الرياضيات

الصف الثاني عشر

للفرعين : الأدبي ، والفندقي والسياحي

إجابات أسئلة وتدريبات

الوحدة الرابعة :

التكامل وتطبيقاته

الوحدة الرابعة : التكامل وتطبيقاته

- الفصل الأول : التكامل .
- أولاً : التكامل غير المحدود :
- تدريب ١ ، صفحة ١٦١ :

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٤\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + ١}$$

عندما س = -١ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٤-١}{١+١} = \frac{-٥}{٢}$

- تدريب ٢ ، صفحة ١٦٣ :

١) $\text{س} + \text{ث}$

٢) $\frac{١}{٤}\text{س}^{٤} + \text{ث}$

٣) $\frac{-١}{٤}\text{س}^{-٤} + \text{ث}$

٤) $\int \text{س}^{\frac{١}{٢}} . \text{دس} = \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث} = \frac{٢}{٣}\sqrt{\text{س}^{٣}} + \text{ث}$.

- تدريب ٣ ، صفحة ١٦٤ :

١) $\int (٣\text{س}^{٢} - ٦\text{س}^{-\frac{١}{٢}})\,\text{دس} = \frac{٣}{٣}\text{س}^{٣} - ٦\,\frac{\text{س}^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

$= \text{س}^{٣} - ١٢\sqrt{\text{س}} + \text{ث}$.

٢) $\frac{٤}{٢}\text{س}^{٢} - ٣ \times - \underset{+\text{ث}}{\text{جتا س}} = ٢\text{س}^{٢} + ٣\,\text{جتا س} + \text{ث}$

- تدريب ٤ ، صفحة ١٦٥ :

١) $\int (٤\text{س}^{٢} + ١٢\text{س} + ٩)\,\text{دس} = \frac{٤}{٣}\text{س}^{٣} + ٦\text{س}^{٢} + ٩\text{س} + \text{ث}$.

٢) $\int (\text{س}^{٢} - ٥\text{س}) \times \text{س}^{-\frac{١}{٣}}\,\text{دس} = \int (\text{س}^{\frac{٥}{٣}} - ٥\text{س}^{\frac{٢}{٣}})\,\text{دس}$

$= \frac{٣}{٨}\text{س}^{\frac{٨}{٣}} - ٥ \times \frac{٣}{٥}\text{س}^{\frac{٥}{٣}} + \text{ث}$.

$= \frac{٣}{٨}\sqrt[٣]{\text{س}^{٨}} - ٣\sqrt[٣]{\text{س}^{٥}} + \text{ث}$.

٣) $\int \frac{(\text{س}+٥)\cancel{(\text{س}-٣)}^{١}}{\cancel{\text{س}-٣}_{١}}\,\text{دس} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + \text{ث}$.

٤) $\int \frac{(\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ١٦)\cancel{(\text{س}+٤)}^{١}}{\cancel{\text{س}+٤}_{١}}\,\text{دس} = \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} + ١٦\text{س} + \text{ث}$.

- تدريب ٥ ، صفحة ١٦٥ :

$\text{ق(س)} = \int (٣\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٥)\,\text{دس} = \text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + \text{ث}$.

لكن ق(٠) = ٧ ⟸ ٠ − ٠ + ٥ + ث = ٧ ⟸ ث = ٧

فاعدة الاقتران ق(س) $= \text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٧$.

~ ، ~ ، ~

- الأسئلة، صفحة ١٦٦- ١٦٧

١- أ) $\frac{١}{٢}س + جـ$

ب) $\int س^{-٥}\, دس = \frac{-١}{٤}س^{-٤} + جـ = \frac{-١}{٤س^{٤}} + جـ$.

جـ) $٢س - \frac{١}{٣}س^{٣} + جـ$.

د) $س^{٣} + جـ$

هـ) $\int -٢س^{٥}\, دس = \frac{-٢}{٦}س^{٦} + جـ = \frac{-١}{٣}س^{٦} + جـ$.

٢- أ) $\int (١٠س^{٢} - س^{\frac{١}{٦}} + ٣ قا^{٢}س)\, دس = \frac{١٠}{٣}س^{٣} - \frac{٦}{٧}س^{\frac{٧}{٦}} + ٣ ظا س + جـ$

$= \frac{١٠}{٣}س^{٣} - \frac{٦}{٧}\sqrt[٦]{س^{٧}} + ٣ ظا س + جـ$.

ب) $\int (٨س + ٢ - ٤س^{٢} - س)\, دس = \int (٧س + ٢ - ٤س^{٢})\, دس$

$= \frac{٧}{٢}س^{٢} + ٢س - \frac{٤}{٣}س^{٣} + جـ$.

جـ) $\int ٣ \times \frac{جاس}{\underset{١}{\cancel{جتاس}}} \times \overset{١}{\cancel{جتاس}}\, دس = \int ٣ جاس\, دس$

$= -٣ جتاس + جـ$.

د) $\int \frac{\overset{١}{\cancel{(س+٢)}}(س+٤)}{\underset{١}{\cancel{س+٢}}}\, دس = \frac{١}{٢}س^{٢} + ٤س + جـ$.

٣- $\frac{دص}{دس} = \frac{٤س + ١}{س}$

عند س = ٥ ، $\frac{دص}{دس} = \frac{٢٠ + ١}{٥} = \frac{٢١}{٥}$.

٤- $ق(س) = \int ق'(س)\, دس$

$ق(س) = \int (٦س - ٨س^{٣} + ٥)\, دس$

$ق(س) = ٣س^{٢} - ٢س^{٤} + ٥س + جـ$

لكن $ق(-١) = ٢ \Leftarrow ٢ = ٣ - ٢ + -٥ + جـ$

$٢ = -٤ + جـ$

$جـ = ٦$

$\therefore ق(س) = ٣س^{٢} - ٢س^{٤} + ٥س + ٦$.

٥- $\left(\int \bar{ع}(س)\, دس\right)' = (٦س^{٣} - ٣س^{٢} + ٦س - ٥)'$

$\bar{ع}(س) = ١٨س^{٢} - ٦س + ٦$

$\bar{ع}(١) = ١٨ - ٦ + ٦ = ١٨$.

٦- $ق(س) = \int ق'(س)\, دس = \int (٢س - ٥)\, دس$

$ق(س) = س^{٢} - ٥س + هـ$

لكن $ق(٢) = ٤ \Leftarrow ٤ = ٤ - ١٠ + هـ$

$٤ = -٦ + هـ$

$هـ = ١٠$

$\therefore ق(س) = س^{٢} - ٥س + ١٠$

$ق(١) = ١ - ٥ + ١٠ = ٦$

٧- $ق(س) = \int ق'(س)\, دس = \int (٣س(٦ - ٥س) + ٤س^{٣})\, دس$

$ق(س) = \int (١٨س - ١٥س^{٢} + ٤س^{٣})\, دس$

$ق(س) = ٩س^{٢} - ٥س^{٣} + س^{٤} + هـ$.

لكن $ق(٢) = -١ \Leftarrow -١ = ٩\times٤ - ٥\times٨ + ١٦ + هـ$

$-١ = ٣٦ - ٤٠ + ١٦ + هـ$

$-١ = ١٢ + هـ$

$هـ = -١٣$

$\therefore ق(س) = ٩س^{٢} - ٥س^{٣} + س^{٤} - ١٣$.

$ق(١) = ٩ - ٥ + ١ - ١٣ = -٨$

٨- $ق(س) = \int ق'(س)\, دس = \int \frac{س^{٢} + ٦س + ٨س^{٣}}{س}\, دس$

$ق(س) = \int \frac{\overset{١}{\cancel{س}}(س + ٦ + ٨س^{٢})}{\cancel{س}}\, دس$

$ق(س) = \frac{١}{٢}س^{٢} + ٦س + \frac{٨}{٣}س^{٣} + هـ$.

لكن $ق(١) = ١٢ \Leftarrow ١٢ = \frac{١}{٢} + ٦ + \frac{٨}{٣} + هـ$

$١٢ = \frac{٣ + ٣٦ + ١٦}{٦} + هـ$

$١٢ = \frac{٥٥}{٦} + هـ$

$هـ = ١٢ - \frac{٥٥}{٦} = \frac{٧٢ - ٥٥}{٦} = \frac{١٧}{٦}$

$\therefore ق(س) = \frac{١}{٢}س^{٢} + ٦س + \frac{٨}{٣}س^{٣} + \frac{١٧}{٦}$.

٩- $ل(س) = \int ل'(س)\, دس = \int (٦س^{٢} - ٦س^{٣} + -٢س)\, دس$

$ل(س) = ٢س^{٣} - \frac{\overset{٣}{\cancel{٦}}}{\underset{٢}{\cancel{٤}}}س^{٤} - س^{٢} + هـ$

$ل(٣) - ل(١) = (٥٤ - \frac{٢٤٣}{٢} - ٩ + \cancel{هـ}) - (٢ - \frac{٣}{٢} - ١ + \cancel{هـ})$

$= ٤٤ - \frac{٢٤٠}{٢} = ٤٤ - ١٢٠ = -٧٦$

~ ، ~ ، ~

- ثانياً : التكامل المحدود :

- تدريب ١ ، ص١٦٩

١) $\int_{4}^{1} 6\,\text{س}^{\frac{1}{2}}\,\text{دس} = \cancel{6}^{2} \times \frac{2}{\cancel{3}_{1}}\,\text{س}^{\frac{3}{2}}\Big]_{4}^{1}$

$= 4\sqrt{\text{س}^{3}}\,\Big]_{4}^{1} = 4\sqrt{1} - 4\sqrt{64}$

$= 4 - 32 = -28$

٢) $\int_{0}^{1} 14\,\text{س}^{\frac{4}{3}}\,\text{دس} = \cancel{14}^{2} \times \frac{3}{\cancel{7}_{1}}\,\text{س}^{\frac{7}{3}}\Big]_{0}^{1}$

$= 6\sqrt[3]{\text{س}^{7}}\,\Big]_{0}^{1} = 6\sqrt[3]{1} - 6\sqrt[3]{\text{صفر}}$

$= 6$

- تدريب ٢ ، ص١٧٠ :

$\int_{-1}^{2} 4\,\text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = 4\,\text{ق}(\text{س})\Big]_{-1}^{2}$

$= 4\,\text{ق}(2) - 4\,\text{ق}(-1)$

$= 4 \times 5 - 4 \times 3$

$= 20 - 12 = 8$

- تدريب ٣ ، ص١٧٠ :

$\int_{1}^{\text{ن}} 6\,\text{س}\,\text{دس} = 9 \Leftarrow 3\,\text{س}^{2}\Big]_{1}^{\text{ن}} = 9$

$3\text{ن}^{2} - 3 \times 1^{2} = 9$

$3\text{ن}^{2} = 9 + 3 = 12$

$\sqrt{\text{ن}^{2}} = \sqrt{4}$

$\text{ن} = 2 \text{ ، } -2$

~ . ~ . ~

الأسئلة ص ١٧١ :

١- أ) $\int_{١}^{٦} -٢\,\text{دس} = [-٢\text{س}]_{١}^{٦} = -١٢ - -٢ = -١٠$

ب) $\int_{٨}^{١} \frac{١}{٨}\,\text{س}^{-\frac{١}{٣}}\,\text{دس} = \frac{١}{٨} \times \frac{٣}{٢}\,[\text{س}^{\frac{٢}{٣}}]_{٨}^{١}$

$= \frac{٣}{١٦}\,[\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}]_{٨}^{١} = \frac{٣}{١٦}\sqrt[٣]{١} - \frac{٣}{١٦}\sqrt[٣]{٦٤}$

$= \frac{٣}{١٦} - \frac{٣ \times ٤}{١٦} = \frac{-٩}{١٦}$

ج) $[(\text{س}^{٢} - ٢\text{س}^{٤} - \text{س}^{٥} + ٧\text{س})]_{٠}^{٦} = ٦^{٢} - ٢ \times ٦^{٤} - ٦^{٥} + ٤٢ - \text{صفر}.$

د) $\int_{-٢}^{٢} (٣\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢)\,\text{دس} = [(\text{س}^{٣} + \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - ٢\text{س})]_{-٢}^{٢}$

$= (٨ + ٢ - ٤) - (-٨ + ٢ - -٤)$

$= ٦ \quad - \; -٢ = ٨ .$

٢- $[٤\text{س}]_{-١}^{\text{م}} = ٢٠ \;\Longleftarrow\; ٤\text{م} - ٤ \times -١ = ٢٠$

$٤\text{م} = ١٦$

$\text{م} = ٤$

٣- $\text{د(س)} = \int \text{د}'\text{(س)}\,\text{دس} = \int (٢\text{س} + ١)\,\text{دس}$

$\text{د(س)} = \text{س}^{٢} + \text{س} + \text{ث} .$

$\text{د(٥)} - \text{د(١)} = (٢٥ + ٥ + \cancel{\text{ث}}) - (١ + ١ + \cancel{\text{ث}})$

$= ٣٠ - ٢ = ٢٨ .$

٤- $\int_{٢}^{٢} (٤\text{س} - ٦\text{س}^{٢} + ٣)\,\text{دس} = [(٢\text{س}^{٢} - ٢\text{س}^{٣} + ٣\text{س})]_{٢}^{٢} = \text{صفر} .$

٥- أ) $\int_{١}^{٢} (١٢\text{س} - ٦\text{س}^{٣})\,\text{دس} = [(٦\text{س}^{٢} - \frac{٣}{٢}\text{س}^{٤})]_{١}^{٢}$

$= (٢٤ - ٢٤) - (٦ - \frac{٣}{٢})$

$= ٠ - \frac{٩}{٢} = \frac{-٩}{٢} .$

$$ب)\ \int_{١}^{-١} (٤س^{٢} - ١٢س + ٩)\, ءس = \left[\left(\frac{٤}{٣}س^{٣} - ٦س^{٢} + ٩س\right)\right]_{١}^{-١}$$

$$= \left(-\frac{٤}{٣} - ٦ - ٩\right) - \left(\frac{٤}{٣} - ٦ + ٩\right)$$

$$= -\frac{٤}{٣} - ١٥ - \frac{٤}{٣} - ٣$$

$$= -\frac{٨}{٣} - ١٨ = \frac{-٨ - ٥٤}{٣} = -\frac{٦٢}{٣}$$

$$جـ)\ \int_{٠}^{-٢} \frac{\cancel{(س - ١)}^{١}(س + ٧)}{\cancel{س - ١}_{١}}\, ءس = \left[\left(\frac{١}{٢}س^{٢} + ٧س\right)\right]_{٠}^{-٢}$$

$$= \left(\frac{\cancel{٤}^{٢}}{\cancel{٢}_{١}} + -١٤\right) - (٠ + ٠)$$

$$= -١٢$$

$$٦ -\quad \int_{٥}^{٢} ق'(س)\, ءس = ١٣ \Leftarrow \left[ق(س)\right]_{٥}^{٢} = ١٣$$

$$ق(٢) - ق(٥) = ١٣$$

$$ق(٢) - -١٧ = ١٣$$

$$ق(٢) = ١٣ - ١٧$$

$$ق(٢) = -٤$$

* * *

ثالثاً : خصائص التكامل المحدود :

تدريب ١، ص١٧٣ :

١) $\int_{-١}^{٢} \frac{٥}{٢}\,\text{ع}(\text{س})\,.\,\text{دس} = \frac{٥}{٢} \times ٥ = \frac{٢٥}{٢}$

٢) $٢\int_{-١}^{٢} \text{ل}(\text{س})\,\text{دس} = -٢$ بالقسمة على ٢

$\int_{-١}^{٢} \text{ل}(\text{س})\,\text{دس} = -١$

$\therefore \int_{-١}^{٢} \left(٢\text{ع}(\text{س}) - ٣\text{ل}(\text{س}) - ٢\text{س}\right)\text{دس} = ٢\int_{-١}^{٢} \text{ع}(\text{س})\,\text{دس} - ٣\int_{-١}^{٢} \text{ل}(\text{س})\,\text{دس} - \int_{-١}^{٢} ٢\text{س}\,\text{دس}$

$= ٢\int_{-١}^{٢} \text{ع}(\text{س})\,\text{دس} - ٣\int_{-١}^{٢} \text{ل}(\text{س})\,\text{دس} - \left([\text{س}^{٢}]_{-١}^{٢}\right)$

$= ٢ \times ٥ - ٣ \times -١ - (٤ - ١)$

$= ١٠ + ٣ - ٣ = ١٠$

تدريب ٢، ص١٧٤ :

$٢\int_{١}^{٥} \text{ه}(\text{س})\,\text{دس} = ٢ \Leftarrow \int_{١}^{٥} \text{ه}(\text{س})\,\text{دس} = ١$

١) $\int_{٥}^{١} \text{ه}(\text{س})\,\text{دس} = -\int_{١}^{٥} \text{ه}(\text{س})\,\text{دس} = -١$

٢) $\int_{٥}^{٦} \text{ه}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{٥}^{١} \text{ه}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{١}^{٦} \text{ه}(\text{س})\,\text{دس}$

$= -١ + ٤ = ٣$

٣) $\int_{٦}^{٦} \text{ه}(\text{س})\,\text{دس} = \text{صفراً}\,.$

تدريب ٣، ص١٧٥ :

$\int_{-١}^{٢} \frac{\text{ه}(\text{س})}{٣}\,\text{دس} = ٥ \Leftarrow \int_{-١}^{٢} \text{ه}(\text{س})\,\text{دس} = ١٥\,.$

١) $٢\int_{٢}^{-١} \text{ه}(\text{س})\,\text{دس} = ٢ \times -١٥ = -٣٠$

٢) $\int_{٦}^{٢}$ د(س) ءس = $\int_{٦}^{١-}$ د(س) ءس + $\int_{١-}^{٢}$ د(س) ءس

= ٤- + ١٥ = ١١

تدريب ٣ ، ص١٧٥ :

$\int_{٢}^{٥}$ (٣ د(س) − ٤) ءس = ١٨ ⇐ ٣ $\int_{٢}^{٥}$ د(س) ءس − $\int_{٢}^{٥}$ ٤ ءس = ١٨

٣ $\int_{٢}^{٥}$ د(س) ءس − $[٤س]_{٢}^{٥}$ = ١٨

٣ $\int_{٢}^{٥}$ د(س) ءس − (٢٠ − ٨) = ١٨

٣ $\int_{٢}^{٥}$ د(س) ءس = ١٨ + ١٢ = ٣٠

$\int_{٢}^{٥}$ د(س) ءس = ١٠

تدريب ٤ ، ص١٧٦ :

١) م^{٣} + ١ = ٧- ⇐ م^{٣} = ٨-

$\sqrt[٣]{م^{٣}}$ = $\sqrt[٣]{٨-}$

م = ٢-

٢) $[س^{٢} − ٣س]_{ن}^{١}$ = ٠ ⇐ (١ − ٣) − (ن^{٢} − ٣ن) = ٠

٢- − ن^{٢} + ٣ن = ٠

ن^{٢} − ٣ن + ٢ = ٠

(ن − ٢)(ن − ١) = ٠

إما ن = ٢ ، وإما ن = ١

~ . ~ . ~

الأسئلة ص ١٧٧ :

١- $\int_{١}^{٤} ٢\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ١٢ \Rightarrow \int_{١}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٦$

أ) $٣\int_{٤}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٤ \times -٦ = -٢٤$

ب) $\int_{٥}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{٥}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{٤}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

$= -٤ + -٦ = -١٠$

جـ) $\int_{٥}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{٥}^{٤} ٢\text{س}\,\text{دس} = -٤ + \left(\left[\text{س}^{٢}\right]_{٥}^{٤}\right)$

$= -٤ + (١٦ - ٢٥)$

$= -٤ + -٩ = -١٣$

٢- $\int_{-١}^{٢} \frac{\text{ك}(\text{س})}{٢}\,\text{دس} = ٣ \Rightarrow \int_{-١}^{٢} \text{ك}(\text{س})\,\text{دس} = ٦$.

أ) $\int_{٢}^{-١} (\text{هـ}(\text{س}) + ١)\,\text{دس} = ٥ \Rightarrow \int_{٢}^{-١} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{٢}^{-١} ١\,\text{دس} = ٥$

$\int_{٢}^{-١} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس} + \left(\left[\text{س}\right]_{٢}^{-١}\right) = ٥$

$\int_{٢}^{-١} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس} + (-١ - ٢) = ٥ \Rightarrow \int_{٢}^{-١} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس} = ٥ + ٣ = ٨$

ب) $٣\int_{-١}^{٢} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس} - \int_{-١}^{٢} ٢\text{س}\,\text{دس} + ٣\int_{-١}^{٢} \text{ك}(\text{س})\,\text{دس}$

$= ٣ \times -٨ - \left(\left[\text{س}^{٢}\right]_{-١}^{٢}\right) + ٣ \times ٦$

$= -٢٤ - (٤ - ١) + ١٨ = -٩$

٣- $٥\text{أ} + ٧ = \text{أ} - ١ \Rightarrow ٤\text{أ} = -٨ \Rightarrow \text{أ} = -٢$.

٤- $\left[(٢س - ٢س^{٢}) \right]_{٣}^{م} = ٠$

$(٢م - ٢م^{٢}) - (٦ - ١٨) = ٠ \Leftarrow ٢م - ٢م^{٢} + ١٢ = ٠$ بالقسمة على -٢

$م^{٢} - م - ٦ = ٠$

$(م - ٣)(م + ٢) = ٠$

إما $م = ٣$ ، وإما $م = ٢$

٥- $٣\int_{٤}^{١} ق(س)\,دس - \int_{٤}^{١} ٥\,دس = ٩ \Leftarrow ٣\int_{٤}^{١} ق(س)\,دس - \left(\left[٥س\right]_{٤}^{١}\right) = ٩$

$٣\int_{٤}^{١} ق(س)\,دس - (٥ - ٢٠) = ٩$

$٣\int_{٤}^{١} ق(س)\,دس = ٩ + -١٥ = -٦$

$\int_{٤}^{١} ق(س)\,دس = -٢ \Leftarrow \int_{١}^{٤} ق(س)\,دس = ٢$

المطلوب : $\int_{١}^{٤} (٢ق(س) + ١)\,دس = ٢\int_{١}^{٤} ق(س)\,دس + \int_{١}^{٤} ١\,دس$

$= ٢ \times ٢ + \left(\left[س\right]_{١}^{٤}\right)$

$= ٤ + (٤ - ١) = ٧$.

٦- $\left[(س^{٢} - س) \right]^{ل} = ٦$

$(ل^{٢} - ل) - (٠ - ٠) = ٦$

$ل^{٢} - ل - ٦ = ٠$

$(ل - ٣)(ل + ٢) = ٠$

إما $ل = ٣$ وإما $ل = -٢$.

~ . ~ . ~

ثالثاً : التكامل بالتعويض :

تدريب ١ ، ص١٧٩

∫ ٢١ (٣س^{٢} + ٤س) (س^{٣} + ٢س^{٢})^{٧} د س

نفرض أن ص = س^{٣} + ٢س^{٢}

$\frac{دص}{دس}$ = ٣س^{٢} + ٤س

دص = (٣س^{٢} + ٤س) د س

= ∫ ٢١ (٣س^{٢} + ٤س) ص^{٧} د س = ∫ ٢١ × ص^{٧} . دص

= $\frac{٢١}{٨}$ ص^{٨} + ث

= $\frac{٢١}{٨}$ (س^{٣} + ٢س^{٢})^{٨} + ث .

تدريب ٢ ، ص١٨٢ :

نفرض أن ص = ٥س + ١

عند س = ٠ ، ص = ١

عند س = ٣ ، ص = ١٦ ، وبإجراء التكامل :

وحسب حل المثال ٢ ص١٨١

∫$_{٣}$ $\frac{١}{\sqrt{٥س+١}}$ د س = ∫$_{١٦}^{١}$ $\frac{١}{\sqrt{ص}}$ × $\frac{١}{٥}$ دص

= $\frac{٢}{٥}$ $\sqrt{ص}$]$_{١٦}^{١}$

= $\frac{٢}{٥}$ $\sqrt{١}$ − $\frac{٢}{٥}$ $\sqrt{١٦}$

= $\frac{٢}{٥}$ − $\frac{٨}{٥}$ = $\frac{-٦}{٥}$

تدريب ٣ ، ص١٨٢

١) نفرض أن ص = س^{٢} + ١ ⟸ $\frac{دص}{دس}$ = ٢س

⟸ دص = ٢س د س

∫ ٣س (س^{٢} + ١)$^{-٥}$ د س = ∫ ٣ ص$^{-٥}$ × $\frac{دص}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$ × $\frac{ص^{-٤}}{-٤}$ + ث

= $\frac{-٣}{٨}$ (س^{٢} + ١)$^{-٤}$ + ث .

٢) نفرض أن $\text{ص} = 1 - \text{س}^2$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -2\text{س}$$

$$\text{دص} = -2\text{س}\ \text{دس}$$

$$\int 2\text{س}\ \text{قا}^2(1-\text{س}^2)\ \text{دس} = \int -\text{قا}^2\text{ص} \times \text{دص}$$

$$= -\text{طا}\,\text{ص} + \text{ث}$$

$$= -\text{طا}\,(1-\text{س}^2) + \text{ث} \,.$$

٣) نفرض أن $\text{ص} = \text{س} - 2\text{س}^2 - 1$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1 - 4\text{س}$$

$$\text{دص} = (1 - 4\text{س})\ \text{دس}$$

عند $\text{س} = -1$ ، $\text{ص} = -4$

عند $\text{س} = 1$ ، $\text{ص} = -2$

$$\int_{1}^{-1} (4\text{س} - 1)(\text{س} - 2\text{س}^2 - 1)^{\frac{1}{3}}\ \text{دس} = \int_{1}^{-1} -(1 - 4\text{س})(\text{س} - 2\text{س}^2 - 1)^{\frac{1}{3}}\ \text{دس}$$

$$= \int_{-2}^{-4} -\text{ص}^{\frac{1}{3}}\ \text{دص} = \frac{-3}{4}\,\text{ص}^{\frac{4}{3}}\Big]_{-2}^{-4}$$

$$= \frac{-3}{4}\sqrt[3]{(-4)^4} - \frac{-3}{4}\sqrt[3]{(-2)^4}$$

$$= \frac{-3\sqrt[3]{256} + 3\sqrt[3]{16}}{4} = \frac{-3\times4\sqrt[3]{4} + 3\times2\sqrt[3]{2}}{4}$$

$$= \frac{-6\sqrt[3]{4} \overset{4}{+} 3\sqrt[3]{2}}{2}$$

٤) $\int_{0}^{3} (\text{س}+1)^{\frac{-1}{5}}\ \text{دس}$ ، نفرض أن $\text{ص} = \text{س} + 1$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1$$

$$\text{دص} = \text{دس}$$

$$\int_{0}^{3} (\text{س}+1)^{\frac{-1}{5}}\ \text{دس} = \int \text{ص}^{\frac{-1}{5}} \,.\, \text{دص}$$

$$= \frac{5}{4}\,\text{ص}^{\frac{4}{5}} + \text{ث}$$

$$= \frac{5}{4}\sqrt[5]{(\text{س}+1)^4} + \text{ث}$$

$$\int_{0}^{3} (\text{س}+1)^{\frac{-1}{5}}\ \text{دس} = \frac{5}{4}\sqrt[5]{(\text{س}+1)^4}\Big]_{0}^{3} = \frac{5}{4}\sqrt[5]{4^4} - \frac{5}{4}\sqrt[5]{1^4}$$

$$= \frac{5}{4}\left(\sqrt[5]{256} - 1\right).$$

~ ، ~ ، ~

- تدريب ٤ ، ص ١٨٢

١) نفرض أن $\text{ص} = \text{أ}\text{س} + \text{ب}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{أ}$$

$$\text{دص} = \text{أ}\,\text{دس}$$

$$\int (\text{أ}\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}}\,\text{دس} = \int (\text{ص})^{\text{ن}} \times \frac{\text{دص}}{\text{أ}} = \frac{1}{\text{أ}} \times \frac{\text{ص}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$$

$$= \frac{(\text{أ}\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{أ}(\text{ن}+1)} + \text{ث} \text{ ، } \text{أ} \neq 0 \text{ ، } \text{ن} \neq -1 .$$

٢) نفرض أن $\text{ص} = \text{أ}\text{س} + \text{ب}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{أ}$$

$$\text{دص} = \text{أ}\,\text{دس}$$

$$\int \text{جتا}(\text{أ}\text{س}+\text{ب})\,\text{دس} = \int \text{جتا ص} \times \frac{\text{دص}}{\text{أ}}$$

$$= \frac{1}{\text{أ}} \times \text{جا ص} + \text{ث}$$

$$= \frac{\text{جا}(\text{أ}\text{س}+\text{ب})}{\text{أ}} + \text{ث} \text{ ، } \text{أ} \neq 0 .$$

- تدريب ٥ ، ص ١٨٣ :

١) $$\overset{1}{\cancel{6}} \left[\frac{(1-2\text{س})^{6}}{\underset{1}{\cancel{6}} \times -2} \right]_{-1}^{2} = -\frac{1}{2}(1-4)^{6} - -\frac{1}{2}(1+2)^{6}$$

$$= -\frac{1}{2}(-3)^{6} + \frac{1}{2}(3)^{6} = \text{صفراً} .$$

٢) $$\int 12\,\text{جا}(1-4\text{س})\,\text{دس} = 12 \times \frac{-\text{جتا}(1-4\text{س})}{-4} + \text{ث}$$

$$= +3\,\text{جتا}(1-4\text{س}) + \text{ث} .$$

~ . ~ . ~

الأسئلة ، ص١٨٤ :

١- أ) $\text{ص} = \text{س} - \text{س}^{2}$

ب) $\text{ص} = 2\text{س}^{3} - 2$

جـ) $\text{ص} = \text{س}^{3} - \text{س}^{2}$.

د) $\text{ص} = \text{س}^{2} - 6\text{س}$.

٢- أ) $\int (3\text{س}-2)^{\frac{2}{3}}\,\text{دس} = \dfrac{(3\text{س}-2)^{\frac{5}{3}}}{\cancel{3} \times \frac{5}{\cancel{3}}} + \text{جـ}$

$= \frac{1}{5}\sqrt[3]{(3\text{س}-2)^{5}} + \text{جـ}$.

ب) نفرض أن $\text{ص} = 2\text{س}^{2} - 4\text{س} + 1$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = 4\text{س} - 4$

$\text{دص} = 4(\text{س}-1)\,\text{دس}$.

$\int (\text{س}-1)(2\text{س}^{2}-4\text{س}+1)^{5}\,\text{دس} = \int \text{ص}^{5} \times \dfrac{\text{دص}}{4}$

$= \frac{1}{4} \times \dfrac{\text{ص}^{6}}{6} + \text{جـ}$

$= \frac{1}{24}(2\text{س}^{2}-4\text{س}+1)^{6} + \text{جـ}$.

جـ) $\int 2\,\text{قا}^{2}(2-\text{س})\,\text{دس} = 2 \times \dfrac{\text{ظا}(2-\text{س})}{-1} + \text{جـ}$

$= -2\,\text{ظا}(2-\text{س}) + \text{جـ}$.

د) نفرض أن $\text{ص} = \text{س}^{4} + 1$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = 4\text{س}^{3}$

$\text{دص} = 4\text{س}^{3} . \text{دس}$

$\int 2\text{س}^{3}\,\text{جا}(\text{س}^{4}+1)\,\text{دس} = \int \text{جا ص} \times \dfrac{\text{دص}}{2}$

$= \frac{-1}{2}\,\text{جتا ص} + \text{جـ} = \frac{-1}{2}\,\text{جتا}(\text{س}^{4}+1) + \text{جـ}$.

٣- أ) $\int_{\cdot}^{٢} (٤\text{س}+١)^{\frac{١}{٢}} \, \text{دس} = \left[\frac{(٤\text{س}+١)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{\cancel{٢}} \times \cancel{٤}_{٢}} \right]_{\cdot}^{٢}$

$= \frac{١}{٦} \left[\sqrt{(٤\text{س}+١)^{٣}} \right]_{\cdot}^{٢}$

$= \frac{١}{٦}\sqrt{٩^{٣}} - \frac{١}{٦}\sqrt{١} = \frac{٢٧}{٦} - \frac{١}{٦}$

$= \frac{٢٦}{٦}$

$= \frac{١٣}{٣}$.

ب) $\int_{١-}^{١-} ٣\text{س}^{٢} \, (\text{س}^{٣} - ١)^{٣} \, \text{دس} = \text{صفراً}$.

هـ) $\int_{١}^{\cdot} ٢\text{س} \, \sqrt[٣]{\text{س}^{٢} - ١} \, \text{دس}$

نفرض أن $\text{ص} = \text{س}^{٢} - ١$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}$

$\text{دص} = ٢\text{س} \, . \, \text{دس}$

عند $\text{س} = \cdot$ ، $\text{ص} = ١-$

عند $\text{س} = ١$ ، $\text{ص} = \cdot$

$\int_{١}^{\cdot} ٢\text{س} \, (\text{س}^{٢} - ١)^{\frac{١}{٣}} \, \text{دس} = \int_{\cdot}^{١-} \text{ص}^{\frac{١}{٣}} \times \text{دص}$

$= \left[\frac{٣}{٤} \text{ص}^{\frac{٤}{٣}} \right]_{\cdot}^{١-} = \frac{٣}{٤} \left[\sqrt[٣]{\text{ص}^{٤}} \right]_{\cdot}^{١-}$

$= \frac{٣}{٤}\sqrt[٣]{١} - \frac{٣}{٤}\sqrt[٣]{\text{صفر}}$

$= \frac{٣}{٤}$.

د) نفرض أن $\text{ص} = \text{س}^{٢} - ٣\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س} - ٣$

$\text{دص} = (٢\text{س} - ٣) \, \text{دس}$.

$$\int (٣-٢\text{س})(\text{س}^٢-٣\text{س})^{-٢}\,\text{دس} = \int \text{ص}^{-٢} \times -\text{دص}$$

$$= \frac{-\text{ص}^{-١}}{-١} + \text{ث} = \frac{١}{\text{س}^٢-٣\text{س}} + \text{ث} \,.$$

$$\int_{١}^{٢} (٣-٢\text{س})(\text{س}^٢-٣\text{س})^{-٢}\,\text{دس} = \left[\frac{١}{\text{س}^٢-٣\text{س}}\right]_{١}^{٢}$$

$$= \frac{١}{٤-٦} - \frac{١}{١-٣}$$

$$= \frac{-١}{٢} - \frac{-١}{٢} = \text{صفراً} \,.$$

٤- $\int_{-٢}^{٣} ٣\text{س}^٢\,\text{ق}'(\text{س}^٣)\,\text{دس}$: نفرض أن $\text{ص} = \text{س}^٣$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^٢$$

$$\text{دص} = ٣\text{س}^٢\,\text{دس} \,.$$

عند س = ٣ ، ص = ٢٧

عند س = -٢ ، ص = -٨

$$\int_{-٢}^{٣} ٣\text{س}^٢\,\text{ق}'(\text{س}^٣)\,\text{دس} = \int_{-٨}^{٢٧} \text{ق}'(\text{ص})\,.\text{دص} = \Big[\text{ق}(\text{ص})\Big]_{-٨}^{٢٧}$$

$$= \text{ق}(٢٧) - \text{ق}(-٨) = -٦ - ٥ = -١١ \,.$$

٥- $\int_{-١}^{٢} ٨\text{س}\,\text{ق}(\text{س}^٢+١)\,\text{دس}$: نفرض أن $\text{ص} = \text{س}^٢ + ١$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}$$

$$\text{دص} = ٢\text{س}\,\text{دس} \,.$$

عند س = ٢ ، ص = ٥

عند س = -١ ، ص = ٢

$$\int_{-١}^{٢} ٨\text{س}\,\text{ق}(\text{س}^٢+١)\,\text{دس} = \int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{ص}) \times ٤\,.\text{دص}$$

$$= ٤\int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}$$

$$= ٤ \times -٣ = -١٢$$

٦- $\int_{٠}^{٤} \text{٢س} \left(\text{س}^{٢}+٩\right)^{\frac{١}{٢}} \text{دس}$

نفرض أن $\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٩$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢س}$

$\text{دص} = \text{٢س} . \text{دس}$

$$\int \text{٢س} \left(\text{س}^{٢}+٩\right)^{\frac{١}{٢}} \text{دس} = \int \text{ص}^{\frac{١}{٢}} \times \text{دص}$$

$$= \frac{٢}{٣} \text{ص}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ھ}$$

$$= \frac{٢}{٣} \sqrt{\left(\text{س}^{٢}+٩\right)^{٣}} + \text{ھ} .$$

$$\int_{٠}^{٤} \text{٢س} \left(\text{س}^{٢}+٩\right)^{\frac{١}{٢}} \text{دس} = \left[\frac{٢}{٣} \sqrt{\left(\text{س}^{٢}+٩\right)^{٣}}\right]_{٠}^{٤}$$

$$= \frac{٢}{٣} \sqrt{(٢٥)^{٣}} - \frac{٢}{٣} \sqrt{(٩)^{٣}}$$

$$= \frac{٢}{٣} \times ١٢٥ - \frac{٢}{٣} \times ٢٧$$

$$= \frac{٢٥٠ - ٥٤}{٣} = \frac{١٩٦}{٣}$$

~ . ~ . ~

الفصل الثاني : تطبيقات التكامل .

أولاً : تطبيقات هندسية :

تدريب ١ ص١٨٦

$$\text{دَ}(\text{س}) = ٢\text{س} - ١$$

$$\text{د}(\text{س}) = \int \text{دَ}(\text{س}) \,.\, \text{ءس} = \int (٢\text{س} - ١)\, \text{ءس}$$

$$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - \text{س} + \text{ث} \,.$$

$$(-١ ، ٢) \Leftarrow \text{س} = -١ ، \text{ص} = \text{د}(-١) = ٢$$

$$٢ = ١ - -١ + \text{ث} \Leftarrow \text{ث} = ٠$$

$$\therefore \text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - \text{س} \,.$$

تدريب ٢ ص١٨٧ :

$$\text{د}(\text{س}) = \int \text{دَ}(\text{س}) \,.\, \text{ءس} = \int ٦ (٢\text{س} - ١)^{\frac{١}{٣}} \,\text{ءس}$$

$$\text{د}(\text{س}) = \overset{٣}{\cancel{٦}} \times \frac{(٢\text{س} - ١)^{\frac{٤}{٣}}}{١\cancel{٢} \times \frac{٤}{٣}} + \text{ث}$$

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{٩}{٤} \sqrt[٣]{(٢\text{س} - ١)^{٤}} + \text{ث} \,.$$

$$(١ ، ٥) \Leftarrow \text{د}(١) = ٥ \Leftarrow ٥ = \frac{٩}{٤} \sqrt[٣]{١} + \text{ث}$$

$$\text{ث} = ٥ - \frac{٩}{٤} = \frac{١١}{٤}$$

$$\therefore \text{د}(\text{س}) = \frac{٩}{٤} \sqrt[٣]{(٢\text{س} - ١)^{٤}} + \frac{١١}{٤} \,.$$

$$\text{د}(١٤) = \frac{٩}{٤} \sqrt[٣]{(٢٧)^{٤}} + \frac{١١}{٤}$$

$$\text{د}(١٤) = \frac{٩ \times ٨١ + ١١}{٤} = \frac{٧٢٩ + ١١}{٤} = \frac{٧٤٠}{٤}$$

$$\text{د}(١٤) = ١٨٥$$

~ . ~ . ~

الأسئلة ، ص١٨٨

١- ق'(س) = ٦ − ٢س + ٩$\text{س}^{٣}$.

ق(س) = ∫ ق'(س) دس = ∫ (٦ − ٢س + ٩$\text{س}^{٣}$) دس

ق(س) = ٦س − $\text{س}^{٢}$ + $\frac{٩}{٤}$$\text{س}^{٤}$ + جـ .

لكن ق(٠) = ٥ ⟸ ٥ = ٠ − ٠ + ٠ + جـ

جـ = ٥

∴ ق(س) = ٦س − $\text{س}^{٢}$ + $\frac{٩}{٤}$$\text{س}^{٢}$ + ٥

٢- ق'(س) = ٢س ($\text{س}^{٢}$+٨)$^{-\frac{١}{٣}}$

ق(س) = ∫ ق'(س) دس = ∫ ٢س ($\text{س}^{٢}$+٨)$^{-\frac{١}{٣}}$ دس .

نفرض أن ص = $\text{س}^{٢}$+٨

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢س

دص = ٢س دس

ق(س) = ∫ ص$^{-\frac{١}{٣}}$ × دص = $\frac{٣}{٢}$ ص$^{\frac{٢}{٣}}$ + جـ .

ق(س) = $\frac{٣}{٢}$ $\sqrt[٣]{(\text{س}^{٢}+٨)^{٢}}$ + جـ .

(٠، ٤) ⟸ ق(٠) = ٤ ⟸ ٤ = $\frac{٣}{٢}$ $\sqrt[٣]{٨^{٢}}$ + جـ

٤ = $\frac{٣}{\cancel{٢}}$ × $\cancel{٤}^{٢}$ + جـ

جـ = −٢

∴ ق(س) = $\frac{٣}{٢}$ $\sqrt[٣]{(\text{س}^{٢}+٨)^{٢}}$ − ٢ .

٣- ق'(س) = ٢٥ (٥س+٤)^{٤}

ق(س) = ∫ ق'(س) . دس = ∫ ٢٥ (٥س+٤)^{٤} دس

ق(س) = $\overset{١}{\cancel{٢٥}}$ × $\frac{(٥\text{س}+٤)^{٥}}{\underset{١}{\cancel{٥×٥}}}$ + جـ

(−١، ٧) ⟸ ق(−١) = ٧ ⟸ ٧ = (−٥+٤)^{٥} + جـ

٧ = −١ + جـ

جـ = ٨

∴ ق(س) = (٥س+٤)^{٥} + ٨ ⟸ ق(١) = (٩)^{٥} + ٨

٤- $\bar{د}(س) = ٨س - ٦س^{٢}$

$د(س) = \int \bar{د}(س)\, ءس = \int (٨س - ٦س^{٢})\, ءس$

$د(س) = ٤س^{٢} - ٢س^{٣} + جـ$

$(٠ ، ٣) \Leftarrow د(٠) = ٣ \Leftarrow ٣ = ٠ - ٠ + جـ$

$جـ = ٣$

$\therefore د(س) = ٤س^{٢} - ٢س^{٣} + ٣$

٥- $\bar{هـ}(س) = \frac{\overset{١}{\cancel{س}}(٢س - ٥)}{\underset{١}{\cancel{س}}} = ٢س - ٥ \quad ، س \neq ٠$.

$هـ(س) = \int \bar{هـ}(س)\, ءس = \int (٢س - ٥)\, ءس$

$هـ(س) = س^{٢} - ٥س + جـ$.

$(-١ ، ٥) \Leftarrow هـ(-١) = ٥ \Leftarrow ٥ = ١ + ٥ + جـ$

$جـ = -١$

$\therefore هـ(س) = س^{٢} - ٥س - ١$

$هـ(٢) = ٤ - ١٠ - ١ = -٧$

~ ، ~ ، ~

ثانياً: تطبيقات فيزيائية.

تدريب ١، ص١٩٠:

١) ع(ن) = ف̀(ن) = ٢ن - ٥

ف(ن) = ∫ ع(ن) . دن = ∫ (٢ن - ٥) دن

ف(ن) = ن^{٢} - ٥ن + ث .

لكن ف(٠) = ٣ ⇐ ٣ = ٠ - ٠ + ث

ث = ٣

∴ ف(ن) = ن^{٢} - ٥ن + ٣

ف(٢) = ٤ - ١٠ + ٣ = -٣ يكون موقع الجسم بعد ثانيتين .

٢) ع(ن) = ف̀(ن) = ٦(١ - ٢ن)^{٢}

ف(ن) = ∫ ع(ن) . دن = ∫ ٦ (١ - ٢ن)^{٢} دن

ف(ن) = ٦ $\frac{(١ - ٢ن)^{٣}}{-٢ \times ٣}$ + ث

ف(ن) = -(١ - ٢ن)^{٣} + ث .

لكن ف(٠) = ٥ ⇐ ٥ = -(١ - ٠)^{٣} + ث

٥ = -١ + ث

ث = ٦

∴ ف(ن) = -(١ - ٢ن)^{٣} + ٦

ف(١) = -(١ - ٢)^{٣} + ٦

ف(١) = -(-١) + ٦ = ٧م .

تدريب ٢، ص١٩١:

١) ت(ن) = ع̀(ن) = -١٢

ع(ن) = ∫ ت(ن) . دن = ∫ -١٢ . دن

ع(ن) = -١٢ن + ث$_{١}$.

لكن ع(٠) = ٥ ⇐ ٥ = ٠ + ث$_{١}$

ث$_{١}$ = ٥

∴ ع(ن) = -١٢ن + ٥

ع(٤) = -١٢ × ٤ + ٥ = -٤٣ م/ث .

٢) ع(ن) = فَ(ن) = -١٢ن + ٥

ف(ن) = ∫ فَ(ن) . ءن = ∫ ع(ن) . ءن

ف(ن) = ∫ (-١٢ن + ٥) ءن

ف(ن) = -٦ن^٢ + ٥ن + ث ،

لكن ف(٠) = ٣ ⟸ ٣ = ٠ + ٠ + ث ،

ث = ٣

∴ ف(ن) = -٦ن^٢ + ٥ن + ٣ .

ف(٣) = -٥٤ + ١٥ + ٣ = -٣٦

~ . ~ . ~

الأسئلة ، ص١٩٢

١- ع(ن) = ف'(ن) = ١٢ جتا (٢ن - ١)

ف(ن) = ∫ ع(ن) . دن = ∫ ١٢ جتا (٢ن - ١) دن

ف(ن) = ١٢ × $\frac{\text{جا}(٢ن-١)}{٢}$ + هـ

ف(ن) = ٦ جا (٢ن - ١) + هـ ، حيث هـ ثابت .

٢- ف(ن) = ∫ ع(ن) . دن = ∫ (٤ن + ٨) . دن

ف(ن) = ٢ن^{٢} + ٨ن + هـ .

لكن ف(٠) = ٢ ⟸ هـ = ٢

∴ ف(ن) = ٢ن^{٢} + ٨ن + ٢

ف(٤) = ٣٢ + ٣٢ + ٢ = ٦٦ م .

٣- ١) ع(ن) = ∫ ت(ن) . دن = ∫ ٤٨ (١-٢ن)^{٣} دن

ع(ن) = ٤٨ × $\frac{(١-٢ن)^{٤}}{٤×-٢}$ + هـ$_{١}$

ع(ن) = -٦ (١-٢ن)^{٤} + هـ$_{١}$

ع(٠) = ٢ ⟸ ٢ = -٦ (١) + هـ$_{١}$ ⟸ هـ$_{١}$ = ٨

∴ ع(ن) = -٦ (١-٢ن)^{٤} + ٨ ⟸ ع(١) = -٦ (-١)^{٤} + ٨

ع(١) = ٢ م/ث .

٢) ف(ن) = ∫ ع(ن) . دن = ∫ (-٦ (١-٢ن)^{٤} + ٨) دن

ف(ن) = $\frac{-\cancel{٦}^{٣}(١-٢ن)^{٥}}{٥×-\cancel{٢}_{١}}$ + ٨ن + هـ$_{٢}$

ف(٠) = ٣ ⟸ ٣ = $\frac{٣}{٥}$ (١)^{٥} + ٠ + هـ$_{٢}$

٣ = $\frac{٣}{٥}$ + هـ$_{٢}$ ⟸ هـ$_{٢}$ = ٣ - $\frac{٣}{٥}$

هـ$_{٢}$ = $\frac{١٢}{٥}$

∴ ف(ن) = $\frac{٣}{٥}$ (١-٢ن)^{٥} + ٨ن + $\frac{١٢}{٥}$.

ف(٢) = ($\frac{٣}{٥}$ (-٣)^{٥} + ١٦ + $\frac{١٢}{٥}$) م .

٤- $ع(ن) = (٣ن - ١)(٤ن + ١)$

$ع(ن) = ١٢ن^{٢} - ن - ١$

١) $ف(ن) = \int ع(ن) \, ءن = \int (١٢ن^{٢} - ن - ١) \, ءن$

$ف(ن) = (٤ن^{٣} - \frac{١}{٢}ن^{٢} - ن + ﻫ)$ م ، حيث ﻫ ثابت .

٢) $ف(٠) = ٧ \Leftarrow ٧ = ﻫ$

$\therefore ف(ن) = ٤ن^{٣} - \frac{١}{٢}ن^{٢} - ن + ٧$.

$ف(٢) = ٣٢ - ٢ - ٢ + ٧$

$ف(٢) = ٣٥$ م .

~ . ~ . ~

ثانياً : المساحة .

تدريب ١ ، ص١٩٨

١) $١٢ - ٤\text{س} = ٠ \Leftarrow ١٢ = ٤\text{س} \Leftarrow \text{س} = ٣ \notin [١، ٢]$

$$\int_{١}^{٢} (١٢ - ٤\text{س})\, \text{دس} = \Big[(١٢\text{س} - ٢\text{س}^{٢})\Big]_{١}^{٢}$$

$$= (٢٤ - ٨) - (١٢ - ٢)$$

$$= ١٦ - ١٠ = ٦$$

المساحة المطلوبة $= \int_{١}^{٢} |\text{ه}(\text{س})| \,.\, \text{دس} = ٦$ وحدات مربعة .

٢) $٣\text{س}^{٢} - ١٢\text{س} = ٠ \Leftarrow ٣\text{س}(\text{س} - ٤) = ٠$

$\text{س} = ٠ \in [٠، ٢]$

$\text{س} = ٤ \notin [٠، ٢]$

$$\int_{٠}^{٢} (٣\text{س}^{٢} - ١٢\text{س})\, \text{دس} = \Big[(\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{٢})\Big]_{٠}^{٢}$$

$$= (٨ - ٢٤) - (٠)$$

$$= -١٦$$

المساحة المطلوبة $= \int_{٠}^{٢} |\text{ه}(\text{س})| \,.\, \text{دس} = ١٦$ وحدة مربعة .

٣) $٦ - ٢\text{س} = ٠ \Leftarrow ٦ = ٢\text{س} \Leftarrow \text{س} = ٣ \in [١، ٤]$

$$\int_{١}^{٣} (٦ - ٢\text{س})\, \text{دس} = \Big[(٦\text{س} - \text{س}^{٢})\Big]_{١}^{٣}$$

$$= (١٨ - ٩) - (٦ - ١)$$

$$= ٩ - ٥ = ٤$$

$$\int_{٣}^{٤} (٦ - ٢\text{س})\, \text{دس} = \Big[(٦\text{س} - \text{س}^{٢})\Big]_{٣}^{٤}$$

$$= (٢٤ - ١٦) - (١٨ - ٩)$$

$$= ٨ - ٩ = -١$$

المساحة المطلوبة $= \int_{١}^{٤} |\text{ه}(\text{س})|\, \text{دس} = \int_{١}^{٣} |\text{ه}(\text{س})|\, \text{دس} + \int_{٣}^{٤} |\text{ه}(\text{س})|\, \text{دس}$

$= ٤ + ١ = ٥$ وحدات مربعة .

- تدريب ٢ ، ص١٩٨ :

$س^{٢} - ٢س - ٣ = ٠ \Leftarrow (س - ٣)(س + ١) = ٠$

$س = ٣ \quad ، \quad س = -١$

$$\int_{-١}^{٣} (س^{٢} - ٢س - ٣) \, ءس = \left[\left(\frac{س^{٣}}{٣} - س^{٢} - ٣س\right)\right]_{-١}^{٣}$$

$$= (\cancel{٩} - \cancel{٩} - ٩) - (-\frac{١}{٣} - ١ + ٣)$$

$$= -٩ + \frac{١}{٣} + ١ - ٣$$

$$= -١١ + \frac{١}{٣} = \frac{-٣٣ + ١}{٣}$$

$$= \frac{-٣٢}{٣} \, .$$

المساحة المطلوبة $= \int_{-١}^{٣} |ق(س)| \, ءس = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة .

- تدريب ٣ ، ص١٩٩ :

١) $\int_{أ}^{ب} ق(س) \, . \, ءس = -م_{١} = -٨$ ، لأن المساحة $م_{١}$ تقع تحت محور السينات

٢) $\int_{ب}^{جـ} ق(س) \, ءس = م_{٢} = ٥$ ، لأن المساحة $م_{٢}$ تقع فوق محور السينات .

٣) $\int_{أ}^{جـ} ق(س) \, . \, ءس = \int_{أ}^{ب} ق(س) \, . \, ءس + \int_{ب}^{جـ} ق(س) \, . \, ءس$

$= -٨ + ٥ = -٣ \, .$

٤) $م_{١} + م_{٢} = \int_{أ}^{ب} |ق(س)| \, ءس + \int_{ب}^{جـ} |ق(س)| \, ءس$

$= ٨ + ٥ = ١٣$ وحدة مربعة .

* * *

الأسئلة ، ص٢١١ :

١- أ) $\int_{-١}^{٢} ١٢ \, \text{د س} = ١٢\text{س} \Big]_{-١}^{٢}$

$= ١٢ \times ٢ - ١٢ \times -١ = ٣٦$

المساحة المطلوبة $= \int_{-١}^{٢} |\text{ق(س)}| \, \text{د س} = ٣٦$ وحدة مربعة .

ب) $٥ - ٢\text{س} = ٠ \Leftarrow ٥ = ٢\text{س}$

$\text{س} = \frac{٥}{٢} \in [-٢ ، ٢]$

$\int_{-٢}^{\frac{٥}{٢}} (٥ - ٢\text{س}) \, \text{د س} = (٥\text{س} - \text{س}^٢) \Big]_{-٢}^{\frac{٥}{٢}}$

$= \left(\frac{٢٥}{٢} - \frac{٢٥}{٤}\right) - (-١٠ - ٤)$

$= \frac{٢٥}{٤} + ١٤ = \frac{٨١}{٤}$

$\int_{\frac{٥}{٢}}^{٢} (٥ - ٢\text{س}) \, \text{د س} = (٥\text{س} - \text{س}^٢) \Big]_{\frac{٥}{٢}}^{٢}$

$= (١٠ - ٤) - \left(\frac{٢٥}{٢} - \frac{٢٥}{٤}\right)$

$= ٦ - \frac{٢٥}{٤} = \frac{-١}{٤}$.

المساحة المطلوبة $= \int_{-٢}^{٢} |\text{ق(س)}| \, \text{د س}$

$= \frac{٨١}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{٨٢}{٤} = \frac{٤١}{٢}$ وحدة مربعة .

جـ) $٣\text{س}^٢ - ٣ = ٠ \Leftarrow ٣\text{س}^٢ = ٣ \Leftarrow \text{س}^٢ = ١$

$\Leftarrow \text{س} = ١ ، -١ \notin [-٤ ، -٢]$.

$\int_{-٤}^{-٢} (٣\text{س}^٢ - ٣) \, \text{د س} = (\text{س}^٣ - ٣\text{س}) \Big]_{-٤}^{-٢}$

$= (-٨ + ٦) - (-٦٤ + ١٢)$

$= -٢ + ٥٢ = ٥٠$

المساحة المطلوبة $= \int_{-٤}^{-٢} |\text{ق(س)}| \, \text{د س} = ٥٠$ وحدة مربعة .

٢- أ) $٦ - ٦\text{س}^٢ = ٠ \Rightarrow ٦ = ٦\text{س}^٢ \Rightarrow \text{س}^٢ = ١$

$\Rightarrow \text{س} = -١ ، ١$

$-١ \in [-٢ ، ٠] ، ١ \notin [-٢ ، ٠]$

$\int_{-٢}^{-١} (٦ - ٦\text{س}^٢)\, \text{ء س} = \Big[(٦\text{س} - ٢\text{س}^٣)\Big]_{-٢}^{-١}$

$= (-٦ + ٢) - (-١٢ + ١٦)$

$= -٤ \quad - ٤ = -٨$

$\int_{-١}^{٠} (٦ - ٦\text{س}^٢)\, \text{ء س} = \Big[(٦\text{س} - ٢\text{س}^٣)\Big]_{-١}^{٠}$

$= (٠) - (-٦ + ٢)$

$= ٠ \quad - {}^{-}٤ = ٤$

المساحة المطلوبة $= \int_{-٢}^{٠} |\text{ق(س)}|\, \text{ء س} = ٨ + ٤ = ١٢$ وحدة مربعة.

ب) $٤\text{س}^٣ = ٠ \Rightarrow \text{س} = ٠ \in [-١ ، ١]$.

$\int_{-١}^{٠} ٤\text{س}^٣\, \text{ء س} = \Big[\text{س}^٤\Big]_{-١}^{٠} = ٠ - ١ = -١$

$\int_{٠}^{١} ٤\text{س}^٣\, \text{ء س} = \Big[\text{س}^٤\Big]_{٠}^{١} = ١ - ٠ = ١$.

المساحة المطلوبة $= \int_{-١}^{١} |\text{ق(س)}|\, \text{ء س} = ١ + ١ = ٢$ وحدة مربعة.

حـ) $٣\text{س}^٢ - ٤٨ = ٠ \Rightarrow ٣\text{س}^٢ = ٤٨$

$\text{س}^٢ = ١٦$

$\text{س} = ٤ ، -٤$

$٤ \in [٣ ، ٥] ، -٤ \notin [٣ ، ٥]$

$\int_{٣}^{٤} (٣\text{س}^٢ - ٤٨)\, \text{ء س} = \Big[(\text{س}^٣ - ٤٨\text{س})\Big]_{٣}^{٤}$

$= (٦٤ - ١٩٢) - (٢٧ - ١٤٤)$

$= -١٢٨ + ١١٧ = -١١$

$\int_{٤}^{٥} (٣\text{س}^٢ - ٤٨)\, \text{ء س} = \Big[(\text{س}^٣ - ٤٨\text{س})\Big]_{٤}^{٥}$

$= (١٢٥ - ٢٤٠) - (٦٤ - ١٩٢)$

$= -١١٥ + ١٢٨ = ١٣$

المساحة المطلوبة $= \int_{٣}^{٥} |\text{ق(س)}|\, \text{ء س} = ١١ + ١٣ = ٢٤$ وحدة مربعة.

د) $-\text{س}^{٢} - ٤ = ٠ \Rightarrow \text{س}^{٢} = -٤$

⇐ لا توجد قيم حقيقية تحقق $\text{س}^{٢} = -٤$

$$\int_{-١}^{١} (-\text{س}^{٢} - ٤)\,\text{ء س} = \left[\left(\frac{-\text{س}^{٣}}{٣} - ٤\text{س}\right)\right]_{-١}^{١}$$

$$= \left(\frac{-١}{٣} - ٤\right) - \left(\frac{+١}{٣} - -٤\right)$$

$$= \frac{-١٣}{٣} - \frac{١٣}{٣} = \frac{-٢٦}{٣} .$$

المساحة المطلوبة $= \int_{-١}^{١} |\text{ق(س)}|\,\text{ء س} = \frac{٢٦}{٣}$ وحدة مربعة .

٣- أ) $٤\text{س} - \text{س}^{٢} = ٠ \Rightarrow \text{س}(٤ - \text{س}) = ٠$

$\text{س} = ٠ \text{ ، } ٤$

$$\int_{٠}^{٤} (٤\text{س} - \text{س}^{٢})\,\text{ء س} = \left[\left(٢\text{س}^{٢} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣}\right)\right]_{٠}^{٤}$$

$$= \left(٣٢ - \frac{٦٤}{٣}\right) - (٠)$$

$$= \frac{٩٦ - ٦٤}{٣} = \frac{٣٢}{٣}$$

المساحة المطلوبة $= \int_{٠}^{٤} |\text{ق(س)}|\,\text{ء س} = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة .

ب) $٤\text{س}^{٣} - ١٢\text{س}^{٢} = ٠ \Rightarrow ٤\text{س}^{٢}(\text{س} - ٣) = ٠$

$\Rightarrow \text{س} = ٠ \text{ ، } \text{س} = ٣ .$

$$\int_{٠}^{٣} (٤\text{س}^{٣} - ١٢\text{س}^{٢})\,\text{ء س} = \left[(\text{س}^{٤} - ٤\text{س}^{٣})\right]_{٠}^{٣}$$

$$= (٨١ - ١٠٨) - (٠)$$

$$= -٢٧$$

المساحة المطلوبة $= \int_{٠}^{٣} |\text{ق(س)}|\,\text{ء س} = ٢٧$ وحدة مربعة .

٤- $\int_{-٥}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{ء س} = \int_{-٥}^{٠} \text{ق(س)}\,\text{ء س} + \int_{٠}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{ء س}$

$$= \text{م}_{١} + -\text{م}_{٢} = ١٣ + -٣ = ١٠$$

م١ تقع فوق محور السينات   م٢ تقع تحت محور السينات .

٥- مساحة النافذة = $\int_{-١}^{١} (٢ - س^{٢})\, ء س$

$= \left[\left(٢س - \frac{س^{٣}}{٣}\right)\right]_{-١}^{١}$

$= \left(٢ - \frac{١}{٣}\right) - \left(-٢ + \frac{١}{٣}\right)$

$= \frac{٥}{٣} - \frac{-٥}{٣} = \frac{١٠}{٣}$ م^{٢} .

الكلفة الكلية = المساحة × كلفة المتر المربع

$= \frac{١٠}{٣} \times ٥ = \frac{٥٠}{٣}$ ديناراً .

~ ، ~ ، ~

الفصل الثالث : الاقترانان : اللوغاريتمي الطبيعي والأسي الطبيعي وتطبيقاتهما .

أولاً : الاقترانان : اللوغاريتمي الطبيعي والأسي الطبيعي .

تدريب ١ ، ص٢٠٣ :

ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ م(س) = ق(س)

نفرض أن ع = م(س)

ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ ع ، ع = م(س) .

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{1}{\text{ع}}$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ = مَ(س) .

حسب قاعدة السلسلة : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

قَ(س) = $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{ع}} \times$ مَ(س)

قَ(س) = $\frac{\text{مَ(س)}}{\text{م(س)}}$ # .

تدريب ٢ ، ص٢٠٤ :

١) قَ(س) = $\frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ = − ظاس

٢) قَ(س) = $\frac{\frac{-2}{\text{س}^2}}{\frac{2}{\text{س}}} = \frac{-2}{\text{س}^2} \times \frac{\text{س}}{2} = \frac{-1}{\text{س}}$ ، س > ٠ .

٣) قَ(س) = $\frac{3\text{س}^2}{\text{س}^3 + 8}$

تدريب ٣ ، ص٢٠٤ :

قَ(س) = $\frac{\text{أ}}{\text{أس} + 3}$

قَ(−٢) = ١ ⇐ $\frac{\text{أ}}{-2\text{أ} + 3}$ = ١

أ = −٢أ + ٣

٣أ = ٣

أ = ١

تدريب ٤ ، ص ٢٠٤ :

١) عندما $س > ١$ ، $|س| = س$

$ق(س) = لو_{هـ} س$

$ق'(س) = \frac{١}{س}$

٢) عندما $س < ١$ ، $|س| = -س$

$ق(س) = لو_{هـ} (-س)$

$ق'(س) = \frac{-١}{-س} = \frac{١}{س}$.

$\therefore$ $ق'(س) = \frac{١}{س}$ حيث $ق(س) = لو_{هـ} |س|$ ، $س \neq$.

تدريب ٥ ، ص ٢٠٥ :

١) $\int -٣ \frac{١}{س} \, دس = -٣ لو_{هـ} |س| + ج$.

٢) نفرض أن $ص = س^{٣} - ٢س + ١$

$\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} - ٢$

$دص = (٣س^{٢} - ٢) \, دس$

$$\int ٢ (٣س^{٢} - ٢)(س^{٣} - ٢س + ١)^{-١} \, دس = \int ٢ \, ص^{-١} \, دص$$

$= ٢ لو_{هـ} |ص| + ج$

$= ٢ لو_{هـ} |س^{٣} - ٢س + ١| + ج$.

تدريب ٦ ، ص ٢٠٦ :

$ق(س) = ص = هـ^{ل(س)}$ ، نفرض أن $ع = ل(س)$.

$ص = هـ^{ع}$ ، $ع = ل(س)$

$\frac{دص}{دع} = هـ^{ع}$ ، $\frac{دع}{دس} = ل'(س)$.

حسب قاعدة السلسلة : $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

$ق'(س) = \frac{دص}{دس} = هـ^{ع} \times ل'(س) = ل'(س) \times هـ^{ل(س)}$. #

تدريب ٧ ، ص ٢٠٧ :

١) $\text{صَ} = -٢\text{س} \times \text{هـ}^{٣-\text{س}^{٢}}$.

٢) $\text{صَ} = -٢\,\text{جا}٢\text{س} \times \text{هـ}^{\text{جتا}٢\text{س}}$

٣) $\text{صَ} = \text{هـ}^{\text{س}} \times \frac{١}{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \text{هـ}^{\text{س}}$ حسب قاعدة مشتقة ضرب اقترانين .

٤) $\text{صَ} = \frac{(\text{س}^{٢}+١)(٣\,\text{هـ}^{٣\text{س}}) - (\text{هـ}^{٣\text{س}})(٢\text{س})}{(\text{س}^{٢}+١)^{٢}}$

$\text{صَ} = \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}}(٣\text{س}^{٢}+٣-٢\text{س})}{(\text{س}^{٢}+١)^{٢}}$ حسب مشتقة قسمة اقترانين .

تدريب ٨ ، ص ٢٠٧ :

$\int \text{هـ}^{\text{أ}\text{س}+\text{ب}} .\, \text{دس}$ ، نفرض أنه $\text{ص} = \text{أ}\text{س}+\text{ب}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{أ}$

$\text{دص} = \text{أ} .\, \text{دس}$

$\int \text{هـ}^{\text{أ}\text{س}+\text{ب}} .\, \text{دس} = \int \text{هـ}^{\text{ص}} .\, \frac{\text{دص}}{\text{أ}}$

$= \frac{١}{\text{أ}} \times \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{هـ}^{\text{أ}\text{س}+\text{ب}}}{\text{أ}} + \text{جـ}$ ، $\text{أ} \neq ٠$.

تدريب ٩ ، ص ٢٠٨ :

١) $\int \frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{س}} .\, \text{دس} = \frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

٢) $\int \frac{١}{٣}\text{هـ}^{١-٦\text{س}} .\, \text{دس} = \frac{١}{٣} \times \frac{\text{هـ}^{١-٦\text{س}}}{-٦} + \text{جـ}$

$= \frac{-١}{١٨}\text{هـ}^{١-٦\text{س}} + \text{جـ}$.

٣) نفرض أن $ص = س^{٣} + ٢س - ١$

$$\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} + ٢$$

$$دص = (٣س^{٢} + ٢)\ دس$$

$$\int (٣س^{٢} + ٢)\ هـ^{س^{٣} + ٢س - ١} .\ دس = \int هـ^{ص} .\ دص$$

$$= هـ^{ص} + ث$$

$$= (هـ)^{س^{٣} + ٢س - ١} + ث .$$

٤) $\int ٦ \times هـ^{-١ + ٢س} .\ دس = ٦ \times \frac{هـ^{٢س - ١}}{٢} + ث$

$$= ٣\ هـ^{٢س - ١} + ث .$$

~ · ~ · ~

الأسئلة ، ص ٢٠٩ :

١- أ) $قَ(س) = \frac{-١}{س^٢} + \frac{١}{س} + ١٤ هـ^{٧س} + صفر$.

ب) $قَ(س) = \frac{٣}{س} + ٤ هـ^{٣-٢س} - ٢س$.

جـ) $قَ(س) = جتاس \times هـ^{جاس} - ٢ \times \frac{-جاس}{جتاس}$

$= جتاس . هـ^{جاس} + \frac{٢ جاس}{جتاس}$

٢- أ) $٢ هـ^{س} - لو_{هـ}|س| + س^٣ + جـ$.

ب) $٢٤ \times \frac{هـ^{١+٢س}}{٢} + جـ = ١٢ هـ^{١+٢س} + جـ$.

جـ) نفرض أن $ص = ١ - س^٢$

$\frac{دص}{دس} = -٢س$

$دص = -٢س دس$

$\int ٢س هـ^{١-س^٢} . دس = \int - هـ^{ص} . دص$

$= - هـ^{ص} + جـ$

$= - هـ^{١-س^٢} + جـ$.

د) $٥ لو_{هـ}|س| - \cancel{٣}^{١} \times \frac{هـ^{٣س}}{\cancel{٣}_{١}} - ٤س + جـ$

$= ٥ لو_{هـ}|س| - هـ^{٣س} - ٤س + جـ$.

هـ) نفرض أن $ص = س^٢ + ٤$

$\frac{دص}{دس} = ٢س$

$دص = ٢س دس$

$\int \frac{٨س}{س^٢+٤} دس = \int \frac{٤}{ص} دص = ٤ لو_{هـ}|ص| + جـ$

$= ٤ لو_{هـ}(س^٢+٤) + جـ$.

٣- ق(س) = ∫ قَ(س) . ءس

= ∫ (٢ هـ^{س} + ٢س) ءس

= ٢ هـ^{س} + س^{٢} + جـ

(٠، ٤) ⟸ ق(٠) = ٤ ⟸ ٤ = ٢ هـ^{صفر} + صفر + جـ

٤ = ٢×١ + جـ

جـ = ٢

∴ ق(س) = ٢ هـ^{س} + س^{٢} + ٢ .

٤- فَ(ن) = ∫ ع(ن) . ءن لأنَّ ع(ن) = فَ(ن) .

ف(ن) = ∫ (هـ$^{ن+١}$ + $\frac{٨}{ن}$) ءن

ف(ن) = $\frac{هـ^{ن+١}}{١}$ + ٨ لوهـ |ن| + جـ ، لكن ن > ٠ .

ف(ن) = هـ$^{ن+١}$ + ٨ لوهـ ن + جـ ، حيث جـ ثابت .

~ . ~ . ~

ثانياً : النمو والاضمحلال :

تدريب ١ ، ص٢١٢ :

$\text{ص} = \text{ع}(\text{ن}) = \text{ع}_{.} \times \text{هـ}^{\text{م ن}}$

$\text{ع}_{.} = ١٠٠٠٠$ ، $\text{م} = ٤\% = \frac{٤}{١٠٠}$ ، $\text{ن} = ٢٥$

$\text{ع}(٢٥) = ١٠٠٠٠ \times \text{هـ}^{\frac{٤}{١٠٠} \times ٢٥}$

$= ١٠٠٠٠ \times \text{هـ}^{١}$

$= ١٠٠٠٠ \times ٢{,}٧ = ٢٧٠٠٠{,}٠$

$= ٢٧٠٠٠$ دينار .

تدريب ٢ ، ص٢١٢ :

$\text{م} = -٥\% = \frac{-٥}{١٠٠}$

$\text{ن} = ٤٠$

$\text{ع}_{.} = ٨٠٠٠٠$

$\text{ص} = \text{ع}(\text{ن}) = \text{ع}_{.} \times \text{هـ}^{\text{م ن}}$

$\text{ع}(٤٠) = ٨٠٠٠٠ \times \text{هـ}^{\frac{-٥}{١٠٠} \times ٤٠}$

$= ٨٠٠٠٠ \times \text{هـ}^{-٢}$

$= \frac{٨٠٠٠٠}{\text{هـ}^{٢}} = \frac{٨٠٠٠٠}{(٢{,}٧)^{٢}}$

$= \frac{٨٠٠٠٠}{٧{,}٢٩}$ ديناراً .

~ . ~ . ~

- الأسئلة، ص٢١٤

١- م = ٢٠٠٪ = $\frac{٢٠٠}{١٠٠}$ = ٢

ن = $\frac{١}{٢}$ ساعة.

ع٠ = ٥٠٠ ٠٠٠

ص = ع(ن) = ع٠ × هـ$^{م ن}$

ع($\frac{١}{٢}$) = ٥٠٠ ٠٠٠ × هـ$^{٢ \times \frac{١}{٢}}$

= ٥٠٠ ٠٠٠ × (٢,٧)^{١} = ١٣٥٠ ٠٠٠,٠

= (١ ٣٥٠ ٠٠٠) عدد البكتيريا بعد نصف ساعة.

٢- م = −٨٪ = $\frac{-٨}{١٠٠}$ ، ع٠ = ١٢٥٨٠ ، ن = ٢٥

ع(٢٥) = ١٢ ٥٨٠ × (٢,٧)$^{\frac{-٨}{١٠٠} \times ٢٥}$ = ١٢ ٥٨٠ × هـ$^{-٢}$

= $\frac{١٢ ٥٨٠}{(٢,٧)^{٢}}$ = $\frac{١٢ ٥٨٠}{٧,٢٩}$

= $\frac{١٢ ٥٨٠}{٧,٢٩}$ دينارًا.

٣- ع٠ = ١٠ ، ع($\frac{١}{٤}$) = ٥ ⟸ ع($\frac{١}{٤}$) = ع٠ × هـ$^{م ن}$

$\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١٠ \times هـ^{\frac{١}{٤} م}}{١٠}$

هـ$^{\frac{١}{٤} م}$ = $\frac{١}{٢}$.

ن = ١$\frac{١}{٤}$ ساعة = $\frac{٥}{٤}$

ع($\frac{٥}{٤}$) = ع٠ × هـ$^{م ن}$ = ١٠ × هـ$^{م \times \frac{٥}{٤}}$

= ١٠ × (هـ$^{\frac{م}{٤}}$)^{٥}

= ١٠ × ($\frac{١}{٢}$)^{٥} = $\frac{١٠}{٣٢}$ = $\frac{٥}{١٦}$ كغ.

٤- م = ٨,٠٪ = $\frac{٨}{١٠٠٠}$ ، ع(١) = ٦٠٠ ٠٠٠ عام ٢٠١٠م.

عام ٢١٣٥م ، ن = ٢١٣٥ − ٢٠١٠ = ١٢٥

ع(ن) = ع٠ × هـ$^{م ن}$

ع(١٢٥) = ٦٠٠ ٠٠٠ × (٢,٧)$^{\frac{٨}{١٠٠٠} \times ١٢٥}$

= ٦٠٠ ٠٠٠ × (٢,٧)^{١} = ١ ٦٢٠ ٠٠٠,٠ نسمة.

~ . ~ . ~

أسئلة الوحدة ، ص ٢١٥-٢١٧

١- أ) $\frac{دص}{دس} = \frac{٤س - ١}{س^{٢} + ٥}$

ب) $\frac{دص}{دس} =$ صفرًا لأن ص = ثابتًا (تكامل محدود)

جـ) $\frac{دص}{دس} =$ ظا (٤+س)

د) $\frac{دص}{دس} =$ صفرًا .

هـ) $\frac{دص}{دس} = \frac{٢س}{س^{٢}+٦} - ٣ هـ^{٢س-١} + ٣س^{٢}$.

و) $\frac{دص}{دس} =$ جا س × $\frac{١}{س}$ + لوهـ س × جتا س .

٢- $ق(س) = ٤س × هـ^{٢س^{٢}-١}$

$ق'(س) = ٤س × ٤س هـ^{٢س^{٢}-١} + هـ^{٢س^{٢}-١} × ٤$

$ق'(س) = ٤ هـ^{٢س^{٢}-١} (٤س^{٢} + ١)$

٣- $ق'(س) = س (٢ - س^{٢})$

$ق'(٢) = ٢ (٢ - ٤) = -٤$

٤- أ) $\int (س^{٢} - ٧س) × س^{-\frac{١}{٣}} دس = \int (س^{\frac{٥}{٣}} - ٧س^{\frac{٢}{٣}}) دس$

$= \frac{٣}{٨} س^{\frac{٨}{٣}} - ٧ × \frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} + جـ$

$= \frac{٣}{٨} \sqrt[٣]{س^{٨}} - \frac{٢١}{٥} \sqrt[٣]{س^{٥}} + جـ$.

ب) $\int ٦س^{٥} دس = س^{٦} + جـ$.

جـ) $\int (س^{٢} - ٤)\, د س = \frac{١}{٣} س^{٣} - ٤ س + ث$.

د) $\frac{(٣ س + ٢)^{٣}}{٣ \times ٣} + ث = \frac{(٣ س + ٢)^{٣}}{٩} + ث$.

هـ) نفرض أن $ص = س^{٢} - س$

$\frac{د ص}{د س} = ٢ س - ١$

$د ص = (٢ س - ١)\, د س$

$\int (٢ س - ١)\, ص^{٥}\, د س = \int ص^{٥}\, د ص$

$= \frac{ص^{٦}}{٦} + ث$

$= \frac{(س^{٢} - س)^{٦}}{٦} + ث$.

و) نفرض أن $ص = س^{٣} + ١$

$\frac{د ص}{د س} = ٣ س^{٢}$

$د ص = ٣ س^{٢}\, د ص$

$\int س^{٢} (س^{٣} + ١)^{-\frac{١}{٢}}\, د س = \int ص^{-\frac{١}{٢}} \times \frac{د ص}{٣}$

$= \frac{١}{٣} \times ٢\, ص^{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{٢}{٣} \sqrt{س^{٣} + ١} + ث$.

ز) $٢ \text{لو}_{هـ} |س| - هـ^{س} + ٣ س + ث$.

ح) نفرض أن $ص = س^{٤} + ٣$

$\frac{د ص}{د س} = ٤ س^{٣}$

$د ص = ٤ س^{٣}\, د س$

$\int \frac{١٢ س^{٣}}{س^{٤} + ٣}\, د س = \int \frac{٣\, د ص}{ص} = ٣ \text{لو}_{هـ} |ص| + ث$

$= ٣ \text{لو}_{هـ} |س^{٤} + ٣| + ث$

$= ٣ \text{لو}_{هـ} (س^{٤} + ٣) + ث$.

ط) نفرض أن $\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٥$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}$

$\text{دص} = ٢\text{س}\ \text{دس}$

$\int ٦\text{س}\ \text{هـ}^{\text{س}^{٢}+٥} .\ \text{دس} = \int ٣\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{دص}$

$= ٣\ \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{ث}$

$= ٣\ \text{هـ}^{\text{س}^{٢}+٥} + \text{ث}$.

ي) نفرض أن $\text{ص} = \text{س}^{٢} + \text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س} + ١$

$\text{دص} = (٢\text{س}+١)\ \text{دس}$

$\int \frac{٢\text{س}+١}{\text{جتا}^{٢}(\text{س}^{٢}+\text{س})}\ \text{دس} = \int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{ص}} \times \text{دص}$

$= \int \text{قا}^{٢}\text{ص} .\ \text{دص} = \text{ظا ص} + \text{ث}$

$= \text{ظا}\ (\text{س}^{٢}+\text{س}) + \text{ث}$.

٥- أ) $\int_{-١}^{-٨} \text{س}^{\frac{-١}{٣}}\ \text{دس} = \frac{٣}{٢} \left[\text{س}^{\frac{٢}{٣}}\right]_{-١}^{-٨} = \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{(-٨)^{٢}} - \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{(-١)^{٢}}$

$= \frac{٣\times٤}{٢} - \frac{٣\times١}{٢} = \frac{٩}{٢}$

ب) $\left[\text{هـ س}\right]_{١}^{٤} = ٤\text{هـ} - ١\text{هـ} = ٣\text{هـ}$.

جـ) $\int_{٤}^{١} (\text{س}^{\frac{-١}{٢}} - \text{س}^{-٢})\ \text{دس} = \left[(٢\text{س}^{\frac{١}{٢}} - \frac{\text{س}^{-١}}{-١})\right]_{٤}^{١}$

$= \left[٢\sqrt{\text{س}}\right]_{٤}^{١} + \left[\frac{١}{\text{س}}\right]_{٤}^{١}$

$= (٢ - ٤) + (\frac{١}{١} - \frac{١}{٤})$

$= -٢ + ١ - \frac{١}{٤} = \frac{-٥}{٤}$.

د) $\int_{-١}^{١} \frac{\cancel{(س+٤)}(س+٣)}{\cancel{س+٤}}\, دس$

$= \left[\left(\frac{س^{٢}}{٢} + ٣س\right)\right]_{-١}^{١} = \left(\cancel{\tfrac{١}{٢}} + ٣\right) - \left(\cancel{\tfrac{١}{٢}} + -٣\right)$

$= ٦$

هـ) $\int \frac{٢}{٢س+١}\, دس$ ، نفرض أن $ص = ٢س + ١$

$\frac{دص}{دس} = ٢$

$دص = ٢\, دس$

$\int \frac{٢}{٢س+١}\, دس = \int \frac{١}{ص}\, دص = لو_{هـ}|ص| + ث$.

$= لو_{هـ}|٢س+١| + ث$.

$\int_{٣}^{٠} \frac{٢\, دس}{٢س+١} = \left[لو_{هـ}|٢س+١|\right]_{٣}^{٠} = لو_{هـ}|١| - لو_{هـ}|٧|$

$= صفر - لو_{هـ} ٧$

$= - لو_{هـ} ٧$.

و) $\int ٤س \,.\, هـ^{س^{٢}} .\, دس$ ، نفرض أن $ص = س^{٢}$

$\frac{دص}{دس} = ٢س$

$دص = ٢س\, دس$

$\int ٤س \,.\, هـ^{س^{٢}} .\, دس = \int ٢\, هـ^{ص}\, دص$

$= ٢\, هـ^{ص} + ث = ٢\, هـ^{س^{٢}} + ث$.

$\int_{١}^{٠} ٤س \,.\, هـ^{س^{٢}} .\, دس = \left[٢\, هـ^{س^{٢}}\right]_{١}^{٠} = ٢هـ^{٠} - ٢هـ^{١} = ٢ - ٢هـ$.

ن) $\int_{٢}^{٦} ١٠(٥س+٦)^{-\frac{١}{٢}}\, دس = \overset{٢}{\cancel{١٠}} \times \left[\frac{(٥س+٦)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢} \times \overset{١}{\cancel{٥}}}\right]_{٢}^{٦}$

$= \left[٤\sqrt{٥س+٦}\right]_{٢}^{٦} = ٤\sqrt{٣٦} - ٤\sqrt{١٦}$

$= ٢٤ - ١٦$

$= ٨$.

٦- $-ن + ٣ = ن^{٢} + ن$

$ن^{٢} + ٢ن - ٣ = ٠ \Leftarrow (ن + ٣)(ن - ١) = ٠$

$ن = -٣ ، ن = ١$

٧- $\int_{-١}^{٥} ق(س)\, دس + \int_{-١}^{٥} ٣\, دس = ٢٠$

$\int_{-١}^{٥} ق(س)\, دس + ([٣س]_{-١}^{٥}) = ٢٠$

$\int_{-١}^{٥} ق(س)\, دس + (١٥ + ٣) = ٢٠ \Leftarrow \int_{-١}^{٥} ق(س)\, دس = ٢$

أ) $\int_{٥}^{-١} ق(س)\, دس = -\int_{-١}^{٥} ق(س)\, دس = -٢$

ب) $\int_{-١}^{١} ق(س)\, دس = \int_{-١}^{٥} ق(س)\, دس + \int_{٥}^{١} ق(س)\, دس$

$= ٢ + -٤ = -٢$

جـ) $\int_{٥}^{١} (٣ق(س))\, دس - [٢س^{٢}]_{٥}^{١}$

$٣ \times -٤ - (٢ - ٥٠) = -١٢ + ٤٨ = ٣٦ .$

٨- أ) $[٢ن س]_{-١}^{٣} = ١٢ \Leftarrow ٦ن + ٢ن = ١٢$

$٨ن = ١٢$

$ن = \frac{١٢}{٨} \Leftarrow ن = \frac{٣}{٢}$

ب) $[(س^{٢} - س)]_{٤}^{ن} = ٠ \Leftarrow (ن^{٢} - ن) - (١٦ - ٤) = ٠$

$ن^{٢} - ن - ١٢ = ٠ \Leftarrow (ن - ٤)(ن + ٣) = ٠$

$ن = ٤ ، ن = -٣$

ح) $\left[\frac{ب س^{٣}}{٣} + ٢س\right]_{٠}^{٣} = -٢١$

$(٩ب + ٦) - (٠) = -٢١ \Leftarrow ٩ب = -٢٧$

$ب = -٣$

د) $\left[س - ٢س^{٢}\right]_{٢}^{ب} = ٥ب \Leftarrow (ب - ٢ب^{٢}) - (٢ - ٨) = ٥ب$

$ب - ٢ب^{٢} + ٦ - ٥ب = ٠$

$٢ب^{٢} + ٤ب - ٦ = ٠$

$ب^{٢} + ٢ب - ٣ = ٠ \Leftarrow (ب + ٣)(ب - ١) = ٠$

$ب = -٣$ ، $ب = ١$

٩- $ق'(س) = ٣س^{٢} + ٥س + ٢$

$ق(س) = \int ق'(س)\, دس = \int (٣س^{٢} + ٥س + ٢)\, دس$

$= س^{٣} + \frac{٥}{٢}س^{٢} + ٢س + ث$.

$(٢ ، -١) \Leftarrow ق(٢) = -١ \Leftarrow -١ = ٨ + ١٠ + ٤ + ث$

$-٢٣ = ث$

$\therefore ق(س) = س^{٣} + \frac{٥}{٢}س^{٢} + ٢س - ٢٣$.

١٠- $٣س^{٢} - ٢٧ = ٠ \Leftarrow س^{٢} = ٩ \Leftarrow س = -٣ ، ٣$

$-٣ \in [-٤ ، ٠]$

$٣ \notin [-٤ ، ٠]$

$\int_{-٤}^{-٣} (٣س^{٢} - ٢٧)\, دس = \left[س^{٣} - ٢٧س\right]_{-٤}^{-٣}$

$= (-٢٧ + ٨١) - (-٦٤ + ١٠٨)$

$= ٥٤ - ٤٤ = ١٠$

$\int_{-٣}^{٠} (٣س^{٢} - ٢٧)\, دس = \left[س^{٣} - ٢٧س\right]_{-٣}^{٠} = ٠ - (-٢٧ + ٨١)$

$= -٥٤$

المساحة المطلوبة $= \int_{-٤}^{٠} |ق(س)|\, دس = ١٠ + ٥٤ = ٦٤$ وحدة مربعة .

١١- ت(ن) = ١٢ن − ١٢ن^{٢} .

أ) ع(ن) = ∫ ت(ن) . ءن = ∫ (١٢ن − ١٢ن^{٢}) ءن

ع(ن) = ٦ن^{٢} − ٤ن^{٣} + ث$_{١}$

لكن ع(٠) = ٣ ⟸ ٣ = ث$_{١}$

ع(ن) = ٦ن^{٢} − ٤ن^{٣} + ٣ .

ع(٤) = ٦ × ١٦ − ٤ × ٦٤ + ٣

= ٩٦ − ٢٥٦ + ٣ = − ١٥٧ م/ث .

ب) ف(ن) = ∫ ع(ن) . ءن = ∫ (٦ن^{٢} − ٤ن^{٣} + ٣) ءن

ف(ن) = ٢ن^{٣} − ن^{٤} + ٣ن + ث$_{٢}$.

ف(٠) = ٢ ⟸ ٢ = ث$_{٢}$

ف(ن) = ٢ن^{٣} − ن^{٤} + ٣ن + ٢

ف(٢) = ٢ × ٨ − ١٦ + ٦ + ٢ = ٨ م .

١٢- أ = ٢,٥٪ = $\frac{٢٥}{١٠٠٠}$

ع$_{٠}$ = ٣٠٠٠

ن = ٨٠

ص = ع(ن) = ع$_{٠}$ × هـ^{أن}

ع(٨٠) = ٣٠٠٠ × (٢,٧)$^{\frac{٢٥}{١٠٠٠} × ٨٠}$

= ٣٠٠٠ × (٢,٧)^{١} = ٨١٠٠,٠٠

= ٨١٠٠ دينار .

~ . ~ . ~

حل أسئلة الوحدة الخامسة (الإحصاء والاحتمالات) الفرع الأدبي

الفصل الأول: طرائق العد

أولا: مبدأ العد

تدريب١: عدد الخيارات = ٨

تدريب٢: عدد الخيارات = ٢٤ وبذلك لن تكفيه الخيارات لمدة شهر

تدريب٣: أ) ٢٧ طريقة ب) ٦ طرق

تدريب٤: ٦!

تدريب٥: ١) ن=٥ ٢) ن=٢ ٣) ن=٢ ٤) ن=٥

س١: عدد الطرق=١٠×٣٠×٩×٢٩ طريقة

س٢: عدد الطرق=٢٤ طريقة

س٣: عدد الطرق = ٩×٩×٩×٢٨×٢٧ طريقة

س٤: أ) ٧٢٠ ب) ١٢٨ جـ)٣ د)٢٥٢

س٥: أ) ن=٤ ب) ن= ٥ ج) (٣ن – ١)! = ٢ ومنه ن=١

ثانيا: التباديل

تدريب١: ١) ل(٥ ، ٢) = ٢٠ ٢) ٦×٥×٤×٣ + ٧×٦×٥×٤×٣ + ٢

تدريب٢: ل(٢٠ ، ٣) = ٢٠×١٩× ١٨

تدريب٣: ١) ١٦٨٠= ٨×٧×٦×٥ عدد الاعداد ٤ ، ومنه ر=٤

٢) بحل المعادلة ينتج ل(٤ ، ر) = ٢٤ ومنه ٢٤=٤×٣×٢ إذن ر=٣ أو ٢٤=٤×٣×٢×١ ومنه ر=٤

س١: ل(٩ ، ٥) = ٩×٨×٧×٦×٥

س٢: ل(٩ ، ٣) = ٩×٨×٧ = ٥٠٤ طريقة

س٣: أ) ٨×٧×٦ ب) ١٣×١٢×١١×١٠×٩×٨×٧×٦×٥×٤ جـ) ٢٠×١٩×١٨ د) ١

س٤: أ) ل(١٧ ، ٥) ب) ل(ك ، ٣)

س٥: أ) ن= ١٠ (ابحث عن ٣ أعداد متتالية حاصل ضربها ٧٢٠)

ب) ر=٤ (لان ٣٦٠ =٦×٥×٤×٣ ، عدد الأعداد ٤)

جـ) ن(ن-١)(ن-٢) = ٩ ن(ن-١) ومنه ن-٢=٩ ومنه ن=١١

س٦: عدد الكلمات = ل(٥ ، ٣) = ٥×٤×٣

ثالثا: التوافيق

تدريب١: ١) ٣٦ ٢) ٥٦ ٣) ١٠

تدريب٢: ١) الفريق الطبي من طبيبين على الأكثر = طبيبين و٣ممرضين + طبيب و٤ ممرضين+ ٥ممرضين

= ٢٠٠ + ٧٥ + ٦

٢) عدد الطرق = ٥×٤×(توافيق ٦ ، ٣) = ٥×٤× ٢٠ = ٤٠٠ طريقة

تدريب٣: ١) س=٣ أو س=١ ٢) س= ٥+٧=١٢

س١: أ) (١٠٠×٩٩×٩٨)÷(٣×٢) ب) ١ جـ) ١ د)٤

س٢: عدد الطرق= ٤٥ طريقة

س٣: أ) ٣×٥ + ١ = ١٦ طريقة ب) ١٠ طرق جـ) ٣×(توافيق ٧، ٢) = ٦٣ طريقة

س٤: أ) ٢س=١ ومنه س=٠,٥ أو ٢س=٢ ومنه س=١

ب) س= ٥+٢١ = ٢٦

الفصل الثاني:

أولا: المتغير العشوائي المنفصل وتوزيع ذي الحدين

تدريب١: ١) ع = ٠ ، ١، ٢

٢)

ع	٠	١	٢
ل(ع)	٤/١	٤/٢	٤/١

٣) بما أن ٤/١ + ٢/ ٤ + ٤/١ =١ فإن ل هو اقتران احتمال للمتغير العشوائي ع.

تدريب٢: قيمة ٢ب = ١- ٠,٦ ومنه ب=٠,٢

تدريب٣: ١) ٦×(٠,٧)^{٥}×(٠,٣)

٢) ل(س=٤) + ل(س=٥) + ل(س=٦) = ١٥×(٠,٧)^{٤}×(٠,٣)^{٢} + ٦×(٠,٧)^{٥}×(٠,٣) + ١×(٠,٧)^{٦}

٣) ل(س=٢) + ل(س=١) +ل(س=٠) = ١٥×(٠,٧)^{٢}×(٠,٣)^{٤} + ٦×(٠,٧) ×(٠,٣)^{٥} + ١×(٠,٣)^{٦}

تدريب٤:

ل(س ≤ ٣) = ل(س=٣)+ ل(س=٤) + ل(س=٥) + ل(س=٦) + ل(س=٧) علما أن ن=٧ ر=٠،٦ ١ - ر= ٠,٤

ويمكن حل السؤال بطريقة اخرى

ل(نجاح غرس ٣ شتلات على الأقل) = ١ – ل(س ≤ ٢)

س١: أ) س= ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢

ب)

س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
ل(س)	٣٦/١	٣٦/٢	٣٦ /٣	٣٦/٤	٣٦/٥	٣٦/٦	٣٦/٥	٣٦/٤	٣٦/٣	٣٦/٢	٣٦/١

جـ) بما أن مجموع ل(س) =١ فهو اقتران احتمال.

س٢: قيمة أ = - ٠,٦

س٣: أ) ل(س=٢) = ٦×(٠,٦)^{٢}×(٠,٤)^{٢}

ب) ل(س=٤) = ١×(٠,٦)^{٤}×(٠,٤)^{٠} = (٠,٦)^{٤}

جـ) ل(س≤١) = ل(س=١) + ل(س=٠) = ٤×(٠,٦)^{١}×(٠,٤)^{٣} + ١×(٠,٤)^{٤}

س٤: بما أن السحب مع الارجاع فالتجربة تتبع تورزيع ذي الحدين

س	٠	١	٢	٣	٤
ل(س)	٤٠٩٦ /٦٢٥	٤٠٩٦ /١٥٠٠	٤٠٩٦ /١٣٥٠	٤٠٩٦ /٥٤٠	٤٠٩٦ /٨١

حيث ن= ٤ ، أ = ٨/٣ (احتمال الكرة المسحوبة حمراء)

ل(س=٠) = ١×(٨/٣)^{٠}×(٨/٥)^{٤} = ٤٠٩٦ /٦٢٥

ل(س=١) = ٤×(٨/٣)^{١}×(٨/٥)^{٣} = ٤٠٩٦ /١٥٠٠

ثانيا: العلامة المعيارية

تدريب١: العلامة المعيارية لكتلة الطالب = - ٠,٥

تدريب٢: المتوسط الحسابي = ٦٨

تدريب٣: المتوسط الحسابي = ٨٠ ، والنحراف المعياري = ٤

س١: العلامة المعيارية للطالب ساهر=٤ ، والعلامة المعيارية للطالب مهند = -٢

س٢: أ) ١٧٢ سم ب) ١٥١ سم

س٣: المتوسط الحسابي = ٤

س٤: المتوسط الحسابي = ٢٢ ، الانحراف المعياري= ٣/١٠

ثالثا: التوزيع الطبيعي

تدريب١:١) ٠,٩٩١٨ ٢) ٠,٩٩٧٨ ٣) ٠,١٢٧١ ٤) ٠,٨٥١١

تدريب٢: ١) ٠,٩٤٥٢ ٢) ٠,٥٦٧٠

تدريب٣: ل(س ≤ ٦٠) = ل(ز≤ -١) = ٠,٨٤١٣ = نسبة النجاح ، ومنه عدد الناجحين ٨٤١٣ طالب

س١: أ) ٠,٨٨٤٩ ب) ٠,٩٩٦٢ جـ) ٠,٨٩٨٠ د) ٠,٠١٦٢ هـ) ٠,٧٤١٤

س٢: أ) ٠,٢١١٩ ب) ٠,٠٥٤٨

س٣: أ) ل(س ≥٥٢) = ٠,٠٦٦٨

ب) ل(٥٠ ≥ س ≥ ٦٠) = ٠,٩٥٩٦

جـ) ل(س ≤ ٥٦) = ل(ز≤ ٠,٥) = ٠,٣٠٨٥ = نسبة الطالبات التي تزيد كتلهن على ٥٦ كغ

ومنه عددهن ٠,٣٠٨٥ × ١٠٠٠ = ٣٠٨ طالبة تقريبا.

س٤: ل(س≥ ٦٥) = ٠,٣٠٨٥

الفصل الثالث: الارتباط والانحدار

أولا: الارتباط

تدريب٢: ر = -٠,٤٥

تدريب٣: ر= ٠,٣٣٣٣ علاقة طردية ضعيفة

تدريب٤: ١) ر=٠,٦٥ ٢) ر= ٠,٦٥ ٣) ر= -٠,٦٥

س٢: ر= - ٠,٠٢٩

س٣: ر= - ٠,١٦

س٤: ر= - ٠,٠٨   علاقة عكسية ضعيفة

س٥: - ٠,٩ هي العلاقة الأقوى (عكسية أقوى)

س٦: أ) ر= ٠,٨٥   ب) ر= ٠,٨٥   جـ) ر= - ٠,٨٥

ثانيا: خط الانحدار

تدريب١: ١) ص^ = ١,٤ س -٣٥

٢) عندما س= ٨٨، علامة الطالب المتوقعة في الجامعة = ص^ = ٨٨,٢

٣) عندما س= ٧٠، العلامة المتنبأ بها = ص^ = ٦٣ ، ومنه الخطأ في التنبؤ = ٦٠ – ٦٣ = -٣

تدريب٢: ١) ص^ =٧ أخطاء

٢) عدد الاخطاء المتوقعة لشخص عمل ١٥ ساعة = ص^ = ١٠ أخطاء، ومنه الخطأ في التنبؤ = ٦-١٠= -٤

س١: أ) ص^ = ٠,٣٢ س + ٤٥,٦

ب) معدل الطالب المتوقع في الصف العاشر = ص^ =٧٣,٧٦

جـ) عندما س= ٩٠ ، ص= ٨٠ ، ص^ = ٧٤,٤ ومنه الخطأ في التنبؤ=٨٠- ٧٤,٤ = ٥,٦

س٢: ص^ = ٢س+١٥

س٣: ص^ = ١٨٠١٠ دينار، الخطأ في التنبؤ= ٢٧٤٠٠ – ١٨٠١٠ = ٩٣٩٠ دينار

أسئلة الوحدة:

س١: عدد الطرق = ل(٥، ٤) × ل(١٠، ٣) = ٨٦٤٠٠ طريقة   (الترتيب مهم، لذا تباديل)

س٢: ر= ٣

س٣:

س	٠	١	٢
ل (س)	٠,٣٦	٠,٤٨	٠,١٦

س٤: س = ٣٤

س٥: ب= ٠,١

س٦: أ) ر= - ٠,٨   ب) ر= - ٠,٨

س٧: أ) ص^ = ١,١ س + ٣,٧ ب) ١٩,١ جـ) – ١,١

س٨: أ) ٠,٩٥٥٤ ب) ٠,٩٨٤٢ جـ) ٠,٨٧٢٩

د) ٠,٠٠٦٢ هـ) ٠,٧٧٠٩

س٩: أ) ل(ز ≤ -١) = ٠,١٥٨٧

ب) ل(ز ≥ ٠,٦) = ٠ .٢٧٤٣

س١٠: أ) ل(س≤ ٧٥) = ٠,١٥٨٧

ب) ل(٧٠ ≤ س≤ ٩٠) = ٠,٩٥٤٤

جـ) نسبة الطالبات اللواتي يزيد معدل كل منهن عن ٧٠= ل(س≥ ٧٠) = ٠,٩٧٧٢

وبذلك عددهن يساوي ٠,٩٧٧٢ × ١٠٠٠ = ٩٧٧ طالبة تقريبا.