِ أو غيرَ ذلكَ، حيثُ $A(1, 1), B(-1, -5), C(3, 2), D(6, 1)$

الْخُطْوَةُ 1 أجدُ ميلَ كلِّ مستقيمٍ.

- مَيلُ $\overleftrightarrow{AB}$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ صيغةُ الميلِ

$$= \frac{-5 - 1}{-1 - 1}$$ أعوّضُ عن (x_1, y_1) بـِ $(1, 1)$ وعن (x_2, y_2) بـِ $(-1, -5)$

$$= \frac{-6}{-2} = 3$$ أُبسّطُ

- مَيلُ $\overleftrightarrow{CD}$

صيغةُ الميلِ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

أعوّضُ عن (x_1, y_1) بِـ $(3, 2)$ وعن (x_2, y_2) بِـ $(6, 1)$ $= \frac{1-2}{6-3}$

أُبسّطُ $= -\frac{1}{3}$

الْخُطْوَةُ 2 أحدّدُ العلاقةَ بينَ المستقيمينِ.

المَيْلانِ غيرُ متساويينِ، إذنْ، فالمستقيمانِ غيرُ متوازيينِ. ولتحديدِ ما إذا كان المستقيمانِ متعامِدينِ أجدُ حاصلَ ضربِ مَيْلَيْهِما.

$$3 \times -\frac{1}{3} = -1$$

بما أنَّ حاصلَ ضربِ مَيْلَي $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ يساوي -1، إذنْ، فالمستقيمانِ متعامدانِ.

أتحققُ من فهمي:

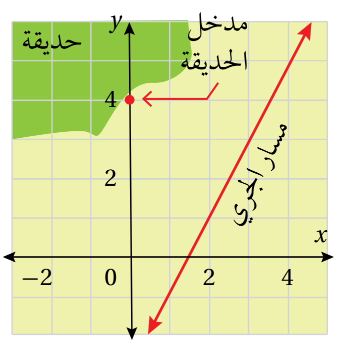
3 أحدّدُ ما إذا كانَ المستقيمانِ $2x + y = 7$ و $y - 2x = 3$ متوازيينِ أو متعامدينِ أو غيرَ ذلكَ.

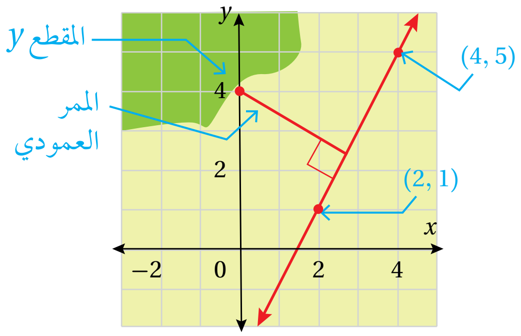
4 أحدّدُ ما إذا كانَ $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيينِ أو متعامدينِ أو غيرَ ذلكَ، حيثُ $A(3, 6), B(-9, 2), C(5, 4), D(2, 3)$

يمكنُ كتابةُ معادلةِ أيِّ مستقيمٍ يمرُّ بنقطةٍ معلومةٍ يوازي أو يعامِدُ مستقيمًا معلومًا في كثيرٍ منَ التطبيقاتِ الحياتيّةِ.

مثال 4: منَ الحياةِ

عمارةٌ: ترغبُ إحدى البلدياتِ بربطِ مدخلِ الحديقةِ العامةِ بمسارِ الجريِ داخلَ الحديقةِ منْ خلالِ مَمرٍّ عموديٍّ على المسارِ. أعتمدُ الشكلَ المجاورَ الذي يمثّلُ مخطَّطَ الحديقةِ، وأجدُ معادلةَ المستقيمِ الذي يمثلُ المَمرَّ.





الْخُطْوَةُ 1 أجدُ ميلَ المستقيمِ الذي يمثِّلُ مسارَ الجري.

تقعُ النقطتانِ $(2, 1)$, $(4, 5)$ على مسارِ الجري، إذنْ، يمكنُ منْ خلالِهما إيجادُ ميلِ المستقيمِ الذي يمثِّلُ المسارَ.

صيغةُ الميلِ $\quad m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

أعوِّضُ عن (x_1, y_1) بـِ $(2, 1)$ وعن (x_2, y_2) بـِ $(4, 5)$ $\quad = \dfrac{5-1}{4-2}$

أُبسِّطُ $\quad = \dfrac{4}{2} = 2$

الْخُطْوَةُ 2 أجدُ ميلَ المستقيمِ الذي يمثِّلُ معادلةَ الممرِّ.

بما أنَّ الممرَّ عموديٌّ على مسارِ الجري، إذنْ، أجدُ مقلوبَ معكوسِ ميلِ مسارِ الجري.

بما أنَّ ميلَ مسارِ الجري يساوي 2، فإنَّ مقلوبَ معكوسِهِ $-\dfrac{1}{2}$

الْخُطْوَةُ 3 أجدُ معادلةَ المستقيمِ الذي يمثِّلُ الممرَّ.

بما أنَّ المستقيمَ الذي يمثِّلُ المَمرَّ يقطعُ المحورَ y في النقطةِ $(0, 4)$، إذنْ، فإنَّ المقطعَ y لهُ يساوي 4، وعليهِ فإنَّ معادلةَ الممرِّ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ هيَ:

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

أتحققُ من فهمي:

في المثالِ السابقِ، تخطِّطُ البلديةُ لإنشاءِ مسارِ ركضٍ آخرَ داخلَ الحديقةِ موازٍ لمسارِ الركضِ الأولِ ويمرُّ في مَدخلِ الحديقةِ. أجدُ معادلةَ المستقيمِ الذي يمثِّلُ مسارَ الركضِ الجديدَ.

أتدرب وأحل المسائل

أكتبُ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطةِ المُعْطاةِ والموازي للمستقيمِ المُعْطاةِ معادلتُه في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $(-1, 5), y = \frac{1}{2}x - 10$
2. $(2, -7), 2y = 5x - 3$
3. $(4, 8), x + 4y - 9 = 0$
4. $(9, 3), 2x - 7y + 1 = 0$

أكتبُ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطةِ المُعطاةِ والمُعامِدِ للمستقيمِ المُعْطاةِ معادلتُه في كلٍّ ممّا يأتي:

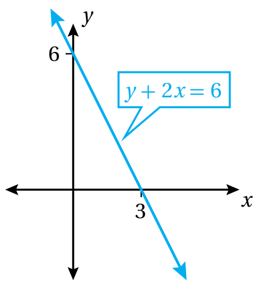
5 $(2, -7), y = x-2$

6 $(-5, -4), y = \frac{1}{2}x + 1$

7 $(2, 2), 3y = -2x + 6$

8 $(-3, 0), 3x-4y = -4$

يبيّنُ الشكلُ المجاورُ التمثيلَ البيانيَّ للمستقيمِ الذي معادلتُه $y + 2x = 6$



9 أُبيّنُ أنَّ النقطةَ $(1, 4)$ تقعُ على المستقيمِ.

10 أجدُ ميلَ المستقيمِ.

11 أكتبُ معادلةَ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ.

12 أجدُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بنقطةِ الأصلِ والموازي للمستقيمِ المُعطى بصيغةِ الميلِ والمقطعِ.

13 يحتوي الصندوقُ المجاورُ على زوجينِ منَ المستقيماتِ المتعامدةِ. فأيُّ المستقيماتِ مختلفٌ؟ أبرّرُ إجابتي.

$3x + 5y = 7$
$6x + 3y = 7$
$3y - 5x = 7$
$8x - 4y = 7$
$4y + 2x = 7$

أحدّدُ ما إذا كانَ المستقيمانِ $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيينِ أو متعامدينِ أو غيرَ ذلك في كلٍّ ممّا يأتي:

14 $A(8, -2), B(4, -1), C(3, 11), D(-2, -9)$

15 $A(8, 4), B(4,3), C(4,-9), D(2,-1)$

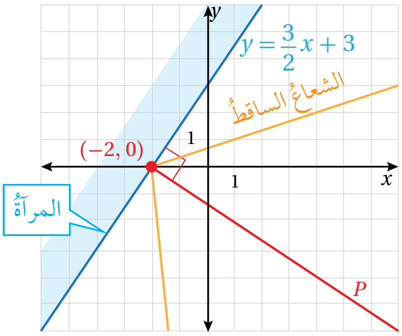
16 $A(1, 5), B(4, 4), C(9, -1), D(-6, -5)$

17 $A(4, 2), B(-3, 1), C(6, 0), D(-10, 8)$

أتذكّرُ

زاويةُ سقوطِ الشعاعِ تساوي زاويةَ انعكاسِه.

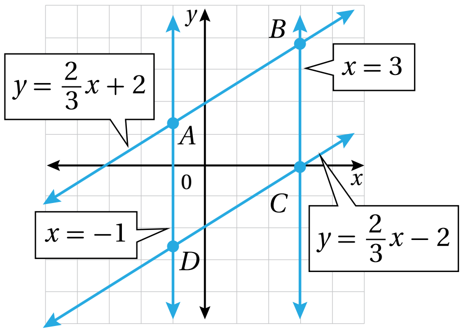
18 **أشعةٌ:** تمثّلُ المعادلةُ $y = \frac{3}{2}x + 3$ مستقيمًا يقعُ على سطحِ مرآةٍ، وتمثّلُ النقطةُ $(-2, 0)$ نقطةَ التقاءِ الشعاعِ الساقطِ معَ هذا المستقيمِ، أجدُ معادلةَ العمودِ P المُقامِ على المرآةِ.



أتذكّرُ

متــوازي الأضلاعِ شــكلٌ رباعــيٌّ فيــهِ كلُّ ضلعيــنِ متقابلينِ متوازيانِ.

19 أستعملُ الميلَ لتحديدِ ما إذا كانَ الشــكلُ الرباعيُّ $ABCD$ المُبيَّنُ في التمثيلِ البيانيِّ المجاورِ يمثلُ متوازيَ أضلاعٍ.



مهاراتُ التفكيرِ العُليا

تبريرٌ: تمثلُ النقــاطُ $A(5, 10), B(1, 5), C(6, 1)$ ثلاثةَ رؤوسٍ لمتوازي الأضلاعِ $ABCD$

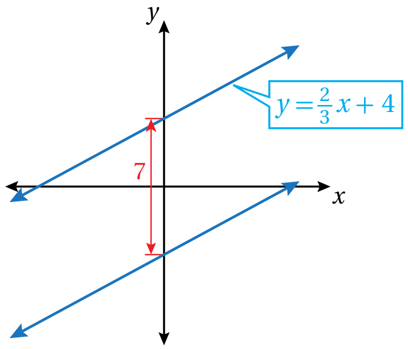
20 أجدُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ A و C.

21 أجدُ إحداثيَّيْ نقطتينِ مُحْتمَلتينِ للرأسِ الرابعِ D لمتوازي الأضلاعِ، وأبرّرُ إجابتِي.

إرشادٌ

ترتيبُ قــراءةِ الرؤوسِ غيرُ مهمٍّ.

22 **تبريــرٌ:** يبيّنُ الشــكلُ المجــاورُ التمثيلَ البيانيَّ لمستقيمينِ متوازيينِ في المستوى الإحداثيِّ. أجدُ معادلةَ المستقيمِ السُّفْليِّ، وأبرّرُ إجابتِي.



23 **تحــدٍّ:** أجدُ قيمــةَ a التي تجعــلُ المســتقيمينِ $y = ax + 5$ و $2y = (a+4)x-1$ متوازيينِ.

24 **أكتبُ** كيفَ يمكنُ تحديدُ ما إذا كانَ مستقيمانِ في المستوى الإحداثيِّ متوازيينِ أو متعامِدينِ أو غيرَ ذلك؟

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 مَيلُ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(5,-4)$ وَ $(5,-10)$:

a) موجبٌ b) سالبٌ

c) صفرٌ d) غيرُ مُعرَّفٍ

2 ميلُ المستقيمِ المارِّ بالنقطةِ $(0, 0)$ هو 2، فأيُّ النقاطِ الآتيةِ تقعُ أيضًا على المستقيمِ؟

a) $(-4,2)$ b) $(2,4)$

c) $(-2, 4)$ d) $(2,-4)$

3 المقطعُ y للتمثيلِ البيانيِّ للمعادلةِ $5x + 2y = 30$ هوَ:

a) -15 b) -6

c) 6 d) 15

4 المقطعُ x للتمثيلِ البيانيِّ للمعادلةِ $y = 4x+32$ هوَ:

a) -32 b) -8 c) 8 d) 32

5 أيُّ المعادلاتِ الآتيةِ تمثّلُ مستقيمًا ميلُه $\frac{1}{3}$ ويمرُّ بالنقطةِ $(-2, 1)$؟

a) $y = \frac{1}{3}x + 1$ b) $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

c) $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$ d) $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

6 أيُّ المعادلاتِ الآتيةِ تمثّلُ مستقيمًا لهُ أكبرُ ميلٍ؟

a) $y = 3x$ b) $y = x + 12$

c) $y = 5x - 1$ d) $y = 8x + 4$

أُبيّنُ أيُّ العباراتِ الآتيةِ صحيحةٌ دائمًا وأيُّها خطأٌ:

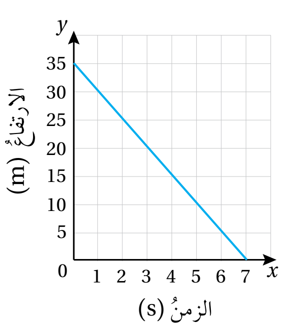
7 جميعُ المستقيماتِ الأفقيّةِ لها الميلُ نفسُه.

8 إذا كانَ ميلُ المستقيمِ 1 ، فإنَّه يمرُّ بنقطةِ الأصلِ.

9 معدّلُ التغيُّرِ يكونُ إمّا سالبًا وإمّا موجبًا.

10 إذا كانَ لنقطتينِ الإحداثيُّ x نفسُه فهُما تقعانِ على المستقيمِ الرأسيِّ نفسِه.

يبيّنُ الشكلُ المجاورُ العَلاقةَ بينَ ارتفاعِ طائرةٍ عموديّةٍ بالأمتارِ والزمنِ بالثواني اللازمِ لوصولِها إلى سطحِ الأرضِ.

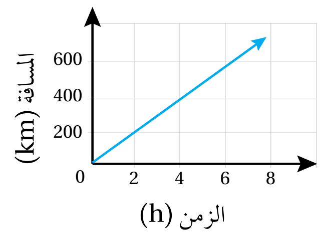


11 بعدَ كمْ ثانيةٍ تصلُ الطائرةُ إلى سطحِ الأرضِ؟

12 بعدَ كمْ ثانيةٍ تكونُ الطائرةُ على ارتفاعِ 15 m؟

13 ما مدلولُ المقطعِ y في هذهِ الحالةِ؟

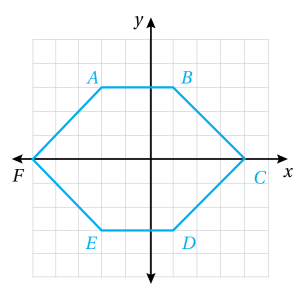
يبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ العَلاقةَ بينَ المسافةِ التي قطعَتْها شاحنةٌ على طريقٍ مُنحَدِرٍ والزمنِ الذي استغرَقَتْهُ.



14 أجدُ المسافةَ التي قطعَتْها الشاحنةُ بعدَ 4 ساعاتٍ منَ انطلاقِها.

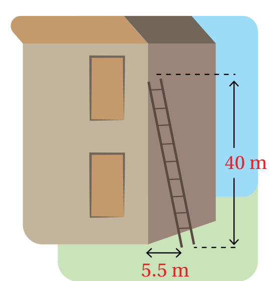
15 هلْ تسيرُ الشاحنةُ بسرعةٍ ثابتةٍ على الطريقِ؟ أبرّرُ إجابتي.

يبيّنُ الشكلُ الآتي المضلّعَ السداسيَّ *ABCDEF*.



16 أجدُ ميلَ كلٍّ منْ:
$\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{AD}$

17 أجدُ معادلةَ كلٍّ منْ:
$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{DC}$, $\overleftrightarrow{AF}$



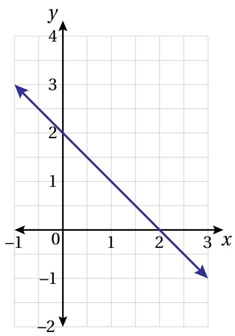
18 أجدُ ميلَ السُّلّمِ في الشكلِ المجاورِ.

تمثّلُ المعادلةُ $y = 5x+k$ مستقيمًا يمرُّ بالنقطةِ $(2, 11)$.

19 أجدُ قيمةَ k .

20 أجدُ معادلةَ المستقيمِ الموازي للمستقيمِ في الفرعِ السابقِ المارِّ بالنقطةِ $(4, 11)$.

21 أجدُ الميلَ والمقطعينِ الإحداثيّينِ للمستقيمِ المُمَثَّلِ في المستوى الإحداثيِّ المجاورِ.



تدريبٌ على الاختباراتِ الدّوليّةِ

22 ميلُ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ (a, b) و (c, d) هو:

a) $\frac{d-c}{b-a}$ b) $\frac{b-d}{a-c}$

c) $\frac{d-b}{a-c}$ d) $\frac{a-c}{b-d}$

23 مستقيمٌ أفقيٌّ يمرُّ بالنقطةِ $(5, 22)$، فأيُّ النقاطِ الآتيةِ تقعُ على المستقيمِ؟

a) $(5, 2)$ b) $(0,22)$

c) $(22, 5)$ d) $(0, 5)$

24 أيُّ المعادلاتِ الآتيةِ تمثلُ معادلةَ مستقيمٍ أفقيٍّ؟

a) $3x + 6y = 0$ b) $2x+7=0$

c) $-3y = 29$ d) $x-2y = 4$

25 أيُّ المعادلاتِ الآتيةِ المقطعُ y لها **لا** يساوي 5؟

a) $2x = y - 5$ b) $3x + y = 5$

c) $y = x + 5$ d) $2x - y = 5$

الوحدةُ 4

المثلثاتُ المتطابقةُ

ما أهميَّةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُستعملُ المثلثاتُ كثيرًا في التصاميمِ الهندسيةِ؛ لأنَّ خصائصَها الهندسيةَ تضيفُ قوةً كبيرةً وجمالًا للتصميمِ؛ فأيُّ قوةٍ تؤثرُ في المثلثِ تتوزعُ بالتساوي على أضلاعِهِ، لذلكَ نرى المثلثاتِ كثيرًا في الجسورِ، والمباني، وأعمدةِ الكهرباءِ العاليةِ، والرافعاتِ.

تعلَّمتُ سابقًا:

- ✓ تصنيفَ المثلثاتِ بحسبِ أطوالِ أضلاعِها وزواياها.
- ✓ تمييزَ المضلعاتِ المتطابقةِ، وتحديدَ العناصرِ المتناظرةِ في مضلعَينِ متطابقَينِ.
- ✓ حلَّ مسائلَ تعتمدُ على مفهومِ التطابقِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- إثباتَ تطابقِ مثلثَينِ باستخدامِ حالاتِ التطابقِ المتعددةِ.
- تعرّفَ خصائصِ المثلثِ المتطابقِ الضلعَينِ والمتطابقِ الأضلاعِ.
- حلَّ مسائلَ حياتيةٍ على تطابقِ المثلثاتِ.

مشروعُ الوحدةِ: أبني جسرًا

أســتعدُّ ومجموعتي لتنفيذِ مشروعِنا الخاصِّ، الّذي سنوظفُ فيهِ ما نتعلمُهُ في هذهِ الوحدةِ حولَ تطابقِ المثلثاتِ، لِعملِ نموذجِ جسرٍ.

الموادُّ والأدواتُ اللازمةُ:

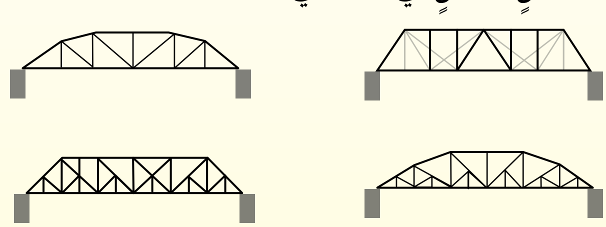
- أعوادُ آيسكريم.
- سيليكون لاصقٌ.

خُطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

تُستعملُ المثلثاتُ المتطابقةُ كثيرًا في تصميمِ الجسورِ؛ لأنَّها توزعُ الأحمالَ بالتســاوي بَيْنَ أجزاءِ الجســرِ، ممّا يزيدُ مِنْ قدرتِهِ على تحمّلِ الأثقالِ.

1. أبحــثُ في شــبكةِ الإنترنــتِ عَنْ تصاميمَ لجســورٍ باســتعمالِ أعوادِ الآيسكريمِ، بالاســتعانة بالكلماتِ المفتاحيــةِ الآتيــةِ: ice cream stick bridge, popsicle stick bridge.

2. أختــارُ تصميمًا جميلًا وجاذبًا للجســرِ، ثُمَّ أرســمُ مخططًــا لَهُ علــى ورقــةٍ، وأحرصُ على اســتعمالِ المثلثــاتِ المتطابقةِ الضلعَيــنِ والمتطابقةِ الأضلاعِ بشكلٍ متماثلٍ في تصميمي.

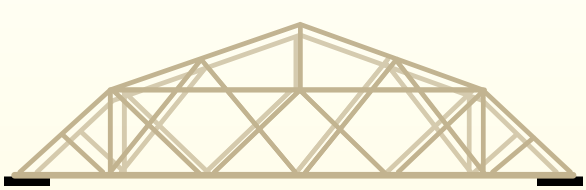


3. أبدأُ تصميمَ الجســرِ، وإلصاقَ الأعوادِ بشــكلٍ جيدٍ؛ لضمانِ ثباتِ الجســرِ، ويمكنُني البحــثُ عَنْ مقاطعِ فيديــو تســاعدُني على تنفيــذِ التصميمِ باســتعمالِ الكلماتِ المفتاحيةِ السابقةِ.

4. أُعِدُّ عرضًا تقديميًّا يتضمنُ صورَ جسورٍ معدنيةٍ عالميةٍ اســتُعملَتِ المثلثــاتُ في تصميمِهــا. أضيفُ بعضَ المعلوماتِ حولَ كلِّ جسرٍ، مثلَ: الطولِ، والبلدِ الّذي يقعُ فيهِ، وتاريخِ الإنشاءِ.

عرضُ النتائجِ:

- أعــرضُ جســري أمــامَ الصــفِّ، وأحــددُ المثلثــاتِ المتطابقــةَ فيــهِ.
- أقــدّمُ العــرضَ التقديمــيَّ، وأتحــدثُ بالتفصيلِ حولَ الجسورِ الّتي يحتويها.
- نصوِّتُ لأجملِ جسرٍ.



الدرسُ 1 تطابقُ المثلثاتِ (SSS, SAS, HL)

فكرةُ الدرسِ

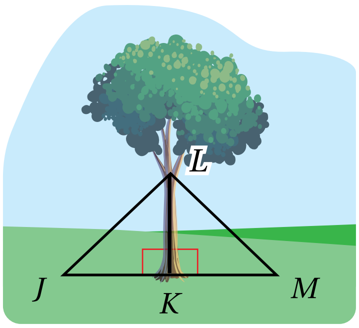
- أثبتُ تطابقَ مثلثَينِ باستعمالِ حالتَيْ SSS وَ SAS.
- أثبتُ تطابــقَ مثلثَينِ قائمَــيِ الزاويةِ باستعمالِ حالةِ HL.

المصطلحاتُ

المسلمةُ، النظريةُ، البرهانُ، البرهانُ السهميُّ، الزاويةُ المحصورةُ، البرهانُ ذو العمودَينِ.

أستكشفُ

يســتعملُ المزارعونَ طرائــقَ مختلفةً لدعمِ الأشجارِ الصغيرةِ، منها الطريقةُ المبيَّنةُ في الشــكلِ المجــاورِ، حيثُ تثبَّتُ الشجرةُ بأسلاكٍ تصلُ بَيْنَ جذعِها وأوتادٍ في الأرضِ.



ما العلاقةُ بَيْنَ ΔLKJ وَ ΔLKM الّتي تجعلُ الشجرةَ أكثرَ ثباتًا؟

المسلمةُ (Postulate) عبارةٌ رياضيةٌ تُقبَلُ على أنَّها صحيحةٌ مِنْ دونِ برهانٍ، أما **النظريةُ** (theorem) فهي عبارةٌ أَوْ تخمينٌ تحتاجُ إلى كتابةِ **برهانٍ** (proof) لإثباتِ صحتِها؛ فالبرهانُ دليلٌ منطقيٌّ على كلِّ عبارةٍ مكتوبةٍ فيهِ تكونُ مبرّرةً بعبارةٍ ســبقَ إثباتُها أو قبولُ صحّتِها، ويمكنُ استعمالُ العباراتِ أو التخميناتِ المُثبتِ صحتُها في البراهينِ لتبريرِ صحةِ عباراتٍ أُخرى.

مفهومٌ أساسيٌّ — خطواتُ كتابةِ البرهانِ

الخطوةُ 1: أكتبُ المعطياتِ وأرسمُ شكلًا يوضِّحُها إنْ أمكنَ.

الخطوةُ 2: أكتبُ العبارةَ أو التخمينَ المطلوبَ إثباتُهُ.

الخطوةُ 3: أكوِّنُ سلسلةً منَ العباراتِ الّتي تربطُ المعطياتِ بالمطلوبِ.

الخطوةُ 4: أبرِّرُ كلَّ عبارةٍ مستعملًا تعريفاتٍ أو خصائصَ جبريّةً أو مسلّماتٍ أو نظريّاتٍ.

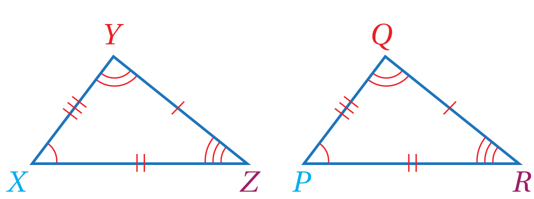
الخطوةُ 5: أكتبُ العباراتِ أو التخمينَ الذي أثْبَتُّهُ.

تعلمْتُ ســابقًا أنَّهُ إذا كانَتِ الأضلاعُ المتناظرةُ في شكلَينِ هندســيَّينِ متطابقةً، وزواياهُما المتناظرةُ متطابقةً، فإنَّ الشكلَينِ متطابقانِ، فمثلًا المثلثانِ الآتيانِ متطابقانِ؛ لأنَّ:

$\angle Y \cong \angle Q$ $\quad \overline{XZ} \cong \overline{PR}$

$\angle X \cong \angle P$ $\quad \overline{XY} \cong \overline{PQ}$

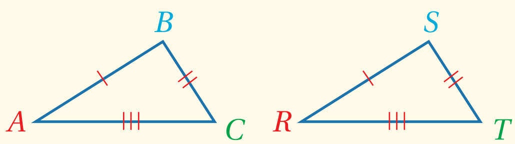
$\angle Z \cong \angle R$ $\quad \overline{YZ} \cong \overline{QR}$



لكنَّ هذِهِ المعلوماتِ أكثرُ مِنْ كافيةٍ لإثباتِ تطابقِ مثلثَينِ، إذْ يمكنُ إثباتُ ذلكَ باستعمالِ تطابقِ الأضلاعِ المتناظرةِ فقطْ مِنْ دونِ الحاجةِ إلى بيانِ تطابقِ الأجزاءِ المتناظرةِ جميعِها.

مسلمةٌ **التطابقُ بثلاثةِ أضلاعٍ (SSS)**

- **بالكلماتِ:** إذا تطابقَتْ أضلاعُ مثلثٍ مَعَ الأضلاعِ المناظرةِ لَها في مثلثٍ آخَرَ، فإنَّ المثلثَينِ متطابقانِ وتُختصَرُ هذهِ الحالةُ بالرمزِ SSS، حيثُ إنَّ الحرفَ S هو اختصارٌ للكلمةِ الانجليزيّةِ (Side) وتعني ضلعًا.



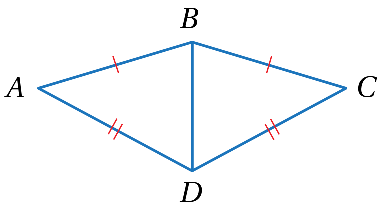
- **بالرموزِ:** إذا كانَ: $\overline{AB} \cong \overline{RS}$, $\overline{BC} \cong \overline{ST}$, $\overline{AC} \cong \overline{RT}$

فإنَّ: $\Delta ABC \cong \Delta RST$

ويمكنُ استعمالُ **البرهانِ السهميِّ** (flow proof) لإثباتِ تطابقِ مثلثَينِ، وَهُوَ برهانٌ تُستعملُ فيهِ عباراتٌ مكتوبةٌ في مستطيلاتٍ، وأسهمٌ تبيّنُ التسلسلَ المنطقيَّ لهذهِ العباراتِ، ويُكتبُ أسفلَ كلِّ مستطيلٍ السببُ الّذي يبرّرُ العبارةَ المكتوبةَ داخلَهُ.

مثال 1

أثبتُ أنَّ المثلثَينِ ΔCBD وَ ΔABD المبيّنَينِ في الشكلِ المجاورِ متطابقانِ باستعمالِ البرهانِ السهميِّ.



البرهانُ:

$\overline{AD} \cong \overline{CD}$ — معطًى

$\overline{BD}$ — ضلعٌ مشتركٌ

$\overline{AB} \cong \overline{CB}$ — معطًى

$\Delta ABD \cong \Delta CBD$

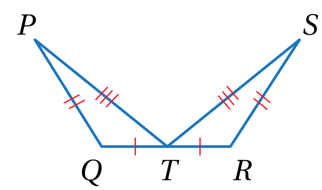
SSS

أتعلمُ

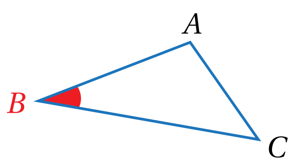
يمكنُ كتابةُ البرهانِ السهميِّ بصورةٍ رأسيةٍ أَوْ أفقيةٍ.

أتحققُ من فهمي:

أثبتُ أنَّ المثلثَينِ ΔQPT وَ ΔRST المبيّنَينِ في الشكلِ أدناه متطابقانِ باستعمالِ البرهانِ السهميِّ.



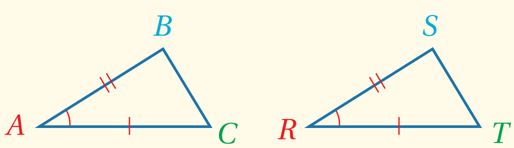
تُسمّى الزاويةُ المتكوّنةُ مِنْ ضلعَينِ متجاورَينِ في مضلعٍ **الزاويةَ المحصورةَ** (included angle)، ففي الشكلِ المجاورِ $\angle B$ محصورةٌ بَيْنَ الضلعَينِ $\overline{BA}$ وَ $\overline{BC}$.



ومثلَما يمكنُ استعمالُ حالةِ (SSS) لإثباتِ تطابقِ مثلثَينِ، يمكنُ أيضًا استعمالُ زوجَينِ مِنَ الأضلاعِ المتطابقةِ والزاويةِ المحصورةِ بينَهُما لإثباتِ تطابقِ مثلثَينِ.

مسلمةٌ **التطابقُ بضلعَينِ وزاويةٍ محصورةٍ بينَهُما (SAS)**

- **بالكلماتِ:** إذا تطابقَ ضلعانِ والزاويةُ المحصورةُ بينَهُما في مثلثٍ مَعَ نظائِرِها في مثلثٍ آخرَ، فإنَّ المثلثَينِ متطابقانِ. وتُختصَرُ هذهِ الحالةُ بالرمزِ SAS، حيثُ إنّ الحرفَ S اختصارٌ للكلمةِ الانجليزيّةِ (Side) وتعني ضلعًا، والحرفَ A اختصارٌ للكلمةِ الانجليزيّة (Angle) وتعني زاويةً.

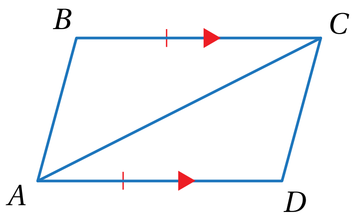


- **بالرموزِ:** إذا كانَ: $\overline{AC} \cong \overline{RT}$, $\angle A \cong \angle R$, $\overline{AB} \cong \overline{RS}$ ، فإنَّ: $\Delta ABC \cong \Delta RST$

ويمكنُ اســتعمالُ **البرهانِ ذي العمودَينِ** (two–column proof) لإثباتِ تطابقِ مثلثَينِ، وَهُوَ برهانٌ تُكتبُ فيهِ العباراتُ مرتبةً في عمودٍ، والتبريراتُ في عمودٍ مُوازٍ لَهُ.

مثال 2

أثبتُ أنَّ ΔCDA وَ ΔABC المبيّنَين في الشكلِ المجاورِ متطابقانِ، باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَين.

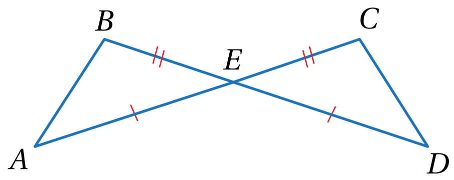


البرهانُ:

العباراتُ	المبرراتُ
1) $\overline{BC} \cong \overline{DA}$	1) معطًى
2) $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$	2) معطًى
3) $\angle BCA \cong \angle DAC$	3) زاويتانِ متبادلتانِ داخليًّا
4) $\overline{AC}$	4) ضلعٌ مشتركٌ
5) $\Delta ABC \cong \Delta CDA$	5) SAS

أتحققُ من فهمي:

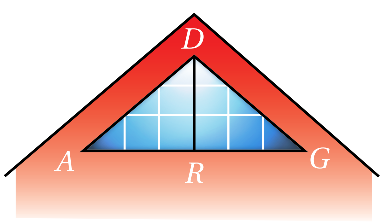
أثبتُ أنَّ ΔDCE وَ ΔABE المبيّنَينِ في الشكلِ المجاورِ متطابقانِ، باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَين.



نحتاجُ في كثيرٍ مِنَ المسائلِ إلى تحديدِ حالةِ التطابقِ المناسبةِ لإثباتِ تطابقِ مثلثَينِ، وفقًا للمعطياتِ المقدَّمةِ في المسألةِ.

مثال 3: منَ الحياةِ

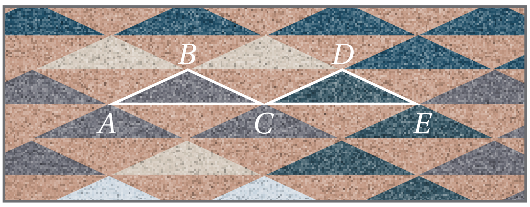
عمارةٌ: صمّمَ مهندسٌ معماريٌّ النافذةَ المجاورةَ. إذا كانَ $\overline{DA} \cong \overline{DG}$ وَ $\angle ADR \cong \angle GDR$، فأكتبُ برهانًا ذا عمودَينِ؛ لإثباتِ أنَّ $\Delta DRA \cong \Delta DRG$



البرهانُ:

العباراتُ	المبرراتُ
1) $\overline{DA} \cong \overline{DG}$	1) معطًى
2) $\angle ADR \cong \angle GDR$	2) معطًى
3) $\overline{DR}$	3) ضلعٌ مشتركٌ
4) $\Delta DRA \cong \Delta DRG$	4) SAS

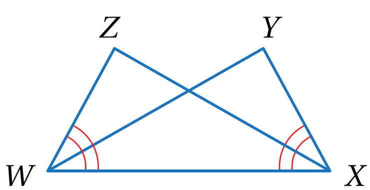
أتحققُ من فهمي:



بساطٌ: يبيّنُ الشكلُ المجاورُ بساطًا تقليديًّا يستعملُ الحائكُ في تصميمِهِ انسحابًا لمثلثٍ متطابقِ الضلعَينِ. أثبتُ أنّ ΔABC وَ ΔCDE المبيّنَينِ في الشكلِ متطابقانِ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.

عندَ إثباتِ أنَّ المثلثَينِ متطابقانِ، فإنَّ الأجزاءَ المتناظرةَ مِنَ المثلثَينِ متطابقةٌ أيضًا وفقَ التعريفِ.

مثال 4



في الشكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\angle ZWX \cong \angle YXW$، وَ $\overline{ZW} \cong \overline{YX}$ فأثبتُ أنَّ $\overline{ZX} \cong \overline{YW}$ باستعمالِ البرهانِ السهميِّ.

البرهانُ:

$\overline{ZW} \cong \overline{YX}$
معطًى

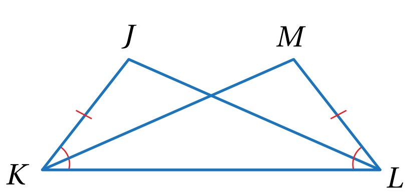
$\overline{WX}$
ضلعٌ مشتركٌ

$\angle ZWX \cong \angle YXW$
معطًى

→ $\Delta ZWX \cong \Delta YXW$
SAS

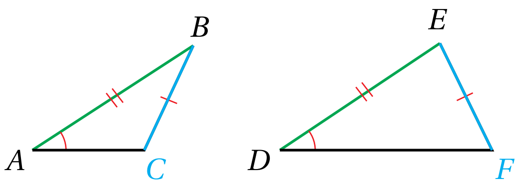
→ $\overline{ZX} \cong \overline{YW}$
ضلعانِ متناظرانِ في مثلثَينِ متطابقَينِ.

أتحققُ من فهمي:



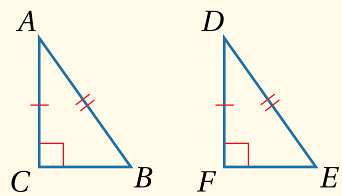
في الشكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\angle JKL \cong \angle MLK$ وَ $\overline{JK} \cong \overline{ML}$، فأثبتُ أنَّ $\angle J \cong \angle M$ باستعمالِ البرهانِ السهميِّ.

تعلمْتُ في الأمثلةِ السابقةِ أنَّهُ يمكنُ استعمالُ حالتَيْ SSS وَ SAS في إثباتِ تطابقِ مثلثَينِ. ولكنْ ماذا عَنْ حالةِ ضلعَينِ وزاويةٍ غيرِ محصورةٍ بينَهُما؟



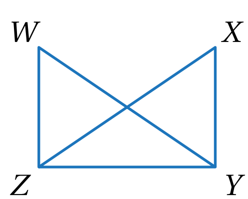
يبيّنُ الشكلُ المجاورُ مثلثَينِ فيهِما ضلعانِ متناظرانِ متطابقانِ وزاويةٌ غيرُ محصورةٍ تُطابقُ زاويةً غيرَ محصورةٍ في المثلثِ الآخَرِ. ولكنَّ المثلثَينِ غيرُ متطابقَينِ. وَمِنْ هنا يتبيّنُ أنَّ حالةَ ضلعَينِ وزاويةٍ غيرِ محصورةٍ بينَهُما غيرُ فعّالةٍ، إلّا أنَّهُ يمكنُ استعمالُها في إثباتِ تطابقِ مثلثَينِ قائمَيِ الزاويةِ؛ إذا تطابقَ الوترانِ، وتطابقَ ساقانِ في المثلثَينِ.

نظريةٌ — تطابقُ المثلثاتِ القائمةِ الزاويةِ بوَترٍ وساقٍ (HL)



- **بالكلماتِ:** إذا طابقَ وَترٌ وساقٌ في مثلثٍ قائمِ الزاويةِ وَترًا وساقًا في مثلثٍ قائمٍ آخَرَ، فإنَّ المثلثَينِ متطابقانِ.
وتُختصَرُ هذهِ الحالةُ بالرمزِ HL، حيثُ إنّ الرمزَ H اختصارٌ للكلمةِ الإنجليزيّةِ (Hypotenuse) وتعني وترًا، و الحرفَ L اختصارٌ للكلمةِ الانجليزيّةِ (Leg) وتعني ساقًا.
- **بالرموزِ:** إذا كانَ: $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ، فإنَّ: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

مثال 5



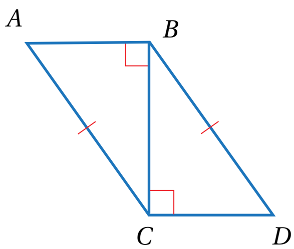
في الشكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$ وَ $\overline{WZ} \perp \overline{ZY}$ وَ $\overline{XY} \perp \overline{YZ}$، فأكتبُ برهانًا ذا عمودَينِ؛ لإثباتِ أنَّ $\Delta WYZ \cong \Delta XZY$

البرهانُ:

العباراتُ	المبرراتُ
1) $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$	1) معطًى
2) $\overline{WZ} \perp \overline{ZY}, \overline{XY} \perp \overline{YZ}$	2) معطًى
3) $\angle WZY, \angle XYZ$ زاويتانِ قائمتانِ	3) تعريفُ المستقيماتِ المتعامدةِ
4) $\Delta WYZ, \Delta XZY$ مثلثانِ قائما الزاويةِ	4) تعريفُ المثلثِ القائمِ الزاويةِ
5) $\overline{ZY}$	5) ضلعٌ مشتركٌ
6) $\Delta WYZ \cong \Delta XZY$	6) HL

أتحققُ من فهمي:

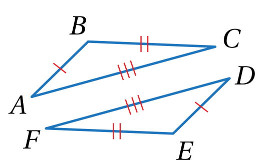
أســتعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشــكلِ المجاورِ في كتابةِ برهــانٍ ذي عمودَينِ؛ لأثبتَ أنَّ $\Delta ABC \cong \Delta DCB$



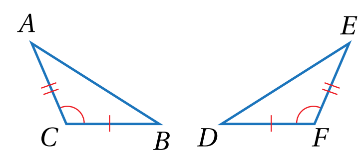
أتدرب وأحل المسائل

أبيّنُ أنَّ كلَّ زوجٍ مِنَ المثلثاتِ الآتيةِ متطابقٌ أَمْ لا، وأبرّرُ إجابتي:

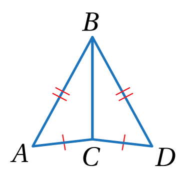
1



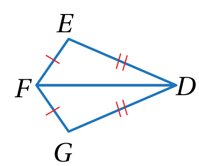
2



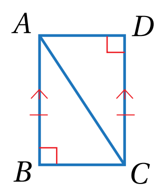
3



4



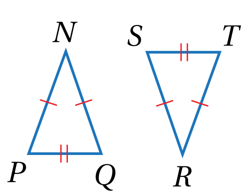
5 أســتعملُ المعلومــاتِ المعطــاةَ فــي الشــكلِ الآتــي لكتابــةِ برهــانٍ ذي عمودَيــنِ؛ لأثبــتَ أنَّ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$



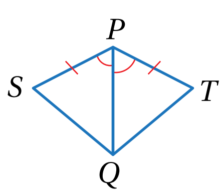
أتذكرُ

إذا قطــعَ مســتقيمٌ مســتقيمَينِ متوازيَينِ، فــإنَّ لــكلِّ زاويتَيــنِ متبادلتَيــنِ داخليًّــا القياسَ نفسَهُ.

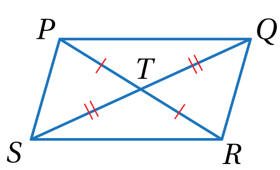
6 أستعملُ المعلومـاتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتـي لكتابةِ برهـانٍ ذي عمودَيـنِ؛ لأثبـتَ أنَّ $\Delta NPQ \cong \Delta RST$



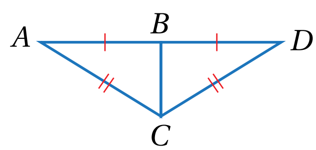
7 أســتعملُ المعلومــاتِ المعطــاةَ فــي الشــكلِ الآتــي، لكتابــةِ برهــانٍ ســهميٍّ؛ لأثبــتَ أنَّ $\Delta SPQ \cong \Delta TPQ$



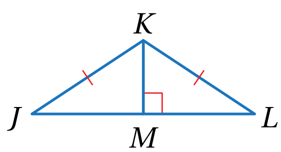
8 أستعملُ المعلومـاتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتـي، لكتابةِ برهـانٍ سـهميٍّ؛ لأثبـتَ أنَّ $\Delta PQT \cong \Delta RST$



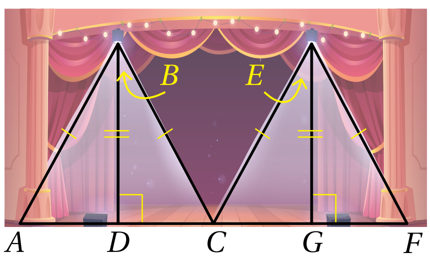
9 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي لكتابةِ برهانٍ ذي عمودَينِ؛ لأثبتَ أنَّ $\angle A \cong \angle D$



10 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي، لكتابةِ برهانٍ سهميٍّ؛ لأثبتَ أنَّ $\overline{JM} \cong \overline{ML}$



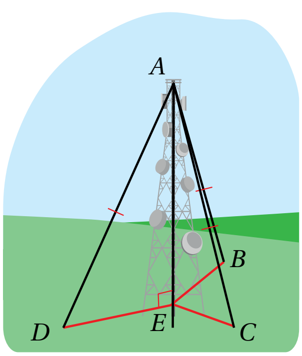
مصباحٌ: يبيّنُ الشكلُ المجاورُ الضوءَ الناشئَ عَنْ مصباحَينِ يبعدانِ المسافةَ نفسَها عَنْ أرضيةِ مسرحٍ:



11 أثبتُ أنَّ $\Delta ABD \cong \Delta CBD$

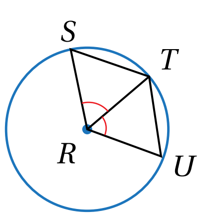
12 هَلِ المثلثاتُ الأربعةُ الموضَّحةُ في الشكلِ متطابقةٌ؟ أبرّرُ إجابتي.

13 **اتّصالاتٌ:** برجُ اتّصالاتٍ عموديٌّ على الأرضِ، يتصلُ رأسُهُ بكلٍّ مِنَ النقاطِ D وَ B وَ C عَنْ طريقِ كابلاتٍ لَها الطولُ نفسُهُ كما في الشكلِ المجاورِ. أثبتُ أنَّ ΔAEB وَ ΔAEC و ΔAED متطابقةٌ.

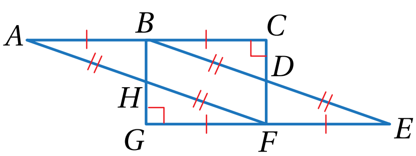


مهاراتُ التفكيرِ العُليا

14 **تبريرٌ:** في الشكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\angle SRT \cong \angle URT$، وَ R مركزُ الدائرةِ، فأكتبُ برهانًا ذا عمودَينِ؛ لإثباتِ أنَّ $\Delta TRS \cong \Delta TRU$، وأبرّرُ إجابتي.



15 **تحدٍّ:** أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المجاورِ؛ لأثبتَ أنَّ $\Delta ACF \cong \Delta EGB$



16 **أكتبُ** كيفَ أتحققُ مِنْ تطابقِ مثلثَينِ بثلاثةِ أضلاعٍ، أَوْ ضلعَينِ وزاويةٍ محصورةٍ بينَهُما؟

معلومةٌ

اخترعَ العالِمُ (غراهامْ بِلْ) النموذجَ الأوليَّ للهاتفِ عامَ 1876، إذْ حاولَ إيجادَ وسيلةٍ لمساعدةِ الصُّمِّ.

أتذكّرُ

أطوالُ أنصافِ أقطارِ الدائرةِ متساويةٌ في الطّولِ.

إرشادٌ

أرسمُ ΔACF وَ ΔEGB بشكلٍ منفصلٍ.

الدرسُ 2 تطابقُ المثلثاتِ (ASA, AAS)

فكرةُ الدرسِ

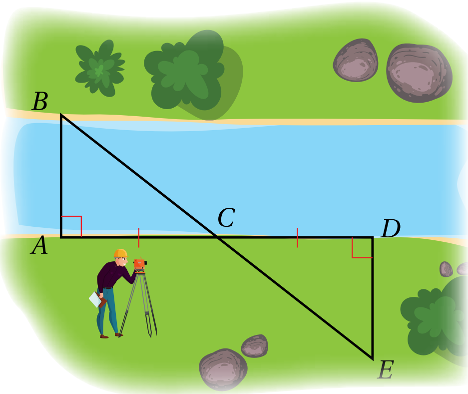
أثبتُ تطابقَ مثلثَينِ باستعمالِ حالتَيْ ASA وَ AAS .

المصطلحاتُ

الضلعُ المحصورُ.

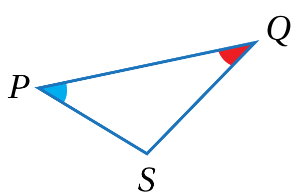
أستكشفُ

يظهرُ في الشكلِ المجاورِ مسّاحٌ يقيسُ عرضَ نهرٍ مستعملًا تطابقَ المثلثاتِ. أصفُ كيفَ يمكنُهُ ذلكَ؟



تعلمْتُ في الدرسِ السابقِ كيفَ أثبتُ تطابقَ مثلثَينِ باستعمالِ ثلاثةِ أضلاعٍ أَوْ ضلعَينِ وزاويةٍ محصورةٍ بينَهُما، وسأتعلمُ في هذا الدرسِ حالاتٍ أُخرى لإثباتِ تطابقِ مثلثَينِ.

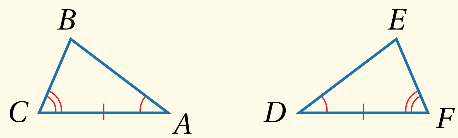
يسمّى الضلعُ الواقعُ بَيْنَ زاويتَينِ متتاليتَينِ في مضلعٍ **الضلعَ المحصورَ** (included side). ففي المثلثِ المجاورِ $\overline{PQ}$ هُوَ الضلعُ المحصورُ بَيْنَ $\angle P$ وَ $\angle Q$



يمكنُ إثباتُ تطابقِ مثلثَينِ باستعمالِ زوجٍ مِنَ الأضلاعِ المتطابقةِ وزوجَينِ مِنَ الزوايا المتطابقةِ في المثلثَينِ.

مسلمةٌ التطابقُ بزاويتَينِ وضلعٍ محصورٍ بينَهُما (ASA)

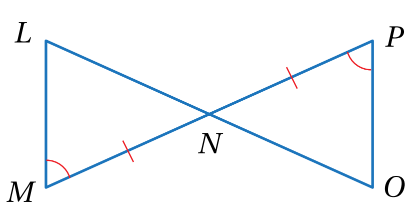
- **بالكلماتِ:** إذا طابقَتْ زاويتانِ والضلعُ المحصورُ بينَهُما في مثلثٍ نظائرَهُما في مثلثٍ آخَرَ، فإنَّ المثلثَينِ متطابقانِ. وتُختصَرُ هذهِ الحالةُ بالرمزِ ASA.



- **بالرموزِ:** إذا كانَ: $\angle A \cong \angle D, \overline{AC} \cong \overline{DF}, \angle C \cong \angle F$ ، فإنَّ: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

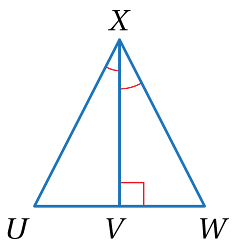
مثال 1

في الشكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\overline{NM} \cong \overline{NP}$ وَ $\angle M \cong \angle P$، فأثبتُ أنَّ $\Delta NML \cong \Delta NPO$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.



البرهانُ:

المبرراتُ	العباراتُ
1) معطًى	1) $\overline{NM} \cong \overline{NP}$
2) معطًى	2) $\angle M \cong \angle P$
3) زاويتانِ متقابلتانِ بالرأسِ	3) $\angle MNL \cong \angle PNO$
4) ASA	4) $\Delta NML \cong \Delta NPO$



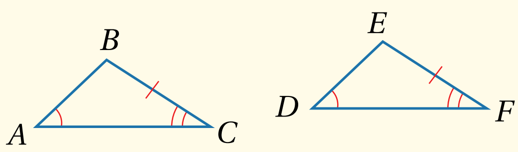
أتحققُ من فهمي:

في الشكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\angle UXV \cong \angle WXV$، فأثبتُ أنَّ $\Delta UXV \cong \Delta WXV$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.

ويمكنُ أيضًا إثباتُ تطابقِ مثلثَينِ باستعمالِ زاويتَينِ وضلعٍ غيرِ محصورٍ بينَهُما.

نظريةٌ: التطابقُ بزاويتَينِ وضلعٍ غيرِ محصورٍ بينَهُما (AAS)

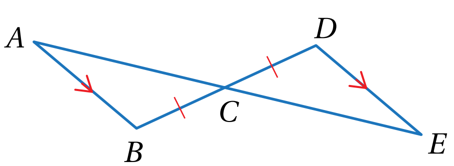
- **بالكلماتِ:** إذا طابقَتْ زاويتانِ وضلعٌ غيرُ محصورٍ بينَهُما في مثلثٍ نظائرَهُما في مثلثٍ آخَرَ، فإنَّ المثلثَينِ متطابقانِ. وتُختصَرُ هذهِ الحالةُ بالرمزِ AAS.



- **بالرموزِ:** إذا كانَ: $\angle A \cong \angle D, \angle C \cong \angle F, \overline{BC} \cong \overline{EF}$، فإنَّ: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

مثال 2

في الشكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\overline{BC} \cong \overline{DC}$ وَ $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$، فأثبتُ أنَّ $\Delta ABC \cong \Delta EDC$ باستعمالِ البرهانِ السهميِّ.



$\overline{BC} \cong \overline{DC}$
معطًى

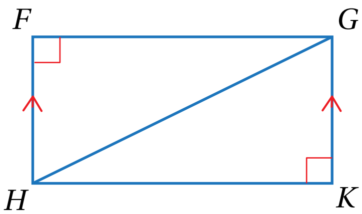
$\overline{AB} \parallel \overline{ED}$
معطًى

$\angle B \cong \angle D$
زاويتانِ متبادلتانِ داخليًّا

$\angle A \cong \angle E$
زاويتانِ متبادلتانِ داخليًّا

$\Delta ABC \cong \Delta EDC$
AAS

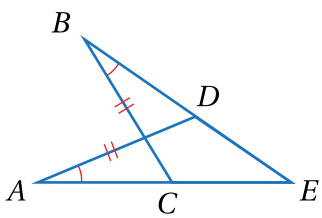
أتحققُ من فهمي:



في الشكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\overline{GK} \parallel \overline{HF}$، وَأنَّ $\angle F$ وَ $\angle K$ زاويتانِ قائمتانِ، فأثبتُ أنَّ $\Delta HFG \cong \Delta GKH$ باستعمالِ البرهانِ السهميِّ.

تعلمْتُ في الدرسِ السابقِ أنَّهُ عندَ إثباتِ أنَّ المثلثَينِ متطابقانِ، فإنَّ الأجزاءَ المتناظرةَ مِنَ المثلثَينِ متطابقةٌ أيضًا وفقَ التعريفِ.

مثال 3



في الشكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\overline{AD} \cong \overline{BC}, \angle EAD \cong \angle EBC$ ، فأثبتُ أنَّ $\overline{AE} \cong \overline{BE}$ باستعمالِ البرهانِ السهميِّ.

$\angle EAD \cong \angle EBC$
معطًى

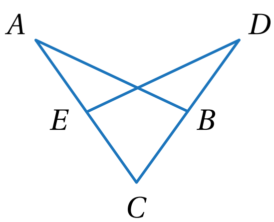
$\overline{AD} \cong \overline{BC}$
معطًى

$\angle E$
زاويةٌ مشتركةٌ

$\Delta ADE \cong \Delta BCE$
AAS

$\overline{AE} \cong \overline{BE}$
ضلعانِ متناظرانِ في مثلثَينِ متطابقَينِ

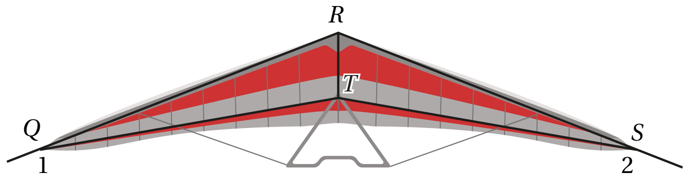
أتحققُ من فهمي:



في الشكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\overline{CD} \cong \overline{CA}, \angle DEC \cong \angle ABC$ فأثبتُ أنَّ $\overline{DE} \cong \overline{AB}$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.

تُستعملُ المثلثاتُ المتطابقةُ في كثيرٍ مِنَ التصميماتِ؛ لِما لَها مِنْ أهميةٍ في ضمانِ دعمِ الأشياءِ وتوازنِها مِنْ حولِنا.

مثال 4: منَ الحياةِ

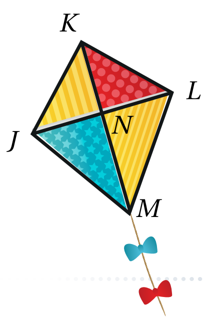


طائرةٌ شراعيةٌ: يصمَّمُ جناحا الطائرةِ الشراعيةِ بحيثُ يبدُوانِ مثلثَينِ متطابقَينِ كما في الشكلِ المجاورِ؛ لضمانِ توازنِ الطائرةِ في الجوِّ. إذا كانَتْ $\angle 2 \cong \angle 1$ وَ $\angle RTQ \cong \angle RTS$، فأثبتْ أنَّ $\overline{QT} \cong \overline{ST}$

لأثبتُ أنَّ $\overline{ST} \cong \overline{QT}$، فلا بدَّ أولًا إثباتُ أنَّ $\Delta QRT \cong \Delta SRT$

العباراتُ	المبرراتُ
1) $\angle 1 \cong \angle 2$	1) معطًى
2) $\angle RTQ \cong \angle RTS$	2) معطًى
3) $\angle RQT \cong \angle RST$	3) زاويتانِ متكاملتانِ مَعَ الزاويتَينِ المتطابقتَينِ $\angle 2$ و $\angle 1$
4) $\overline{RT}$	4) ضلعٌ مشتركٌ
5) $\Delta RQT \cong \Delta RST$	5) AAS
6) $\overline{QT} \cong \overline{ST}$	6) ضلعانِ متناظرانِ في مثلثَينِ متطابقَينِ

أتحققُ من فهمي:

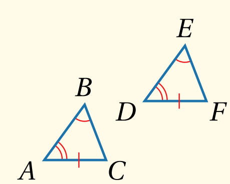


طائرةٌ ورقيةٌ: إذا كانَتْ N في الطائرةِ الورقيةِ المجاورةِ نقطةَ منتصفِ $\overline{JL}$، وَ $\overline{KM} \perp \overline{JL}$ وَ $\angle KLN \cong \angle KJN$، فأثبتُ أنَّ $\overline{KJ} \cong \overline{KL}$

تعلمْتُ طرائقَ عدةً لإثباتِ تطابقِ المثلثاتِ يمكنُ تلخيصُها في الجدولِ الآتي:

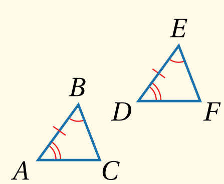
ملخصُ المفهومِ — إثباتُ تطابقِ المثلثاتِ

AAS



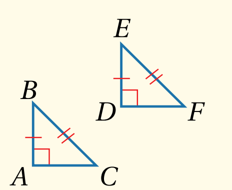
يتطابقُ مثلثانِ إذا طابقَتْ زاويتانِ وضلعٌ غيرُ محصورٍ بينَهُما في مثلثٍ نظائرَها في مثلثٍ آخَرَ.

ASA



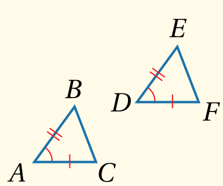
يتطابقُ مثلثانِ إذا طابقَتْ زاويتانِ وضلعٌ محصورٌ بينَهُما في مثلثٍ نظائرَها في مثلثٍ آخَرَ.

HL (مثلثاتٌ قائمةُ الزاويةِ فقطْ)



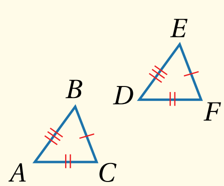
يتطابقُ مثلثانِ قائما الزاويةِ إذا طابقَ وترٌ وساقٌ في مثلثٍ قائمِ الزاويةِ وترًا وساقًا في مثلثٍ قائمٍ آخَرَ.

SAS



يتطابقُ مثلثانِ إذا طابقَ ضلعانِ وزاويةٌ محصورةٌ بينَهُما في مثلثٍ نظائرَها في مثلثٍ آخَرَ.

SSS

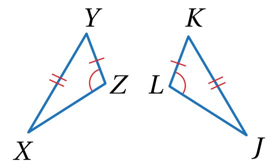


يتطابقُ مثلثانِ إذا كانَتْ أضلاعُهُما المتناظرةُ متطابقةً.

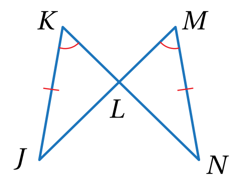
أتدرب وأحل المسائل

أحددُ أنَّهُ يمكنُ إثباتُ تطابقِ كلِّ زوجٍ مِنَ المثلثاتِ الآتيةِ أَمْ لا، وأبرّرُ إجابتي:

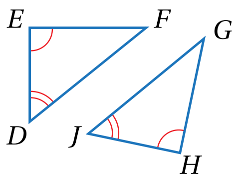
3 $\Delta XYZ, \Delta JKL$



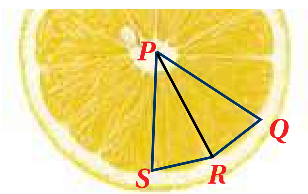
2 $\Delta JKL, \Delta NML$



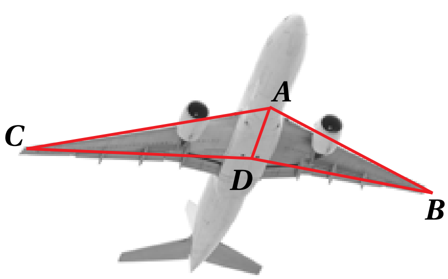
1 $\Delta DEF, \Delta JHG$



4 في الشكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\overline{PR}$ ينصّفُ $\angle QPS$، وَ $\angle QRP \cong \angle SRP$، فأثبتُ أنَّ $\Delta QRP \cong \Delta SRP$



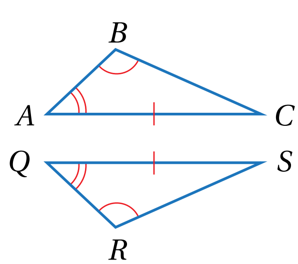
5 في الشكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\overline{DB} \cong \overline{DC}$, $\angle ADB \cong \angle ADC$ ، $\angle ABD \cong \angle ACD$، فأثبتُ أنَّ $\Delta ABD \cong \Delta ACD$



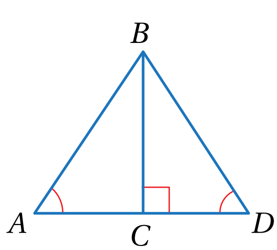
معلومةٌ

يمكنُ للطائرةِ أَنْ تحلّقَ لبعضِ الوقتِ مِنْ دونِ محرِّكاتٍ، وذلكَ بفضلِ التصميمِ الانسيابيِّ والدقيقِ للأجنحةِ.

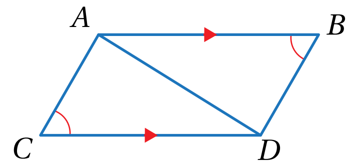
6 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي لكتابةِ برهانٍ ذي عمودَين؛ لأثبتَ أنَّ $\Delta ABC \cong \Delta QRS$



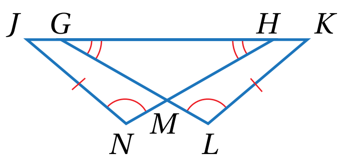
7 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي لكتابةِ برهانٍ ذي عمودَين؛ لأثبتَ أنَّ $\Delta ABC \cong \Delta DBC$



8 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي، لكتابةِ برهانٍ سهميٍّ؛ لأثبتَ أنَّ $\overline{AC} \cong \overline{DB}$



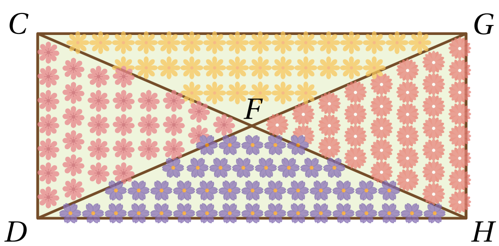
9 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي، لكتابةِ برهانٍ سهميٍّ؛ لأثبتَ أنَّ $\overline{GK} \cong \overline{HJ}$



معلومةٌ

تعتمدُ أجهزةُ المِساحةِ الحديثةِ على نظامِ تحديدِ المواقعِ العالميِّ (GPS)

حديقةٌ: تخطِّطُ سالي لزراعةِ حديقتِها مستطيلةِ الشكلِ بأنواعٍ مختلفةٍ مِنَ الزهورِ في أربعةِ أحواضٍ مثلثةِ الشكلِ كما في الشكلِ المجاورِ. إذا علمْتُ أنَّ F نقطةَ منتصفِ $\overline{DG}$ و $\angle CDF \cong \angle FGH$، فأثبتُ أنَّ:



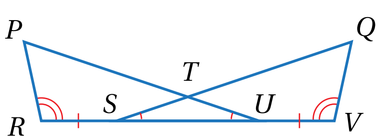
11 $\overline{CF} \cong \overline{HF}$

10 $\Delta CFD \cong \Delta HFG$

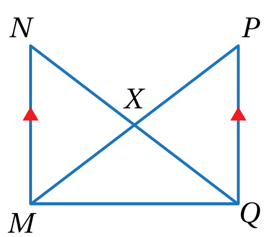
12 نهرٌ: أعودُ إلى فقرةِ (أستكشفُ) بدايةَ الدرسِ، وأثبتُ أنَّ $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

13 تحدٍّ: أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المجاورِ لكتابةِ برهانٍ ذي عمودَينِ؛ لأثبتَ أنَّ $\Delta PUR \cong \Delta QSV$



14 تبريرٌ: هَلْ يمكنُ إثباتُ تطابقِ $\Delta MNQ \cong \Delta QPM$ بالاعتمادِ على المعلوماتِ المعطاةِ على الشكلِ المجاورِ؟ أبرِّرُ إجابتي.



15 أكتبُ كيفَ أتحققُ مِنْ تطابقِ مثلثَينِ باستعمالِ زاويتَينِ وضلعٍ محصورٍ بينَهُما؟

المثلثاتُ المتطابقةُ الضلعَينِ والمثلثاتُ المتطابقةُ الأضلاعِ

فكرةُ الدرسِ

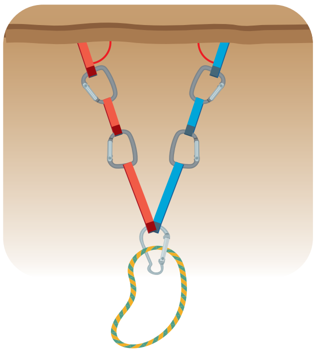
- أستعملُ خصائصَ المثلثاتِ المتطابقةِ الضلعَينِ.
- أستعملُ خصائصَ المثلثاتِ المتطابقةِ الأضلاعِ.

المصطلحاتُ

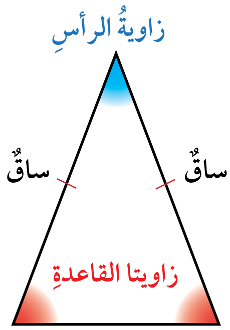
السّاقانِ، زاويةُ الرأسِ، القاعدةُ، زاويتا القاعدةِ، النتيجةُ.

أستكشفُ

يبيّنُ الشكلُ المجاورُ مرساتَينِ باللونَينِ الأحمرِ والأزرقِ لهُما الطولُ نفسُهُ، ثبّتَهُما متسلّقٌ في شقٍّ صخريٍّ في أثناءِ تسلّقِهِ أحدَ الجبالِ. ما العلاقةُ بَيْنَ الزاويتَينِ المكوّنتَينِ بَيْنَ كُلٍّ مِنَ المرساتَينِ والشقِّ الصخريِّ؟



تعلمْتُ سابقًا أنَّ المثلثَ المتطابقَ الضلعَينِ هُوَ المثلثُ الّذي فيهِ ضلعانِ متطابقانِ على الأقلِّ.



إنَّ لأجزاءِ المثلثِ المتطابقِ الضلعَينِ أسماءً خاصةً، إذْ يسمّى الضلعانِ المتطابقانِ **السّاقَينِ** (legs)، وتسمّى الزاويةُ الّتي ضلعاها السّاقانِ **زاويةَ الرأسِ** (vertex angle)، ويسمّى الضلعُ الثالثُ **القاعدةَ** (base). والزاويتانِ المكوّنتانِ مِنَ القاعدةِ والضلعَينِ المتطابقَينِ تسمّيانِ **زاويتَي القاعدةِ** (base angles).

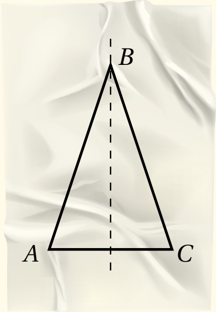
سأستكشفُ في النشاطِ الآتي العلاقةَ بَيْنَ زاويتَي القاعدةِ والسّاقَينِ في المثلثِ المتطابقِ الضلعَينِ.

نشاطٌ هندسيٌّ: المثلثُ المتطابقُ الضلعَينِ

الإجراءاتُ:

الخُطْوَةُ 1 أرسمُ المثلثَ ABC المتطابقَ الضلعَينِ على ورقةٍ شفافةٍ، كما في الشكلِ المجاورِ، حيثُ $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.

الخُطْوَةُ 2 أطوي المثلثَ حولَ الرأسِ B بحيثُ ينطبقُ الساقانِ على بعضِهِما تمامًا.



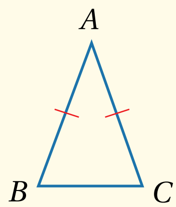
أحللُ النتائجَ:

- ماذا ألاحظُ بالنسبةِ للزاويتَينِ $\angle A$ وَ $\angle C$؟
- أرسمُ مثلثًا آخرَ متطابقَ الضلعَينِ، وأقارنُ بَيْنَ زاويتَي القاعدةِ. ماذا أستنتجُ؟

يمكنُني ملاحظةُ النظرياتِ الآتيةِ مِنَ النشاطِ الهندسيِّ السابقِ:

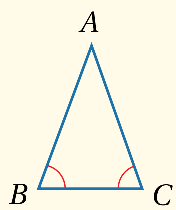
نظرياتٌ — المثلثُ المتطابقُ الضلعَينِ

نظريةُ المثلثِ المتطابقِ الضلعَينِ



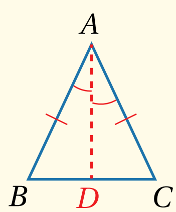
- **بالكلماتِ:** إذا تطابقَ ضلعانِ في مثلثٍ، فإنَّ الزاويتَينِ المقابلتَينِ لَهُما متطابقتانِ.
- **بالرموزِ:** إذا كانَ $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ فإنَّ $\angle B \cong \angle C$

عكسُ نظريةِ المثلثِ المتطابقِ الضلعَينِ



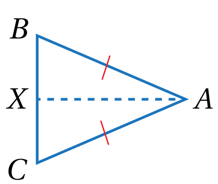
- **بالكلماتِ:** إذا تطابقَتْ زاويتانِ في مثلثٍ، فإنَّ الضلعَينِ المقابلَينِ لَهُما متطابقانِ.
- **بالرموزِ:** إذا كانَ $\angle B \cong \angle C$ فإنَّ $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

منصّفُ زاويةِ الرّأسِ



- **بالكلماتِ:** يكونُ منصّفُ زاويةِ الرأسِ عموديًّا على القاعدةِ، وينصّفُها.
- **بالرموزِ:** إذا كانَ $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ وَ $\overline{AD}$ ينصّفُ $\angle BAC$ ، فإنَّ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ وَ $\overline{BD} \cong \overline{CD}$

مثال 1: إثباتُ نظريةٍ

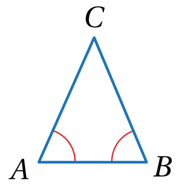


في $\triangle ABC$، إذا علمْتُ أنَّ $\overline{AB} \cong \overline{AC}$، فأثبتُ أنَّ $\angle B \cong \angle C$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.

العباراتُ	المبرراتُ
1) أفرضُ أنَّ X نقطةُ منتصفِ $\overline{BC}$	1) كلُّ قطعةٍ مستقيمةٍ لَها نقطةُ منتصفٍ واحدةٌ.
2) أرسمُ قطعةً مساعدةً $\overline{AX}$	2) كلُّ نقطتَينِ تحدّدانِ مستقيمًا.
3) $\overline{BX} \cong \overline{CX}$	3) X نقطةُ منتصفِ $\overline{BC}$
4) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	4) معطًى
5) $\overline{AX}$	5) ضلعٌ مشتركٌ
6) $\triangle ABX \cong \triangle ACX$	6) SSS
7) $\angle B \cong \angle C$	7) زاويتانِ متناظرتانِ في مثلثَينِ متطابقَينِ

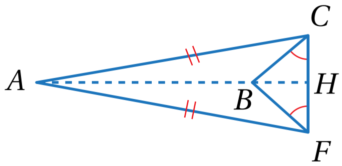
أتحققُ من فهمي:

في $\triangle ABC$، إذا علمْتُ أنَّ $\angle B \cong \angle A$، فأثبتُ أنَّ $\overline{CB} \cong \overline{CA}$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.



يمكنُني اســتعمالُ نظرياتِ المثلثِ المتطابقِ الضلعَينِ في تحديدِ القطعِ المســتقيمةِ المتطابقةِ والزوايا المتطابقةِ في أشكالٍ هندسيةٍ تحتوي مثلثاتٍ متطابقةَ الضلعَينِ.

مثال 2



1 أسمّي زاويتَينِ متطابقتَينِ غيرَ المشارِ إلى تطابقِهما في الشكلِ:

$\angle AFC$ تقابلُ $\overline{AC}$ وَ $\angle ACF$ تقابلُ $\overline{AF}$؛ لذا فإنَّ $\angle ACF \cong \angle AFC$

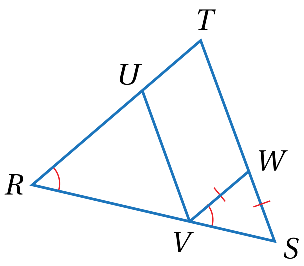
(نظريةُ المثلثِ المتطابقِ الضلعَينِ)

2 أسمّي قطعتَينِ مستقيمتَينِ متطابقتَينِ غيرَ المشارِ إلى تطابقِهما في الشكلِ:

$\overline{BC}$ تقابلُ $\angle BFC$ وَ $\overline{BF}$ تقابلُ $\angle BCF$؛ لذا فإنَّ $\overline{BF} \cong \overline{BC}$

(عكسُ نظريةِ المثلثِ المتطابقِ الضلعَينِ)

أتحققُ من فهمي:



3 أسمّي زاويتَينِ متطابقتَينِ غيرَ المشارِ إلى تطابقِهما في الشكلِ.

4 أسمّي قطعتَينِ مستقيمتَينِ متطابقتَينِ غيرَ المشارِ إلى تطابقِهما في الشكلِ.

النتيجةُ (Corollary) هِيَ نظريةٌ يكونُ برهانُها مبنيًّا على نظريةٍ أُخرى. ويمكنُ اســتعمالُ النتيجةِ لتبريرِ خطواتِ البراهينِ، أَوْ حلِّ أســئلةٍ ذاتِ علاقةٍ. وفي ما يأتي نتيجتانِ لنظريةِ المثلثِ المتطابقِ الضلعَينِ، وعكسِ نظريةِ المثلثِ المتطابقِ الضلعَينِ:

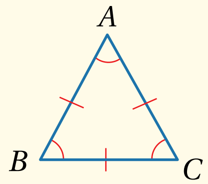
أتذكَّرُ

المثلــثُ المتطابــقُ الأضــلاعِ أضلاعُــهُ الثلاثةُ متطابقةٌ.

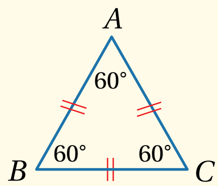
نتيجتانِ

المثلثُ المتطابقُ الأضلاعِ

- **بالكلماتِ:** يكونُ المثلثُ متطابقَ الأضلاعِ إذا وفقط إذا كانَ متطابقَ الزوايا.
- **بالرموزِ:** $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$ إذا وفقط إذا كانَ $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$



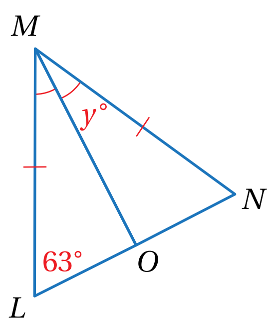
- **بالكلماتِ:** قياسُ كلِّ زاويةٍ في المثلثِ المتطابقِ الأضلاعِ $60°$
- **بالرموزِ:** إذا كانَ $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$ فإنَّ $\angle A \cong \angle B \cong \angle C = 60°$



يمكنُ استعمالُ خصائصِ المثلثاتِ المتطابقةِ الضلعَينِ والمتطابقةِ الأضلاعِ والجبرِ لإيجادِ قِيَمٍ مجهولةٍ.

مثال 3

1 **أجدُ قيمةَ y في الشكلِ المجاورِ.**



بما أنَّ $\angle LMO \cong \angle NMO$ إذنْ $\overline{MO}$ منصّفٌ لزاويةِ الرأسِ في مثلثٍ متطابقِ الضلعَينِ، وبذلكَ فإنَّ $\overline{MO} \perp \overline{LN}$، ومنهُ $m\angle MON = 90°$.

وبما أنَّ ΔMLN متطابقُ الضلعَينِ، فإنَّ $\angle L \cong \angle N$، ومنهُ فإنَّ $m\angle N = 63°$.

$m\angle N + m\angle MON + y° = 180°$ مجموعُ قياساتِ زوايا المثلثِ

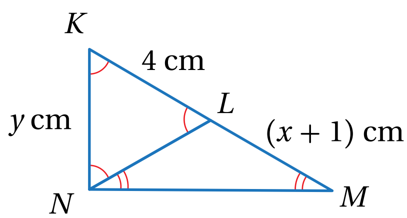
$63° + 90° + y° = 180°$ أعوضُ $m\angle N = 63°, m\angle MON = 90°$

$153° + y° = 180°$ أجمعُ

$y° = 27°$ أطرحُ $153°$ مِنْ طرفَيِ المعادلةِ

إذنْ، قيمةُ y تساوي 27

2 أجدُ قيمةَ كلٍّ مِنْ x وَ y في الشكلِ المجاورِ.



الْخُطْوَةُ 1 أجدُ قيمةَ y

بمـــا أنَّ $\angle LKN \cong \angle KLN \cong \angle KNL$ ، فإنَّ ΔKLN متطابقُ الأضلاعِ،

ومنهُ فإنَّ $y = 4\text{ cm}$.

الْخُطْوَةُ 2 أجدُ قيمةَ x

بما أنَّ $\angle LMN \cong \angle LNM$، فإنَّ $\overline{LM} \cong \overline{LN}$، ومنهُ فإنَّ ΔLMN متطابقُ الضلعَينِ.

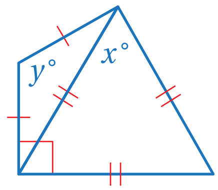
وبما أنَّ ΔKLN متطابقُ الأضلاعِ، فإنَّ $LN = 4$.

قطعتانِ مستقيمتانِ متطابقتانِ	$LN = LM$
أعوضُ $LN = 4, LM = x + 1$	$4 = x + 1$
أطرحُ 1 مِنْ طرفَيِ المعادلةِ	$x = 3$

إذنْ، قيمةُ x تساوي 3 cm

أتحققُ من فهمي:

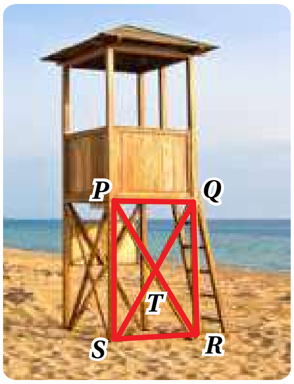
3 أجدُ قيمةَ كلٍّ مِنْ x وَ y في الشكلِ المجاورِ.



يمكنُ رؤيةُ المثلثاتِ المتطابقةِ الضلعَينِ والمتطابقةِ الأضلاعِ في كثيرٍ مِنَ التصميماتِ والهياكلِ والجسورِ والمباني؛ لِما لَها مِنْ أهميةٍ في دعمِها وجعلِها أكثرَ ثباتًا.

مثال 4: منَ الحياةِ

برجُ المنقذِ: في برجِ المنقذِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\overline{QR} \cong \overline{PS}$ وَ $\angle PQR \cong \angle QPS$، فأثبتُ أنَّ:



1 $\Delta PQR \cong \Delta QPS$

$\angle QPS \cong \angle PQR$	$\overline{PS} \cong \overline{QR}$	$\overline{PQ} \cong \overline{PQ}$
معطًى	معطًى	ضلعٌ مشتركٌ

$\triangle OPS \cong \triangle PQR$

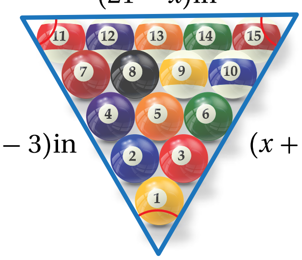
SAS

2 $\triangle QPT$ متطابقُ الضلعَينِ.

العباراتُ	المبرراتُ
1) $\angle PTS \cong \angle QTR$	1) زاويتانِ متقابلتانِ بالرأسِ.
2) $\angle PSQ \cong \angle QRP$	2) زاويتانِ متناظرتانِ في مثلثَينِ متطابقَينِ.
3) $\overline{PS} \cong \overline{QR}$	3) معطًى.
4) $\triangle QTR \cong \triangle PTS$	4) AAS
5) $\overline{PT} \cong \overline{QT}$	5) ضلعانِ متناظرانِ في مثلثَينِ متطابقَينِ.
6) $\triangle QPT$ متطابقُ الضلعَينِ	6) تعريفُ المثلثِ المتطابقِ الضلعَينِ.

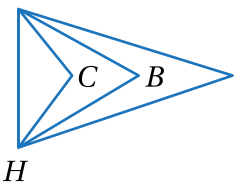
أتحققُ من فهمي:

بلياردو: تُرتَّبُ كراتُ البلياردو على شكلِ مثلثٍ متطابقِ الأضلاعِ كما في الشكلِ المجاورِ؛ لأنَّ شكلَ المثلثِ قادرٌ على نقلِ الطاقةِ الحركيةِ مِنَ الكرةِ الأولى في الواجهةِ إلى غيرِها مِنَ الكراتِ، فتتحرّكُ كلُّها مِنْ ضربةٍ واحدةٍ. أجدُ قيمةَ المتغيرِ x.



أتدرب وأحل المسائل

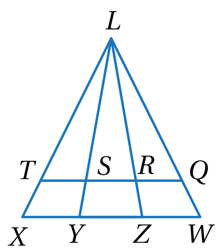
باستعمالِ الشكلِ المجاورِ، أجيبُ عَنِ الأسئلةِ الآتيةِ:



1 إذا كانَ $\overline{AD} \cong \overline{AH}$، فأسمّي زاويتَينِ متطابقتَينِ.

2 إذا كانَ $\angle BDH \cong \angle BHD$، فأسمّي قطعتَينِ مستقيمتَينِ متطابقتَينِ.

باستعمالِ الشكلِ المجاورِ، أجيبُ عَنِ الأسئلةِ الآتيةِ:



3 إذا كانَ $\overline{LT} \cong \overline{LQ}$، فأسمّي زاويتَينِ متطابقتَينِ.

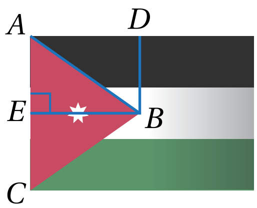
4 إذا كانَ $\overline{LX} \cong \overline{LW}$، فأسمّي زاويتَينِ متطابقتَينِ.

5 إذا كانَ $\overline{LY} \cong \overline{LZ}$، فأسمّي زاويتَينِ متطابقتَينِ.

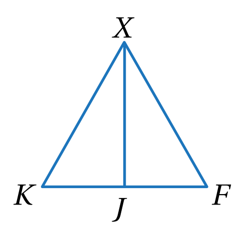
6 إذا كانَ $\angle LXW \cong \angle LWX$، فأسمّي قطعتَينِ مستقيمتَينِ متطابقتَينِ.

7 إذا كانَ $\angle LSR \cong \angle LRS$، فأسمّي قطعتَينِ مستقيمتَينِ متطابقتَينِ.

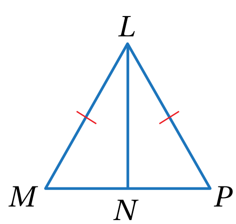
8 **العلمُ الأردنيُّ:** العلمُ الأردنيُّ مستطيلٌ طولُهُ مِثْلا عرضِهِ، فيهِ مثلثٌ متطابقُ الضلعَينِ لونُهُ أحمرُ، وارتفاعُ المثلثِ $\overline{BE}$ يساوي نصفَ طولِ العلمِ. أثبتُ أنَّ $\Delta DAB \cong \Delta EBA$



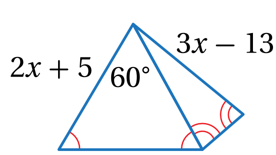
9 في الشكلِ الآتي، إذا علمْتُ أنَّ ΔXKF متطابقُ الأضلاعِ، وَ $\overline{XJ}$ ينصّفُ $\angle X$، فأكتبُ برهانًا ذا عمودَينِ؛ لإثباتِ أنَّ J نقطةُ منتصفِ $\overline{KF}$.

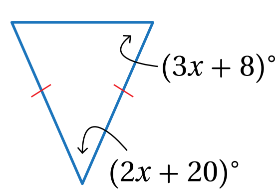


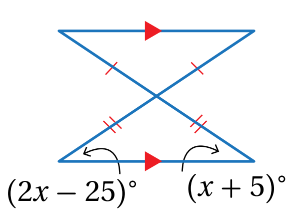
10 في الشكلِ الآتي، إذا علمْتُ أنَّ ΔMLP متطابقُ الضلعَينِ، وَ N نقطةُ منتصفِ $\overline{MP}$، فأكتبُ برهانًا سهميًّا؛ لإثباتِ أنَّ $\overline{LN} \perp \overline{MP}$

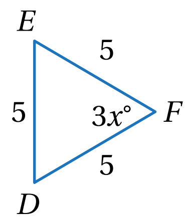


أجدُ قيمةَ x في كلٍّ ممّا يأتي:

11


12


13


14


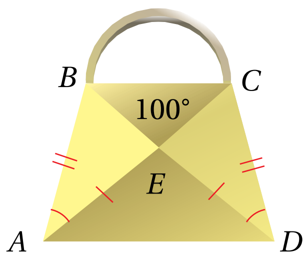
أتعلّمُ

يمثّلُ المثلثُ الأحمرُ في العَلَمِ الأردنيِّ السلالةَ الهاشميةَ.

أتذكّرُ

مجموعُ قياساتِ زوايا المثلّثِ 180°

حقيبةٌ: يبيّنُ الشكلُ المجاورُ تصميمًا لحقيبةٍ قُماشيةٍ:



15 أثبتُ أنَّ $\triangle ABE \cong \triangle DCE$

16 أسمّي المثلثاتِ المتطابقةَ الضلعَينِ في الحقيبةِ.

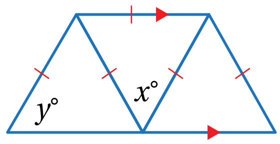
17 أسمّي ثلاثَ زوايا تتطابقُ مَعَ $\angle EAD$

أتذكّرُ

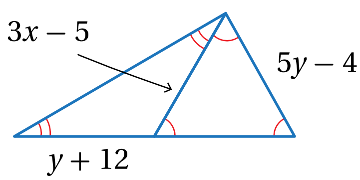
مجموعُ قياساتِ الزّوايا على مستقيمٍ يساوي $180°$

أجدُ قيمةَ x وَ y في كلٍّ ممّا يأتي:

18

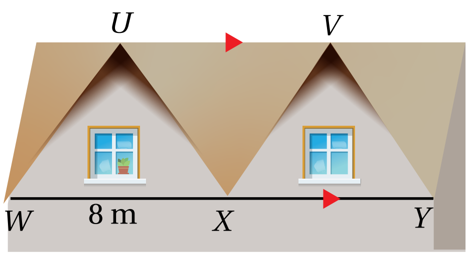


19



مهاراتُ التفكيرِ العُليا

تبريرٌ: يبيّنُ الشكلُ المجاورُ الواجهةَ الأماميةَ لمنزلٍ على شكلِ مثلثَينِ متطابقَيِ الضلعَينِ رأساهُما U وَ V حيثُ $\triangle WUX \cong \triangle XVY$:



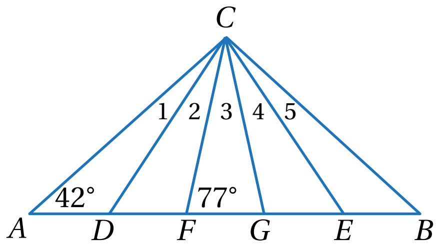
20 أسمّي زاويتَينِ متطابقتَينِ مَعَ $\angle WUX$، وأبرّرُ إجابتي.

21 أجدُ المسافةَ بَيْنَ الرأسَينِ U وَ V، وأبرّرُ إجابتي.

22 **تَحدٍّ:** في الشكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\triangle ABC$ متطابقُ الضلعَينِ، وَ $\triangle DCE$ متطابقُ الأضلاعِ، وَ $\triangle FCG$ متطابقُ الضلعَينِ، فأجدُ قياساتِ الزوايا 1 وَ 2 وَ 3 وَ 4 وَ 5.

إرشادٌ

أبدأُ بإيجادِ قياساتِ الزّوايا مِنَ المثلّثِ الداخليِّ FCG



23 **أكتبُ** كيفَ أثبتُ أنَّ قياسَ كلِّ زاويةٍ مِنْ زوايا المثلثِ المتطابقِ الأضلاعِ $60°$؟

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

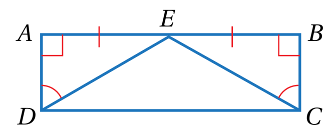
أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كانَ $\Delta XYZ \cong \Delta ABC$ فأيُّ الجملِ الآتيةِ صحيحةٌ؟

a) $\overline{BC} \cong \overline{ZX}$ **b)** $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$

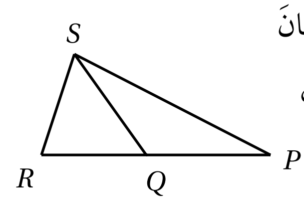
c) $\overline{AB} \cong \overline{YZ}$ **d)** $\overline{AC} \cong \overline{XY}$

2 بناءً على المعلوماتِ المُعطاةِ على الشّكلِ المجاورِ، أيٌّ ممّا يأتي تُستعمَلُ لإثباتِ أَنَّ $\Delta ADE \cong \Delta BCE$؟



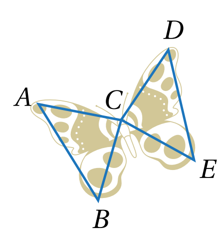
a) SAS **b)** ASA **c)** AAS **d)** HL

3 في الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ $\overline{QR} \cong \overline{RS}$ وَ $\overline{PQ} \cong \overline{QS}$، وَ $m\angle PRS = 72°$، فما قياسُ $\angle QPS$؟



a) 27° **b)** 54° **c)** 63° **d)** 72°

4 تبدو أجنحةُ بعضِ الفراشاتِ على شكلِ مثلثاتٍ متطابقةٍ كما في الشكلِ المجاورِ.
إذا كانَ $\overline{AC} \cong \overline{DC}$ وَ $\angle ACB \cong \angle ECD$، فما العبارةُ الإضافيةُ الّتي أحتاجُ إليها؛ لأثبتَ أنَّ $\Delta ACB \cong \Delta ECD$؟



a) $\overline{BC} \cong \overline{CE}$ **b)** $\overline{AB} \cong \overline{ED}$

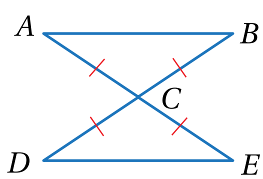
c) $\angle BAC \cong \angle CED$ **d)** $\angle ABC \cong \angle CDE$

5 إذا كانَ $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$، وكانَ $m\angle A = 47.1°$ وَ $m\angle C = 13.8°$، فإنَّ $m\angle Y$ يساوي:

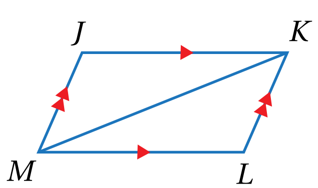
a) 13.8° **b)** 76.2°

c) 60.9° **d)** 119.1°

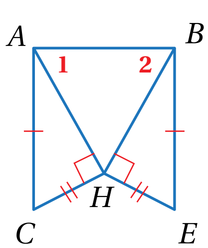
6 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ على الشكلِ الآتي لكتابةِ برهانٍ سهميٍّ؛ لأثبتَ أنَّ $\Delta ABC \cong \Delta EDC$



7 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ على الشكلِ المجاورِ لكتابةِ برهانٍ ذي عمودَينِ؛ لأثبتَ أنَّ $\Delta MJK \cong \Delta KLM$

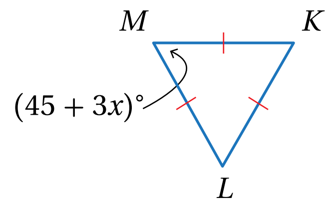


8 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ على الشكلِ الآتي؛ لأثبتَ أنَّ $\angle 1 \cong \angle 2$

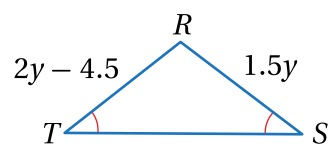


أجدُ قيمةَ المتغيرِ في كلٍّ مِنَ الأشكالِ الآتيةِ:

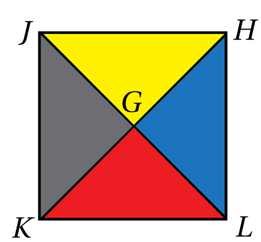
9



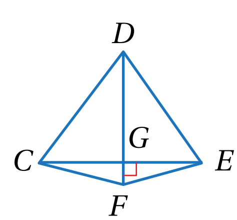
10



11 في الشكلِ الآتي، إذا علمْتُ أنَّ $GJ = GH = GL = GK$، فأثبتُ أنَّ $\Delta JGK \cong \Delta LGH$

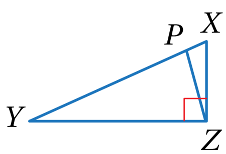


12 في الشكلِ الآتي، إذا علمْتُ أنَّ $\overline{DF}$ ينصّفُ $\angle CDE$، وَ $\overline{DF} \perp \overline{CE}$، فأكتبُ برهانًا سهميًّا؛ لأثبتَ أنَّ $\Delta DGC \cong \Delta DGE$



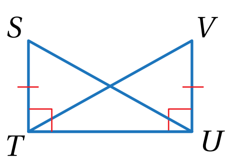
تدريبٌ على الاختباراتِ الدّوليّةِ

13 في الشكلِ المجاورِ ΔXZY قائمُ الزاويةِ، فيهِ $\overline{YZ} \cong \overline{YP}$ وَ $m\angle PYZ = 26°$، ما قياسُ $\angle XZP$؟



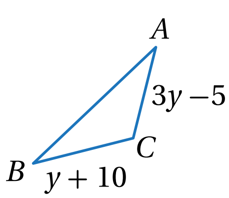
a) 13°   b) 26°   c) 32°   d) 64°

14 أيُّ النظرياتِ أوِ المسلّماتِ يمكنُ بِها إثباتُ تطابقِ ΔSTU وَ ΔVUT؟



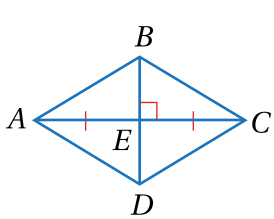
a) *ASA*   b) HL   c) SSS   d) SAS

15 قيمةُ y بالوحداتِ الّتي تجعلُ ΔABC المجاورَ متطابقَ الضلعَينِ تساوي:



a) $1\frac{1}{4}$ b) $7\frac{1}{2}$ c) $2\frac{1}{2}$ d) $15\frac{1}{2}$

16 أيُّ جُمَلِ التطابقِ الآتيةِ يمكنُ إثباتُها بالمعلوماتِ المعطاةِ في الشكلِ المجاورِ؟



a) $\Delta AEB \cong \Delta CED$ b) $\Delta ABD \cong \Delta BCA$

c) $\Delta BAC \cong \Delta DAC$ d) $\Delta DEC \cong \Delta DEA$