الرياضيات

الصف الحادي عشر - الفرع العلمي

الفصل الدراسي الأول

11

كتاب التمارين

المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center for Curriculum Development

الرياضيات

الصف الحادي عشر - الفرع العلمي

الفصل الدراسي الأول

11

منهاجي
متعة التعليم الهادف

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي　　يوسف سليمان جرادات　　مهند إبراهيم العسود

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237　06-5376266　P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor　feedback@nccd.gov.jo　www.nccd.gov.jo

قـرّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطويـر المناهج في جلسـته رقم (2021/3)، تاريـخ 2021/6/10 م، وقرار مجلـس التربية والتعليم رقـم (2021/114) تاريـخ 2021/6/30 م بـدءًا من العام الـدراسي 2021 / 2022 م.

© Harper Collins Publishers Limited 2021.
- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 363 - 0

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2022/4/2054)

375.001

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

الرياضيـات: الصـف الحـادي عشـر الفـرع العلمـي: كتـاب التماريـن (الفصـل الدراسـي الأول)/ المركـز الوطنـي لتطويـر المناهـج. ط2؛ مزيـدة ومنقحـة.– عمـان: المركـز، 2022

(27) ص.

ر.إ.: 2022/4/2054

الواصفات: / الرياضيات/ / المناهج/ / التعليم الثانوي/

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, sorted in retrieval system, or transmitted in any form by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise , without the prior written permission of the publisher or a license permitting restricted copying in the United Kingdom issued by the Copyright Licensing Agency Ltd, Barnard's Inn, 86 Fetter Lane, London, EC4A 1EN.
British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية) 1442 هـ / 2021 م
أعيدت طباعته 1443 هـ / 2022 م

أعزّاءنا الطلبة ...

يحتوي هذا الكتاب على تمارين مُتنوِّعة أُعِدَّت بعناية لتغنيكم عن استعمال مراجع إضافية، وهي تُعَدُّ استكمالًا للتمارين الواردة في كتاب الطالب، وتهدف إلى مساعدتكم على ترسيخ المفاهيم التي تتعلَّمونها في كل درس، وتُنمّي مهاراتكم الحسابية.

قد يختار المُعلِّم/ المُعلِّمة بعض تمارين هذا الكتاب واجبًا منزليًّا، ويترك لكم بعضها الآخر لكي تحلّوها عند الاستعداد للاختبارات الشهرية واختبارات نهاية الفصل الدراسي.

أمّا الصفحات التي تحمل عنوان (أستعد لدراسة الوحدة) في بداية كل وحدة، فإنَّها تساعدكم على مراجعة المفاهيم التي درستموها سابقًا؛ ما يُعزِّز قدرتكم على متابعة التعلُّم في الوحدة الجديدة بسلاسة ويسر.

قد لا يتوافر فراغ كافٍ إزاء كل تمرين لكتابة خطوات الحلِّ جميعها؛ لذا يُمكِن استعمال دفتر إضافي لكتابتها بوضوح.

متمنين لكم تعلُّمًا ممتعًا ومُيسَّرًا.

المركز الوطني لتطوير المناهج

منهاجي
متعة التعليم الهادف

قائمة المحتويات

الوحدة 1 الاقترانات المتشعّبة والمتباينات

أستعدّ لدراسة الوحدة **6**

الدرس 1 الاقترانات المتشعّبة 8

الدرس 2 حلّ معادلات ومتباينات القيمة المطلقة 9

الدرس 3 حلّ نظام مُكوّن من متباينات خطّية بمتغيّرين بيانيًّا 10

الوحدة 2 تحليل الاقترانات

أستعدّ لدراسة الوحدة **11**

الدرس 1 نظريتا الباقي والعوامل 13

الدرس 2 الكسور الجزئية 14

الدرس 3 التحويلات الهندسية للاقترانات 15

الدرس 4 النهايات والاتّصال 16

منهاجي
متعة التعليم الهادف

قائمة المحتويات

الوحدة 3 الاشتقاق

أستعدّ لدراسة الوحدة **17**

الدرس 1 اشتقاق اقتران القوة 19

الدرس 2 قاعدة السلسلة 20

الدرس 3 القِيَم العظمى والصغرى لكثيرات الحدود 21

الدرس 4 تطبيقات عملية على الاشتقاق 22

الوحدة 4 الاقترانات الأُسّية واللوغاريتمية

أستعدّ لدراسة الوحدة **23**

الدرس 1 الاقترانات الأُسّية 25

الدرس 2 الاقترانات اللوغاريتمية 26

الدرس 3 قوانين اللوغاريتمات 27

منهاجي
متعة التعليم الهادف

أختبرُ معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكّدي من الإجابة أستعينُ بالمثال المُعطى.

• تمثيل المعادلات الخطّية بيانيًّا

أُمثّل كُلًّا ممّا يأتي بيانيًّا:

1. $y = 5$
2. $x = -3$
3. $y = 2x - 1$

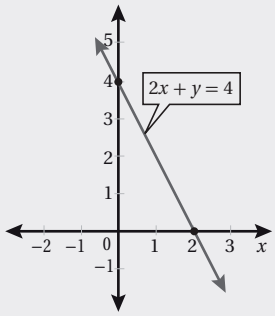
مثالٌ: أُمثّل المعادلة $2x + y = 4$ في المستوى الإحداثي.

الخطوة 1: أُنشئ جدول قِيَم.

x	0	2
$y = 4 - 2x$	4	0

الخطوة 2:

أُعيّن النقطتين (2, 0) (0, 4) في المستوى الإحداثي، وأرسمُ مستقيمًا يمرّ بهما.



• حلّ متباينات خطّية بمتغيّر واحد، وتمثيل الحلّ على خطّ الأعداد

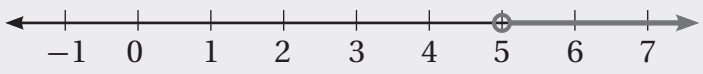
أحلّ كُلّ متباينة ممّا يأتي، وأُمثّل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد:

1. $x - 3 > 2$
2. $2 - x > -3$
3. $3x \geq 12$
4. $2x - 3 \leq 9$
5. $6 - 4x < x - 14$
6. $2(x+5) - 9x \geq 45$

مثالٌ: أحلّ المتباينة $2x + 3 > 13$، وأُمثّل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد:

المتباينة الأصلية	$2x + 3 > 13$
بطرح 3 من الطرفين	$2x > 10$
بقسمة الطرفين على 2	$x > 5$

مجموعة الحلّ هي: $\{x \mid x > 5\}$ أو الفترة $(5, \infty)$. وتمثيلها على خطّ الأعداد كما يأتي:



وُضِعت دائرة مفتوحة عند 5؛ لعدم وجود إشارة المساواة، أي إنّ 5 ليس من ضمن مجموعة الحلّ.

• حلّ نظام مكوّن من معادلتين خطّيتين

أحلّ أنظمة المعادلات الآتية:

1 $2x + y = 12$
$3x - 2y = 11$

2 $3x - 5y = 11$
$2x - y = 5$

3 $y = 2x - 1$
$3x + 2y = 19$

مثالٌ: أحلّ نظام المعادلات:

$$y = 2 - 3x \quad (1)$$
$$2x - 5y = 24 \quad (2)$$

الطريقة 1: تعويض قيمة y من المعادلة (1) في المعادلة (2).

المعادلة (2)	$2x - 5y = 24$
بتعويض $y = 2 - 3x$	$2x - 5(2 - 3x) = 24$
خاصية التوزيع	$2x - 10 + 15x = 24$
بجمع الحدود المتشابهة	$17x - 10 = 24$
بإضافة 10 لطرفَي المعادلة	$17x = 34$
بقسمة الطرفين على 17	$x = 2$
بتعويض $x = 2$ في المعادلة (1)	$y = 2 - 3(2) = -4$

الطريقة 2: حذف أحد المتغيّرين.

بإعادة ترتيب المعادلة (1)	$3x + y = 2$
بضرب المعادلة (1) في 5	$15x + 5y = 10$
المعادلة (2)	$2x - 5y = 24$
بجمع المعادلتين	$17x = 34$
بقسمة الطرفين على 17	$x = 2$
بتعويض $x = 2$ في (1)	$y = 2 - 3(2) = -4$

إذن: حلّ هذا النظام هو $x = 2, y = -4$

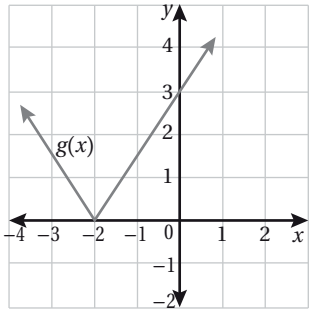
الاقترانات المتشعّبة
Piecewise Functions

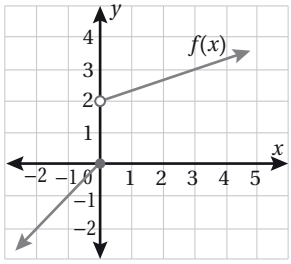
أُعيد تعريف كُلّ من الاقترانين الآتيين:

1. $f(x) = |5x - 4|$

2. $f(x) = |3 - 2x| - 6$

أكتبُ قاعدة الاقتران المعطى تمثيله البياني، في كُلّ ممّا يأتي:

3. 

4. 

أُمثّل كُلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا، وأُحدّد مجاله ومداه:

5. $f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & , x < 3 \\ x + 3 & , x \geq 3 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3 & , x < 1 \\ 5 & , 1 \leq x < 4 \\ x + 2 & , x \geq 4 \end{cases}$

7. $f(x) = |2x - 6| + 3$

8. $f(x) = -|x^2 - 2x - 8|$

9. **كهربـاء:** تزوّد شركة الكهرباء القطاع التجاري بالطاقة الكهربائية مقابل 1.20 دينار شهريًّا (رسومًا ثابتة)، يُضاف إليها 0.121 دينار لكُلّ كيلو واط ساعة لأول 2000 كيلو واط ساعة في الشهر، و 0.176 دينار لكُلّ كيلو واط ساعة من كمّية الاستهلاك الزائدة على 2000 كيلو واط ساعة في الشهر. أكتبُ الاقتران الذي يُعطي قيمة فاتورة الكهرباء بدلالة كمّية الاستهلاك x كيلو واط ساعة شهريًّا.

الدرس
2

حلّ معادلات ومتباينات القيمة المطلقة
Solving Absolute Value Equations and Inequalities

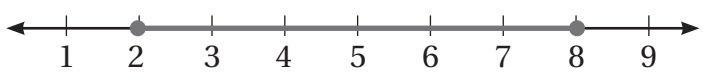
أحلّ كُلًّا من المعادلات الآتية، وأتحقّق من صحّة الحلّ:

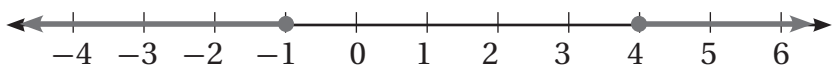
1. $|5x-2| = 6$
2. $4|x+2| - 3 = 9$
3. $10 - 2|x+1| = 6$
4. $5 + |x-2| = 3$
5. $\left|\frac{x-2}{3}\right| = 2x - 1$
6. $|3x-5| = |1-2x|$
7. $|x^2 - 2| = x$
8. $|3x + 5| = |7 - x|$
9. $\left|\frac{3x+4}{2x+1}\right| = 2$

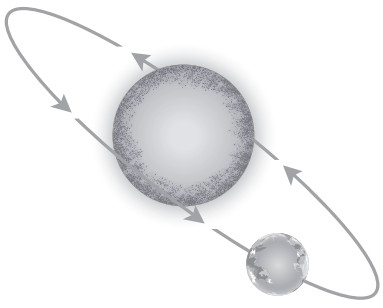
أحلّ كُلًّا من المتباينات الآتية، وأُمثّل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد:

10. $|4-3x| \geq 10$
11. $6|4x + 2| - 8 < 34$
12. $|5x-10| > 4 - 2x$
13. $|3x - 2| > |2x + 7|$
14. $|3 - 2x| \leq |4x + 3|$
15. $|1 + 7x| \geq |x-6|$

أكتبُ متباينة قيمة مطلقة، تمثيل مجموعة حلّها على خطّ الأعداد كما يأتي:

16.


17.




18. **فلك:** في أثناء دوران الأرض حول الشمس، يكون متوسّط المسافة بينهما 92.95 مليون ميل، ولا يزيد بعدها عن الشمس أو يقلّ عن هذا المتوسط بأكثر من 1.55 مليون ميل خلال العام. أكتبُ متباينة قيمة مطلقة، ثم أستعملها لإيجاد مدى بعد الأرض عن الشمس خلال العام.

الدرس 3

حلّ نظام مُكوّن من متباينات خطّية بمتغيّرين بيانيًّا

Solving System of Linear Inequalities In Two Variables

أُمثّل كُلًّا من المتباينات الآتية بيانيًّا:

1. $\frac{1}{2}x + y \leq 20$
2. $x + 4y > 2$
3. $y < -|3x + 1| - 6$
4. $y \leq \frac{3}{4}x + 6$
5. $y > |2x - 1|$
6. $y - 3 \geq -2|x + 4|$

أُمثّل منطقة حلّ كُلّ من أنظمة المتباينات الآتية:

7. $3x - 2y \geq 18$
   $x + y \leq 6$
8. $x + y \leq 10$
   $2x - 4y \geq 4$
9. $2x + 9y \geq 18$
   $y \leq |x - 6|$
10. $y \geq |2x + 4| - 2$
    $x + 3y \leq 15$
11. $x + 3y \leq 9$
    $5x - y \geq 5$
    $y \geq -3$
12. $x + 2y \leq 4$
    $x \geq 0$
    $y \geq 0$

يريد صاحب مطعم أن يشتري عددًا من الطاولات والكراسي الخشبية، وقد خصّص لهذه الغاية 420 دينارًا، ووجد أنّ الطاولة الواحدة تُكلّفه 35 دينارًا، والكرسي الواحد يُكلّفه 9 دنانير.

13. أكتبُ متباينة تُبيّن عدد الطاولات وعدد الكراسي التي يُمكنه شراؤها.
14. أُمثّل متباينة الطاولات والكراسي بيانيًّا.
15. أكتبُ 3 حلول ممكنة لعدد الطاولات وعدد الكراسي التي يُمكنه شراؤها.

رياضة: في مباريات دوري كرة القدم، يُسجّل للفريق نقطتان عند فوزه، ونقطة واحدة عند تعادله، ولا شيء عند خسارته، ويعلم أحمد أنّ: رصيد فريقه هو 18 نقطة على الأكثر، وأنّ عدد مرّات فوز فريقه أكبر من عدد مرّات تعادله، وأنّ فريقه تعادل مرّتين على الأقل.

16. أكتبُ متباينة بدلالة عدد مرّات الفوز x، وعدد مرّات التعادل y لكُلّ واحدة من الجمل الثلاث.
17. أُمثّل منطقة حلّ هذه المتباينات بيانيًّا.
18. أجد القِيَم الممكنة جميعها، لعدد مرّات فوز فريقه وعدد مرّات تعادله.

أختبرُ معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكّدي من الإجابة أستعينُ بالمثال المُعطى.

• قسمة كثيرات الحدود

أجد ناتج القسمة والباقي في كُلّ ممّا يأتي:

1 $(3x^3 - 6x^2 + 9x - 5) \div (x - 4)$

2 $(8x^4 + 6x^2 - 11x + 7) \div (2x + 5)$

مثالٌ: أجد ناتج القسمة والباقي $(3x^3 + 9x - 5) \div (x^2 - 3x + 1)$

$$\begin{array}{r} 3x + 9 \\ x^2 - 3x + 1 \overline{)\ 3x^3 + 0x^2 + 9x - 5} \\ \underline{(-)\ 3x^3 - 9x^2 + 3x} \\ 9x^2 + 6x - 5 \\ \underline{(-)\ 9x^2 - 27x + 9} \\ 33x - 14 \end{array}$$

بقسمة $3x^3$ على x^2 وكتابة الناتج $3x$ فوق المقسوم

بضرب $3x$ في المقسوم عليه

بالطرح، وتنزيل -5 وقسمة $9x^2$ على x^2 وكتابة 9 في الناتج

بضرب 9 في المقسوم عليه

بالطرح

إذن: الناتج $(3x + 9)$ والباقي $(33x - 14)$.

• تحليل المقادير الجبرية

أُحلّل كُلًّا ممّا يأتي تحليلًا كاملًا:

1 $x^2 - 25$

2 $x^2 - 6x - 16$

3 $x^3 + 3x^2 - 10x$

مثالٌ: أُحلّل $2x^3 + 3x^2 - 2x$ تحليلًا كاملًا:

بإخراج x عاملًا مشتركًا $\quad 2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2)$

بتحليل ثلاثي الحدود $\quad = x(2x - 1)(x + 2)$

تبسيط المقادير النسبية

أُبسّط المقادير الآتية:

1. $\frac{2}{x+1}+\frac{5}{x-3}$
2. $\frac{4}{x-3}-\frac{5}{x+2}$
3. $\frac{3x}{x-1}\times\frac{x+4}{6x}$
4. $\frac{x}{x+1}\div\frac{x+4}{2x+2}$
5. $\frac{x+4}{x^2-16}$
6. $\frac{x^2-4x-5}{x+1}$

مثالٌ: أُبسّط المقادير الآتية:

a) $\frac{2}{x+6}+\frac{3}{x-5}$

بتوحيد المقامات $\quad \frac{2}{x+6}+\frac{3}{x-5}=\frac{2}{x+6}\left(\frac{x-5}{x-5}\right)+\frac{3}{x-5}\left(\frac{x+6}{x+6}\right)$

بضرب البسطين وضرب المقامين $\quad =\frac{2(x-5)}{(x+6)(x-5)}+\frac{3(x+6)}{(x-5)(x+6)}$

بجمع بسطَي الكسرين $\quad =\frac{2(x-5)+3(x+6)}{(x+6)(x-5)}$

خاصية التوزيع $\quad =\frac{2x-10+3x+18}{x^2-5x+6x-30}$

بجمع الحدود المتشابهة $\quad =\frac{5x+8}{x^2+x-30}$

b) $\frac{5x+2}{6x}\div\frac{x+1}{2x}$

بتحويل القسمة إلى ضرب في مقلوب المقسوم عليه $\quad \frac{5x+2}{6x}\div\frac{x+1}{2x}=\frac{5x+2}{6x}\times\frac{2x}{x+1}$

بضرب البسطين وضرب المقامين $\quad =\frac{2x(5x+2)}{6x(x+1)}$

بقسمة البسط والمقام على $2x$ $\quad =\frac{5x+2}{3(x+1)}$

الدرس 1

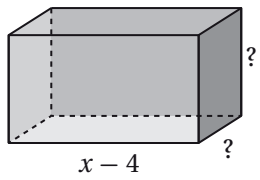
نظريتا الباقي والعوامل
Remainder and Factor Theorems

أستعملُ طريقة الجدول؛ لأجد ناتج القسمة والباقي في كُلّ ممّا يأتي:

1. $(6x^3 - 7x^2 + 6x + 45) \div (2x + 3)$

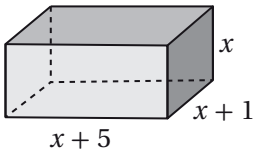
2. $(3x^4 + x^3 - 9x^2 - 8x + 9) \div (x - 2)$

3. يُمثّل الاقتران $V(x) = x^3 + 3x^2 - 36x + 32$ حجم متوازي المستطيلات المجاور. أجد الأبعاد الأخرى لمتوازي المستطيلات بدلالة x.



4. إذا كان باقي قسمة $f(x) = 2x^3 - x^2 + ax + 6$ على $x + 2$ يساوي (-4)؛ فما قيمة a؟

5. أجد أبعاد متوازي المستطيلات في الشكل المجاور إذا كان حجمه $180\ \text{cm}^3$



6. إذا كان باقي قسمة $f(x) = ax^3 + bx^2 + bx + 3$ على $h(x) = x - 1$ يساوي 4، وكان $(x + 1)$ عاملًا من عوامل $f(x)$؛ فما قيمة كُلّ من a، وb؟

أُحلّل كُلّ اقتران ممّا يأتي تحليلًا تامًّا:

7. $3x^3 + 14x^2 - 7x - 10$

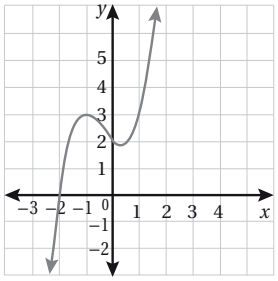
8. $2x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 3x$

أحلّ كُلًّا من المعادلات الآتية:

9. $3x^3 - 4x^2 - 6x + 4 = 0$

10. $2x^3 + 5x^2 - 16x - 36 = 0$

11. أستعملُ التمثيل البياني المجاور، الذي يُمثّل منحنى الاقتران $f(x) = x^3 + x^2 - x + 2$، لإيجاد أحد أصفاره النسبية، ثم أجد أصفاره جميعها.



12. يزيد ارتفاع مخروط $5\ \text{cm}$ على طول نصف قطر قاعدته. إذا كان حجم هذا المخروط $132\pi\ \text{cm}^3$؛ فما أبعاده؟ (حجم المخروط هو $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$، حيث r نصف قطر القاعدة، وh الارتفاع).

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الدرس 2

الكسور الجزئية
Partial Fractions

أُجزّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

1. $\frac{x^2-2x-3}{(x+1)(2x+5)(7-3x)}$
2. $\frac{3x-5}{x(x-1)^2}$
3. $\frac{x^2+x-2}{(2x-1)(x^2+1)}$
4. $\frac{5x-1}{2x^2-5x-3}$
5. $\frac{9-5x}{x^3-4x^2+3x}$
6. $\frac{36+5x}{16-x^2}$
7. $\frac{8x+3}{x^2-3x}$
8. $\frac{3x^2-2x-5}{x^3+x^2}$
9. $\frac{3x^2+2x+2}{(x-2)(x-3)^2}$
10. $\frac{2x^2-3x-27}{x^3-6x^2+9x}$
11. $\frac{5x+8}{4x^3-12x^2+9x-2}$
12. $\frac{5x^2+2}{(x^2+3)(1-2x)}$
13. $\frac{24}{(2x^2+x+5)(x-1)}$
14. $\frac{6x^2+8x-7}{2x^2+3x-5}$
15. $\frac{x^3-3x^2-3x+12}{x^2-3x+2}$

16. أجد الاقتران النسبي الذي يُمكن كتابته بصورة كسور جزئية على النحو الآتي:

$$\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}$$

أُجزّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

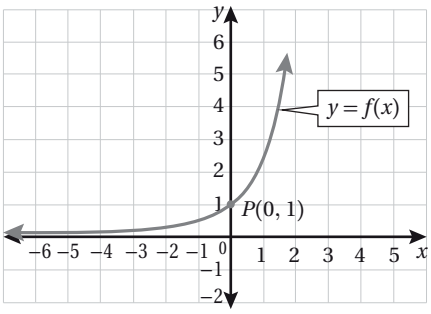
17. $\frac{ax+b}{(x-c)^2}$
18. $\frac{1}{x^2-ax-bx+abx}$
19. $\frac{ax+b}{x^2-c^2}$

20. أُجزّئ المقدار $\frac{2}{x(x+2)}$، ثم استعمل ناتج التجزئة في إيجاد المجموع الآتي:

$$\frac{2}{1\times 3}+\frac{2}{3\times 5}+\frac{2}{5\times 7}+\ldots+\frac{2}{1\times 3}$$

الدرس 3

التحويلات الهندسية للاقترانات
Transformations of Functions

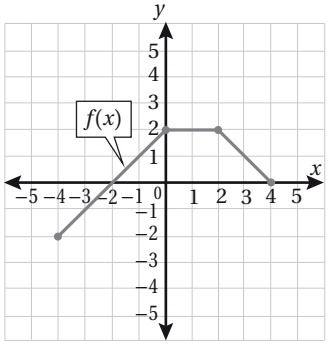


أستعملُ التمثيل البياني المجاور الذي يُبيّن منحنى $f(x)$؛ لتمثيل منحنى كُلّ من الاقترانات الآتية، مبيّنًا إحداثيَي النقطة P في كل حالة:

1. $g(x) = f(x) + 1$
2. $h(x) = 2f(x + 1)$
3. $m(x) = f(-x + 2)$
4. $p(x) = -f(x)$

أصف التحويلات التي تمّت على $f(x)$ للحصول على $g(x)$ في كُلّ ممّا يأتي:

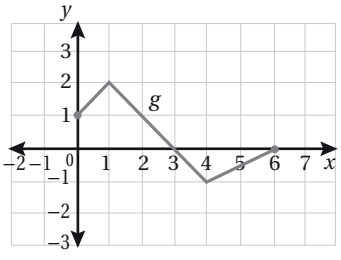
5. $g(x) = -3f(x-2) + 5$
6. $g(x) = 2f(4-x) - 3$



أستعملُ التمثيل البياني المجاور الذي يُبيّن منحنى $f(x)$؛ لتمثيل منحنى كُلّ من الاقترانات الآتية:

7. $g(x) = f(x) + 1$
8. $q(x) = f(x + 2)$
9. $p(x) = \frac{1}{2} f(x + 1)$
10. $s(x) = -f(x)$

11. **سكّان:** يُمثّل الاقتران $P(t) = 3000 + 0.1t^2$ عدد سكّان أحد التجمّعات السكنية؛ إذ يُمثّل t عدد السنوات منذ تأسيس هذا التجمّع في عام 1985م. أصف التحويلات التي تمّت على الاقتران $f(t) = t^2$ للحصول على الاقتران $P(t)$.



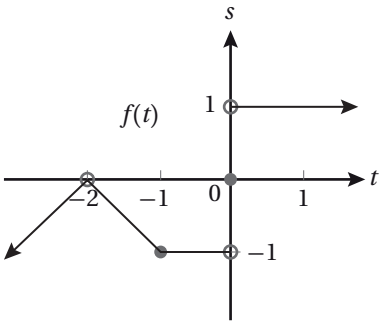
أستعملُ التمثيل البياني المجاور الذي يُبيّن منحنى $f(x)$؛ لتمثيل منحنى كُلّ من الاقترانات الآتية:

12. $h(x) = g(2x)$
13. $p(x) = g(\frac{1}{2}x)$

الدرس
4

النهايات والاتّصال
limits and continuity

يُبيّن التمثيـــل البياني المجاور منحنى الاقتـــران $f(t)$. أجد كُلًّا من النهايات الآتية (إن وجدت):



1 $\lim_{x\to -2} f(t)$ 2 $\lim_{x\to -1} f(t)$ 3 $\lim_{x\to 0} f(t)$

أجد كُلًّا من النهايات الآتية بيانيًّا وعدديًّا:

4 $\lim_{x\to 5} \left(\frac{x^2-25}{x-5}\right)$ 5 $\lim_{x\to -2} (x^2-x+2)$ 6 $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x}\right)$

إذا كان $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\le 2 \\ 6-x & ,x>2 \end{cases}$ ؛ فأجيب عمّا يأتي:

7 أُمثّل $f(x)$ بيانيًّا.

8 أجد كُلًّا من النهايات الآتية من التمثيل البياني للاقتران $f(x)$:

a) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ **b)** $\lim_{x\to 1} f(x)$ **c)** $\lim_{x\to 6} f(x)$

أجد كُلًّا من النهايات الآتية:

9 $\lim_{x\to -7} (2x+5)$ 10 $\lim_{x\to 2} (-x^2+5x-2)$ 11 $\lim_{t\to 2} \frac{x+3}{x+6}$

12 $\lim_{x\to 1} \left(\frac{2x-2}{1-x}\right)$ 13 $\lim_{x\to 3} \left(\frac{2x-6}{x+5}\right)$ 14 $\lim_{z\to -4} \sqrt[3]{2z-8}$

15 $\lim_{x\to 3} \left(\frac{2x^2-18}{x^3-27}\right)$ 16 $\lim_{x\to 5} \left(\frac{x^2-7x+10}{25-5x}\right)$ 17 $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{3x+1}-1}{x}\right)$

18 أبحثُ في اتّصال الاقتران $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-4}{2-x} & ,x<2 \\ x-6 & ,x\ge 2 \end{cases}$ ، عند $x=2$

أختبرُ معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكّدي من الإجابة أستعينُ بالمثال المُعطى.

• مشتقّة كثيرات الحدود

أجد مشتقّة كُلّ من الاقترانات الآتية:

1. $f(x) = 2x^3 + 6$
2. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 10$
3. $f(x) = x^4 + 8x^2$

مثالٌ: أجد مشتقة الاقتران $f(x) = x^4 - 7x^2$

الاقتران الأصلي: $f(x) = x^4 - 7x^2$

قانون مشتقّة مضاعف القوة: $f'(x) = 4x^{4-1} - 7(2x^{2-1})$

بالتبسيط: $= 4x^3 - 14x$

• ضرب المقادير الجبرية

أجد ناتج ضرب كُلّ ممّا يأتي بأبسط صورة:

1. $2x(x-4)$
2. $(x+4)(x-5)$
3. $(3x + 1)^2$

مثالٌ: أجد ناتج ضرب $(2x + 1)(5x - 2)$.

بفصل المقدار $2x + 3$ إلى حدّين وضرب كُلٍّ منهما في المقدار $5x - 2$:

$$(2x + 3)(5x - 2) = 2x(5x-2) + 3(5x-2)$$

باستعمال خاصية التوزيع: $= (10x^2 - 4x) + (15x - 6)$

بجمع الحدود المتشابهة: $= 10x^2 - 4x + 15x - 6$

بالتبسيط: $= 10x^2 - 11x - 6$

• حلّ المعادلات بمتغيّر واحد

أحلّ كُلًّا من المعادلات الآتية:

1. $x^2 + 5x - 24 = 0$
2. $15x^2 - 30x - 120 = 0$
3. $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

مثالٌ: أحلّ المعادلة $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$

المعادلة الأصلية $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$

بإخراج x عاملًا مشتركًا $x(x^2 - 2x - 3) = 0$

بالتحليل إلى العوامل $x(x-3)(x+1) = 0$

خاصية الضرب الصفري $x = 0 \quad or \quad x - 3 = 0 \quad or \quad x + 1 = 0$

بحلّ المعادلات $x = 0 \qquad x = 3 \qquad x = -1$

• التحويل من الصيغة الجذرية إلى الصيغة الأُسّية

أُحوّل كُلًّا ممّا يأتي من الصيغة الجذرية إلى الصيغة الأُسّية:

1. $\sqrt[5]{x^4}$
2. $\sqrt[3]{x}$
3. $\sqrt{x-1}$
4. $\dfrac{5}{\sqrt[7]{x^4}}$

مثالٌ: أُحوّل كُلًّا ممّا يأتي من الصيغة الجذرية إلى الصيغة الأُسّية:

1) $\sqrt[6]{x^7}$

تعريف الأُسّ النسبي $\sqrt[6]{x^7} = x^{\frac{7}{6}}$

2) $\dfrac{3}{\sqrt[7]{x-2}}$

تعريف الأُسّ النسبي $\dfrac{3}{\sqrt[7]{x-2}} = \dfrac{3}{(x-2)^{\frac{1}{7}}}$

الأُسّ السالب $= 3(x-2)^{\frac{-1}{7}}$

الدرس 1

اشتقاق اقتران القوّة

Differentiating a Power Function

أجد $\frac{ds}{dt}$ لكُلّ ممّا يأتي:

1. $s = 10\sqrt{t}$
2. $s = \frac{50}{t} + 10$
3. $s = 10t^2 - \frac{10}{t^2}$

إذا كان $y = \sqrt{x}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

4. إحداثيات النقطة التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي $\frac{1}{2}$
5. إحداثيات النقطة التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي 1
6. إذا كان الاقتران $y = \frac{(x+a)^2}{x}$، حيث a عدد موجب؛ فأجد إحداثيات النقطة التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي صفرًا بدلالة a.

إذا كان $f(x) = \frac{2x+5}{x}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

7. مشتقّة الاقتران عند النقطة $(10, 2.5)$
8. إحداثيات النقاط التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي -5
9. إذا كان الاقتران $f(x) = \frac{100}{x}$، وكانت P نقطة تقع على منحنى الاقتران إحداثياتها $(a, \frac{100}{a})$؛ فأجد مساحة المثلّث المكوّن من مماس منحنى الاقتران عند النقطة P والمحورين الإحداثيّين.

الدرس
2

قاعدة السلسلة
The Chain Rule

أجد مشتقّة كُلّ اقتران ممّا يأتي:

1. $y = (1 - x + x^2 - x^3)^4$
2. $y = (x + x^2)^{\frac{3}{2}}$
3. $y = \dfrac{\sqrt{5 + 4x^2}}{2}$
4. إذا كان $y = \sqrt{1 + \sqrt{3x + 4}}$؛ فأجد مشتقّة الاقتران y عندما $x = 0$
5. إذا كان الاقتران $y = (2x - 3)^3$؛ فأجد إحداثيات النقطة (النقاط) التي يكون عندها ميل المماسّ يساوي 24
6. إذا كان الاقتران $y = f(x^2 + 3x - 5)$؛ فأجد $\dfrac{dy}{dx}$ عند $x = 1$ علمًا بأنّ $f'(-1) = 2$
7. أجد معادلة المماسّ للاقتران $y = (x^3 - 7)^5$، عندما $x = 2$
8. إذا كان الاقتران $y = \sqrt{x + 9}$، وكان مماسّ الاقتران عند النقطة $P(16, 5)$ يقطع المحور x عند النقطة A، والعمودي على المماسّ عند النقطة P يقطع المحور x عند النقطة B؛ فأجد طول $\overline{AB}$.
9. يزداد نصف قطر دائرة بمعدل 0.3 cm/s. أجد معدل زيادة مساحة الدائرة عندما يكون نصف القطر 5 cm
10. إذا كان حجم الكرة يُعطى بالعلاقة $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$، وكانت مساحة سطح الكرة تُعطى بالعلاقة $A = 4\pi r^2$؛ فأجد $\dfrac{dV}{dA}$ بدلالة المتغيّر r.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

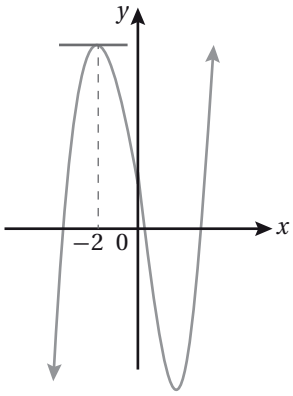
الدرس 3

القِيَم العظمى والصغرى لكثيرات الحدود

Maximum and Minimum Values of Polynomials

1 إذا كان الاقتران $f(x)=2x^3-3x^2-36x$؛ فأجد الفترات التي يكون فيها الاقتران f متزايدًا.

2 يُمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $y=x^3+kx^2-8x+3$. إذا كان مماسّ الاقتران عند النقطة $x=-2$ موازيًا للمحور x؛ فأجد قيمة الثابت k.



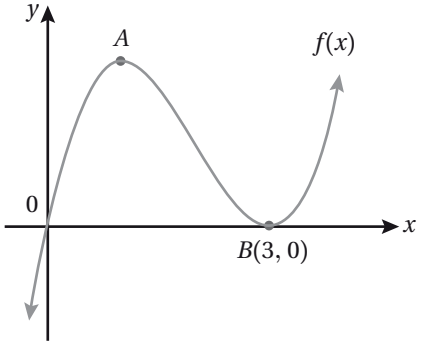
إذا كان الاقتران $f(x)=(x-1)^2(x+2)$؛ فأجيب عمّا يأتي:

3 أجد إحداثيَي النقطتين اللتين يقطع عندهما منحنى الاقتران المحور x.

4 أجد النقاط الحرجة للاقتران، ثم أُحدّد نوعها.

5 أُمثّل الاقتران بيانيًّا.

يمُثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)=x^3-6x^2+9x$، وتُمثّل A نقطة عظمى محلّية للاقتران f، وB نقطة صغرى محلّية.



6 أجد إحداثيات النقطة A.

7 أُمثّل الاقتران $g(x)$ حيث: $g(x)=f(x+2)+4$

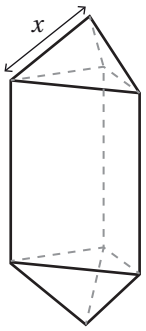
إذا كان الاقتران $h=1.2+19.6t-4.9t^2$ يُمثّل ارتفاع كرة (بالمتر)، بعد t ثانية من رميها عموديًّا؛ فأجيب عمّا يأتي:

8 أجد سرعة الكرة بعد ثانية واحدة من بدء حركتها.

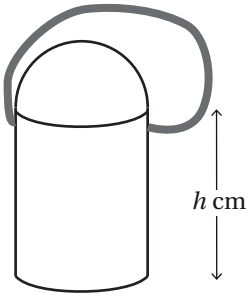
9 كم ثانية تستمر الكرة في الصعود إلى الأعلى؟

منهاجي
متعة التعليم الهادف

تطبيقات عملية على الاشتقاق
Applications of Differentiation



1 شكّل صائغ قطعة ذهبية يُزيّن بها قلادة على شكل منشور ثلاثي، وعلى كلّ طرف منها هرم ثلاثي منتظم طول ضلعه x كما في الشكل المجاور. إذا كان الاقتران $A(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}(x^2 + \frac{16}{x})$ يُمثّل المساحة الكلّية لسطح القطعة؛ فأجد قيمة x التي تجعل كمّية الذهب اللازمة لتغطيتها أقلّ ما يمكن.

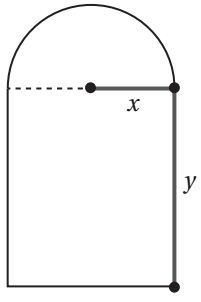


حافظة ماء للأطفال على شكل أسطوانة يعلوها نصف كرة. إذا كان طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة r cm وارتفاعها h cm، وحجمها $400\ \text{cm}^3$؛ فأجيب عمّا يأتي:

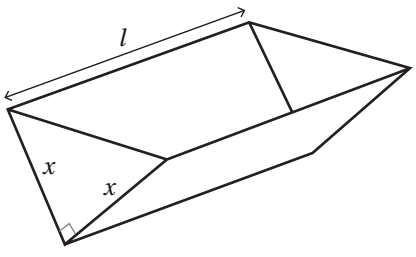
2 أجد الاقتران الذي يُمثّل مساحة السطح الكلّية للحافظة.

3 أجد قيمة r التي تكون عندها مساحة السطح الكلية للحافظة أقلّ ما يُمكن.

4 حدّدت إحدى شركات تصنيع الملابس سعر بيع البدلة الرجالية الواحدة (بالدينار) بالاقتران $s(x) = 150 - 0.5x$، حيث x عدد البدلات المبيعة. فإذا كانت تكلفة إنتاج x من البدلات تُعطى بالاقتران $C(x) = 4000 + 0.25x^2$؛ فأجد عدد البدلات التي يجب على الشركة إنتاجها وبيعها للحصول على أكبر ربح ممكن.



5 نافذة على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة، محيطها 8 m كما في الشكل المجاور. أجد قيمتَي x وy اللازمتين لمرور الحد الأقصى من الضوء خلال النافذة.



6 خزّان ماء على شكل منشور ثلاثي سعته 108 L وطوله l m، والمقطع الجانبي للخزان على شكل مثلّث قائم الزاوية ومتساوي الساقين كما في الشكل المجاور. يُراد دهن الخزان بمادّة عازلة من الداخل تحميه من التآكل. أجد قيمة x التي تجعل مساحة السطح الداخلية أصغر ما يمكن.

أختبرُ معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكّدي من الإجابة أستعينُ بالمثال المُعطى.

• تبسيط المقادير الأُسّية

أجد ناتج كُلّ ممّا يأتي بأبسط صورة:

1. $(-27)^{\frac{2}{3}}$
2. $\sqrt[5]{32t^{15}}$
3. $\frac{15h^5g^2}{3h^2g}$

مثالٌ: أجد ناتج كُلّ ممّا يأتي بأبسط صورة:

a) $(81)^{-\frac{5}{4}}$

الصورة الأُسّية للجذر: $(81)^{-\frac{5}{4}} = (\sqrt[4]{81})^{-5}$

$\sqrt[4]{81} = 3$: $= (3)^{-5}$

تعريف الأُس السالب: $= \frac{1}{(3)^5}$

بالتبسيط: $= \frac{1}{243}$

b) $\sqrt[3]{125x^6y^3}$

خصائص الجذور: $\sqrt[3]{125x^6y^3} = \sqrt[3]{125}\ \sqrt[3]{x^6}\ \sqrt[3]{y^3}$

الصورة الأُسّية للجذر: $= \sqrt[3]{125}\ (x)^{\frac{6}{3}}\ (y)^{\frac{3}{3}}$

بالتبسيط: $= 5x^2y$

• حلّ المعادلات الأُسّية

أحلّ كُلًّا من المعادلات الأُسّية الآتية:

1. $2^{x-1} = 16$
2. $(\frac{1}{2})^x = 2^8$
3. $(\frac{1}{8})^{-y} = \frac{1}{512}$

مثالٌ: أحلّ المعادلة الأُسّية $3 \times 9^x = 243$

المعادلة الأصلية: $3 \times 9^x = 243$

$9 = 3^2\ ,\ 243 = 3^5$: $3 \times 3^{2x} = 3^5$

بضرب القوى: $3^{2x+1} = 3^5$

بمساواة الأُسس: $2x + 1 = 5$

بحلّ المعادلة الخطّية الناتجة: $x = 2$

إيجاد الاقتران العكسي

أجد الاقتران العكسي لكُلّ من الاقترانات الآتية:

1. $f(x) = x + 3$
2. $f(x) = \frac{x}{4} + 1$
3. $f(x) = 2x^3$

مثالٌ: أجد الاقتران العكسي للاقتران $f(x) = 3x^2 - 5,\ x \geq 0$

باستعمال اختبار الخطّ الأُفقي، أجد أنّ $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد عندما $x \geq 0$؛ لذا، فإنّ له اقترانًا عكسيًّا.

الخطوة 1: أكتبُ الاقتران بصورة $y = 3x^2 - 5$

الخطوة 2: أُعيد ترتيب المعادلة الناتجة في الخطوة 1 بجعل x موضوع القانون:

المعادلة الأصلية $y = 3x^2 - 5$

بإضافة 5 إلى طرفَي المعادلة $y + 5 = 3x^2$

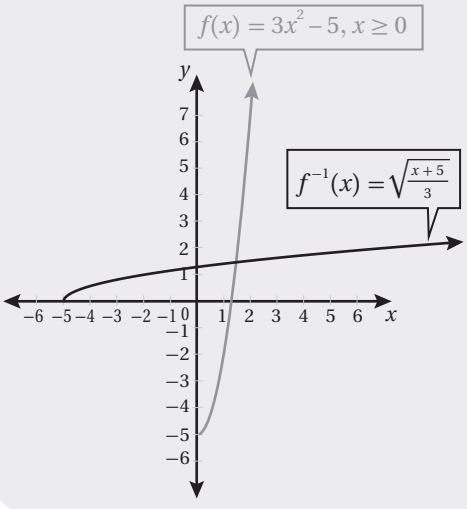
بقسمة طرفَي المعادلة على 3 $\frac{y+5}{3} = x^2$

بأخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين؛ لأنّ مجال f الذي يُمثّل مدى f^{-1} هو الأعداد غير السالبة. $\sqrt{\frac{y+5}{3}} = x$

الخطوة 3: أُبدّل x بـ y، وأُبدّل y بـ x، فينتج: $y = \sqrt{\frac{x+5}{3}}$.

الخطوة 4: أكتبُ $f^{-1}(x)$ مكان y، فينتج: $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+5}{3}}$.

عند تمثيل كُلّ من $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثي نفسه، أُلاحظ أنّ التمثيل البياني للاقتران $f^{-1}(x)$ هو انعكاس للتمثيل البياني للاقتران $f(x)$ حول المستقيم $y = x$.



منهاجي
متعة التعليم الهادف

الدرس 1

الاقترانات الأُسّية
Exponential Functions

أُمثّل كلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا وأجد مجاله ومداه:

1. $y = (\frac{1}{5})^{-x}$
2. $y = 2^{-2x} + 1$
3. $y = e^{2x-3}$
4. $y = (\frac{1}{3})^{2x+1} - 5$
5. $y = 4e^{x-1} + 2$
6. $y = 2^{x-2} - 3$

يمرّ منحنى الاقتران $y = k(4^x) + c$ بالنقطتين $(0, 3)$ و $(-2, -\frac{3}{4})$

7. أجد قيمة كُلّ من k و c

8. أجد قيمة y عندما $x = 2$

طب: يُمكن نمذجة المساحة A لجرح في جسم إنسان طبيعي بعد n يومًا من حدوث الجرح بالاقتران $A(n) = A_0 e^{-0.35n}$ حيث A_0 مساحة الجرح لحظة حدوثه.

9. إذا كانت مساحة جرح لحظة حدوثه $100\ \text{mm}^2$ فأجد مساحة الجرح بعد 10 أيام.

10. أُمثّل الاقتران $A(n)$ بيانيًّا.

11. أجد المقطع y لمنحنى الاقتران، وأصف مدلوله.

12. **علم الاجتماع:** يستعمل خبراء علم الاجتماع المعادلة $N = P(1 - e^{-0.15d})$ لتقدير عدد الأشخاص N الذين سمعوا شائعة انتشرت في مجتمع عدد أفراده P نسمة بعد d يوم من انطلاقها. أُقدّر عدد الأشخاص الذين سمعوا الشائعة بعد 4 أيام من انطلاقها في مجتمع عدد أفراده 5000 نسمة.

الاقترانات اللوغاريتمية
Logarithmic Functions

أكتبُ كُلّ معادلة لوغريتمية ممّا يأتي على الصورة الأُسّية:

1. $\log_4(256) = 4$
2. $\log_5\left(\frac{1}{25}\right) = -2$
3. $\log_6\left(\frac{1}{\sqrt[5]{36}}\right) = \frac{-2}{5}$

أكتبُ كُلّ معادلة أُسّية ممّا يأتي على الصورة اللوغريتمية:

4. $3^5 = 243$
5. $6^{-2} = \frac{1}{36}$
6. $(\frac{2}{5})^{-2} = \frac{25}{4}$

أجد قيمة كُلّ ممّا يأتي؛ من دون استعمال الآلة الحاسبة:

7. $\log_2(128)$
8. $\log_2(\sqrt{512})$
9. $\log(0.001)$
10. $\log_{\frac{1}{2}} 2$
11. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e^7}}\right)$
12. $10^{\log 14}$

أُمثّل كُلًّا من الاقترانات الآتية، وأُحدّد مجاله ومداه ومقطعيه الإحداثيّين وخطوط تقاربه، وإن كان متزايدًا أم متناقصًا:

13. $y = \log(2x)$
14. $y = \log(5 - x)$
15. $\log_3(x + 2)$

أُمثّل كُلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

16. $f(x) = \log(2x + 3) + 7$
17. $g(x) = 2 + \ln(3x - 5)$

18. **ضوء:** تُمثّل المعادلة $\log\left(\frac{I}{12}\right) = -0.0125x$ العلاقة بين شدّة الضوء I بوحدة (lumen) والعمق x بالأمتار في إحدى البحيرات. ما مقدار شدّة الضوء عند عمق 10 m؟

الدرس 3

قوانين اللوغاريتمات
Laws of Logarithms

أجد قيمة كُلّ ممّا يأتي:

1. $\log\sqrt{5}+\log\sqrt{2}$
2. $\log_9\sqrt{3}\times\log_3\sqrt{5}\times\log_5\sqrt{81}$
3. $\dfrac{\log_5 2+\log_5 4}{\log_5 4+\log_5 16}$

إذا كان $\log 5\approx 0.699$ و $\log 9\approx 0.9542$؛ فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

4. $\dfrac{1}{3}\log 2$
5. $\log 0.5$
6. $\log 0.2$
7. $\log\sqrt[5]{45}$

أُبيّن أنّ المعادلة $A=100-50\log(t+1)$ يُمكنني كتابتها على الصورة المعطاة في كُلّ ممّا يأتي:

8. $\log(t+1)=\dfrac{100-A}{50}$
9. $t=10^{\frac{100-A}{50}}-1$

أحلّ المعادلات الأُسّية الآتية، مقرّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

10. $9^x-28(3^x)+27=0$
11. $4^{x^3+2x^2-3x}=1$
12. $4e^{2x}+8e^x-5=0$
13. $e^{2x}-6e^x+8=0$

أحلّ المعادلات اللوغاريتمية الآتية:

14. $\log_x(216)=3$
15. $\log_x(4)=\dfrac{1}{2}$
16. $\log_x(27)=1.5$
17. $\log_{x-1}(1024)=5$
18. $\log_2(x^2-4)=\log_2(3x)$
19. $\log_3(x^2-15)=\log_3(2x)$

20. **زلازل:** تُستعمل المعادلة $P=\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{E}{11.81}$ لنمذجة العلاقة بين قوة الزلزال P على مقياس ريختر والطاقة E الناتجة عنه بوحدة الجول. أحسبُ الطاقة الناتجة عن زلزال قوته 8.1 درجة على مقياس ريختر.