KINGDOM OF BAHRAIN

Ministry of Education

مَمْلَكَة البَحْرَيْن

وَزَارَةُ التَّرْبِيَةِ وَالتَّعْلِيم

ريض ١٥١

الرياضيات ١

للمرحلة الثانوية

2030 البحرين BAHRAIN

ريض ١٥١

قررت وزارة التربية والتعليم بمملكة البحرين تدريس هذا الكتاب بمدارسها الثانوية

إدارة سياسات وتطوير المناهج

الرياضيات ١

للمرحلة الثانوية

الطبعة الأولى
١٤٤٥هـ - ٢٠٢٣م

العبيكان Obeikan

Mc Graw Hill Education

المراجعة والتطوير لهذه الطبعة

فريق متخصص من وزارة التربية والتعليم بمملكة البحرين

www.obeikaneducation.com

www.glencoe.com

حقوق الطبعة الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل©، ٢٠١٠م.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

English Edition Copyright © 2010 the McGraw-Hill Companies, Inc.
All rights reserved.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2010.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواءً أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين و الاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

حضرة صاحب الجلالة الملك حمد بن عيسى آل خليفة

ملك مملكة البحرين المعظم

المقدمة

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيِّئ للمتعلم فرص اكتساب مستويات عليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه مملكة البحرين في ظل قيادة جلالة الملك حمد بن عيسى آل خليفة وحكومته الرشيدة لتنمية الموارد البشرية؛ وعيًا بأهمية دورها وتحقيق التنمية الشاملة كان توجه وزارة التربية والتعليم نحو تطوير المناهج الدراسية، وفي مقدمتها مناهج الرياضيات بدءًا من المرحلة الابتدائية؛ سعيًا إلى الارتقاء بمخرجات التعليم، والارتقاء بها إلى مستوى من الجودة يتوافق مع أرقى المعايير الدّولية ذات العلاقة.

ومن أجل ذلك تم التعاون مع مكتب التربية العربي لدول الخليج لتأليف كتب جديدة تعتمد على المواءمة بين ما تتضمنه مناهج الرياضيات المطورة في مملكة البحرين والتوجهات العالمية في تدريس هذه المادة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق التي تجعل المتعلم يقبل على تعلمها، ويتفاعل معها من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة؛ ليخرج من ضيق التلقي إلى رحابة التفاعل النشيط، والمشاركة الفعّالة في المواقف التعليمية، كما تؤكد هذه الكتب جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، وأبرزها ما يأتي :

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات والحاجة إلى توظيفها في المواقف والمشكلات الحياتية.
- التنوع والتشويق في طرائق عرض المحتوى مع الحرص على إخراجه إخراجًا فنيًّا جذّابًا.
- تعزيز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية التي تعمل على ترابط أبعاد المحتوى الرياضي، وتجعل منه كلاً متكاملاً.
- التركيز في تنفيذ خطوات أسلوب حل المشكلات، وتوظيفها في معالجة المشكلات الرياضية والحياتية وحلها.
- التشجيع على توظيف تكنولوجيا الاتصال والتعلم في المواقف الرياضية المختلفة.
- التنويع في توظيف أساليب تقويم المتعلمين بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

وفي إطار هذا النهج المواكب للتطورات العالمية، سوف توفر المناهج المطورة والكتب الجديدة للمتعلم مجموعةً متكاملةً من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين المتعلمين، بالإضافة إلى المواقع التعليمية التي تتيح لهم فرصة توظيف التقنيات الحديثة، والتواصل المبني على الممارسة؛ تأكيدًا لدورهم في عملية التعليم والتعلم.

ونحن إذ نقدم هذا الكتاب إلى أعزائنا الطلبة لنأمل أن تتيح لهم مادته فرصًا حقيقية لتعلم أكثر متعة وفائدة؛ مما يجعلهم قادرين على مواكبة عصرهم والوفاء بمتطلبات حياتهم.

والله ولي التوفيق

توزيع مفردات محتوى مساق ريض ١٥١

مفردات محتوى مساق ريض ١٥١

الفصل 1	المفردات
المعادلات والمتباينات	التهيئة للفصل الأول
	1–1 المجموعات والفترات
	توسع 1–1 معمل الجبر: المجموعات
	1–2 حَلّ معادلات القيمة المطلقة
	1–3 حَلّ المتباينات الخطية في متغير واحد
	1–4 حَلّ المتباينات المركّبة ومتباينات القيمة المطلقة

الفصل 2	المفردات
الدوال والمتباينات	التهيئة للفصل الثاني
	2–1 المعادلات الخطية بصيغة ميل – مقطع
	2–2 المعادلات الخطية بصيغة نقطة – ميل
	توسع 2–2 معمل الآلة الحاسبة البيانية: التغيّر الطردي
	2–3 العلاقات والدوال
	توسع 2–3 معمل الجبر: الدوال المنفصلة والدوال المتصلة
	2–4 دوال خاصة
	2–5 دوال القيمة المطلقة
	2–6 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا
	2–7 حَلّ أنظمة المتباينات الخطية بيانيًّا
	توسع 2–7 معمل الآلة الحاسبة البيانية: أنظمة المتباينات الخطية
	2–8 البرمجة الخطية

الفصل 3	المفردات
الدوال التربيعية	التهيئة للفصل الثالث
	3–1 تمثيل الدوال التربيعية بيانيًّا
	استكشاف 3–2 معمل الآلة الحاسبة البيانية: عائلة القطوع المتكافئة
	3–2 التحويلات الهندسية في التمثيلات البيانية للدوال التربيعية
	3–3 حَلّ المعادلات التربيعية بيانيًّا
	توسّع 3–3 معمل الآلة الحاسبة البيانية: حَلّ المعادلات التربيعية بيانيًّا
	3–4 الأعداد المركبة
	3–5 حَلّ المعادلات التربيعية جبريًّا
	توسّع 3–5 معمل الجبر: مجموعة الجذرين وحاصل ضربهما

الفهرس

الفصل 1 المعادلات والمتباينات

التهيئة للفصل الأول 11

1-1 المجموعات والفترات 12

توسّع 1-1 معمل الجبر: المجموعات 18

1-2 حَلّ معادلات القيمة المطلقة 20

اختبار منتصف الفصل 26

1-3 حَلّ المتباينات الخطية في متغير واحد 27

1-4 حَلّ المتباينات المركّبة ومتباينات القيمة المطلقة 34

دليل الدراسة والمراجعة 44

اختبار الفصل 47

التهيئة للاختبارات المعيارية 48

اختبار معياري تراكمي 50

الفصل 2 الدوال والمتباينات

التهيئة للفصل الثاني 53

2-1 المعادلات الخطية بصيغة ميل - مقطع 54

2-2 المعادلات الخطية بصيغة نقطة - ميل 64

توسّع 2-2 معمل الآلة الحاسبة البيانية: التغيّر الطردي 72

2-3 العلاقات والدوال 73

توسّع 2-3 معمل الجبر: الدوال المنفصلة والدوال المتصلة 81

2-4 دوال خاصة 82

2-5 دوال القيمة المطلقة 88

اختبار منتصف الفصل 95

الفهرس

2-6 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًا 96

2-7 حَلّ أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا 102

توسع 2-7 معمل الآلة الحاسبة البيانية: أنظمة المتباينات الخطية 108

2-8 البرمجة الخطية 109

دليل الدراسة والمراجعة 119

اختبار الفصل 121

التهيئة للاختبارات المعيارية 122

اختبار معياري 124

الفصل 3 الدوال التربيعية

التهيئة للفصل الثالث 127

3-1 تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا 128

استكشاف 3-2 معمل الآلة الحاسبة البيانية: عائلة القطوع المتكافئة 140

3-2 التحويلات الهندسية في التمثيلات البيانية للدوال التربيعية 142

3-3 حَلّ المعادلات التربيعية بيانيًا 150

توسّع 3-3 معمل الآلة الحاسبة البيانية: المتباينات التربيعية 175

اختبار منتصف الفصل 158

3-4 الأعداد المركبة 159

3-5 حَلّ المعادلات التربيعية جبريًا 165

توسّع 3-5 معمل الجبر: مجموعة الجذرين وحاصل ضربهما 177

دليل الدراسة والمراجعة 179

اختبار الفصل 182

التهيئة للاختبارات المعيارية 183

اختبار معياري تراكمي 185

الصيغ والرموز 187

الفصل 1

المعادلات والمتباينات

Equations and Inequalities

فيما سبق

درستُ تعابير جبرية في متغيرات.

والآن

الأفكار العامة

- أحُلّ معادلات القيمة المطلقة.
- أحُلّ المتباينات وأمثّلها على خط الأعداد.

لماذا؟

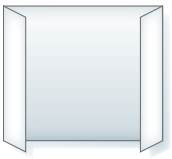
مال يُعدُّ ربط المال بالرياضيات أحد أكثر المهارات التدريبية التي يمكن أن تتعلمها. وطالما أنك تستعمل المال، فإنك سوف تستعمل الرياضيات، وستكتشف في هذا الفصل مواضيع مالية، مثل معاملات البيع والشراء والضرائب، والدخل ، وميزانية الأسرة.

مطويتك

منظم أفكار

المعادلات والمتباينات: اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك للفصل الثالث حول المعادلات والمتباينات.
ابدأ بورقة واحدة بعداها $11\text{ in} \times 17\text{ in}$".

1. اطوِ الورقة بعرض 2 in من كلا الجانبين القصيرين.
2. اطوِ الورقة إلى نصفين طوليًّا وعرضيًّا. ثم افتحها وقصّها كما في الشكل أدناه.
3. أعد الطيّ عرضيًّا كما في الشكل أدناه. وثبّت الجيوب، ثم عنونها بعناوين دروس الفصل، وضع بطاقات مرقّمة للملاحظات في كل جيب.



التهيئة للفصل الأول

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

بسّط كل مقدار مما يأتي: (مهارة سابقة)

1) $15.7 + (-3.45)$
2) $-18.54 - (-32.05)$
3) -9.8×6.75
4) $4 \div (-0.5)$
5) $3\frac{2}{3} + \left(-1\frac{4}{5}\right)$
6) $\frac{54}{7} - \frac{26}{6}$
7) $\left(\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{10}{9}\right)$
8) $-3 \div \frac{7}{8}$
9) **حرف يدوية:** تحتاج نجلاء إلى $\frac{7}{8}$ yd من القماش؛ لعمل غطاء وسادة، ما كمية القماش التي تحتاج إليها لعمل 12 غطاءً؟ (مهارة سابقة)

احسب كل قوة مما يأتي: (مهارة سابقة)

10) 6^3
11) $(-4)^3$
12) $-(0.6)^2$
13) $-(-2.5)^3$
14) $\left(\frac{4}{5}\right)^2$
15) $\left(\frac{7}{3}\right)^4$
16) $\left(-\frac{7}{10}\right)^2$
17) $\left(-\frac{15}{2}\right)^3$
18) **طعام:** يستعمل في مطعم للشطائر 3 أنواع من الخبز، و3 أنواع من اللحم، و3 أنواع من الجبن. فكم نوعًا مختلفًا من الشطائر يمكن عملها على أن تحتوي كل شطيرة نوعًا واحدًا فقط من الخبز و اللحم و الجبن؟ (مهارة سابقة)

حدّد ما إذا كانت العبارة صحيحة أو خاطئة في كل ممّا يأتي: (مهارة سابقة)

19) $-6 \geq -7$
20) $8 > -5$
21) $\frac{1}{7} \leq \frac{1}{9}$
22) $\frac{5}{6} \leq \frac{25}{30}$
23) **قياس:** لدى سعيد لوح خشبيّ طوله 0.6 m، وآخر طوله $\frac{2}{3}$ m. قال سعيد: $\frac{2}{3} < 0.6$، هل قوله صحيح؟

مراجعة سريعة

مثال 1

بسط $\left(\frac{3}{16}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)$.

بضرب البسط في البسط والمقام في المقام: $\left(\frac{3}{16}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3(4)}{16(5)}$

بالتبسيط: $= -\frac{12}{80}$

بقسمة البسط والمقام على القاسم المشترك الأكبر (ع. م. أ) ويساوي 4: $= -\frac{12 \div 4}{80 \div 4}$

بالتبسيط: $= -\frac{3}{20}$

مثال 2

احسب قيمة $(-1.5)^3$.

$(-1.5)^3$ تعني أن -1.5 مضروبة في نفسها 3 مرات: $(-1.5)^3 = (-1.5)(-1.5)(-1.5)$

بالتبسيط: $= -3.375$

مثال 3

حدّد ما إذا كانت العبارة $\frac{12}{24} > \frac{3}{8}$ صحيحة، أو خاطئة.

بقسمة كل من البسط والمقام على 3 لتحصل على العدد 8 في المقام: $\frac{3}{8} \stackrel{?}{>} \frac{12 \div 3}{24 \div 3}$

بالتبسيط: $\frac{3}{8} \not> \frac{4}{8}$

$\frac{3}{8} \not> \frac{4}{8}$ ؛ لأن $\frac{3}{8} < \frac{4}{8}$، إذن فالعبارة خاطئة.

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

1-1

المجموعات والفترات
Sets and Intervals

لماذا؟

في لعبة السيارات في مدينة الألعاب الترفيهية يجب ألا يقل عمر الطفل المشارك عن 8 سنوات.
ويمكن التعبير عن عمر الطفل بالمتباينة $x \geq 8$
ويمكن أيضًا التعبير عنها على صورة فترة.

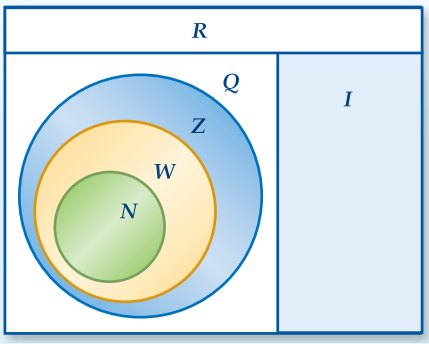
الأعداد الحقيقية تتضمن **الأعداد الحقيقية** مجموعات مختلفة من الأعداد.

- **الأعداد النسبية** هي الأعداد التي يمكن كتابتها على الصورة $\frac{a}{b}$ ، حيث a وَ b عددان صحيحان، والعدد b لا يساوي صفرًا. وتكون الصورة العشرية للعدد النسبي إما عددًا عشريًا منتهيًا، أو دوريًا.
- الصورة العشرية **للعدد غير النسبي** ليست منتهية، وليست دورية. الجذور التربيعية للأعداد التي ليست مربعات كاملة هي أعداد غير نسبية.
- مجموعة **الأعداد الصحيحة** هي $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ، و مجموعة **الأعداد الكلية** هي $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ ، ومجموعة **الأعداد الطبيعية** هي $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ ، وكل منها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد النسبية؛ وذلك لأن كل عدد صحيح n يمكن كتابته على الصورة $\frac{n}{1}$.

مفهوم أساسي — **الأعداد الحقيقية (R)**

أضف إلى مطويتك

المجموعة	أمثلة	الرمز
الأعداد النسبية	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.66\ldots$	Q
الأعداد غير النسبية	$\pi = 3.14159\ldots$ $\sqrt{3} = 1.73205\ldots$	I
الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$	Z
الأعداد الكلية	$2, 96, 0, \sqrt{36}$	W
الأعداد الطبيعية	$3, 17, 6, 86$	N



مثال 1 — **تصنيف الأعداد**

سمِّ مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد ممّا يأتي:

a) -23 مجموعة الأعداد الصحيحة (Z)، ومجموعة الأعداد النسبية (Q)، ومجموعة الأعداد الحقيقية (R).

b) $\sqrt{50}$ مجموعة الأعداد غير النسبية (I)، ومجموعة الأعداد الحقيقية (R).

c) $-\frac{4}{9}$ مجموعة الأعداد النسبية (Q)، ومجموعة الأعداد الحقيقية (R).

تأكد

سمِّ مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

1A) -185 **1B)** $-\sqrt{49}$ **1C)** $\sqrt{95}$ **1D)** $-\frac{7}{8}$

فيما سبق

درستُ خصائص الأعداد الحقيقية، والعمليات عليها.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أصنّف الأعداد الحقيقية.
- أصفُ مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

المفردات الأساسية

الأعداد الحقيقية real numbers
الأعداد النسبية rational numbers
الأعداد غير النسبية irrational numbers
الأعداد الصحيحة integers
الأعداد الكلية whole numbers
الأعداد الطبيعية natural numbers
الصفة المميزة للمجموعة set-builder notation
رمز الفترة interval notation

www.obeikaneducation.com

يمكن وصف هذه المجموعات ومجموعات جزئية أخرى من الأعداد الحقيقية باستعمال **الصفة المميزة** لكتابة المجموعة، إذ تستعملُ الصفة المميزة خصائص الأعداد ضمن المجموعة لتعريفها. **ويقرأ الرمز | حيث ، ويقرأ الرمز ∈ ينتمي إلى أو عنصر في .**

$$\{x \mid -3 \le x \le 16, x \in Z\}$$

- x ينتمي إلى مجموعة الأعداد المعطاة.
- x لها هذه الخصائص...
- الأعداد x حيث...

مثال 2 استعمال الصفة المميزة

اكتب كلًّا من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة:

a) $\{8, 9, 10, 11, \ldots\}$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الكلية الأكبر من أو تساوي 8.

$\{x \mid x \ge 8, x \in W\}$ وتقرأ مجموعة الأعداد x حيث x أكبر من أو تساوي 8، x تنتمي إلى مجموعة الأعداد الكلية

b) $x < 7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تقل عن 7.

$\{x \mid x < 7, x \in R\}$

c) $-2 < x < 7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تزيد على -2 ، وتقل عن 7.

$\{x \mid -2 < x < 7, x \in R\}$

تأكد

اكتب كلًّا من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة:

2A) $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots.\}$ **2B)** $x \le -3$ **2C)** $-1 \le x \le 5$

قراءة الرياضيات

غير محدودة تسمى الفترة غير محدودة، إذا كانت قيمها تزداد أو تنقص دون توقف .

تُستعملُ **رموز الفترات** لوصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية، فيستعملُ الرمزان " [" أو "] " للدلالة على انتماء طرف الفترة إليها، بينما يُستعملُ الرمزان " (" أو ") " للدلالة على عدم انتماء طرف الفترة إليها. وأما الرمزان "$-\infty$" يقرأ سالب مالانهاية، أو "∞" يقرأ موجب مالانهاية فيُستعملان للدلالة على أن الفترة غير محدودة.

فترات محدودة

المتباينة	رمز الفترة	اسم الفترة	التمثيل على خط الأعداد
$a \le x \le b$	$[a, b]$	فترة مغلقة	$-\infty$ ⟵ [a] ——— [b] ⟶ ∞
$a < x < b$	(a, b)	فترة مفتوحة	$-\infty$ ⟵ (a) ——— (b) ⟶ ∞
$a \le x < b$	$[a, b)$	فترة نصف مغلقة أو فترة نصف مفتوحة	$-\infty$ ⟵ [a] ——— (b) ⟶ ∞
$a < x \le b$	$(a, b]$		$-\infty$ ⟵ (a) ——— [b] ⟶ ∞

فترات غير محدودة

المتباينة	رمز الفترة	التمثيل على خط الأعداد
$x \ge a$	$[a, \infty)$	$-\infty$ ⟵ [a] ——— ⟶ ∞
$x \le a$	$(-\infty, a]$	$-\infty$ ⟵ ——— [a] ⟶ ∞
$x > a$	(a, ∞)	$-\infty$ ⟵ (a) ——— ⟶ ∞
$x < a$	$(-\infty, a)$	$-\infty$ ⟵ ——— (a) ⟶ ∞
$-\infty < x < \infty$	$(-\infty, \infty)$	$-\infty$ ⟵ ——— ⟶ ∞

مـثال 3 استعمال رمز الفترة

عبّر عن كل متباينة مما يأتي على صورة فترة، ومثلها على خط الأعداد:

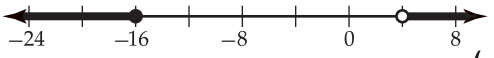
a) $-8 < x \leq 16$

المتباينة باستعمال رمز الفترة تصبح $(-8, 16]$

b) $x < 11$

المتباينة باستعمال رمز الفترة تصبح $(-\infty, 11)$

c) $x \leq -16$ أو $x > 4$



المتباينة باستعمال رمز الفترة تصبح $(-\infty, -16] \cup (4, \infty)$

قراءة الرياضيات

يقرأ الرمز $\cup$ إتحاد.

تأكد

عبّر عن كل متباينة مما يأتي على صورة فترة، ومثلها على خط الأعداد:

3A) $-4 \leq y < -1$ **3B)** $a \geq -3$ **3C)** $x > 9$ أو $x < -2$

مـثال 4 التعبير برمز الفترة

عبّر برمز الفترة عن كل متباينة مُمثلة على خط الأعداد:

a)

المتباينة باستعمال رمز الفترة تصبح $[-2, 5)$

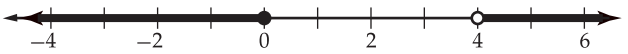
b)

المتباينة باستعمال رمز الفترة تصبح $[-1, \infty)$

c)

المتباينة باستعمال رمز الفترة تصبح $(-\infty, 2)$

d)



المتباينة باستعمال رمز الفترة تصبح $(-\infty, 0] \cup (4, \infty)$

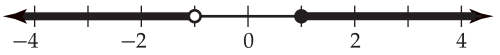
تأكد

عبّر برمز الفترة عن كل متباينة مُمثلة على خط الأعداد:

4A)

4B)

4C)



مثال 5 من واقع الحياة

التعبير برمز الفترة عن مواقف حياتية

كواكب: يدور كوكب عطارد حول الشمس في مدار ليس دائريًّا تامًّا، ويبعد عنها مسافة 43 مليون ميل في أبعد نقطة عنها، و 28.5 مليون ميل في أقرب نقطة منها.

عبّر برمز الفترة عن بُعد كوكب عطارد عن الشمس بالميل.

بُعد كوكب عطارد عن الشمس يقع بين أبعد نقطة على مسافة 43000000 ميل، وأقرب نقطة منها على مسافة 28500000 ميل.

فتكون الفترة التي تُمثل بعد كوكب عطارد عن الشمس هي [28500000 , 43000000]

الربط مع واقع الحياة

النظام الشمسي

يتكون من الشمس وجميع ما يدور حولها من أجرام بما في ذلك الأرض والكواكب الأخرى.

تأكد

وظائف: من ضمن شروط الإلتحاق بأحد الوظائف ألا يقل عمر المتقدم للوظيفة عن 25 سنة ولا يزيد عن 35 سنة. عبّر برمز الفترة عن الأعمار المقبولة للالتحاق بهذه الوظيفة.

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 12

سمِّ مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

1) 62 **2)** $\frac{5}{4}$ **3)** $\sqrt{11}$ **4)** -12

مثال 2 صفحة 13

اكتب كل مجموعة مما يأتي بدلالة الصفة المميزة، وعلى صورة فترة إن أمكن:

5) $x > 50$ **6)** $x < -13$

7) $x \leq -4$ **8)** $\{-4, -3, -2, -1, \ldots\}$

9) $-31 < x \leq 64$ **10)** $x < -19$ أو $x > 21$

11) $x \leq 61$ أو $x \geq 67$ **12)** $x \leq -45$ أو $x > 86$

13) المضاعفات الموجبة للعدد 5 **14)** $x \geq 32$

مثال 3 صفحة 14

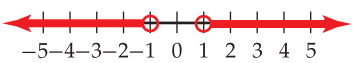
مثّل كل مجموعة ممّا يأتي على خط الأعداد:

15) $(-1, \infty)$ **16)** $(-\infty, 4]$ **17)** $(-\infty, 5] \cup (7, +\infty)$

مثال 4
صفحة 14

عبّر برمز الفترة عن كل متباينة مُمثلة على خط الأعداد:

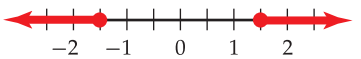
(18)



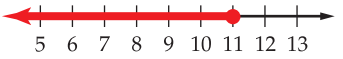
(19)

(20)

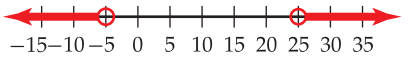
(21)



(22)



(23)



مثال 5
صفحة 15

(24) زكاة: من شروط إخراج زكاة الأموال أن يبلغ المال النصاب وهو 81 جرام من الذهب، اكتب فترة تُبيّن مقدار المال الذي يجب إخراج الزكاة فيه. (بفرض أن سعر جرام الذهب BD20)

تدرب وحل المسائل

مثال 1
صفحة 12

سمِّ مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

(25) $-\frac{4}{3}$ **(26)** -8.13 **(27)** $\sqrt{25}$ **(28)** $0.\overline{61}$

(29) $\frac{9}{3}$ **(30)** $-\sqrt{144}$ **(31)** $\frac{21}{7}$ **(32)** $\sqrt{17}$

مثال 2
صفحة 13

اكتب كل مجموعة مما يأتي بدلالة الصفة المميزة، وعلى صورة فترة إن أمكن:

(33) $x \leq 25$ **(34)** $x > -7$

(35) $x \geq -1$ **(36)** مجموعة الأعداد الزوجية

(37) $0 \leq x < 32$ **(38)** $47 \geq x \geq -11$

(39) $x \geq -2$ أو $x < -19$ **(40)** $x \leq -9$ أو $x \geq 9$

(41) $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$ **(42)** $\{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$

مثال 3
صفحة 14

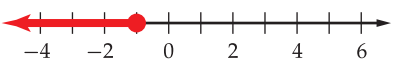
مثّل كل مجموعة ممّا يأتي على خط الأعداد:

(43) $(-\infty, 5)$ **(44)** $(2.15]$ **(45)** $(-\infty, -3) \cup (4, 5)$

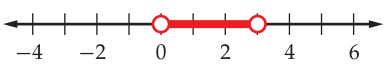
مثال 4
صفحة 14

عبّر برمز الفترة عن كل متباينة مُمثلة على خط الأعداد:

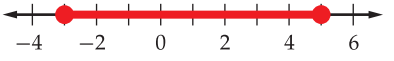
(46)



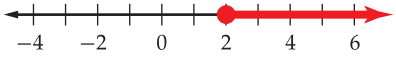
(47)



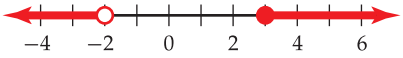
(48)



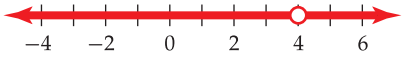
(49)



(50)



(51)



عبّر عن كل مجموعة مما يأتي باستعمال رمز الفترة:

52) $\{a \mid a \leq -3\}$

53) $\{n \mid n > -8\}$

54) $\{y \mid y < 2 \text{ أو } y \geq 14\}$

55) $\{b \mid b \leq -9 \text{ أو } b > 1\}$

56) $\{t \mid 1 < t < 3\}$

57) $\{m \mid m \geq 4 \text{ أو } m \leq -7\}$

58) $\{x \mid x \geq 0\}$

59) $\{r \mid -3 < r < 4\}$

مثال 5
صفحة 15

الربط مع واقع الحياة

عادة ما يُستخدم تحليل السكر التراكمي في تشخيص ومتابعة حالات الإصابة بمرض السكري.

60) **صحة:** يتراوح المعدّل الطبيعي التراكمي لدى الأشخاص الأصحاء وغير المصابين بالسكري مابين 4% – 5.6% ، عبّر باستعمال رمز الفترة عن المعدل الطبيعي للسكر التراكمي لدى الأشخاص الأصحاء.

مسائل مهارات التفكير العليا

61) **أيها لا ينتمي؟** ما العدد المختلف عن باقي الأعداد؟ برِّر إجابتك.

$\sqrt{21}$	$\sqrt{35}$	$\sqrt{67}$	$\sqrt{81}$

62) **اكتشف الخطأ:** عبّر كل من أشرف وأسامة عن التمثيل البياني على خط الأعداد الآتي باستعمال الصفة المميزة.

أيهما إجابته صحيحة؟ وضح تبريرك.

أشرف	أسامة
$\{x \mid x \in Z, -2 < x \leq 5\}$	$\{x \mid x \in R, -2 < x \leq 5\}$

24) **مسألة مفتوحة:** اكتب فترة ثم مثلها على خط الأعداد، وعبر عنها بطريقة الصفة المميزة.

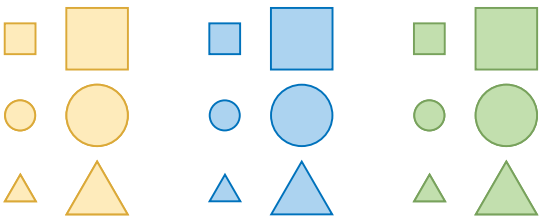
1-1 المجموعات Sets

توسّع

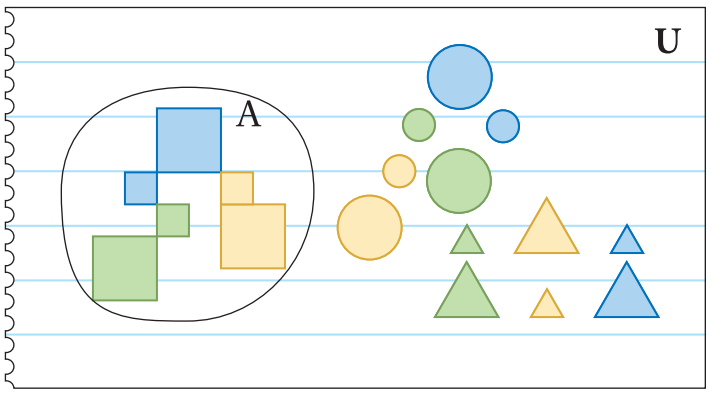
المجموعة أي تجمع من الأشياء. وتُسمى المجموعة التي تحتوي على جميع الأشياء **المجموعة الشاملة**، ويرمز إليها عادة بالرمز U . ويُسمى كل شيء في المجموعة **عنصرًا**.

نشاط 1

الخطوة 1 قُصّ 6 قطع من الورق لكل لون كما في الشكل المجاور.
ارسم الأشكال المبيَّنة على اليسار.



الخطوة 2 حوِّط جميع الأشكال بخيط وسمها المجموعة U، ثم حوِّط مجموعة الأشكال المربعة بخيط على صورة حلقة، وسمها المجموعة A، كما في الشكل أدناه.



تُسمى مجموعة المربعات **مجموعة جزئية** من U ، وتُسمى المجموعة التي لا تحوي شيئًا **المجموعة الخالية**، ويُرمز إليها بالرمز { } أو ∅ ، وهي مجموعة جزئية من أي مجموعة، كما أنها مجموعة جزئية من نفسها. ويمكن كتابة ذلك بالرموز الرياضية على النحو الآتي: $A \subseteq U, A \subseteq A, \varnothing \subseteq U$.

الخطوة 3 يمكن تحديد المجموعة، بكتابة وصف لها داخل قوسين مثل {المربعات}.
ضع الخيط حول {دوائر} = B وسمّها $\overline{B}$. لاحظ أن $B \subseteq U$.

الخطوة 4 إذا كانت {المربعات} = A ، فإن **متممة** A تُكتب $\overline{A}$ ، وهي جميع العناصر الموجودة في U، وغير الموجودة في A، وعليه فإن {دوائر ومثلثات} = $\overline{A}$، أو {الأشكال التي ليست مربعات} = $\overline{A}$. ارسم عناصر المجموعة $\overline{B}$. واكتب وصفًا للمجموعة $\overline{B}$ داخل قوسين.

النموذج والتحليل:

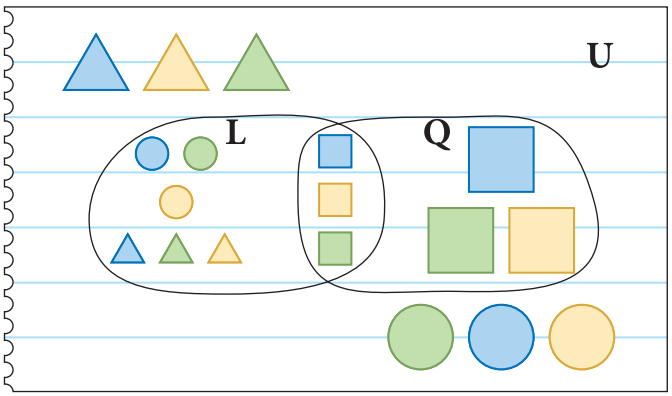
1) لتكن {المثلثات} = C. اكتب وصفًا لمتممة C داخل قوسين.

2) لتكن {الأشكال الصفراء} = R . اكتب وصفًا لمتممة المجموعة R داخل قوسين .

3) لتكن {المربعات} = U. تحتوي المجموعات الجزئية للمجموعة U على عناصر عددها 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6. كم مجموعة جزئية للمجموعة U تتكون من عنصرين فقط؟ وما عدد المجموعات الجزئية كلها؟

نشاط 2

يمكنك إجراء العمليات على عددين أو أكثر، مثل الجمع والطرح والضرب والقسمة، إلّا أن متممة المجموعة تُجرى على مجموعة واحدة فقط. غير أنه يمكنك أيضًا إجراء بعض العمليات على مجموعتين أو أكثر في الوقت نفسه.



الخطوة 1 استعمل U من الخطوة 2 في النشاط 1.
ورتِّب الأشكال كما هو مبين في الشكل المجاور، ثم سمّ المجموعات، واكتب وصفًا لكلٍّ من المجموعتين L, Q داخل قوسين.

الخطوة 2 في الشكل الوارد في الخطوة 1، ظلّل منطقة تقاطع المجموعتين L, Q. وصِفِ المنطقة المظلّلة.

الخطوة 3 تقاطع مجموعتين هو مجموعة العناصر المشتركة بينهما فقط. ويرمز لهذه العملية بالرمز ∩. ويعني التقاطع أن العنصر يكون في المجموعتين L, Q معًا. ارسم عناصر L ∩ Q.

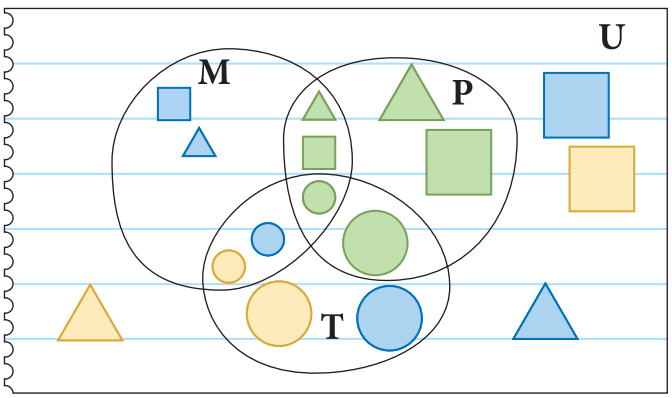
الخطوة 4 اتحاد مجموعتين هو مجموعة جميع عناصر المجموعة الأولى والثانية دون تكرار، ويرمز لهذه العملية بالرمز ∪. فكّر في هذه العملية على أنها جمع أو تجميع العناصر في مجموعتين أو أكثر. وارسم عناصر المجموعة L ∪ Q.

الخطوة 5 تذكّر أن إيجاد المتممة هي عملية على مجموعة واحدة فقط. ارسم عناصر المجموعة $\overline{L \cap Q}$.

الخطوة 6 ارسم عناصر المجموعة $\overline{L \cup Q}$.

تمارين:

اكتب وصفًا للأشكال في كل مجموعة ممَّا يأتي، مستعملًا شكل ڤن المجاور:



4) M

5) P

6) T

7) M ∩ P

8) T ∩ M

9) P ∩ T

10) M ∪ P

11) M ∪ T

12) P ∪ T

13) M ∩ P ∩ T

14) M ∪ P ∪ T

15) $\overline{M \cup P \cup T}$

16) تحدٍّ: استعمل U في الخطوة 2 من النشاط 1؛ لإيجاد المجموعتين Z،W على أن تكون $W \cap Z = \varnothing$. ثم ارسم شكلًا يمثل المجموعات U، Z،W ، وسمِّ جميع الأشكال المبينة فيه. اكتب وصفًا لكلٍّ من المجموعات Z،W ، $\overline{W \cup Z}$ داخل قوسين.

1-2

حَلّ معادلات القيمة المطلقة
Solving Absolute Value Equations

فيما سبق

درستُ حَلّ معادلات مستعملًا خصائص المساواة.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أحسب تعابير تحتوي قيمًا مطلقة.
- أحلُّ معادلات القيم المطلقة.

المفردات الأساسية

القيمة المطلقة
absolute value

المجموعة الخالية
empty set

الحل المرفوض
extraneous solution

www.obeikaneducation.com

لمـــاذا؟

يستعمل البحارة جهازًا يعتمد على مدى أشعة الليزر لتحديد البعد عن الشاطئ. إذا كانت دقة قياس هذا الجهاز صحيحة إلى $\pm 0.5\,\text{yd}$ ، فذلك يعني أنه إذا كان مؤشر الجهاز يؤشر إلى مسافة $323.1\,\text{yd}$ عن الشاطئ فإن المسافة الفعلية عن الشاطئ ليست أقل من $323.6\,\text{yd}$ ، أو أكبر من $323.6\,\text{yd}$. ويمكن التعبير عن هاتين القيمتين بالمعادلة

$$|E - 323.1| = 0.5$$

تعابير القيمة المطلقة القيمة المطلقة لعدد هي بعد ذلك العدد عن الصفر على خط الأعداد. وبما أن البُعد دائماً موجب أو صفر، فإن القيمة المطلقة لعدد ما هي قيمة غير سالبة دائمًا. ويستعمل الرمز $|x|$ للدلالة على القيمة المطلقة للعدد x .

مفهوم أساسي — **القيمة المطلقة**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي a ، هي a إذا كان العدد a موجبًا أو صفرًا. وتكون $-a$ إذا كان العدد a سالبًا.

الرموز لأي عدد حقيقي a يكون

$$|a| = a,\ a \geq 0$$
$$|a| = -a,\ a < 0$$

مثال $|-4| = 4, |4| = 4$

نموذج

عند حساب قيم تعابير تحتوي قيمة مطلقة، فإن رمز القيمة المطلقة يُعامل معاملة الأقواس، إذ يجب إجراء العمليات داخل رمز القيمة المطلقة أولاً.

مثال 1 — **حساب تعابير تحتوي قيمة مطلقة**

اذا كانت $n = -7.5$ ، فاحسب قيمة $8.4 - |2n + 5|$.

بالتعويض عن n بالعدد -7.5 : $8.4 - |2n + 5| = 8.4 - |2(-7.5) + 5|$

بضرب 2 في -7.5 : $= 8.4 - |-15 + 5|$

بإضافة -15 إلى 5 : $= 8.4 - |-10|$

$|-10| = 10$: $= 8.4 - 10$

بطرح 10 من 8.4 : $= -1.6$

تأكد

1A) إذا كانت $x = -2$ ، فاحسب قيمة $|4x + 3| - 3\frac{1}{2}$.

1B) إذا كانت $y = -\frac{2}{3}$ ، فاحسب قيمة $1\frac{1}{3} - |2y + 1|$.

معادلات القيمة المطلقة تحتوي بعض المعادلات تعابير قيمة مطلقة، وعندئذٍ يستعمل تعريف القيمة المطلقة لحل هذه المعادلات. فإذا كان a, b عددين حقيقيين، حيث $b \geq 0$، وكان $|a| = b$، فإن $a = b$ أو $-a = b$ ، وتكتب المعادلة الثانية عادةً على الصورة $a = -b$.

مثال 2 معادلات القيمة المطلقة

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقّق من صحة حلّك:

a) $|f + 5| = 17$

الحالة 1 $a = b$

$f + 5 = 17$

$f + 5 + (-5) = 17 + (-5)$

$f = 12$

تحقق:

$|f + 5| = 17$

$|12 + 5| \stackrel{?}{=} 17$

$|17| \stackrel{?}{=} 17$

$17 = 17$ ✔

الحالة 2 $a = -b$

$f + 5 = -17$

$f + 5 + (-5) = -17 + (-5)$

$f = -22$

تحقق:

$|f + 5| = 17$

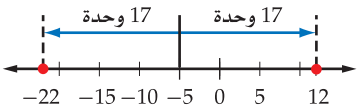
$|-22 + 5| \stackrel{?}{=} 17$

$|-17| \stackrel{?}{=} 17$

$17 = 17$ ✔

إذن الحلان هما $12, -22$. وبذلك تكون مجموعة الحل هي $\{12, -22\}$.

يمكنك ملاحظة أن كل حَلّ يَبعُد 17 وحدة عن العدد -5 على خط الأعداد.



b) $|3x - 2| + 8 = 1$

المعادلة الأصلية $|3x - 2| + 8 = 1$

بطرح 8 من الطرفين $|3x - 2| + 8 - 8 = 1 - 8$

بالتبسيط $|3x - 2| = -7$

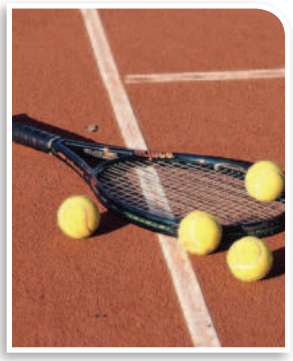
بما أن القيمة المطلقة لأي عدد هي دائمًا قيمة موجبة أو صفر، لذا فإن هذه المعادلة ليس ثمة قيمة تحقّقها. ولذا، فإن مجموعة حلها هي **المجموعة الخالية**، والتي يُرمز لها بأحد الرمزين $\{\}$ أو $\varnothing$.

تأكد

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقّق من صحة حلّك:

2A) $2|3a| = 6$

2B) $|4b + 1| + 8 = 0$



الربط بالحياة

تستعمل معادلات القيمة المطلقة في حَلّ كثير من المسائل الحياتية.

كان لاعبو التنس في الأصل يرتدون قفازات جلدية لضرب كرة التنس، حتى استبدلت هذه القفازات بمضارب ذات مقابض.

المصدر:
The Cliff Richard Tennis Foundation

مثال 3 حَلّ معادلات القيمة المطلقة

تنس: المساحة القياسية لوجه مضرب التنس هي $100\,in^2$ بزيادة أو نقصان $20\,in^2$ ، تبعًا لنوع المضرب. اكتب معادلة قيمة مطلقة تمثّل المساحة، ثم حُلّها لإيجاد أكبر وأصغر مساحة لوجه مضرب التنس.

افهم: المطلوب حساب أكبر وأصغر مساحة ممكنة لوجه مضرب التنس علمًا بأن متوسط المساحة معطى، وكذلك أُعطي مدى الزيادة والنقصان.

خطط: لكتابة معادلة القيمة المطلقة، فإن القيمة المتوسطة تُوضع داخل رمز القيمة المطلقة. ويُوضع مدى الزيادة أو النقصان في الطرف الآخر منها.

القيمة المتوسطة — مدى الزيادة أو النقصان

$$|x - c| = r$$

حُل: معادلة القيمة المطلقة $|x - c| = r$

$c = 100, r = 20$ $|x - 100| = 20$

الحالة 1 $a = b$

$x - 100 = 20$

$x - 100 + 100 = 20 + 100$

$x = 120$

الحالة 2 $a = -b$

$x - 100 = -20$

$x - 100 + 100 = -20 + 100$

$x = 80$

تحقق:

$|x - 100| = 20$

$|120 - 100| \stackrel{?}{=} 20$

$|20| \stackrel{?}{=} 20$

$20 = 20$ ✔

تحقق:

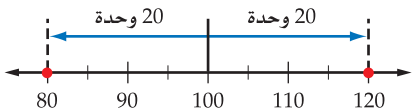
$|x - 100| = 20$

$|80 - 100| \stackrel{?}{=} 20$

$|-20| \stackrel{?}{=} 20$

$20 = 20$ ✔

يمكنك التأكد من أن كلا الحلَّين يقعان على بُعد 20 وحدة من العدد 100 على خط الأعداد.



الحلان هما 120 ، 80 . لذا فإن أكبر مساحة هي $120\ \text{in}^2$ ، وأصغر مساحة هي $80\ \text{in}^2$.

تأكد

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقَّق من صحة حلِّك:

(3A) $9 = |x + 12|$

(3B) $8 = |y + 5|$

إرشادات لحل المسألة

كتابة معادلة

من أفضل الطرق لحل المسألة هي استعمال المعلومات فيها لكتابة معادلة ، ثم حلها.

من الضروري أن تتحقق من صحة إجابتك عند حَلّ معادلات القيمة المطلقة، ففي بعض الحالات تكون خطوات الحل صحيحة إلا أن الإجابة لا تحقق المعادلة الأصلية. وتُسمى الإجابة في هذه الحالة **الحل المرفوض**.

مثال 4 معادلات لها حَلّ واحد

حُلّ المعادلة $|x + 10| = 4x - 8$، ثم تحقّق من صحة حلِّك.

الحالة 1 $a = b$

$x + 10 = 4x - 8$

$10 = 3x - 8$

$18 = 3x$

$6 = x$

الحالة 2 $a = -b$

$x + 10 = -(4x - 8)$

$x + 10 = -4x + 8$

$5x + 10 = 8$

$5x = -2$

$x = -\frac{2}{5}$

إرشادات للدراسة

القيمة المطلقة

من الممكن أن تجد لمعادلة القيمة المطلقة حلًّا واحدًا فقط. لكن تذكّر أنه يوجد حالتان، ثم تحقق من صحة حلِّك.

يبدو أن هناك حلّين هما $6, -\frac{2}{5}$

تحقق: عوِّض بكلٍّ من القيمتين في المعادلة الأصلية.

$|x + 10| = 4x - 8$

$|6 + 10| \stackrel{?}{=} 4(6) - 8$

$|16| \stackrel{?}{=} 24 - 8$

$16 = 16$ ✔

$|x + 10| = 4x - 8$

$x + 10 \stackrel{?}{=} 4\left(-\frac{2}{5}\right) - 8$

$\left|9\frac{3}{5}\right| \stackrel{?}{=} -1\frac{3}{5} - 8$

$9\frac{3}{5} \neq -9\frac{3}{5}$ ✘

بما أن $9\frac{3}{5} \neq -9\frac{3}{5}$ ، فيوجد حَل واحد للمعادلة هو 6 . إذن، مجموعة الحل هي {6} .

تأكد

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين، ثم تحقَّق من صحة حلِّك:

(4A $2|x + 1| - x = 3x - 4$

(4B $3|2x + 2| - 2x = x + 3$

تأكد من فهمك

مثال 1
صفحة 20

إذا كانت $x = -4, y = -9$ ، فاحسب قيمة كل مما يأتي :

1 $|x - 8|$

2 $|7y|$

3 $-3|xy|$

4 $-2|3x + 8| - 4$

5) أسماك: تعيش أسماك الزينة في أحواض ذات مياه عذبة ودرجة حرارة متوسطها 78°F ، بمدى زيادة أو نقصان عن المتوسط يبلغ 2°F .

a) اكتب معادلة لتحديد أكبر وأصغر درجة حرارة يمكن أن تعيش فيها أسماك الزينة.

b) حُلّ المعادلة التي كتبتها في الفرع a.

c) إذا كان لديك ميزان لقياس الحرارة بدقة لا تزيد عن 1°F ولا تنقص عنها، فكم يجب أن تكون قراءة الميزان لدرجة حرارة الماء لتضمن بقاءها ضمن الحد الأدنى للحرارة؟ وضِّح إجابتك.

الأمثلة 2-4
الصفحات 23-21

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقَّق من حلِّك:

6 $|x + 8| = 12$

7 $|y - 4| = 11$

8 $|a - 5| + 4 = 9$

9 $|b - 3| + 8 = 3$

10 $3|2x - 3| - 5 = 4$

11 $-2|5y - 1| = -10$

12 $|a - 4| = 3a - 6$

13 $|b + 5| = 2b + 3$

تدرب وحل المسائل

مثال 1
صفحة 20

اذا كان $a = -3, b = -5, c = 4.2$ ، فاحسب قيمة كل مما يأتي:

14 $|-3c|$

15 $|5b|$

16 $|a - b|$

17 $|b - c|$

18 $|3b - 4a|$

19 $2|4a - 3c|$

20 $-|3c - a|$

21 $-|abc|$

22) كاكاو: لتحضير مسحوق الكاكاو فإنه يتم قلي بذور الكاكاو. إذا كانت درجة الحرارة المثالية لقلي البذور هي 300°F، بزيادة أو نقصان 25°F ، فاكتب معادلة لإيجاد أعلى وأدنى درجة حرارة ممكنة لقلي بذور الكاكاو، ثم حُلَّها.

الأمثلة 2-4
الصفحات 23-21

حُل كلَّ معادلة مما يأتي، ثم تحقَّق من صحة حلِّك:

23 $|z - 13| = 21$

24 $|w + 9| = 17$

25 $35 = |x - 6|$

26 $-3|r + 4| = -21$

27 $3|2a - 4| = 0$

28 $8|5w - 1| = 0$

29 $2|3x - 4| + 8 = 6$

30 $4|7y + 2| - 8 = -7$

31 $-3|3t - 2| - 12 = -6$

32 $-5|3z + 8| - 5 = -20$

33 **مال:** تنتج إحدى الدول قطعًا نقدية معدنية بوزن معياري يساوي 5.67 g للقطعة. وتوزن كل قطعة بعد الإنتاج، إذا كان الفرق بين وزن القطعة يختلف عن الوزن المعياري بزيادة أو نقصان 0.02 g ترفض القطعة، فاكتب معادلة لإيجاد أثقل وأخف قطعة يتم قبولها، ثم حُلَّها.

إذا كانت $t = 3, r = -6, q = -8$ ، فاحسب قيمة كل مما يأتي:

34 $12 - t|3r + 2|$

35 $2q + |2rt + q|$

36 $-5t - q|8r - t|$

الربط مع واقع الحياة

ارتفع مستوى سطح البحر خلال القرن الماضي في بعض مناطق العالم فوق المتوسط العالمي بمقدار 6 in تقريبًا.

المصدر:
Environmental Protection Agency

حُلَّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقَّق من صحة حلِّك:

37 $8x = 2|6x - 2|$

38 $-6y + 4 = |4y + 12|$

39 $8z + 20 = -|2z + 4|$

40 $-3y - 2 = |6y + 25|$

41 **مستوى سطح البحر:** يبلغ متوسط ارتفاع جزيرة عن مستوى سطح البحر 245 ft ، ويتباين هذا الارتفاع من مكان إلى آخر في هذه الجزيرة بزيادة أو نقصان 75 ft . اكتب معادلة لايجاد أعلى وأقل ارتفاع لهذه الجزيرة عن مستوى سطح البحر، ثم حُلَّها.

42 **تمثيلات متعددة:** ارسم خط الأعداد.

a) هندسي: اختر خمسة أعداد صحيحة على خط الأعداد، وارمز إليها بالرموز A, B, C, D, F .

b) جدولة: املأ الفراغات في الجدولين أدناه مستعملًا أحد الرمزين $>$ أو $<$ ، وذلك بالاعتماد على قيم الأعداد التي اخترتها في الفرع a .

A ____ B	$A - C$ ____ $B - C$ $A - D$ ____ $B - D$ $A - F$ ____ $B - F$
B ____ A	$B - C$ ____ $A - C$ $B - D$ ____ $A - D$ $B - F$ ____ $A - F$

A ____ B	$A + C$ ____ $B + C$ $A + D$ ____ $B + D$ $A + F$ ____ $B + F$
B ____ A	$B + C$ ____ $A + C$ $B + D$ ____ $A + D$ $B + F$ ____ $A + F$

c) تعبير لفظي: صف النمط في الجدولين السابقين.

d) جبري: صف النمط السابق جبريًّا باستعمال المتغير x مكان كل من C, D, F .

مسائل مهارات التفكير العليا

43 **اكتشف الخطأ:** قامت كل من ليلى وعلياء بحل المعادلة $|3x + 14| = -6x$ كما يأتي. أيُّهما حلُّها صحيح؟ برِّر إجابتك.

ليلى

$|3x + 14| = -6x$

$3x + 14 = -6x$ أو $3x + 14 = 6x$

$9x = -14$ ✓ $x = -\frac{14}{9}$

$14 = 3x$ ✓ $x = \frac{14}{3}$

علياء

$|3x + 14| = -6x$

$3x + 14 = -6x$ أو $3x + 14 = 6x$

$9x = -14$ ✓ $x = -\frac{14}{9}$

$14 = 3x$ ✗ $x = \frac{14}{3}$

44) **تحدٍّ:** أوجد جميع حلول المعادلة $|2x-1|+3=|5-x|$. (**إرشاد:** هناك أربع حالات ممكنة للحل).

تبرير: إذا كانت a, x, y ثلاثة أعداد حقيقية، فأي العبارات الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا؟ برِّر إجابتك.

45) إذا كان $|a|>7$، فإن $|a+3|>10$.

46) إذا كان $|x|<3$، فإن $|x+3|>0$.

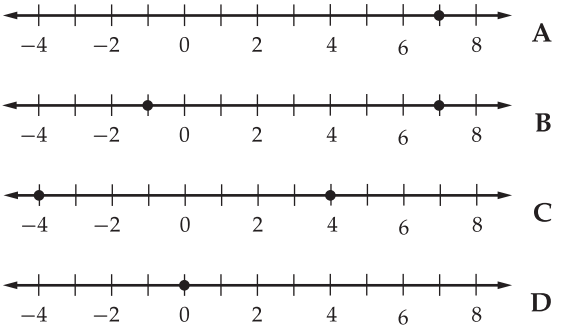
47) إذا كان $1<y<5$، فإن $|y-3|\le 2$.

48) **مسألة مفتوحة:** إذا كان كل من $a, b, c, d \neq 0$، فاكتب معادلة قيمة مطلقة على الصورة $|ax+b|=cx+d$، بحيث تكون مجموعة حلها $\varnothing$.

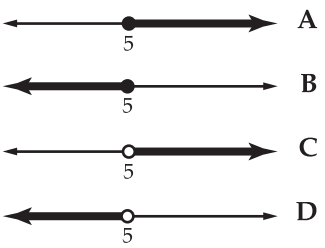
49) **اكتب:** بخطوات مفصّلة كيفية حَلّ معادلة على الصورة $a|x-b|+c=d$ لإيجاد قيمة x.

تدريب على اختبار معياري

50) أي تمثيل بياني مما يأتي يمثِّل حَلّ المعادلة $|x-3|-4=0$؟ **B**



51) أي مما يأتي يمثِّل $\{x \mid x<5, x\in R\}$؟



مراجعة تراكمية

سمِّ مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي: (الدرس 1-1)

52) $-\frac{12}{19}$ **53)** $\sqrt{7}$ **54)** -8.11 **55)** 2π

أكتب كلًّا من مجموعات الأعداد الآتية بإستعمال الصفة المميزة: (الدرس 1-1)

56) $\{-2,-1,0,1\}$ **57)** $-4\le x<3$

عبر عن كلًّا من مجموعات الأعداد الآتية بإستعمال رمز الفترة: (الدرس 1-1)

58) $x\le 75$ **59)** $x>5$ أو $x<0$

مراجعة المتطلبات السابقة

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

60) $15x+5=35$ **61)** $2.4y+4.6=20$ **62)** $8a+9=6a-7$

63) $3(w-1)=2w-6$ **64)** $\frac{1}{2}(2b-4)=2+8b$ **65)** $\frac{1}{3}(6p-24)=18+3p$

اختبار منتصف الفصل

الدرسان 1-1, 1-2

سمِّ مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي: (الدرس 1-1)

1) $\frac{25}{11}$

2) $-\frac{128}{32}$

3) $\sqrt{50}$

4) -32.4

عبر عن كلًّا من مجموعات الأعداد الآتية بإستعمال رمز الفترة ومثلها على خط الأعداد: (الدرس 1-1)

5) $-5 \le x \le 13$

6) $x \ge -4$

7) $x < 15$

8) $x > -4$ أو $x < -8$

9) ما مجموع الأعداد التي ينتمي إليها العدد $\sqrt{3}$ ؟ (الدرس 1-1)

A Z , Q

B W , Q

C I , R

D N , W , Q

10) **ألعاب مسلية:** تلعب جميلة وهند لعبة، حيث تطلب جميلة من هند أن تقدِّر طولها. تفوز هند إذا قدَّرت طول جميلة بخطأ لا يتعدى 3 cm عن طولها الحقيقي. إذا علمت أن طول جميلة 128 cm. فاكتب معادلة تعطي أصغر وأكبر طول تقديري لجميلة، بحيث تفوز هند بهذه اللعبة ثم حلها. (الدرس 1-2)

إذا كانت $a = -3\ ,\ b = 5,\ c = -4$ فأوجد قيمة كل ممّا يأتي: (الدرس 1-2)

11) $|a - 2|$

12) $8\,|c + 7|$

13) $3\,|a - b| - 1$

14) $|c + b| - |a|$

15) يقيس ميزان نابضي الأوزان بزيادة أو نقصان مقدارها 0.005 kg، ما أكبر وزن حقيقي ممكن لجسم وزنه 13kg باستعمال هذا الميزان؟ (الدرس 1-2)

حُلّ كلَّ معادلة مما يأتي، ثم تحقَّق من صحة حلّك:

16) $|2x - 3| = 5$

17) $|x + 1| = 2x - 6$

18) $|x + 17| = -1$

19) $3x + 1 = |4x - 2|$

20) إذا كان a عددًا حقيقيًّا يحقق $|a| = -a$، فماذا يعني ذلك؟ (الدرس 1-2)

1-3

حَلّ المتباينات الخطية في متغير واحد
Solving Linear Inequalities in One Variable

فيما سبق

درستُ حَلّ معادلات تحتوي قيمًا مطلقة.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أحلّ متباينات بخطوة واحدة.
- أحلّ متباينات بعدة خطوات.

المفردات الأساسية

الصفة المميزة للمجموعة
set-builder notation

رمز الفترة
interval notation

متباينة
Inequality

www.obeikaneducation.com

لمـــاذا؟

تفاضل خولة بين عرضين مقدّمين من شركة اتصالات، ويُبيّن الجدول أدناه تفاصيل كل من العرضين.

	العرض الأول	العرض الثاني
الاشتراك الشهري	BD 12	BD 30
عدد الدقائق المجانية ضمن العرض	400	2000
سعر الدقيقة الإضافية الواحدة	BD 0.033	BD 0.030

للمقارنة بين العرضين واختيار العرض الأفضل يمكنك استعمال المتباينات. تلاحظ أن الاشتراك الشهري للعرض الأول أقل منه للعرض الثاني، حيث $BD12 < BD30$. في حين أن سعر الدقيقة الواحدة في العرض الأول أكبر منها في العرض الثاني، حيث $BD0.030 > BD0.033$.

حَلّ متباينات بخطوة واحدة: لأي عددين حقيقيين a, b تكون واحدة من العبارات الآتية صحيحة:

$$a < b \quad , \quad a = b \quad , \quad a > b$$

إضافة العدد نفسه أو طرحه من كلا طرفي المتباينة لا يغير صحة المتباينة.

مفهوم أساسي — **خصائص التباين**

أضف إلى مطويتك

خاصية الجمع للمتباينات

التعبير اللفظي لأي ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c:

إذا كان $a > b$، فإن $a + c > b + c$.

إذا كان $a < b$، فإن $a + c < b + c$.

أمثلة

$-1 < 5$

$-1 + 3 < 5 + 3$

$2 < 8$

خاصية الطرح للمتباينات

التعبير اللفظي لأي ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c:

إذا كان $a > b$، فإن $a - c > b - c$.

إذا كان $a < b$، فإن $a - c < b - c$.

أمثلة

$8 > 3$

$8 - (-4) > 3 - (-4)$

$12 > 7$

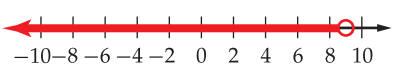
هذه الخصائص صحيحة أيضًا في حالة $\leq$ ، $\geq$ ، $\neq$

يمكن استعمال هذه الخصائص لحل المتباينات، كما يمكن تمثيل مجموعة حَلّ المتباينة في متغير واحد على خط الأعداد، وتكتب مجموعة حَلّ المتباينة باستعمال الصفة المميزة للمجموعة أو الفترات.

مثال 1 حَلّ المتباينات باستعمال خاصيتي الجمع والطرح

أوجد مجموعة حل المتباينة $x - 6 < 3$، ثم مثّلها على خط الأعداد.

المتباينة الأصلية	$x - 6 < 3$
بإضافة 6 إلى طرفي المتباينة	$x - 6 + 6 < 3 + 6$
بالتبسيط	$x < 9$



أي عدد حقيقي أقل من 9 هو حَلّ للمتباينة ويمكن كتابة مجموعة الحل باستعمال الصفة المميزة للمجموعة على النحو $\{x \mid x < 9, x \in R\}$. ويمكن تمثيل مجموعة الحل على خط الأعداد.

تحقق: عوّض بـ 8 ثم 10 عن x في المتباينة الأصلية $x - 6 < 3$. يجب أن تكون المتباينة صحيحة عندما $x = 8$، وخاطئة عندما $x = 10$.

تأكد

أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم مثّلها على خط الأعداد:

1A) $5w + 3 > 4w + 9$ **1B)** $5x - 3 > 4x + 2$

إن ضرب كلا طرفي المتباينة في عدد موجب، أو قسمتهما عليه لا يغير من اتجاه رمز المتباينة، على حين أن الضرب في عدد سالب، أو القسمة عليه يتطلّب عكس اتجاه رمز المتباينة. فعلى سبيل المثال يُعكس الرمز ≤ إلى ≥.

مفهوم أساسي خصائص التباين

أضف إلى مطويتك

خاصية الضرب للمتباينات

التعبير اللفظي	لأي ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c	أمثلة
حيث c عدد موجب	إذا كان $a > b$، فإن $ac > bc$.	$-5 < -3$ $-5(6) < -3(6)$ $-30 < -18$
	إذا كان $a < b$، فإن $ac < bc$.	
حيث c عدد سالب	إذا كان $a > b$، فإن $ac < bc$.	$12 > -7$ $12(-4) < -7(-4)$ $-48 < 28$
	إذا كان $a < b$، فإن $ac > bc$.	

خاصيّة القسمة للمتباينات

التعبير اللفظي	لأي ثلاثة أعداد حقيقية c, b, a	أمثلة
حيث c عدد موجب	إذا كان $a > b$، فإن $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.	$-12 < -8$ $\frac{-12}{4} < \frac{-8}{4}$ $-3 < -2$
	إذا كان $a < b$، فإن $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.	
حيث c عدد سالب	إذا كان $a > b$، فإن $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.	$-21 < -14$ $\frac{-21}{-7} > \frac{-14}{-7}$ $3 > 2$
	إذا كان $a < b$، فإن $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.	

هذه الخصائص صحيحة أيضًا في حالة ≤ ، ≥ ، ≠

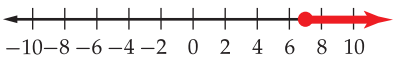
مثال 2 حَلّ متباينة باستعمال خاصيتي الضرب أو القسمة

أوجد مجموعة حل المتباينة $-4.2x \leq -29.4$ ، ثم مثّلها على خط الأعداد.

المتباينة الأصلية	$-4.2x \leq -29.4$
بقسمة كلا الطرفين على -4.2 ، وعكس اتجاه رمز المتباينة	$\frac{-4.2x}{-4.2} \geq \frac{-29.4}{-4.2}$
بالتبسيط	$x \geq 7$

مجموعة الحل باستعمال الصفة هي $\{x | x \geq 7 , x \in R\}$.

أو باستعمال رمز الفترات هي $[7 , \infty)$ ، وتمثيلها على خط الأعداد مبيّن أدناه.



تحقق: عوّض بـ 6، ثم 8 عن x في المتباينة الأصلية $-4.2x \leq 29.4$ ، يجب أن تكون المتباينة صحيحة عندما $x = 8$، وخاطئة عندما $x = 6$. ✓

إرشادات للدراسة

عند الضرب في عدد سالب، أو القسمة على عدد سالب، تذكّر أن تعكس اتجاه رمز المتباينة.

تأكد

أوجد مجموعة حل كلًا من المتباينتين الآتيتين، ثم مثّلها على خط الأعداد:

(2A) $-4x \geq -24$ **(2B)** $-9.2y < 23$

حَلّ المتباينات بعدة خطوات يشبه حَلّ المتباينات بعدة خطوات حَلّ المعادلات بعدة خطوات.

مثال 3 حَلّ المتباينات بعدة خطوات

أوجد مجموعة حل المتباينة $-4c \leq \frac{5c + 58}{6}$ ، ثم مثّلها على خط الأعداد.

المتباينة الأصلية	$-4c \leq \frac{5c + 58}{6}$
بضرب كلا الطرفين في 6	$-24c \leq 5c + 58$
بإضافة $-5c$ لكلا الطرفين	$-29c \leq 58$
بقسمة كلا الطرفين على -29 ، وعكس اتجاه رمز المتباينة	$c \geq -2$

مجموعة الحل هي $\{c | c \geq -2 , c \in R\}$ ، وتمثيلها على خط الأعداد مبيّن أدناه.

تحقق: عوّض بـ -3 ، ثم -1 بدلًا من c في المتباينة الأصلية $-4c \leq \frac{5c + 58}{6}$ ، يجب أن تكون المتباينة صحيحة عندما $c = -1$، وغير صحيحة عندما $c = -3$. ✓

تأكد

أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم مثّلها على خط الأعداد:

(3A) $-3x \leq \frac{-4x + 22}{5}$ **(3B)** $8y \geq \frac{-5y + 9}{-4}$

(3C) $-6(-4v + 3) \leq 2(10v + 3)$ **(3D)** $-5(3d - 7) > 3(2d + 14)$

الربط مع واقع الحياة

كان عدد مواقع الإنترنت المختلفة عام 2007 108000000 موقع.

مثال 4 كتابة المتباينة وحلها

دعاية إلكترونية: تدفع إحدى الشركات مبلغ BD 75 أجرة شهرية مقابل وضع إعلان لها على أحد مواقع الدعاية الإلكترونية، بالإضافة إلى BD 0.25 عن كل زائر للموقع يقرأ هذا الإعلان، ما أقل عدد من الزوّار يجب أن يقرأ الإعلان ليحصل الموقع الدعائي على BD 250 أو أكثر شهريًا من هذه الشركة؟

افهم: افترض أن c هو عدد الزوار الذين يقرأون الإعلان. يحصل الموقع على BD 75 شهريًّا، بالإضافة إلى BD 0.25 عن كل زائر يقرأ الإعلان. يريد القائمون على الموقع الحصول على مبلغ لا يقل عن BD 250 مقابل هذا الإعلان.

خطط: اكتب متباينة.

التعبير اللفظي: الدخل الشهري هو BD 75، بالإضافة إلى BD 0.25 عن كل زائر. والدخل الكلي يجب أن يكون BD 250 على الأقل.

الرموز: افترض أن c تمثّل عدد الزوار الّذين يقرأون الإعلان شهريًّا.

المتباينة:

الأجرة الشهرية	بالإضافة إلى	أجرة إضافية عن كل زائر	يساوي على الأقل	250 دينارًا
75	+	$0.25c$	$\geq$	250

حُلّ:

المتباينة الأصلية	$75 + 0.25c \geq 250$
بطرح 75 من كلا الطرفين	$0.25c \geq 175$
بقسمة كلا الطرفين على 0.25	$c \geq 700$

تحقق:

المتباينة الأصلية	$75 + 0.25c \geq 250$
بتعويض بـ 700 مكان c	$75 + 0.25(700) \stackrel{?}{\geq} 250$
بالضرب	$75 + 175 \stackrel{?}{\geq} 250$
بالجمع	$250 \geq 250$ ✓

للحصول على مبلغ شهري من هذا الإعلان أكثر من أو يساوي BD 250، يجب أن يكون عدد زوار الموقع الذين يقرأون الإعلان شهريًّا 700 زائر على الأقل.

تأكد

4) اشترك أسامة في أحد عروض الهاتف المحمول، فكان عليه أن يدفع اشتراكًا شهريًّا مقداره BD 5، بالإضافة إلى BD 0.02 عن كل دقيقة اتصال فوق عدد الدقائق المسموح بها في العرض. كم دقيقة اتصال يمكن أن يجريها أسامة، على ألا تزيد التكلفة الشهرية عن BD 7؟

تأكد من فهمك

الأمثلة 1-3
الصفحتان 28,29

أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم مثّلها على خط الأعداد:

1) $b + 6 < 14$

2) $12 - d > -8$

3) $18 \leq -3x$

4) $-5y \geq -35$

5) $-4w - 13 > -21$

6) $8z - 9 \geq -15$

7) $s \geq \frac{s+6}{5}$

8) $\frac{2x-9}{4} \leq x + 2$

مثال 4
صفحة 30

9) حمولة: جمع عبدالكريم منتجات مزرعته من التمور في صناديق يزن كل منها 24 kg، ويريد نقلها إلى السوق في شاحنة، على ألّا تزيد حمولة الشاحنة عن 1000 kg، ويريد أيضًا اصطحاب أرضية خشبية تزن 34 kg ليعرض عليها منتجاته، ما أكبر عدد من الصناديق التي يمكن أن ينقلها عبدالكريم بأمان في كل حمولة؟

الأمثلة 3-1
الصفحتان 28,29

أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم مثّلها على خط الأعداد:

10) $m - 8 > -12$ **11)** $n + 6 \le 3$ **12)** $6r < -36$

13) $-12t \ge -6$ **14)** $-\frac{w}{4} \le -7$ **15)** $\frac{k}{3} - 14 < -5$

16) $4x - 15 \le 21$ **17)** $-6z - 14 > -32$ **18)** $-16 \ge 5(2z - 11)$

19) $12 < -4(3c - 6)$ **20)** $\frac{3y - 4}{0.2} - 8 > 12$ **21)** $\frac{9z + 5}{4} + 18 < 26$

مثال 4
صفحة 30

22) رياضة: تُحتسب درجة المتسابق النهائية في إحدى المسابقات الرياضية بإضافة 75% من درجة إتقان المهارات الرياضية إلى 25% من درجة اللياقة البدنية، على أن تكون درجة المتسابق النهائية من 10. إذا حصل أحد المتسابقين على 7.6 درجات في إتقان المهارات، فكم يجب أن تكون درجته في اللياقة البدنية لتكون درجته النهائية 8 على الأقل؟

عرّف متغيرًا واستعمله في التعبير عن كل مما يأتي بمتباينة، ثم حلها:

23) ثلاثة أمثال عدد ما مطروحًا منه 12 أقل من 21 .

24) ناتج قسمة ثلاثة أمثال عدد ما على 4 يساوي 16− على الأقل.

25) ناتج طرح العدد 6 من خمسة أمثال عدد ما أكبر من العدد.

26) ناتج جمع عدد ما إلى 3 مقسومًا على 6 أقل من 2− .

27) نزهة برية: قطع أحمد ما لا يقل عن 18 km سيرًا على الأقدام في نزهة برية، إذا كان معدل سرعته 3 km/h، واستراح ساعتين في أثناء النزهة، فحلُّ المتباينة $3(x - 2) \ge 18$ لمعرفة عدد الساعات التي أمضاها أحمد في هذه النزهة.

الربط مع واقع الحياة

يُعد درب الآبالاش البري الممتد بطول 2175 mi بين ولايتي جورجيا وماين الأمريكيتين الأطول في العالم، ويمر عبر غابات وسلاسل جبلية.

المصدر :
Appalachian Trial Conservancy

أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم مثّلها على خط الأعداد:

28) $18 - 3x < 12$ **29)** $-8(4x + 6) < -24$ **30)** $\frac{1}{4}n + 12 \ge \frac{3}{4}n - 4$

31) $0.24y - 0.64 > 3.86$ **32)** $10x - 6 \le 4x + 42$ **33)** $-6v + 8 > -14v - 28$

34) $n > \frac{-3n - 15}{8}$ **35)** $-2r < \frac{6 - 2r}{5}$ **36)** $\frac{9z - 4}{5} \le \frac{7z + 2}{4}$

37) مال: يعمل يوسف مندوبًا للمبيعات، ويتقاضى راتبًا أسبوعيًّا يبلغ BD 60 ، بالإضافة إلى 2% من قيمة كل صفقة يجريها. إذا كان متوسط قيمة الصفقات التي يجريها BD 200، فكم صفقة يجب أن يجري يوسف أسبوعيًّا للحصول على راتب أسبوعي لا يقل عن BD 180؟

a) اكتب متباينة تصف هذا الموقف.

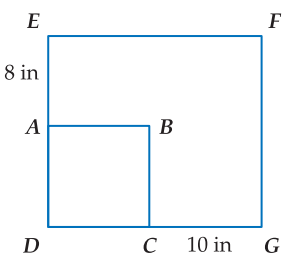
b) حِلْ المتباينة في الفرع **a** ، وبرِّر إجابتك.

عرّف متغيرًا، واستعمله في التعبير عن كل من التمرينين 38,39 بمتباينة، ثم حِلّها.

38) ناتج جمع خمسة أمثال عدد ما إلى 3 مقسومًا على 3، أقل من ناتج جمع ستة أمثال العدد نفسه إلى 5 مقسومًا على 4.

39) مجموع ثلث عدد ما إلى 4 يساوي على الأكثر ناتج جمع مثلي ذلك العدد إلى 12 .

40) هندسة: تمدد المربع $ABCD$ بصورة غير منتظمة ليصبح المستطيل $DEFG$. وكان محيط المستطيل الناتج يساوي مثلي محيط المربع على الأقل، ما أكبر طول ممكن لضلع المربع $ABCD$؟



الربط مع واقع الحياة

يُعد سباق ماراثون البحرين أقدم سباقات الجري في الشرق الأوسط، ويشارك فيه رياضيّون من البحرين والمنطقة.

41 ماراثون: يتدرب عبدالعزيز ليكون قادرًا على المشاركة في سباق ماراثون البحرين، والذي مسافته 26.2 mi، وبحسب النصائح الرياضية، يكون للمتسابق القدرة على إنهاء سباق طوله 3 أمثال مسافة التدريب التي يجريها يوميًّا.

a) إذا كان عبدالعزيز يتدرَّب يوميًّا على الجري مسافة 5 mi، فاكتب متباينة تُبيِّن عدد الأميال التي يتعيّن على عبدالعزيز زيادتها على مسافة التدريب اليومي؛ ليكون قادرًا على إنهاء السباق.

b) حِلْ المتباينة في الفرع a.

42 مال: يُبيّن الجدول المجاور عرضين مختلفين لسعر استئجار سيارة. ما المسافة التي يكون عندها سعر العرض B أقل منه للعرض A؟ استعمل المتباينة $0.10x + 11 < 0.05x + 13$. ووضِّح لماذا تكون هذه المتباينة مناسبة.

أجرة استئجار سيارة		
العرض	الأجرة اليومية	أجرة الكيلومترات المقطوعة
A	BD 11	BD 0.10
B	BD 13	BD 0.05

43 تمثيلات متعددة: سوف تستكشف في هذا التمرين كيفية تمثيل المتباينات بيانيًّا.

a) جدولة: عوّض 5 أزواج مرتبة في المتباينة $y \geq -\frac{1}{2}x + 3$ ورتِّب النواتج في جدول، وحدّد ما إذا كانت النقاط تحقق المتباينة أم لا بالإجابة بـ "نعم" أو "لا".

b) تمثيل بياني: مثّل المعادلة $y = -\frac{1}{2}x + 3$ بيانيًّا في المستوى نفسه، ثم مثّل النقاط الخمس في الفرع a، وحدّد ما إذا كانت النقاط تحقق المعادلة أم لا بالإجابة بـ "نعم" أو "لا".

c) تعبير لفظي: صف النمط في النقاط التي اخترتها. وقدّم تخمينًا للنقاط التي تجعل المتباينة صحيحة، والأخرى التي تجعلها خاطئة.

مسائل مهارات التفكير العليا

44 تحدٍّ: إذا كان $0.25 < y < 4$، $-4 < x < 5$، فإن $a < \frac{x}{y} < b$. مما قيمة $a + b$؟

45 اكتشف الخطأ: قارنت هدى ونورة بين حلّيهما لسؤال الواجب المنزلي، أيهما حلُّها صحيح؟ برِّر إجابتك.

هدى

$$\frac{4x+5}{-2} - 1 > -3$$
$$\frac{4x+5}{-2} < -2$$
$$4x + 5 > 4$$
$$4x > -1$$
$$x > -\frac{1}{4}$$

نورة

$$\frac{4x+5}{-2} - 1 > -3$$
$$\frac{4x+5}{-2} > -2$$
$$4x + 5 > 4$$
$$4x > -1$$
$$x > -\frac{1}{4}$$

46 تبرير: حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا؟ برِّر إجابتك.

"النظير الجمعي للقيمة المطلقة لعدد سالب أقل من النظير الجمعي لذلك العدد".

47 مسألة مفتوحة: اكتب متباينة على الصورة $ax + b > c(x + d)$ على أن تكون مجموعة الحل هي مجموعة الأعداد الحقيقية. فسّر كيف عرفت ذلك؟

48 اكتب: لماذا يجب عكس اتجاه رمز المتباينة عند الضرب، أو القسمة على عدد حقيقي سالب؟

تدريب على اختبار معياري

49) a, b, c ثلاثة أعداد حقيقيّة، حيث $c < 0$. إذا كانت $a < b$، فأي مما يأتي صحيح؟

F $ac > bc$

G $a + c > b + c$

H $a - b > b - c$

J $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

50) ما حَلّ المعادلة $|8 - 4x| = 40$ ؟

A $x = 8 , x = 12$

B $x = 8 , x = -12$

C $x = -8 , x = -12$

D $x = -8 , x = 12$

مراجعة تراكمية

حِلْ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقَّق من صحة حلِّك: (الدرس 2-1)

51) $|x - 5| = 12$

52) $7|3y - 4| = 35$

53) $|a + 6| = a$

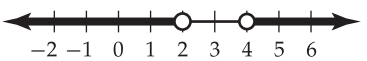
54) فضاء: يدور كوكب بلوتو حول الشمس في مسار بيضوي. إذا كانت أبعد مسافة بينه وبين الشمس في مساره 4539 مليون ميل، وأقرب مسافة 2756 مليون ميل. اكتب معادلة يمكن حلها لإيجاد أبعد مسافة وأقرب مسافة بين الشمس وكوكب بلوتو. (الدرس 2-1)

55) عبر عن كلٍ مما يأتي على صورة فترة: (الدرس 1-1)

a) شرط قبول سائق شاحنة في إحدى الشركات أن يكون العمر أكبر من 22 سنة وأقل من 45 سنة.

b) يعتبر المبنى أثريًا إذا كان عمره لا يقل عن 100 سنة.

56) عبر عن المتباينة الممثلة على خط الأعداد بالصفة المميزة: (الدرس 1-1)



مراجعة المتطلبات السابقة

حِلْ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقَّق من صحة حلِّك:

57) $|x| = 9$

58) $|x + 3| = 10$

59) $|4y - 15| = 13$

60) $18 = |3x - 9|$

61) $16 = 4|w + 2|$

62) $|y + 3| + 4 = 20$

1-4

حَلّ المتباينات المركّبة ومتباينات القيمة المطلقة

Solving Compound and Absolute Value Inequalities

فيما سبق

درستُ حَلّ متباينات بخطوة واحدة وأخرى بعدة خطوات.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أحُلّ متباينات مركّبة.
- أحُلّ متباينات القيمة المطلقة.

المفردات الأساسية

المتباينة المركبة
compound inequality

التقاطع
intersection

الاتحاد
union

متباينة القيمة المطلقة
Absolute Value Inequalities

www.obeikaneducation.com

لمـــاذا؟

يقوم علماء الأحياء المائية بتكثير الدلافين، وذلك بنقلها من بيئتها الطبيعية إلى برك ذات ظروف مثالية، حيث درجة حرارة الماء لا تقل عن 22°C، ولا تزيد على 29°C. وهي درجة حرارة الماء t المثالية لعيش الدلافين، والتي يمكن التعبير عنها بالمتباينة المركبة الآتية:

$$t \geq 22 \text{ و } t \leq 29$$

المتباينات المركبة تتكوَّن **المتباينة المركبة** من متباينتين بينهما أداة الربط (و) أو (أو). ولحل المتباينة المركبة، يجب حَلّ المتباينتين المكوِّنتين لها كل على حدة.

مفهوم أساسي **المتباينات المركبة التي تحتوي أداة الربط (و)**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي تكون المتباينة المركبة التي تحتوي أداة الربط (و) صحيحة إذا وفقط إذا كانت المتباينتان المكوّنتان لها صحيحتين. وتمثيل مجموعة حَلّ المتباينة المركبة التي تحتوي أداة الربط (و) على خط الأعداد هو **تقاطع** مجموعتي حَل المتباينتين المكوّنتين لها.

مثال

$x \geq -4$

$x < 3$

$x \geq -4$ و $x < 3$

يمكن كتابة المتباينة المركبة $x < 3$ و $x \geq -4$ على الصورة $-4 \leq x < 3$ ، وكلا الصورتين تُقرءان x أكبر من أو يساوي -4 وأقل من 3.

إرشادات للدراسة

تقاطع مجموعتين هو مجموعة العناصر المشتركة بينهما فقط

مثال 1 **حَلّ متباينة مركبة تحتوي على أداة الربط (و)**

أوجد مجموعة حَلّ كلّ متباينة مركبة مما يأتي، ثم مثِّلها على خط الأعداد.

a) $-2 \leq x - 3 < 4$

الطريقة 1: أعد كتابة المتباينة باستعمال أداة الربط (و)، ثم حِلْ كل متباينة على حدة.

اكتب المتباينتين: $x - 3 < 4$ و $-2 \leq x - 3$

بإضافة العدد 3 لطرفي المتباينة: $x - 3 + 3 < 4 + 3$ $\quad -2 + 3 \leq x - 3 + 3$

بالتبسيط: $x < 7$ $\quad 1 \leq x$

$1 \leq x < 7$

مجموعة الحل بالصفة المميزة هي $\{x \mid 1 \leq x < 7, x \in R\}$ باستعمال رمز الفترة هي $[1, 7)$

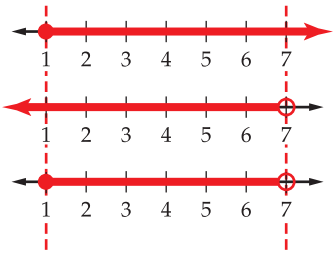
الطريقة 2: حُلّ المتباينتين معًا.

أضف العدد 3 إلى كل جزء في المتباينة.

$-2 + 3 \leq x - 3 + 3 < 4 + 3$

بالتبسيط: $1 \leq x < 7$

والآن مثّل مجموعة الحل.



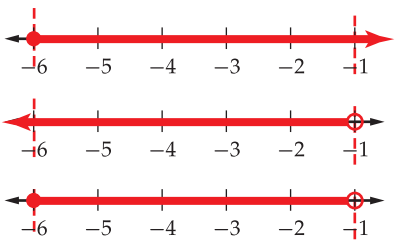
b) $5y + 8 < 3$ و $2 - 3y \le 20$

$5y + 8 < 3$		و	$2 - 3y \le 20$	
إضافة العدد (-8) لطرفي المتباينة			إضافة العدد (-2) لطرفي المتباينة	
$5y + 8 + (-8) < 3 + (-8)$			$2 - 3y + (-2) \le 20 + (-2)$	
$5y < -5$	بالتبسيط		$-3y \le 18$	بالتبسيط
$y < -1$	بالقسمة على 5		$y \ge -6$	بالقسمة على -3

$-6 \le y < -1$

مجموعة الحل بالصفة المميزة هي $\{ y \mid -6 \le y < -1 , y \in R \}$ باستعمال رمز الفترة هي $[-6,-1)$

والآن مثّل مجموعة الحل.



تأكد

أوجد مجموعة حَلّ كل متباينة مركبة مما يأتي، ثم مثّلها على خط الأعداد:

1A) $y - 3 \ge -11$ و $y - 3 \le -8$ **1B)** $-12 \le 4x + 8 \le 32$ **1C)** $-5 \ge -z - 2 > -14$

والآن ستتعرف على المتباينة المركبة التي تحتوي على أداة الربط (أو).

مفهوم أساسي — **المتباينات المركبة التي تحتوي أداة الربط (أو)**

اضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي تكون المتباينة المركبة التي تحتوي أداة الربط (أو) صحيحة، إذا كانت إحدى المتباينتين المكوّنتين لها أو أكثر صحيحة.

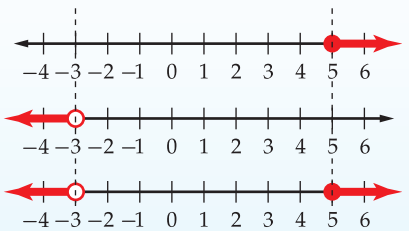
تمثيل مجموعة حَلّ المتباينة المركبة التي تحتوي أداة الربط (أو) على خط الأعداد هو اتحاد مجموعتي حَلّ المتباينتين المكوّنتين لها على خط الأعداد.

مثال

$x \ge 5$

$x < -3$

$x \ge 5$ أو $x < -3$



إرشادات للدراسة

اتحاد مجموعتين هو مجموعة جميع عناصر المجموعة الأولى والثانية دون تكرار

مثال 2 حَلّ متباينة مركبة تحتوي أداة الربط (أو)

أوجد مجموعة حَلّ المتباينة المركبة $k + 6 < -4$ أو $3k \geq 15$، ثم مثّلها على خط الأعداد:

حِلْ كلًا من المتباينتين المكوّنتين للمتباينة المركبة على حدة .

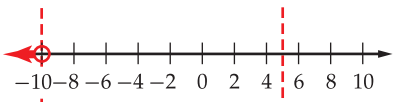
$3k \geq 15$ أو $k + 6 < -4$

$k \geq 5$ $k < -10$

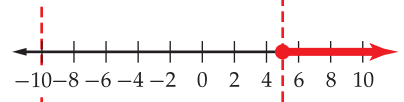
$k < -10$ أو $k \geq 5$

مجموعة الحل هي $\{k \mid k < -10$ أو $k \geq 5, k \in R\}$ باستعمال رمز الفترة هي $(-\infty, -10) \cup [5, \infty)$

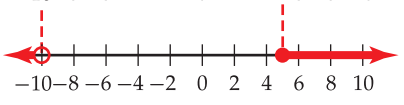
مثّل $k < -10$ على خط الأعداد



مثّل $k \geq 5$ على خط الأعداد



حدّد منطقة الاتحاد



تأكد

أوجد مجموعة حَلّ كلٍّ من المتباينتين المركبتين الآتيتين، ثم مثّلها على خط الأعداد:

(2A) $-3j \geq 21$ أو $5j \geq 15$

(2B) $2g + 4 < -15$ أو $g - 6 > -11$

عند حل مسائل حياتية على المتباينات استعمل أحد الرمزين ≤ أو ≥ عند وجود كلمات تدل على تضمين طرف المتباينة في الحل مثل (على الأكثر)، أو (على الأقل). واستعمل أحد الرمزين < أو > عند ورود كلمات مثل (بين)، (أقل من)، (أكبر من).

مثال 3 من واقع الحياة كتابة متباينة مركبة وتمثيلها على خط الأعداد

صوت: **يمكن أن تسمع أُذن الإنسان الأصوات التي لا يقل ترددها عن 20 هرتز ولايزيد على 20000 هرتز. اكتب المتباينة المركّبة التي تمثّل الترددات التي يسمعها الإنسان، ومثّلها على خط الأعداد.**

التعبير اللفظي: التردد لا يزيد عن 20000 هرتز والتردد لا يقل عن 20 هرتز

الرموز: افترض أن f تمثل التردد

المتباينة: $20 \leq f$ و $20000 \geq f$

والآن مثّل مجموعة الحل على خطّ الأعداد.

لاحظ أن التمثيلين يتقاطعان. أي أن الإنسان يستطيع سماع الأصوات التي ترددها أقل من أو تساوي 20000 هرتز، وأكبر من أو تساوي 20 هرتز. والمتباينة المركبة هي: $20 \leq f \leq 20000$

تأكد

3) صناعة: تنتج شركة جهازًا لا يقل طوله عن 11.2 cm، ولا يزيد عن 11.4 cm. اكتب متباينة مركبة تصف الأطوال الممكنة لهذا الجهاز، ومثّلها على خط الأعداد.

متباينات القيمة المطلقة تعلمت في الدرس 2–1 أن القيمة المطلقة لأي عدد، هي البُعد بين ذلك العدد والصفر على خط الأعداد، ويمكنك الآن استعمال هذا التعريف لحل متباينات تحتوي قيمًا مطلقة.

مثال 4 حَلّ متباينات القيمة المطلقة

أوجد مجموعة حَلّ كلٍّ من المتباينات الآتية، ثم مثّلها على خط الأعداد:

a) $|x| < 3$

تعني المتباينة $|x| < 3$ ، أن المسافة بين العدد x والصفر أقل من 3 وحدات على خط الأعداد. ولتكن $|x| < 3$ صحيحة، عوّض عن x بأعداد تبعُد مسافة أقل من 3 وحدات عن الصفر.

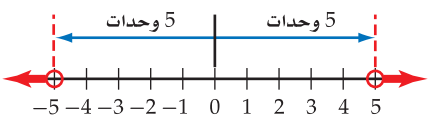
لاحظ أن تمثيل مجموعة الحل للمتباينة $|x| < 3$ على خط الأعداد هو التمثيل نفسه لمجموعة حل المتباينة المركبة $x > -3$ و $x < 3$.

جميع الأعداد الواقعة بين -3 و 3 تبعُد مسافة أقل من 3 وحدات عن الصفر. أي أن مجموعة الحل بالصفة المميزة هي $\{x | -3 < x < 3 , x \in R\}$. وباستعمال رمز الفترة هي $(-3,3)$

b) $|x| > 5$

تعني المتباينة $|x| > 5$ ، أن المسافة بين العدد x والصفر على خط الأعداد أكبر من 5 وحدات. ولتكن $|x| > 5$ صحيحة. عوّض عن x بأعداد تبعُد مسافة أكبر من 5 وحدات عن الصفر.

لاحظ أن تمثيل مجموعة الحل للمتباينة $|x| > 5$ على خط الأعداد هو التمثيل نفسه لمجموعة حل المتباينة المركبة $x < -5$ أو $x > 5$.



جميع الأعداد الواقعة بين -5 و 5 بما فيها العددان -5 و 5 هي على مسافة لا تزيد على 5 وحدات عن الصفر. أي أن مجموعة الحل بالصفة المميزة هي $\{x | -5 > x$ أو $x > 5 , x \in R\}$.

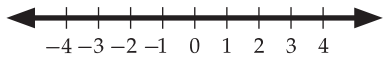
وباستعمال رمز الفترة هي $(-\infty,-5) \cup (5,\infty)$

c) $|y| < -4$

تعني المتباينة $|y| < -4$ ، أن المسافة بين العدد y والصفر على خط الأعداد أقل من -4 وحدات، وحيث أن المسافة هي قيمة موجبة دائمًا، فإن مجموعة الحل هي ϕ أو $\{\ \}$.

d) $|z| > -1$

تعني المتباينة $|z| > -1$ ، أن المسافة بين العدد z والصفر على خط الأعداد أكبر من -1 وحدة، وحيث أن المسافة هي قيمة موجبة دائمًا، فإن مجموعة الحل هي جميع الأعداد الحقيقية R.



تأكد

أوجد مجموعة حَلّ كل متباينة مما يأتي، ثم مثِّلها على خط الأعداد:

(4A) $|t| < 6$

(4B) $|u| < -3$

(4C) $|t| > 3$

(4D) $|u| > -2$

إرشادات للدراسة

متباينات القيمة المطلقة بما أن القيمة المطلقة لأي عدد لا يمكن أن تكون سالبة، فإن متباينات القيمة المطلقة التي على الصورة $|x| < -5$ ليس لها حَلّ. على حين أن حَلّ المتباينة $|x| > -5$ هو جميع الأعداد الحقيقية.

إن المثال 3 يُبيّن أنه يمكن حَلّ متباينة القيمة المطلقة عن طريق إعادة كتابتها على صورة متباينة مركبة.

مفهوم أساسي **متباينات القيمة المطلقة**

أضف إلى مطويتك

إذا كانت a, b, c, x أعدادًا حقيقية، وكان $c > 0$ ، فإن العبارات الآتية صحيحة:

متباينة القيمة المطلقة	المتباينة المركَّبة	مثال
$\|ax + b\| > c$	$ax + b > c$ أو $ax + b < -c$	إذا كان $\|4x + 5\| > 7$ ، فإن $4x + 5 < -7$ أو $4x + 5 > 7$.
$\|ax + b\| < c$	$-c < ax + b < c$	إذا كان $\|4x + 5\| < 7$ ، فإن $-7 < 4x + 5 < 7$.

هذه العبارات صحيحة أيضًا في حالة $\leq$ و $\geq$

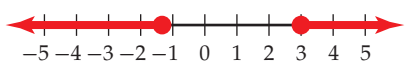
مثال 5 **حَلّ متباينات القيمة المطلقة بعدة خطوات**

a) أوجد مجموعة حَلّ المتباينة $|6y - 5| \geq 13$، ثم مثِّلها على خط الأعداد.

متباينة القيمة المطلقة $|6y - 5| \geq 13$ تكافئ المتباينة المركبة $6y - 5 \leq -13$ أو $6y - 5 \geq 13$.
حِلْ كل من المتباينتين على حدة.

بإعادة كتابة المتباينة	$6y - 5 \leq -13$	أو	$6y - 5 \geq 13$
بإضافة العدد 5 لكلا الطرفين	$6y \leq -8$		$6y \geq 18$
بقسمة كلا الطرفين على 6	$y \leq -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$		$y \geq 3$

مجموعة الحل بالصفة المميزة هي $\left\{y \middle| y \leq -\frac{4}{3} \text{ أو } y \geq 3 , \in R\right\}$ وباستعمال رمز الفترة هي $\left(-\infty , -\frac{4}{3}\right] \cup (3 , \infty)$ وتمثيلها على خط الأعداد مبيّن أدناه.



BH MT10 SE1 CH01.indd 38 9/5/23 12:26 PM

b) أوجد مجموعة حَلّ المتباينة $|2y - 3| \leq 7$، ثم مثِّلها على خط الأعداد.

متباينة القيمة المطلقة $|2y - 3| \leq 7$ تكافئ المتباينة المركبة

بكتابة المتباينة $-7 \leq 2y - 3 \leq 7$

بإضافة العدد 3 $-7 + 3 \leq 2y - 3 + 3 \leq 7 + 3$

بالتبسيط $-4 \leq 2y \leq 10$

بالقسمة على 2 $-2 \leq y \leq 5$

مجموعة الحل هي $\{y \mid -2 \leq y \leq 5, y \in R\}$ وباستعمال رمز الفترة هي $[-2, 5]$

تأكد

أوجد مجموعة حَلّ كل متباينة مما يأتي، ثم مثِّلها على خط الأعداد:

5A) $|4x - 7| > 13$

5B) $|5z - 2| < 17$

مثال 6 كتابة متباينة القيمة المطلقة وحلها

سكن: يبحث محمد عن شقة صغيرة للإيجار في إحدى المناطق السكنية، وخلال بحثه وجد أن متوسط الأجرة الشهرية للشقة الصغيرة في تلك المنطقة هو BD150، مع اختلاف لا يتجاوز BD20 عن الأجرة الشهرية الفعلية.

a) اكتب متباينة قيمة مطلقة تصف المسألة.

افترض أن r هي الأجرة الشهرية الفعلية للشقة.

$|r - 150| \leq 20$

b) حِلْ المتباينة لإيجاد المدى المقبول للإيجار الشهري.

أعد كتابة متباينة القيمة المطلقة على صورة متباينة مركبة، ثم حِلَّها لتجد قيمة r.

$-20 \leq r - 150 \leq 20$

$-20 + 150 \leq r - 150 + 150 \leq 20 + 150$

$130 \leq r \leq 170$

مجموعة الحل هي $\{r \mid 130 \leq r \leq 170\}$، أيْ أن الإيجار الشهري الفعلي للشقة يتراوح من BD130 إلى BD170.

تأكد

6) نادٍ رياضي: تخطِّط زينب للانضمام إلى أحد الأندية الرياضية خلال الإجازة الصيفية، فوجدت أن متوسط رسوم الدورات الرياضية التي يعقدها BD127 مع تفاوت بمقدار BD12 عن قيمة الرسوم الفعلية. اكتب متباينة قيمة مطلقة تصف المسألة، ثم حِلَّها لإيجاد المدى المقبول لرسوم الدورات التي يعقدها النادي.

الربط مع واقع الحياة

حقَّقت حكومتنا الرشيدة إنجازات كبيرة في مجال الخدمات الإسكانية من الوحدات، والقسائم، والقروض السكنية ودعم لبرنامج علاوة الإيجار.

تأكد من فهمك

الأمثلة 1, 2, 4, 5
الصفحات 34-39

أوجد مجموعة حَلّ كل متباينة مما يأتي، ثم مثِّلها على خط الأعداد:

1) $p - 14 \le 2$ و $4 \le p - 8$

2) $-9 \le 4y - 3 \le 13$

3) $-2m + 1 \ge 11$ أو $m - 7 \ge -3$

4) $|c| \ge 8$

5) $|q| \ge -1$

6) $|x| \le -4$

7) $|3v + 5| > 14$

8) $|-2t - 3| \le 7$

مثال 3
صفحة 36

9) درّاجات: ينصح صانعو الدراجات الجبلية بأن يكون ضغط الهواء في الإطارات $16\,kg/in^2$ على الأقل، وألا يزيد عن $36\,kg/in^2$. إذا كان ضغط الهواء في إطارات دراجة $11\,kg/in^2$، فما مدى الضغط الذي ينصح بإضافته إلى الإطارات؟

مثال 6
صفحة 39

10) مال: يختار خالد طلاءً لغرفته من بين الأنواع المُبيّنة في الجدول المجاور، وقدّر أنه يحتاج من 2 L إلى 3 L من أحد أنواع الطلاء. اكتب متباينة مركبة، لتقدّر المبلغ الذي سيدفعه اعتمادًا على الأسعار المُبيّنة في الجدول.

نوع الطلاء	السعر للتر الواحد
مائي غير لامع	BD3
مائي لامع	BD2.4
زيتي غير لامع	BD2.6
زيتي لامع	BD3.5

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1, 2, 4, 5
الصفحات 34-39

أوجد مجموعة حَلّ كل متباينة مما يأتي، ثم مثِّلها على خط الأعداد:

11) $n + 2 \le -5, n + 6 \ge -6$

12) $-7 \le 4d - 3 \le -1$

13) $4r + 3 < -6$ أو $3r - 7 > 2$

14) $6y - 3 < -27$ أو $-4y + 2 < -26$

15) $|6h| < 12$

16) $|-9n - 3| < 6$

17) $|-5j - 4| \ge 12$

18) $|3w + 2| \le 5$

19) $|6r - 3| < 21$

20) $|8t + 3| \le 4$

مثال 3
صفحة 36

21) سرعة: تبين اللوحتان المجاورتان أقصى سرعة وأدنى سرعة على أحد الطرقِ. عبّر عن ذلك بمتباينة، ثم مثلها على خط الأعداد.

مثال 6
صفحة 39

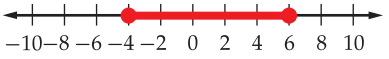
حدود السرعة: للتمرينين 20 ، 21 ، استعمل المعلومات الآتية:
في أحد الطرق السريعة بمملكة البحرين، أقصى سرعة مسموح بها للسيارات 100 km/h. لكن بعض المركبات الثقيلة لا تتجاوز السرعة المسموح بها 80 km/h ، مع العلم بأن أقل سرعة لجميع المركبات هي 60 km/h.

22) اكتب متباينة توضِّح مقدار السرعة المسموح بها لسيارة تسير على هذا الطريق.

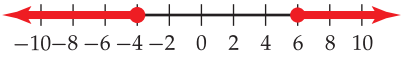
23) اكتب متباينة توضِّح مقدار السرعة المسموح بها لمركبة ثقيلة تسير على هذا الطريق.

اكتب متباينة مركبة تُعبّر عن كل تمثيل مما يأتي:

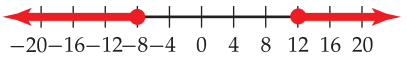
(24)



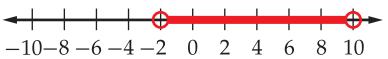
(25)



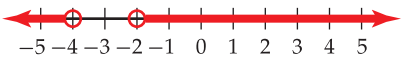
(26)



(27)

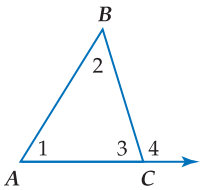


(28)



(29)

(30) **هندسة:** تنص نظرية متباينة الزاوية الخارجة عن المثلث، على أن قياس الزاوية الخارجة عن المثلث أكبر من قياس أي من الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين لها في المثلث. اكتب متباينتين تصفان العلاقة بين قياسات زوايا $\triangle ABC$ ، والزاوية الخارجة عنه .



أوجد مجموعة حلّ كل متباينة مما يأتي، ثم مثِّلها على خط الأعداد:

(31) $-|-5k| > 15$

(32) $3|2z - 4| - 6 > 12$

(33) $\dfrac{|5f - 2|}{6} > 4$

(34) $\dfrac{|2w + 8|}{5} \geq 3$

(35) $y + 7 < 2y + 2 < 0$

(36) $2x + 6 < 3(x - 1) \leq 2(x + 3)$

(37) $7g - 14 \geq 2g - 4$ أو $4g + 8 \geq g + 6$

(38) $3t + 3 < 24 - 4t$ و $5t + 7 > 2t + 4$

اكتب تعبيرًا جبريًّا لكل مما يأتي:

(39) الأعداد التي تبعُد 4 وحدات، على الأقل عن العدد 5− على خط الأعداد.

(40) الأعداد التي لا يزيد بُعدها عن العدد 1 بمقدار $\frac{3}{8}$ وحدة على خط الأعداد.

(41) الأعداد التي لا يقل بُعدها عن 6 وحدات، ولا يزيد على 10 وحدات عن العدد 2 على خط الأعداد.

(42) **صحة:** يُعدُّ ارتفاع أو انخفاض مستوى السكر في الدم عن المعدل الطبيعي الذي يبلغ 88 mg بمقدار 38 mg خطرًا صحيًّا. اكتب متباينة قيمة مطلقة تصف مستوى السكر في الدم الذي يشكِّل خطرًا صحيًّا، ثم حلّها.

الربط مع واقع الحياة

يُعد مرض السكري من أكثر الأمراض شيوعًا في العالم؛ إذ بلغت نسبة المصابين به في العالم عام 2009 م حوالي 9.5%. فيما بلغت نسبة المصابين بهذا المرض في البحرين 10% في العام نفسه.

مسائل مهارات التفكير العليا

(43) **اكتشف الخطأ:** قام كل من نبيل ومصطفى بحلِّ المتباينة $34 \geq 6 - |-5x - 3| \geq 4$. أيهما حلُّه صحيح؟ برِّر إجابتك.

مصطفى

$4|-5x - 3| - 6 \geq 34$

$|-5x - 3| \geq 10$

$-5x - 3 \leq 10$ أو $-5x - 3 \geq -10$

$-5x \leq 13$ $\quad -5x \geq -7$

$x \geq -\frac{13}{5}$ $\quad x \leq \frac{7}{5}$

نبيل

$4|-5x - 3| - 6 \geq 34$

$|-5x - 3| \geq 10$

$-5x - 3 \geq 10$ أو $-5x - 3 \leq -10$

$-5x \geq 13$ $\quad -5x \leq -7$

$x \leq -\frac{13}{5}$ $\quad x \geq \frac{7}{5}$

44) تحدٍّ: حِلْ المتباينة $|x+2|-|x-2|>x$.

تبرير: حدّد ما إذا كانت أي من العبارات الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وإذا كانت العبارة غير صحيحة، فأعطِ مثالًا مضادًا :

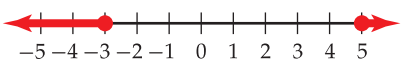
45) تمثيل مجموعة حَلّ المتباينة المركبة التي تحتوي أداة الربط (و) على خط الأعداد محدود من اليسار ومن اليمين بقيمتين للمتغير x .

46) تمثيل مجموعة حَلّ المتباينة المركبة التي تحتوي أداة الربط (أو) على خط الأعداد يحتوي قيمًا لا تمثِّل حلولًا للمتباينة.

47) تمثيل مجموعة حَلّ المتباينة المركبة التي تحتوي أداة الربط (و) على خط الأعداد يحتوي قيمًا تجعل كل أجزاء التعبير صحيحة.

48) اكتب: التعريف البديل للقيمة المطلقة هو أن تُعرِّفَ $|a-b|$ على أنها المسافة بين a ، b على خط الأعداد. وضِّح كيف يمكنك استعمال هذا التعريف لحل المتباينات التي على الصورة $|x-c|<r$.

49) تبرير: يمثّل الشكلان أدناه مجموعتي الحل لمتباينتي قيمة مطلقة مختلفتين على خط الأعداد. قارن بين المتباينتين، وفاضل بينهما.



50) مسألة مفتوحة: اكتب متباينة قيمة مطلقة، على أن تكون مجموعة حلها على الصورة $a \le x \le b$.

51) أيها لا ينتمي؟ أي المتباينات المركبة الآتية تختلف عن باقي المتباينات؟

$-3 < x < 5$	$x < 3$ و $x > 2$	$x < 1$ و $x > 5$	$x > -2$ و $x > -4$

52) اكتب: لخِّص أوجه الاختلاف بين المتباينات المركبة التي تحتوي أداة الربط (و) وبين التي تحتوي أداة الربط (أو).

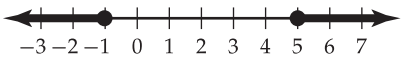
قراءة الرياضيات

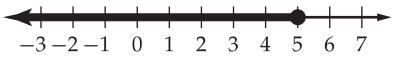
قارن لوصف أوجه **التشابه** بين شيئين أو أكثر.

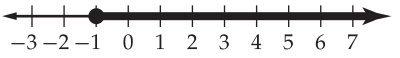
فاضل لوصف أوجه **الاختلاف** بين شيئين أو أكثر.

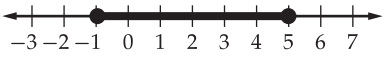
تدريب على اختبار معياري

53) أي مما يأتي يمثِّل مجموعة حَلّ المتباينة $|3x-6|+8 \ge 17$؟

A


B


C


D


54) مراجعة: ما مجموعة الحل للمتباينة $-20 < 4x-8 < 12$؟

F $\{x \mid -7 < x < 1\}$

G $\{x \mid -3 < x < 5\}$

H $\{x \mid -7 < x < 5\}$

J $\{x \mid -3 < x < 1\}$

مراجعة تراكمية

55) **صحة:** يوصي أطباء القلب أن يكون أقل من 30% من السعرات الحرارية اليومية التي يحصل عليها الجسم مصدرها من الدهون. حيث إن 1 g من الدهون يعطي 9 سعرات. إذا كان المعدل اليومي لعدد السعرات الحرارية التي يحصل عليها جسم شخص عمره 21 عامًا ما بين 2500 إلى 3300 سعر حراري، فأجب عن كل مما يأتي : (الدرس 3-1)

a) اكتب متباينة تمثّل كمية الدهون التي يُنصح هذا الشخص بتناولها.

b) ما أكبر كمية من الدهون يُنصح لهذا الشخص بتناولها؟

حِلْ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقَّق من صحة حلِّك: (الدرس 2-1)

56) $4|x-5|=20$

57) $|3y+10|=25$

58) $|7z+8|=-9$

سمّ مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي: (الدرس 1-1)

59) 20%

60) $\sqrt{75}$

61) $\frac{24}{8}$

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

المجموعات والفترات (الدرس 1-1)

- تقسم مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعتين، هما: مجموعة الأعداد النسبية (Q) ومجموعة الأعداد غير النسبية (I). أما مجموعة الأعداد النسبية فتحتوي مجموعة الأعداد الصحيحة (Z)، ومجموعة الأعداد الكلية (W)، ومجموعة الأعداد الطبيعية (N) .

حَلّ معادلات القيمة المطلقة (الدرس 2-1)

- القيمة المطلقة لعدد ، هي عدد الوحدات التي يبعُدها ذلك العدد عن الصفر على خط الأعداد.
- لأي عددين حقيقيين a , b، حيث $b \geq 0$، إذا كان $|a| = b$ ، فإن $a = b$ أو $a = -b$.

حَلّ المتباينات الخطية في متغيِّر واحد (الدرس 3-1)

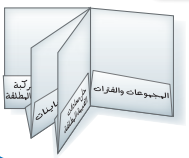
- إضافة أو طرح العدد نفسه من كلا طرفي المتباينة لا يغير صحتها.
- عند ضرب كلا طرفي متباينة في عدد سالب يجب أن يعكس اتجاه رمز المتباينة.

حَلّ المتباينات المركبة ومتباينات القيمة المطلقة (الدرس 4-1)

- عند تمثيل مجموعة الحل لمتباينة مركبة تحتوي أداة الربط (و)، فإن مجموعة الحل هي المجموعة الناتجة عن تقاطع مجموعتي حَلّ المتباينتين المكوِّنتين لها. أما المتباينة المركبة التي تحتوي أداة الربط (و)، فإن لها مجموعة حَلّ هي المجموعة الناتجة عن اتحاد مجموعتي حَلّ المتباينتين المكوّنتين لها.
- يمكن كتابة المتباينة التي تحتوي أداة الربط (أو) بطريقتين مختلفتين. فمثلًا، يمكن كتابة المتباينة $3 \leq x \leq -2$ على الصورة $x \leq 3$ و $x \geq -2$.
- العبارتان الآتيتان صحيحتان لأي عددين حقيقيين a , b، $b > 0$
  1) إذا كان $|a| < b$ ، فإن $-b < a < b$.
  2) إذا كان $|a| > b$ ، فإن $a < -b$ أو $a > b$.

مطويتك منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.



المفردات الأساسية

الأعداد الحقيقية ص 12
الأعداد النسبية ص 12
الأعداد غير النسبية ص 12
الأعداد الصحيحة ص 12
الأعداد الكلية ص 12
الأعداد الطبيعية ص 12
المجموعة ص 18
المجموعة الشاملة ص 18
العنصر ص 18
المجموعة الجزئية ص 18
المتممة ص 18
المجموعة الخالية ص 21
التقاطع ص 19
الاتحاد ص 19
القيمة المطلقة ص 20
الحل المرفوض ص 22
الصفة المميزة للمجموعة ص 13
المتباينة المركبة ص 34

اختبار المفردات:

حدّد إذا كانت العبارات الآتية صحيحة. وإذا كانت خاطئة، فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة:

1) القيمة المطلقة لأي عدد سالبة دائمًا.

2) $\sqrt{12}$ ينتمي إلى مجموعة الأعداد النسبية.

3) المجموعة الخالية هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر.

4) تمثِّل مجموعة الحل لمتباينة مركبة تحتوي أداة الربط و على خط الأعداد هو اتحاد مجموعتي حَلّ المتباينتين المكوّنتين لها.

5) تحتوي مجموعة الأعداد النسبية على الكسور العشرية المنتهية، والدورية.

دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

1-1 المجموعات والفترات (الصفحات 16-12)

سمّ مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد ممّا يأتي :

6) $1.\overline{3}$ **7)** $\sqrt{4}$ **8)** $-\frac{3}{4}$

أكتب كلًا من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة:

9) $\{1, 3, 5, 7, ...\}$

10) $[0, 5]$

عبّر عن كل متباينة مما يأتي باستعمال رمز الفترة:

11) $x \leq -11$

12) $x > 4$ أو $x < -7$

مثال 1

سمّ مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها العدد $\sqrt{50}$.

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ مجموعة الأعداد غير النسبية (I)، ومجموعة الأعداد الحقيقية (R)

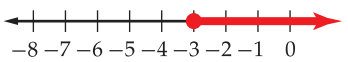
مثال 2

عبر برمز الفترة عن المتباينة $x \geq -3$ ومثلها على خط الأعداد:

التعبير على صورة فترة

$[-3, \infty)$

التمثيل على خط الأعداد



1-2 حَلّ معادلات القيمة المطلقة (الصفحات 25-20)

حِلْ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقَّق من صحة حلِّك:

13) $|r + 5| = 12$

14) $4|a - 6| = 16$

15) $|3x + 7| = -15$

16) $|b + 5| = 2b - 9$

17) **قياسات:** تقوم عائشة بتقطيع شريط زينة إلى أجزاء صغيرة طول كل منها $\frac{3}{4}$ in. إذا كان طول القطعة يزيد أو ينقص بمقدار $\frac{1}{16}$ in، فكم طول القطعة الأطول، وطول القطعة الأقصر؟

مثال 3

حِلْ المعادلة $|3m + 7| = 13$.

الحالة 1	الحالة 2
$a = b$	$a = -b$
$3m + 7 = 13$	$3m + 7 = -13$
$3m = 6$	$3m = -20$
$m = 2$	$m = -\frac{20}{3}$

الحلان هما 2 ، $-\frac{20}{3}$.

1–3 حَلّ المتباينات الخطية في متغير واحد (الصفحات 33-27)

أوجد مجموعة حَلّ كل متباينة مما يأتي، ثم مثِّلها على خط الأعداد:

18 $-4a \leq 24$

19 $\frac{r}{5} - 8 > 3$

20 $4 - 7x \geq 2(x + 3)$

21 $-p - 13 < 3(5 + 4p) - 2$

22 **مال:** زارت بعض طالبات الصف الرابع الابتدائي منتزه عين عذاري برفقة معلمتهن. وكان على كل طالبة أن تدفع BD0.5 رسمًا لدخول المنتزه، بالإضافة إلى أجرة الحافلة التي أقلّتهن جميعًا وهي BD57. كم يمكن أن يكون عدد الطالبات على ألا تزيد التكلفة الكلية للزيارة عن BD84.

مثال 4

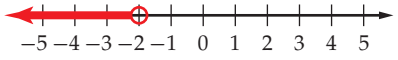
أوجد مجموعة حَلّ المتباينة $2m - 7 < -11$ ، ثم مثّلها على خط الأعداد.

المتباينة الأصلية $2m - 7 < -11$

بإضافة 7 إلى كلا الطرفين $2m < -4$

بقسمة كلا طرفي المتباينة على 2 $m < -2$

مجموعة الحل هي $\{m \mid m < -2, m \in R\}$ ، وتمثيلها على خط الأعداد مُبيَّن أدناه.



1–4 حَلّ المتباينات المركبة ومتباينات القيمة المطلقة (الصفحات 43-34)

أوجد مجموعة حَلّ كلٍّ من المتباينات الآتية، ومثِّلها على خط الأعداد:

23 $3m + 5 > 14$ أو $2m + 4 < 7$

24 $-5 < 4x + 3 < 19$

25 $8y - 6 \leq -10$ أو $6y - 1 > 17$

26 $-2 \leq 5(m - 3) < 9$

27 $|a| + 2 < 15$

28 $|14 - p| \leq 19$

29 $|2r + 7| < -1$

30 $\frac{1}{3}|8q + 5| \geq 7$

31 **مال:** تريد سارة نظم عِقْد من الخرز الكبير والصغير، على ألا تقل تكلفته عن BD2.4 ، ولا تزيد عن BD3. إذا كان سعر الخرزة الكبيرة BD0.2، والخرزة الصغيرة BD0.12، واشترت 3 خرزات كبيرة، فكم خرزة صغيرة يمكن أن تشتري؟ اكتب متباينة مركبة تمثل المسألة، ثم حلها.

مثال 5

أوجد مجموعة حَلّ كل متباينة مما يأتي، ثم مثّلها على خط الأعداد:

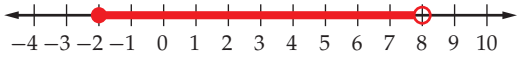
a) $-14 \leq 3x - 8 < 16$

المتباينة الأصلية $-14 \leq 3x - 8 < 16$

بإضافة 8 إلى كلا الطرفين $-6 \leq 3x < 24$

بقسمة كلا الطرفين على 3 $-2 \leq x < 8$

مجموعة الحل هي $\{x \mid -2 \leq x < 8, x \in R\}$ ، وتمثيلها على خط الأعداد مبين أدناه.



b) $|3a - 5| > 13$

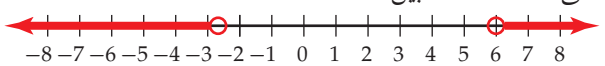
متباينة القيمة المطلقة $|3a - 5| > 13$ تكافئ المتباينة المركبة:

$3a - 5 < -13$ أو $3a - 5 > 13$.

بالطرح $3a < -8$ $3a > 18$

بالقسمة $a < -\frac{8}{3}$ $a > 6$

مجموعة الحل هي $\{a \mid a > 6$ أو $a < -\frac{8}{3}, a \in R\}$، وتمثيلها على خط الأعداد مُبيَّن أدناه.



BH MT10 SE1 CH01.indd 46 9/5/23 12:13 PM

اختبار الفصل

سمّ مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي :

1) $\sqrt{16}$

2) 8.37

3) $2\sqrt{5}$

4) احسب قيمة $2|3y - 8| + y$ عندما $y = 2.5$.

5) أوجد مجموعة حَلّ المتباينة $-2b > \frac{18 - b}{5}$، ثم مثّلها على خط الأعداد.

6) **مال:** مع محمد BD3.5 ، ويريد أن يشتري كتابًا سعره BD2.6، ويشتري بما تبقى لديه أقلامًا سعر الواحد منها BD0.35. اكتب متباينة توضِّح عدد الأقلام التي يمكن لمحمد شراؤها.

7) أوجد مجموعة حلّ المتباينة $4r + 1 > 15$ أو $r - 3 < -5$، ثم مثِّلها على خط الأعداد.

8) أوجد مجموعة حلّ المتباينة $|p - 4| \leq 11$ ، ثم مثِّلها على خط الأعداد.

9) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي تمثيل لمجموعة حَلّ المتباينة $4 < 6t + 1 \leq 43$؟

F

G

H

J

10) **مال:** تخطط أمل لشراء هاتف محمول من أحد الأنواع، فوجدت أن متوسط سعر ذلك الهاتف هو BD68 باختلاف BD5 عن السعر الفعلي. اكتب متباينة تصف المسألة، ثم حلها.

11) **سياج:** يريد ياسر أن يبني سورًا حول قطعة أرض مستطيلة الشكل ، ويريد أن يكون محيطها من 17 m إلى 20 m . إذا كان عرض قطعة الأرض 5 m، فاكتب المتباينة المركبة التي تعطي طول القطعة، ثم حِلَّها.

حِلْ كل معادلة ممّا يأتي:

12) $|x + 4| = 3$

13) $|3m + 2| = 1$

14) $|3a + 2| = -4$

15) $|2t + 5| - 7 = 4$

16) $|5n - 2| - 6 = -3$

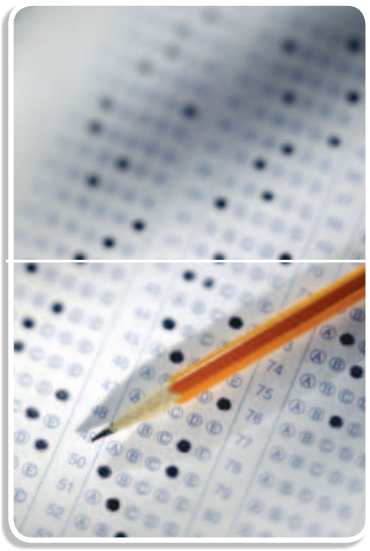
17) $|p + 6| + 9 = 8$

18) أوجد مجموعة حَلّ المتباينة $-3b - 5 \geq -6b - 13$ ، ثم مثّلها على خط الأعداد.

19) سمّ مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها العدد $-\frac{1}{3}$.

20) **زينة:** يبيع متجران نوعًا من عقود الخرز المنظومة في سلسلة معدنية، ويبيّن الجدول أدناه السعر في المتجرين. كم عدد الخرزات الذي يجعل تكلفة العقد في المتجر الأول أقل؟ استعمل المتباينة $1.5 + 0.325b < 2 + 0.25b$.

المتجر	تكلفة السلسلة	تكلفة الخرزة الواحدة
الأول	BD1.5	BD0.325
الثاني	BD2	BD0.25



حذف الإجابات غير المنطقية

عند حل أسئلة الاختيار من متعدد احذف الإجابات غير المنطقية؛ لأن ذلك يساعدك على التوصل إلى الإجابة الصحيحة.

استراتيجيات حذف الإجابات غير المنطقية

الخطوة 1

اقرأ المسألة بعناية لتعرف ما المطلوب.

اسأل نفسك:

- ما المطلوب حلّه؟
- ما شكل الإجابة الصحيحة: هل هي (كسر، أو عدد، أو عدد عشري، أو نسبة ، أو تمثيل بياني) ؟
- ما وحدات الإجابة الصحيحة (إن كان لها وحدات) ؟

الخطوة 2

اقرأ الإجابات بعناية لتقويم منطقية الإجابات.

- حدّد الإجابات التي يتضح عدم صحتها، واحذفها .
- احذف الإجابات ذات الشكل غير المناسب كما ورد في الخطوة **1**.
- احذف الإجابات التي لا تحتوي على الوحدة الصحيحة.

الخطوة 3

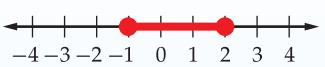
حل المسألة، واختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المتبقية، وتحقَّق من صحة حلِّك.

مثال

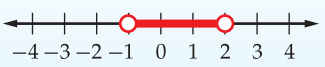
اقرأ المسألة، وعيّن المطلوب، ثم استعمل معطيات المسألة لحلِّها.

أي مما يأتي يمثل مجموعة حل المتباينة $|4x - 2| \leq 6$ ؟

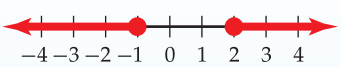
A



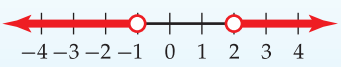
B



C



D



المتباينة تحتوي على الرمز ≤ ، ولتمثيلها على خط الأعداد نستعمل دائرة مظللة.

وبما أن الخيارين B، D كلاهما الدائرة غير مظللة لذا يمكن حذفهما، وأيضًا يمكن حذف الإختيار C لأن المتباينة تحتوي على الرمز ≤ وليس ≥ ولذا تكون الإجابة الصحيحة هي A

التحقق من الإجابة:

$$|4x - 2| \le 6$$

$$-6 \le 4x - 2 \le 6$$

بإضافة العدد 2 $\quad -6 + 2 \le 4x - 2 \le 6 + 2$

$$-4 \le 4x \le 8$$

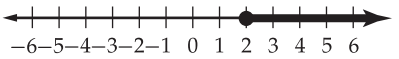
بالقسمة على 4 $\quad -1 \le x \le 2$

الإجابة الصحيحة هي A.

تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة مما يأتي، واحذف الإجابات غير المنطقية. ثم استعمل المعلومات لحل المسألة:

1) أيّ المتباينات الآتية لها التمثيل على خط الأعداد أدناه؟



A $8x - 9 \le 5x - 3$

B $8x - 9 < 5x - 3$

C $8x - 9 \ge 5x - 3$

D $8x - 9 > 5x - 3$

2) ما حل المعادلة $|10 - 2x| = 50$

A $x = 20 , x = 30$

B $x = 20 , x = -30$

C $x = -20 , x = 30$

D $x = -20 , x = -30$

3) ما مجموعة الأعداد التي ينتمي إليها العدد $\sqrt{8}$ ؟

A Z , Q

B W , Q

C I , R

D N , W , Q

4) أي مما يأتي يمثّل حل المتباينة المركبة $3x - 7 \le 2$ و $5x + 1 > 6$ ؟

A $(1 , 3]$

B $[1 , 3)$

C $(-\infty , 1] \cup (3 , \infty)$

D $(-\infty , 1) \cup [3 , \infty)$

5) إذا كان $a = 3$ ، $b = -2$ ، فما قيمة $-4\,|a - b|$ ؟

A 4

B −4

C 20

D −20

6) أيّ ممّا يأتي يمثّل مجموعة حل المتباينة $|x - 17| < -1$ ؟

A $\{x \mid 16 < x < 18\}$

B $\{\}$

C $\{x \mid x < 17\}$

D $\{x \mid x > 0\}$

اختبار معياري

للفصل 1

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي :

1) ما مجموعة الأعداد التي ينتمي إليها العدد $0.\overline{16}$ ؟

A Q , R **B** W , Q **C** I , R **D** W , Z

2) أي مما يأتي عدد غير نسبي ؟

A $\sqrt{256}$ **B** $\frac{22}{7}$ **C** $\sqrt{114}$ **D** 0.25

3) أي مما يأتي يمثّل مجموعة حل المتباينة $|x + 2| < 0$ ؟

A R **B** $\varnothing$ **C** $\{-2\}$ **D** $\{-2 , 2\}$

4) ما المتباينة التي تصف العبارة:
"طرح عدد ما من 5 لا يقل عن 13" ؟

A $x - 5 < 13$ **B** $x - 5 \geq 13$ **C** $5 - x < 13$ **D** $5 - x \geq 13$

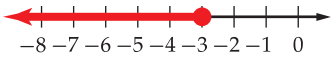
5) أي مما يأتي يمثّل مجموعة حل المعادلة $|x - 4| = |4 - x|$؟

A R **B** $\varnothing$ **C** $\{4\}$ **D** $\{-4 , 4\}$

6) **هندسة :** أي من الفترات الآتية يُعبر عن قياس الزاوية المنفرجة؟

A $(90 , 180)$ **B** $[90 , 180)$ **C** $(90 , 180]$ **D** $[90 , 180]$

7) أيّ المتباينات الآتية لها التمثيل على خط الأعداد أدناه؟



A $2x + 5 < 3x + 8$

B $2x + 5 \leq 3x + 8$

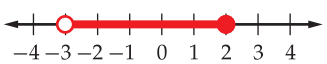
C $2x + 5 > 3x + 8$

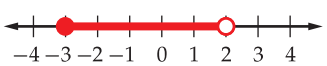
D $2x + 5 \geq 3x + 8$

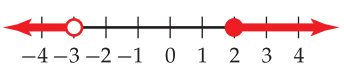
8) ما قيمة $|3a - 9| - 7a$ عندما $a = 0.5$ ؟

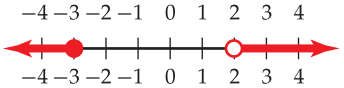
A -4 **B** 4 **C** -3 **D** 3

9) أي مما يأتي تمثيل لمجموعة حَلّ المتباينة $x + 9 < 6$ أو $3 - x \leq 1$؟

A


B


C


D


اختبار معياري

للفصل 1

أسئلة مقالية

أسئلة ذات إجابات قصيرة

حِلْ كل من معادلات القيمة الآتية، ثم تحقق من صحة حلّك:

10) $\frac{|4x+2|}{14}+5=6$

11) $|x+1|=3x+17$

12) $\left|\frac{x}{2}+19\right|=-5$

أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية، ثم مثّلها على خط الأعداد:

13) $2y-3<15-3y$

14) $-7\le 3s-4<11$

15) $4|m-9|+1\le 25$

16) $\frac{|5d+8|}{4}>7$

17) وزن الدجاج 1200 جرام، ويسمح بزيادة أو نقصان الوزن بمقدار لايتعدى 50 جرام.

a) اكتب متباينة قيمة مطلقة تمثل المدى المقبول لوزن الدجاجة.

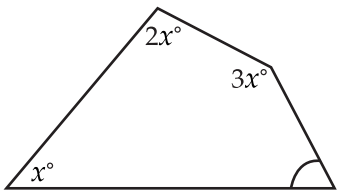
b) حِلْ المتباينة لإيجاد المدى المقبول لوزن الدجاجة.

18) **كرة قدم:** الوزن القياسي لكرة القدم هو 430g بزيادة أو نقصان 20 g.

اكتب معادلة قيمة مطلقة لإيجاد أكبر وأصغر وزن للكرة، ثُم حلها.

سؤال ذو إجابة مطوّلة

19) إذا كانت $3x°$، $2x°$، $x°$ هي قياسات ثلاثة زوايا داخلية في الشكل الرباعي.



a) عبّر عن قياس الزاوية الرابعة باستعمال المتغير x.

b) إذا كانت الزاوية الرابعة زاوية حادة اكتب متباينة تعبر عن ذلك.

c) حِلْ المتباينة التي حصلت عليها في الفرع **b**.

d) ما معنى الحل؟

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن السؤال...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
اذهب إلى الدرس...	1-1	1-1	1-4	1-3	1-2	1-1	1-3	1-2	1-4	1-2	1-2	1-2	1-3	1-4	1-4	1-4	1-4	1-2	1-3

الفصل 2

الدوال والمتباينات
Functions and Inqualities

فيما سبق

درستُ حَلّ المعادلات والمتباينات الخطية.

والآن

الأفكار العامة

- أستعمل معادلات العلاقات الخطية والدوال.
- أحل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا.
- أحُلّ مسائل من واقع الحياة مستعملًا البرمجة الخطية.

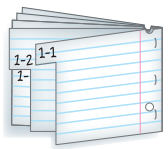
لماذا؟

إدارة أعمال يتطلب النجاح في إدارة الأعمال إتقان مهارات رياضية متنوعة. وفي هذا الفصل ستتعلم كيفية زيادة الربح، أو تقليل التكلفة؛ لتحقيق أكبر ربح ممكن من خلال استعمال البرمجة الخطية.

مطويتك منظم أفكار

الدوال والمتباينات: اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك للفصل الثاني حول الدوال والمتباينات، مبتدئًا بأربع أوراق من دفتر الملاحظات.

1. **اطو** كل ورقة من المنتصف كما هو مُبيّن في الشكل أدناه.
2. **قص** الأوراق من طول خط الطي كما هو مُبيّن في الشكل أدناه، ثم ثبّت أنصاف الأوراق الثمانية الناتجة؛ لتحصل على كُتيّب صغير.
3. **قص** أطراف الأوراق كما هو مُبيّن في الشكل أدناه، بحيث تترك سطرين من طرف الورقة الأولى، و6 أسطر من طرف الورقة الثانية وهكذا.
4. **سمِّ** طرف كل ورقة برقم وعنوان كل درس من دروس الفصل.



التهيئة للفصل الثاني

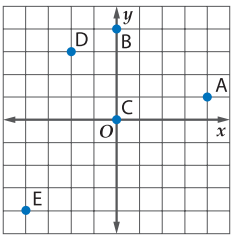
تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة .

البديل 1

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" ؛ لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

اكتب الزوج المرتب الذي تمثّله كل نقطة مما يأتي، ثم حدّد الربع الذي تقع فيه: (مهارة سابقة)



1) A
2) B
3) C
4) D

5) **حيوانات:** يخفق قلب الحوت الأزرق 9 مرات في الدقيقة. اعمل جدولًا من الأزواج المرتبة، بحيث يمثّل الإحداثي x عدد الدقائق، والإحداثي y عدد خفقات قلب الحوت الأزرق. (مهارة سابقة)

احسب قيمة كل تعبير مما يأتي إذا كان: (مهارة سابقة)

$a = -3 , b = 4 , c = -2$

6) $4a - 3$
7) $2b - 5c$
8) $b^2 - 3b + 6$
9) $\frac{2a + 4b}{c}$

مثّل المعادلات الآتية بيانيًّا: (مهارة سابقة)

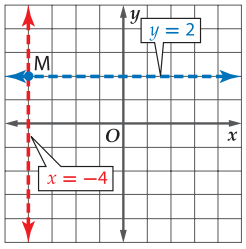
10) $x = 4y$
11) $y = \frac{1}{3}x + 5$
12) $x + 2y = 4$
13) $y = -x + 6$
14) $3x + 5y = 15$
15) $3y - 2x = -12$

16) **سفر:** تسافر جميلة بالسيارة بسرعة 65 mi/h لمدة x ساعة يوم السبت. في حين أنها تسافر بسرعة 55 mi/h يوم الأحد لمدة $(x + 3)$ ساعة. اكتب تعبيرًا مبسطًا لمجموع المسافات التي تقطعها في اليومين. (مهارة سابقة)

مراجعة سريعة

مثال 1

اكتب الزوج المرتب الذي تمثّله النقطة M، ثم حدّد الربع الذي تقع فيه



خطوة 1 تتبع المستقيم الرأسي بدءًا من النقطة M ؛ لإيجاد الإحداثي x للنقطة.

خطوة 2 تتبع المستقيم الأفقي بدءًا من النقطة M ؛ لإيجاد الإحداثي y للنقطة.

خطوة 3 الزوج المرتب الذي تمثّله النقطة M هو $(-4, 2)$. بما أن الإحداثي x سالب، والإحداثي y للنقطة M موجب؛ إذن تقع M في الربع II.

مثال 2

احسب قيمة التعبير $3a^2 - 2ab + b^2$، إذا كانت $a = 4$، $b = -3$.

$$3a^2 - 2ab + b^2 = 3(4^2) - 2(4)(-3) + (-3)^2$$
$$= 3(16) - 2(4)(-3) + 9$$
$$= 48 - (-24) + 9 = 81$$

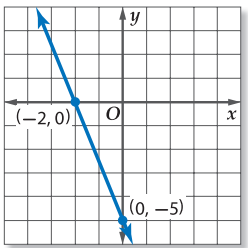
مثال 3

مثّل $2y + 5x = -10$ بيانيًّا.

أوجد نقاط التقاطع مع المحورين x ، y.

$2(0) + 5x = -10$
$5x = -10$
$x = -2$

$2y + 5(0) = -10$
$2y = -10$
$y = -5$



المنحنى يقطع المحور x عند النقطة $(-2 , 0)$ والمحور y عند النقطة $(0, -5)$. استعمل الزوجين المرتبين السابقين ؛ لتمثيل المعادلة بيانيًّا.

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

2-1

المعادلات الخطية بصيغة ميل - مقطع

Linear Equations in Slope-Intercept Form

فيما سبق

درست تمثيل مستقيم عُلم ميله ومقطعه من المحور y.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أكتب معادلة بصيغة ميل ومقطع إذا عُلم الميل ونقطة واحدة.
- أكتب معادلة بصيغة ميل ومقطع إذا عُلمت نقطتان.

المفردات الأساسية

صيغة ميل - مقطع
slope-intercept form

التنبؤ الخطي
Linear extrapolation

www.obeikaneducation.com

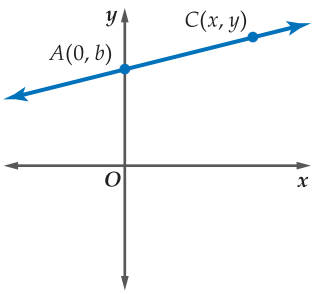
لماذا؟

تطلب بعض شركات التأمين الصحي من مشتركيها دفع مبلغ من المال عند كل زيارة للطبيب بالإضافة إلى الاشتراك السنوي.

تتقاضى شركة تأمين صحي مبلغ 110 BD اشتراكًا سنويًّا، و 4 BD عن كل زيارة للطبيب. ويمكن التعبير عن إجمالي ما يدفعه المشترك في العام بالمعادلة $y = 4x + 110$، حيث x عدد مرات زيارة الطبيب.

صيغ المعادلات يمر الخط المستقيم في التَّمثيل المجاور بالنقطتين $A(0, b), C(x, y)$، لاحظ أن b تُمثّل مقطع المحور y بالمستقيم AC.

يمكن أن تستعمل النقطتين؛ لإيجاد ميل $\overleftrightarrow{AC}$. عوض بإحداثيات النقطتين A و C في صيغة الميل.



صيغة الميل $\quad m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$(x_1, y_1) = (0, b), (x_2, y_2) = (x, y)$ $\quad m = \dfrac{y - b}{x - 0}$

بالتبسيط $\quad m = \dfrac{y - b}{x}$

والآن حُلّ المعادلة؛ لإيجاد y.

بضرب الطرفين في x $\quad mx = y - b$

بإضافة b إلى كل طرف $\quad mx + b = y$

خاصية التماثل في المساواة $\quad y = mx + b$

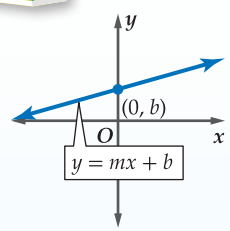
عندما تكتب المعادلة على هذه الصورة، فإنها تسمى صيغة ميل – مقطع.

مفهوم أساسي صيغة ميل - مقطع

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي صيغة ميل - مقطع لمعادلة مستقيم هي: $y = mx + b$، حيث m الميل، و b مقطع المحور y.

بالرموز $y = mx + b$ (المقطع، الميل)



إذا أُعطيت ميل مستقيم ومقطعه من المحور y، فإنك تستطيع أن تجد معادلته بتعويض قيمة m و b في صيغة ميل – مقطع.

مثال 1 كتابة معادلة بصيغة ميل-مقطع لمستقيم بدلالة ميله ونقطة عليه

اكتب معادلة بصيغة ميل–مقطع للمستقيم الّذي ميله 3 ويمر بالنقطة (2, 1).

حيث أُعطي في هذا المثال ميل المستقيم، ولم يُعطَ مقطعه من المحور y .

الخطوة 1 أوجد مقطعه من المحور y .

$y = mx + b$ صيغة ميل - مقطع

$1 = 3(2) + b$ بالتعويض عن m بـ 3، و y بـ 1، و x بـ 2

$1 = 6 + b$ بالتبسيط

$1 - 6 = 6 + b - 6$ بطرح 6 من كلا الطرفين

$-5 = b$ بالتبسيط

الخطوة 2 اكتب المعادلة بصيغة ميل – مقطع.

$y = mx + b$ صيغة ميل - مقطع

$y = 3x - 5$ بالتعويض عن m بـ 3 و b بـ -5

فتكون المعادلة هي $y = 3x - 5$.

تأكد

اكتب معادلة بصيغة ميل–مقطع للمستقيم الّذي يحقق الشروط في كل مما يأتي:

1A) يمر بالنقطة $(-2, 5)$، الميل 3

1B) يمر بالنقطة $(-7, 4)$، الميل -1

كتابة معادلة بصيغة ميل-مقطع لمستقيم بدلالة نقطتين يمكن استعمال نقطتين يمر بهما خط مستقيم لإيجاد الميل أولًا، ثم اتباع الخطوات نفسها كما في المثال (1) لكتابة المعادلة.

مثال 2 كتابة معادلة بصيغة ميل-مقطع لمستقيم بدلالة نقطتين

اكتب معادلة بصيغة ميل –مقطع للمستقيم المار بالنقطتين في كل مما يأتي:

a) (3, 1) , (2, 4)

الخطوة 1 أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ صيغة الميل

$= \frac{4 - 1}{2 - 3}$ $(x_1, y_1) = (3, 1)$, $(x_2, y_2) = (2, 4)$

$= \frac{3}{-1} = -3$ بالتبسيط

الخطوة 2 استعمل أيًّا من النقطتين؛ لإيجاد المقطع y .

$y = mx + b$	صيغة ميل - مقطع
$4 = (-3)(2) + b$	بالتعويض عن m بـ -3 ، x بـ 2 ، و y بـ 4
$4 = -6 + b$	بالتبسيط
$4 - (-6) = -6 + b - (-6)$	بطرح (-6) من كلا الطرفين
$10 = b$	بالتبسيط

الخطوة 3 اكتب المعادلة بصيغة ميل - مقطع.

$y = mx + b$	صيغة ميل-مقطع
$y = -3x + 10$	بالتعويض عن m بـ (-3)، وعن b بـ (10)

إذن، المعادلة هي $y = -3x + 10$.

إرشادات للدراسة

الميل إذا كان إحداثيًّا النقطة (x_1 , y_1) سالبين، فخذ كلًّا من الإشارة السالبة ورمز الطرح بعين الاعتبار في صيغة الميل.

b) $(-4, -2) , (-5, -2)$

الخطوة 1 أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	صيغة الميل
$= \frac{-2 - (-2)}{-5 - (-4)}$	$(x_1, y_1) = (-4, -2), (x_2, y_2) = (-5, -2)$
$= \frac{0}{-1} = 0$	بالتبسيط

الخطوة 2 استعمل أيًّا من النقطتين؛ لإيجاد المقطع الصادي.

$y = mx + b$	صيغة ميل - مقطع
$-2 = 0(-4) + b$	بالتعويض عن m بـ (0)، وعن x بـ (-4)، وعن y بـ (-2)
$-2 = 0 + b$	بالتبسيط
$-2 = b$	بالتبسيط

الخطوة 3 اكتب المعادلة بصيغة ميل - مقطع.

$y = mx + b$	صيغة ميل - مقطع
$y = (0)x + (-2)$	بالتعويض عن m بـ (0)، وعن b بـ (-2)

إذن، المعادلة هي $y = -2$.

إرشادات للدراسة

اختيار نقطة عند إعطاء نقطتين على مستقيم، يمكنك اختيار أيّ من النقطتين لتكون (x_1 , y_1). تأكد من اتساق اختيارك خلال حل المسألة.

تأكد

اكتب معادلة بصيغة ميل - مقطع للمستقيم المار بالنقطتين في كل مما يأتي:

2A) $(-1, 12), (4, -8)$

2B) $(5, -8), (-7, 8)$

قد نحتاج أحيانًا إلى كتابة معادلة مستقيم بمعلومية تمثيله البياني، ومن الضروري أحيانًا حساب الميل قبل كتابة المعادلة.

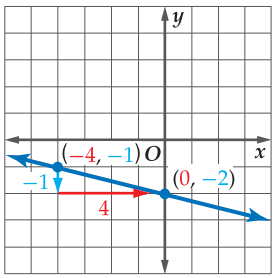
تنبيه!

صيغة ميل - مقطع

لا يمكن كتابة معادلة المستقيم الرأسي بصيغة ميل - مقطع؛ لأن ميل المستقيم الرأسي غير مُعرّف.

مثال 3 كتابة معادلة مستقيم بصيغة ميل - مقطع

اكتب معادلة بصيغة ميل - مقطع للمستقيم الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.



مقطع المستقيم من المحور y هو -2؛ لذا $b = -2$

الخطوة 1 أوجد الميل.

صيغة الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$(x_1, y_1) = (-4, -1)$ ، $(x_2, y_2) = (0, -2)$

$= \frac{-2 - (-1)}{0 - (-4)}$

بالتبسيط $= -\frac{1}{4}$

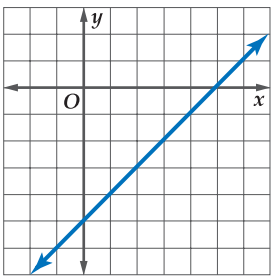
الخطوة 2 عوِّض بالقيم في صيغة ميل - مقطع.

صيغة ميل - مقطع $y = mx + b$

$m = -\frac{1}{4}, b = -2$ $y = -\frac{1}{4}x - 2$

تأكد

اكتب معادلة بصيغة ميل - مقطع للمستقيم الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.



إرشادات للدراسة

تحقق

يمكنك التحقق من صحة حلّك بتعويض نقطة تقع على الخط المستقيم في المعادلة.

الربط مع واقع الحياة

تتضمن مسؤولية حامل الأمتعة في المطار مساعدة المسافرين في حمل أمتعتهم والتأكد من سلامتها وأمنها.

مثال 4 من واقع الحياة استعمال صيغة ميل - مقطع

رحلات جوية: الجدول المجاور يُبيّن مُعدَّل عدد الرحلات الجوية في مدينة خلال 4 سنوات . اكتب معادلة يمكنك استعمالها للتنبؤ بما إذا كانت الرحلات ستستمر في الزيادة بالمعدل نفسه أم لا.

السنة	عدد الرحلات
2004	354
2005	366
2006	378
2007	390

افهم: تعلم عدد الرحلات الجوية.

خطط: افرض أن x تُمثِّل عدد السنوات منذ عام 2000 ، و y تُمثِّل عدد الرحلات الجوية. اكتب معادلة بصيغة ميل - مقطع للمستقيم المار بالنقطتين (5, 366)، (6, 378).

حل: أوجد الميل.

صيغة الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

بالتعويض عن (x_1, y_1) بـ (5, 366) ، وعن (x_2, y_2) بـ (6, 378) $= \frac{378 - 366}{6 - 5}$

بالتبسيط $= \frac{12}{1} = 12$

اختر النقطة (6, 378) ، وأوجد المقطع y للمستقيم.

صيغة ميل - مقطع $y = mx + b$

بالتعويض عن m بـ 12، وعن x بـ 6، وعن y بـ 378 $378 = 12(6) + b$

بالتبسيط $378 = 72 + b$

بطرح 72 من كلا الطرفين $306 = b$

استعمل $m = 12$ ، $b = 306$ لكتابة المعادلة.

$y = mx + b$ صيغة ميل - مقطع

$y = 12x + 306$ بالتعويض عن m بـ 12، وعن b بـ 306

تحقق: تحقق من صحة الحل باستعمال إحداثيات النقطة الأخرى.

$y = 12x + 306$ المعادلة الأصلية

$366 \stackrel{?}{=} 12(5) + 306$ بالتعويض عن x بـ 5 ، وعن y بـ 366

$366 = 366$ ✓ بالتبسيط

تأكد

4) نقود: يتقاضى طلال 5 BD عن كل ساعة إضافية، بالإضافة إلى أجرته الأسبوعية. إذا عمل خلال الأسبوع الماضي 7 ساعات إضافية. وكانت أجرته كاملة 175 BD ، فاكتب معادلة خطية لإيجاد أجرته الكلية y، إذا عمل x ساعة إضافية.

يمكنك استعمال المعادلة الخطية لإجراء تنبؤات حول القيم التي تتجاوز مدى البيانات، وتُسمى هذه العملية **التنبؤ الخطي**.

مثال 5 من واقع الحياة — **التنبؤ باستعمال صيغة ميل - مقطع**

رحلات جوية: **استعمل المعادلة في المثال 4؛ لتقدير عدد الرحلات الجوية عام 2010.**

$y = 12x + 306$ المعادلة الأصلية

$= 12(10) + 306$ بالتعويض عن x بـ 10

$= 426$

التقدير المناسب لمعدل الرحلات الجوية يساوي 426 رحلةً.

تأكد

5) نقود: استعمل المعادلة في (تأكد 4)؛ للتنبؤ بالمبلغ المستحق الّذي يتقاضاه طلال في الأسبوع، إذا عمل 8 ساعاتٍ إضافيةٍ.

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 55

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم الّذي يحقق الشروط في كلٍّ ممَّا يأتي:

1) يمر بالنقطة $(3, -3)$، الميل 3

2) يمر بالنقطة $(2, 4)$، الميل 2

3) يمر بالنقطة $(1, 5)$ ، الميل -1

4) يمر بالنقطة $(-4, 6)$، الميل -2

5) يمر بالنقطة $(5, 0)$ ، $m = 1.5$

6) يمر بالنقطة $(-8, -2)$ ، $m = \frac{5}{2}$

مثال 2 صفحة 55

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم المار بالنقطتين في كل مما يأتي:

7) $(4, -3), (2, 3)$

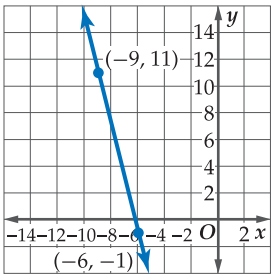
8) $(-7, -3), (-3, 5)$

9) $(-1, 3), (0, 8)$

10) $(-2, 6), (0, 0)$

BH MT10 SE1 CH02 .indd 58 9/5/23 10:44 AM

مثال 3
صفحة 57



11 **اختيار من متعدد:** معادلة المستقيم المُمثّل بيانيًّا في الشكل المجاور هي:

A $y = -4x - 25$

B $y = -\frac{2}{3}x - 5$

C $y = \frac{4}{5}x + \frac{29}{25}$

D $y = 6x + 35$

المثالان 4, 5
الصفحتان 57, 58

12) رحلة: خرج عشرة أشخاص في رحلة ترفيهية مع شركة سياحية مدة يوم واحد. إذا كانت أجرة الرحلة لمدة يوم كامل BD 35، ودفعت المجموعة كاملة BD 425.

a) اكتب معادلة لإيجاد التكلفة الكلية c لِـ p شخصًا بصيغة ميل – مقطع.

b) كم تكون تكلفة الرحلة لِـ 15 شخصًا؟

تدرب وحل المسائل

مثال 1
صفحة 55

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم الّذي يحقق الشروط في كل مما يأتي:

13) يمر بالنقطة (3, 1)، الميل 2

14) يمر بالنقطة (−1, 4) ، الميل −1

15) يمر بالنقطة (7, 1) ، الميل 8

16) يمر بالنقطة (2, 5) ، الميل −2

17) الميل 3 ، ويمر بالنقطة (0, −2)

18) الميل $-\frac{1}{2}$ ، ويمر بالنقطة (0, 5)

19) الميل $-\frac{6}{5}$ ، ويمر بالنقطة (0, 8)

20) يمر بالنقطة (6, 4) ، $m = -\frac{3}{4}$

21) يمر بالنقطة (−4, −2) ، $m = -\frac{3}{5}$

22) يمر بالنقطة $(0, -\frac{13}{2})$ ، $m = \frac{9}{2}$

مثال 2
صفحة 55

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم المار بالنقطتين في كل مما يأتي:

23) (9, −2), (4, 3)

24) (−2, 5), (5, −2)

25) (−5, 3), (0, −7)

26) (3, 5) , (2, −2)

27) (−1, −3), (−2, 3)

28) (−2, −4) , (2, 4)

29) (5, −2), (1, 7)

30) (5, −3) , (2, 5)

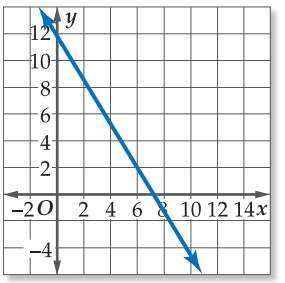
31) $\left(\frac{5}{4}, 1\right)$, $\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

32) $\left(\frac{5}{12}, -1\right)$, $\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{6}\right)$

مثال 3
صفحة 57

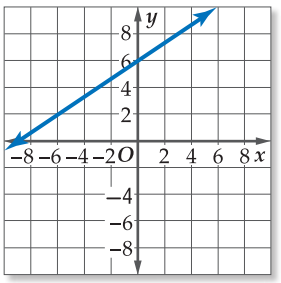
اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع لكل مستقيم مُمثّل بيانيًّا أدناه:

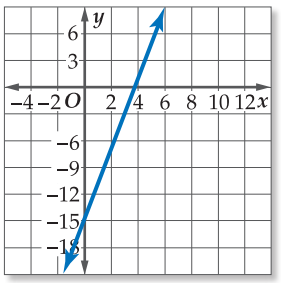
33)



34

35)





المثالان 5 ,4
الصفحتان 57, 58

36) **سيارات:** يحرك سامي سيارة لُعبةً باستعمال جهاز التحكم عن بُعد بسرعةٍ ثابتةٍ. فبدأ بتحريك السيارة عندما كانت على بُعد 5 ft منه، وبعد 2 sec أصبح بعدها 35 ft.

a) اكتب معادلة خطية لإيجاد بُعد السيارة d عن سامي بَعد t sec.

b) قدّر المسافة التي تقطعها السيارة بعد 10 sec .

37) **سكان:** بلغ عدد سكان مملكة البحرين 1.23 مليون نسمة تقريبًا عام 2010 م، ويزداد عدد السكان بمُعدّل تقريبي 0.068 مليون نسمة سنويًّا.

a) اكتب معادلةً خطيةً لإيجاد عدد سكان المملكة K بالملايين بعد L سنة منذ 2010 م.

b) إذا استمرت الزيادة نفسها، فكم يصبح عدد سكان المملكة عام 2020 م ؟

38) **مصانع:** بلغ الإنفاق السنوي على الدعاية في أحد المصانع عام 2015م نحو 5000 BD، فوضعت إدارة المصنع خطة لخفض الإنفاق بمعدل منتظم، فوصل في عام 2020م نحو 3000 BD.

a) اكتب معادلةً خطيةً لإيجاد الإنفاق السنوي على الدعاية y بعد t سنة من عام 2015م، حيث $t = 0$ في العام 2015م.

b) إذا استمر خفض الإنفاق بنفس المعدل في أي سنة يصل الإنفاق 1000 BD.

39) **نادٍ رياضي:** يقدم نادٍ رياضي عرضًا للعضوية مقابل 28 BD ، ودروسًا في التمارين الرياضية بمبلغ إضافي مقداره 6 BD لكل درس.

a) اكتب معادلة تمثّل التكلفة الكلية لعضو حضر x درسًا.

b) إذا كان المبلغ الّذي دفعه مالك 1012 BD في إحدى السنوات، فما عدد دروس التمارين الرياضية التي حضرها؟

40) **اقتصاد:** يوفر حسن بشكل منتظم مبلغًا من المال كل شهر، إذا وفر 35 BD في شهر يناير، و 40 BD في شهر فبراير.

a) اكتب معادلة تبين ما يوفره حسن في نهاية كل شهر من أشهر السنة الميلادية.

b) كم سيوفر حسن في شهر أكتوبر؟

بيّن هل تقع النقطة على المستقيم المُعطى معادلته أم لا ؟ برّر إجابتك.

41) $(3, -1), y = \frac{1}{3}x + 5$ **42)** $(6, -2), y = \frac{1}{2}x - 5$

للتمارين 45 –43، بيّن أيّ المعادلات المعطاة فيما يأتي هي الأفضل تمثيلًا للوضع، وفسّر معنى كل متغير.

A	B	C
$y = -\frac{1}{3}x + 72$	$y = 2x + 225$	$y = 4x + 8$

43) أجرة: تبلغ أجرة دخول موقع BD 8، بالإضافة إلى BD 4 عن كل ساعة.

44) تبرعات: المبلغ المتوفر لدى مسؤول التبرعات لطلاب صف بمدرسة ما هو BD 225، ويحتاج إلى جمع BD 2 من كل طالب بالإضافة إلى ذلك.

45) مياه: يبلغ مستوى الماء في بركة السباحة 6ft، ومعدّل التبخر $\frac{1}{3}$ in يوميًّا.

46) بيئة: طبق مصنع برنامجًا لتقليل النفايات، ففي عام 1998 كانت كمية النفايات 946 Ton، ثم بدأ مقدار النفايات ينخفض منذ ذلك العام بمعدل 28.4 Ton سنويًّا.

a) كم طنًّا تصل كمية النفايات عام 2010؟

b) في أيّ عام أصبح الاستمرار في هذا الاتجاه مستحيلًا ؟ وضح إجابتك.

47) تمثيلات متعددة: ستكتشف في المسألة الآتية، ميلَي الخطين المتعامدين.

a) تمثيل بياني: مثّل المستقيم $y = \frac{3}{4}x + 1$ على ورقة رسم بياني.

b) **رسم:** استعمل مسطرةً غير مدرجة ومنقلة ؛ لرسم مستقيم يعامد المستقيم المرسوم.

c) **جبري:** أوجد معادلة المستقيم الّذي يتعامد مع المستقيم الأصلي، وصِفْ الطريقة التي استعملتها لكتابة المعادلة.

d) **تحليل:** قارن بين مِيلَي المستقيمين، وصِفْ العلاقة بينهما.

48) حديقة ألعاب: يريد جاسم طلب تذاكر لإحدى الفعاليات عن طريق شبكة الإنترنت، ويدفع مبلغ إضافي مقابل كل طلب. ويبلغ سعر التذكرة الواحدة BD 52. وقد طلب جاسم 5 تذاكر ودفع BD 275 ثمنًا لها.

a) أوجد قيمة المبلغ الإضافي، واكتب معادلةً خطيةً ؛ لتمثيل التكلفة الكلية C للتذاكر التي عددها t.

b) كوّن جدولًا لثلاث قيم على الأقل لأعداد مختلفة من مجموعات التذاكر.

c) مثّل المعادلة بيانيًّا، وتنبأ بتكلفة 8 تذاكر.

49) نوادي علمية: تبلغ رسوم العضوية في النادي العلمي BD 22 في السنة، حيث يمكن للعضو الحصول على أشرطة علمية بأسعار مخفضة. وقد اشترى أحد الأعضاء 17 شريطًا في سنةٍ واحدةٍ، وكان جملة ما دفعه في تلك السنة BD 111.25 .

a) ما ثمن الشريط الواحد؟

b) اكتب معادلة خطية لتمثيل جملة المبلغ y الّذي يدفعه العضو في السنة الواحدة إذا تم شراء x شريطًا.

c) مثّل المعادلة بيانيًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

50) اكتشف الخطأ: كتب كلٌّ من يوسف وسمير معادلة المستقيم الّذي يمر بالنقطتين $(6, 4)$,$(3, -2)$. فأيُّهما كانت إجابته صحيحةً؟ برّر إجابتك.

سمير

$$m = \frac{4-(-2)}{6-3} = \frac{6}{3} = 2$$
$$y = mx + b$$
$$-2 = 2(3) + b$$
$$-2 = 6 + b$$
$$-8 = b$$
$$y = 2x - 8$$

يوسف

$$m = \frac{4-(-2)}{6-3} = \frac{6}{3} = 2$$
$$y = mx + b$$
$$6 = 2(4) + b$$
$$6 = 8 + b$$
$$-2 = b$$
$$y = 2x - 2$$

51) تحدّ: إذا كانت النقاط $(9, p)$,$(-6, 1)$,$(3, 7)$ تقع على المستقيم نفسه، فأوجد قيمة p مُبيّنًا خطوات الحل.

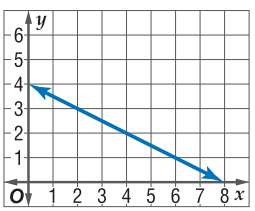
52) تبرير: افرض أن الصورة القياسية لمعادلة المستقيم هي $ax + by = c$.

a) أعد كتابة المعادلة بصيغة ميل – مقطع.

b) ما ميل المستقيم؟

c) ما قيمة مقطع المحور y؟

d) هل يكون هذا صحيحًا لجميع قيم a, b, c؟



53) مسألة مفتوحة: اكتب ما يأتي:

a) مسألة من واقع الحياة تناسب التمثيل البياني المجاور، ثم عرّف المتغيرين، وصِفْ العلاقة بينهما.

b) معادلة تُمثّل هذه العلاقة، وصِفْ معنى الميل ومقطع المحور y.

54) اكتب: تفيد المعادلات الخطية في التنبؤ بالأحداث المستقبلية؛ لذا صِفْ بعض العوامل من واقع الحياة التي تؤثر في ثبات التمثيل البياني عند إجراء التنبؤات.

55) **اكتب** ما المعلومات الضرورية لكتابة معادلة مستقيم؟ وضح إجابتك.

تدريب على اختبار معياري

56) **ما معادلة المستقيم المار بالنقطتين** $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ ، $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ؟

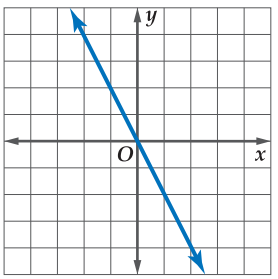
A $y = -2x - \frac{1}{2}$ **C** $y = 2x - 5$

B $y = -3x$ **D** $y = \frac{1}{2}x + 1$

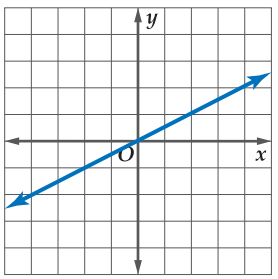
مراجعة تراكمية

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع لكل مستقيم ممثل بيانيًّا أدناه: (الدرس 2-1)

57)



58)



مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد قيمة r الّذي يحقق الشروط في كل مما يأتي:

59) $m = 4$، ويمر بالنقطتين $(6, -2), (r, -6)$

60) $m = 6$، ويمر بالنقطتين $(r, 4)$ $(8, 10)$

61) $m = -3$، ويمر بالنقطتين $(7, -10), (r, 4)$

62) $m = -1$، ويمر بالنقطتين $(9, r)$ $(6, 2)$

63) $m = -\frac{1}{3}$، ويمر بالنقطتين $(9, r), (6, 3)$

64) $m = \frac{4}{3}$، ويمر بالنقطتين $(5, r), (2, -3)$

2-2 المعادلات الخطية بصيغة نقطة - ميل

Linear Equation in Point-Slope Form

فيما سبق
درست ميل المستقيم.

والآن
الأفكار الرئيسة
- أكتب معادلة مستقيم بدلالة ميله ونقطة عليه.
- أكتب معادلة مستقيم يوازي أو يعامد مستقيمًا معلومًا.

المفردات الأساسية
صيغة نقطة - ميل
linear extra polation
الموازي
parallel
العمودي
perpendicular

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تُشارك مملكة البحرين في العديد من مسابقات القرآن الكريم الدولية بشكل منتظم؛ إيمانًا منها بأهمية المنافسة الشريفة بين المتسابقين في هذا المجال المهم، ومن المسابقات التي تشارك فيها مسابقة الملك عبد العزيز الدولية لحفظ القرآن الكريم وتلاوته وتفسيره، وقد بدأت هذه المسابقة عام 1399 هـ بـ 55 مشاركًا، وتزايد العدد خلال الثلاثين عامًا بمعدل 156 مشاركًا سنويًا. ويمكنك التعبير عن عدد المشاركين في المسابقة سنويًا بالمعادلة $y = 156x + 55$، حيث x يمثل عدد السنوات بعد عام 1399 هـ، و y يمثل عدد المشاركين.

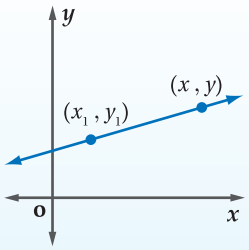
وقد حققت مملكة البحرين خلال الأعوام الماضية - لاسيما في الفترة الممتدة من 2001 م إلى الآن - عددًا لا بأس به من المراكز المتقدمة في المسابقة تراوحت بين المركز الثاني والمركز الخامس.

صيغة الميل ونقطة: يمكنك كتابة معادلة المستقيم بصيغة نقطة - ميل، إذا علمت إحداثيات نقطة يمر بها وميله.

مفهوم أساسي
صيغة نقطة-ميل

مطويتك

التعبير اللفظي المعادلة $y - y_1 = m(x - x_1)$ تُعبر عن معادلة المستقيم غير الرأسي بصيغة نقطة - ميل، حيث (x_1, y_1) نقطة معطاة تقع على المستقيم، m ميل هذا المستقيم.



بالرموز $y - y_1 = m(x - x_1)$

مثال 1
كتابة معادلة مستقيم بصيغة نقطة - ميل

اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة $(3, -2)$ وميله $\frac{1}{4}$ بصيغة نقطة - ميل.

صيغة نقطة - ميل: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$(x_1, y_1) = (3, -2)$، $m = \frac{1}{4}$: $y - (-2) = \frac{1}{4}(x - 3)$

بالتبسيط: $y + 2 = \frac{1}{4}(x - 3)$

تأكد

1) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-2, 1)$ وميله -6 بصيغة نقطة - ميل، ثم مثّلها بيانيًا.

صيغ المعادلات الخطية إذا عُلم ميل المستقيم وإحداثيًّا نقطةٍ يمر بها، أو عُلمت نقطتان يمر بهما، فإنه يمكنك كتابة المعادلة الخطية بإحدى الطرائق الآتية:

ملخص المفهوم

كتابة المعادلات الخطية

مطويتك

إذا عُلم الميل ونقطة

الخطوة 1 عوّض عن قيم m, x_1, y_1 في المعادلة $y - y_1 = m(x - x_1)$، أو عوّض عن قيم m, x_1, y_1 في صيغة ميل– مقطع، وحلّها لإيجاد قيمة b.

الخطوة 2 أعد كتابة المعادلة بالصيغة المطلوبة.

إذا عُلمت نقطتان

الخطوة 1 أوجد الميل.

الخطوة 2 اختر إحدى النقطتين.

الخطوة 3 اتبع الخطوات نفسها الواردة في كتابة معادلة المستقيم، إذا عُلم الميل ونقطة.

إرشادات للدراسة

الميل

ميل المستقيم ثابت لا يتغير، وعندما تتحرك بالتغيّر الأفقي والرأسي نفسيهما صعودًا أو نزولًا، فستصل دائمًا إلى نقطة على المستقيم.

مثال 2

الصورة القياسية

اكتب المعادلة $y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 5)$ بالصورة القياسية.

المعادلة الأصلية	$y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 5)$
بضرب كل طرف في العدد (3) للتخلص من الكسر	$3(y - 1) = 3\left(-\frac{2}{3}\right)(x - 5)$
بالتبسيط	$3(y - 1) = -2(x - 5)$
خاصية التوزيع	$3y - 3 = -2x + 10$
بإضافة (3) إلى كل طرف	$3y = -2x + 13$
بإضافة $2x$ إلى كل طرف	$2x + 3y = 13$

مراجعة المفردات

الصورة القياسية للمعادلة الخطية

هي $ax + by = c$، حيث $a \geq 0$، a, b معًا لا تساوي صفرًا، a, b, c أعداد صحيحة العامل المشترك الأكبر لها يساوي 1.

تأكد

2) اكتب المعادلة $y - 1 = 7(x + 5)$ بالصورة القياسية.

لإيجاد المقطع y للمعادلة، أعد كتابتها بصيغة ميل – مقطع.

مثال 3

صيغة ميل - مقطع

اكتب المعادلة $y + 3 = \frac{3}{2}(x + 1)$ بصيغة ميل – مقطع.

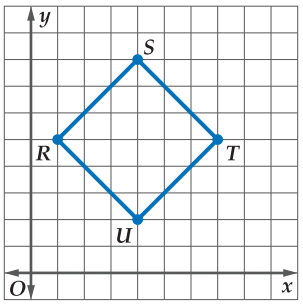
المعادلة الأصلية	$y + 3 = \frac{3}{2}(x + 1)$
خاصية التوزيع	$y + 3 = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$
بطرح 3 من كل طرف	$y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

تأكد

3) اكتب المعادلة $y + 6 = -3(x - 4)$ بصيغة ميل – مقطع.

واستعمال الصيغ المختلفة للمعادلات الخطية يفيد في موضوعات أخرى.

مثال 4 صيغة نقطة - ميل والصورة القياسية



هندسة: الشكل المجاور يبيّن المربع $RSTU$.

a) اكتب معادلة المستقيم الّذي يتضمن $\overline{TU}$ بصيغة نقطة – ميل.

الخطوة 1 أوجد ميل $\overline{TU}$.

صيغة الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$(x_1, y_1) = (4, 2), (x_2, y_2) = (7, 5)$ $= \frac{5 - 2}{7 - 4} = 1$

الخطوة 2 يمكنك اختيار إحدى النقطتين للتعويض عن (x_1, y_1) في صيغة نقطة - ميل.

صيغة نقطة – ميل $y - y_1 = m(x - x_1)$

$(x_1, y_1) = (4, 2)$ $y - 2 = 1(x - 4)$

على اعتبار أن $(x_1, y_1) = (7, 5)$ $y - 5 = 1(x - 7)$

b) اكتب معادلة المستقيم نفسه بالصورة القياسية.

$y - 2 = 1(x - 4)$	المعادلة الأصلية	$y - 5 = 1(x - 7)$
$y - 2 = x - 4$	خاصية التوزيع	$y - 5 = x - 7$
$y = 1x - 2$	بإضافة 2 إلى كل طرف	$y = x - 2$
$-x + y = -2$	بطرح $1x$ من كل طرف	$-x + y = -2$
$x - y = 2$	بضرب كل طرف في (-1)	$x - y = 2$

تأكد

4a) اكتب معادلة المستقيم الّذي يتضمن $\overline{ST}$ بصيغة نقطة – ميل.

4b) اكتب معادلة المستقيم الّذي يتضمن $\overline{ST}$ بالصورة القياسية .

إرشادات للدراسة

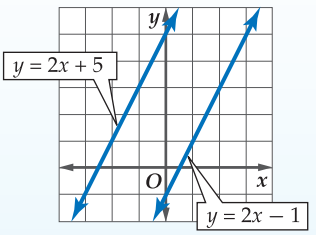
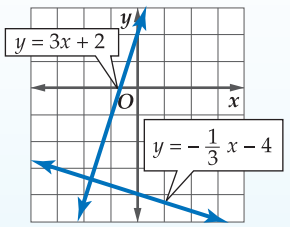
الميل في المربع

الأضلاع المتقابلة وغير الرأسية في المربع لها الميل نفسه. وإذا كانت إحداثيات أحد الرؤوس غير معطاة، فاستعمل ميل الضلع المقابل لإيجادها.

المستقيمات المتوازية والمستقيمان المتعامدان يمكن تحديد هل المستقيمان متوازيان أو متعامدان، أو غير ذلك باستعمال الميل.

مفهوم أساسي المستقيمات المتوازية والمستقيمان المتعامدان

أضف إلى مطويتك

المستقيمات المتوازية	المستقيمان المتعامدان
التعبير اللفظي المستقيمات غير الرأسية (المائلة) تكون متوازية إذا وفقط إذا كان لها الميل نفسه. أما المستقيمات الرأسية والأفقية فجميعها متوازية.	**التعبير اللفظي** المستقيمان غير الرأسيين يكونان متعامدين إذا وفقط إذا كان حاصل ضرب ميليهما يساوي -1.
	
مثال المستقيمان $y = 2x + 5, y = 2x - 1$ متوازيان	**مثال** المستقيمان $y = 3x + 2, y = -\frac{1}{3}x - 4$ متعامدان

مثال 5 معادلة مستقيم بمعلومية نقطة يمر بها وموازٍ لمستقيم آخر

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم الّذي يمر بالنقطة $(-2\ ,\ -1)$ ويوازي المستقيم $y = -3x - 2$.

ميل المستقيم $y = -3x - 2$ يساوي -3 ، وحيث إن المستقيم المطلوب يوازيه، فإن له الميل نفسه.

صيغة نقطة – ميل	$y - y_1 = m\ (x - x_1)$
$(x_1\ ,\ y_1) = (-1, -2)، m = -3$	$y - (-2) = -3\ [x - (-1)]$
بالتبسيط	$y + 2 = -3\ (x + 1)$
خاصية التوزيع	$y + 2 = -3x - 3$
بطرح 2 من الطرفين	$y + 2 - 2 = -3x - 3 - 2$
بكتابة المعادلة بصيغة ميل – مقطع	$y = -3x - 5$

تأكد

5) اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم المار بالنقطة $(4, -1)$، والموازي للمستقيم $y = \frac{1}{4}x + 7$.

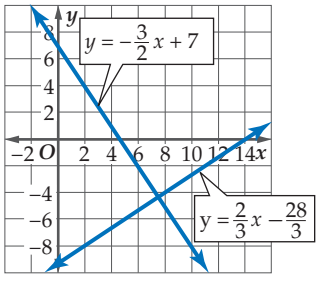
مثال 6 كتابة معادلة مستقيم بمعلومية نقطة يمر بها وعمودي على مستقيم آخر

اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-6, 5)$، والعمودي على المستقيم $y = -\frac{3}{2}x + 7$

ميل المستقيم المعلوم هو $-\frac{3}{2}$، وبما أن ميل المستقيم العمودي

يساوي $\frac{-1}{\text{ميل المستقيم المعلوم}}$ ، فإن ميل المستقيم العمودي يساوي $\frac{2}{3}$

استعمل صيغة نقطة – ميل.



صيغة نقطة – ميل	$y - y_1 = m(x - x_1)$
$(x_1, y_1) = (5, -6)\ ,\ m = \frac{2}{3}$	$y - (-6) = \frac{2}{3}\ (x - 5)$
خاصية التوزيع	$y + 6 = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$
بطرح 6 من كلا الطرفين وبالتبسيط	$y = \frac{2}{3}x - \frac{28}{3}$

التحقق مثّل المستقيمين بيانيًّا؛ للتحقق من صحة حلّك.

تأكد

6) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة $(3, 7)$، والعمودي على المستقيم $y = \frac{3}{4}x - 5$.

BH MT10 SE1 CH02 .indd 67 9/5/23 11:03 AM

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 64

اكتب معادلة بصيغة نقطة – ميل للمستقيم الّذي يحقق الشروط في كلٍّ مما يأتي:

1) الميل -6 ويمر بالنقطة $(-2, 5)$ **2)** الميل $\frac{5}{6}$ ويمر بالنقطة $(-2, -8)$ **3)** الميل $-\frac{1}{2}$ ويمر بالنقطة $(4, 3)$

مثال 2 صفحة 65

اكتب كل معادلة مما يأتي بالصيغة القياسية:

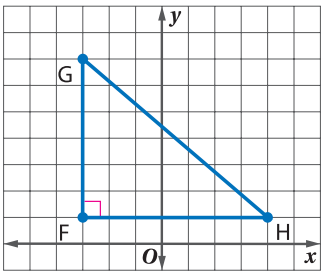
4) $y + 2 = \frac{7}{8}(x - 3)$ **5)** $y + 7 = -5(x + 3)$ **6)** $y + 2 = \frac{5}{3}(x + 6)$

مثال 3 صفحة 65

اكتب كل معادلة مما يأتي بصيغة ميل – مقطع:

7) $y - 10 = 4(x + 6)$ **8)** $y - 7 = -\frac{3}{4}(x + 5)$ **9)** $y - 9 = x + 4$

مثال 4 صفحة 66



10) **هندسة:** استعمل المثلث القائم FGH للإجابة عمَّا يأتي:

a) اكتب معادلة المستقيم الّذي يحوي الضلع $\overline{GH}$ بصيغة ميل – نقطة.

b) اكتب معادلة المستقيم نفسه بالصيغة القياسية.

المثالان 5, 6 صفحة 67

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم الّذي يحقق الشروط في كلٍّ ممَّا يأتي:

11) يمر بالنقطة $(-9, -3)$، وعمودي على المستقيم $y = -\frac{5}{3}x - 8$

12) يمر بالنقطة $(4, -10)$، وموازٍ للمستقيم $y = \frac{7}{8}x - 3$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 64

اكتب معادلة بصيغة نقطة – ميل للمستقيم الّذي يحقق الشروط في كلٍّ ممَّا يأتي:

13) $(5, 3), m = 7$ **14)** $(2, -1), m = -3$ **15)** $(-6, -3), m = -1$

16) $(-7, 6), m = 0$ **17)** $(-2, 11), m = \frac{4}{3}$ **18)** $(-7, -8), m = -\frac{3}{7}$

19) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-2, -9)$ وميله $-\frac{5}{7}$ بصيغة نقطة – ميل.

20) اكتب معادلة المستقيم الأفقي المار بالنقطة $(-6, 0)$ بصيغة نقطة – ميل.

مثال 2 صفحة 65

اكتب كل معادلة مما يأتي بالصيغة القياسية:

21) $y - 10 = 2(x - 8)$ **22)** $y - 6 = -3(x + 2)$

23) $y - 9 = -6(x + 9)$ **24)** $y + 4 = \frac{2}{3}(x + 7)$

25) $y + 7 = \frac{9}{10}(x + 3)$ **26)** $y + 7 = -\frac{3}{2}(x + 1)$

27) $2y + 3 = -\frac{1}{3}(x - 2)$ **28)** $4y - 5x = 3(4x - 2y + 1)$

مثال 3
صفحة 65

اكتب كل معادلة مما يأتي بصيغة ميل – مقطع:

29) $y - 6 = -2(x - 7)$

30) $y - 11 = 3(x + 4)$

31) $y + 5 = -6(x + 7)$

32) $y - 1 = \frac{4}{5}(x + 5)$

33) $y + 2 = \frac{1}{6}(x - 4)$

34) $y + 6 = -\frac{3}{4}(x + 8)$

35) $y + 3 = -\frac{1}{3}(2x + 6)$

36) $y + 4 = 3(3x + 3)$

مثال 4
صفحة 66

37) **تأجير أشرطة فيديو:** ينقص عدد الأشرطة التي يتم تأجيرها في محل لأشرطة الفيديو بمعدل 5 أشرطة في الأسبوع، وفي الأسبوع السادس تم تأجير 4 أشرطة، ما عدد الأشرطة التي تم تأجيرها في الأسبوع الثاني؟

38) **وصلات كهربائية (كوابل):** تقدم شركة كوابل عرضًا استثنائيًا بمبلغ 39.95 BD كل شهر بالإضافة إلى رسوم التركيب مرة واحدة، فإذا بلغت التكلفة الكلية للتركيب والخدمات مدة 6 أشهر 264.70 BD، فأجب عما يأتي:

a) اكتب معادلة التكلفة الكليّة y لأي عددٍ من الكوابل بعد x شهرًا بصيغة نقطة – ميل.

(**تلميح:** النقطة (6, 264.70) هي حل لهذه المعادلة)

b) اكتب المعادلة بصيغة ميل – مقطع.

c) ما قيمة رسوم التركيب؟

اكتب كل معادلة مما يأتي بالصيغة القياسية:

39) $y + 8 = -\frac{11}{12}(x - 14)$

40) $y - 3 = 2.5(x + 1)$

41) $y + 2.1 = 1.4(x - 5)$

المثالان 5, 6
صفحة 67

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم الّذي يحقق الشروط في كلٍّ مما يأتي:

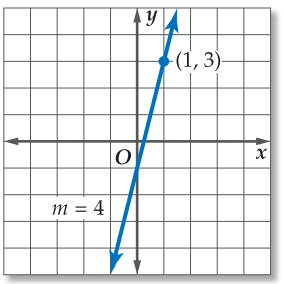
42) يمر بالنقطة (4, 2)، وعمودي على المستقيم $y = -2x + 3$

43) يمر بالنقطة (−6, −6)، وموازٍ للمستقيم $y = \frac{4}{3}x + 8$

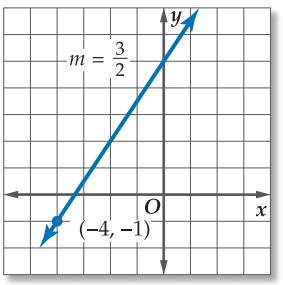
44) يمر بالنقطة (12, 0)، وموازٍ للمستقيم $y = -\frac{1}{2}x - 3$

اكتب معادلة بصيغة نقطة– ميل للمستقيم الممثل بيانيًّا في كل شكل أدناه:

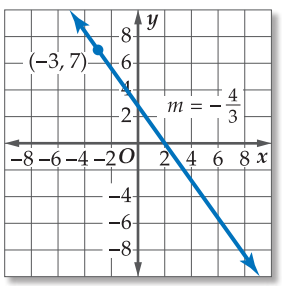
45)



46)



47)



اكتب كل معادلة مما يأتي بصيغة ميل – مقطع:

48) $y + \frac{3}{5} = x - \frac{2}{5}$

49) $y - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}(x - 4)$

50) $y + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}(x + \frac{2}{5})$

51) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (−2, 8) وميله $\frac{8}{5}$ بالصيغ الآتية: نقطة – ميل، وميل – مقطع، والصيغة القياسية.

52) اكتب معادلة المستقيم ℓ الّذي يمر بالنقطة (−9, 4) وميله $\frac{4}{7}$. بالصيغ الآتية: نقطة – ميل، وميل – مقطع، والصيغة القياسية.

الربط مع واقع الحياة

ينخفض الضغط الجوي وتقل كمية الأكسجين كلما ارتفعنا إلى أعلى، والتعرض للضغط الجوي المنخفض لفترات طويلة يسبّب أمراضًا معينة.

53) طقس: الضغط الجوي هو دالة خطية للارتفاع. فالضغط الجوي يساوي 598 ملمتر زئبق (mmHg) عند ارتفاع 1.8 km ، 577 ملمتر زئبق (mmHg) ،عند ارتفاع 2.1 km

a) اكتب صيغة الضغط الجوي في صورة دالة للارتفاع.

b) ما الارتفاع بالكيلومترات الّذي تكون عنده قيمة الضغط الجوي تساوي 657 mmHg؟

مسائل مهارات التفكير العليا

54) أيها لا ينتمي؟ حدد المعادلة التي لا تنتمي إلى المعادلات الأخرى، وفسر إجابتك.

$y - 8 = 3(x - 2)$ | $y + 4 = 3(x + 1)$ | $y + 1 = 3(x + 1)$ | $y - 5 = 3(x - 1)$

55) اكتشف الخطأ: يكتب كلٌّ من سعيد وعلاء معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(-6, 4), (3, -7)$ بصيغة نقطة– ميل. أيُّهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

علاء
$y - 4 = -\frac{9}{11}(x + 6)$

سعيد
$y - 7 = -\frac{11}{9}(x + 3)$

56) مسألة مفتوحة: صف موقفًا من واقع الحياة يتضمن معدلًا ثابتًا للتغير، وقيمةً للمتغير y تقابل قيمة محددة للمتغير x، مثّل هذا الموقف باستعمال معادلة بصيغة نقطة – ميل، وبصيغة ميل – مقطع.

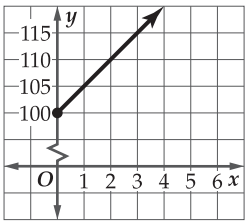
57) تبرير: اكتب معادلة المستقيم الّذي يمر بالنقطتين $(3, -7), (-4, 8)$، ثم أوجد ميله، وبيّن، أين يقطع المستقيم المحورين x, y ؟

58) تحدٍّ: اكتب معادلة المستقيم الّذي يمر بالنقطتين $(r, s), (t, n)$ بصيغة نقطة – ميل.

59) اكتب: وضّح، كيف يمكنك استعمال صيغة الميل لكتابة معادلة مستقيم بصيغة نقطة– ميل.

تدريب على اختبار معياري

60) أيّ العبارات الآتية ترتبط بالشكل المعطى أكثر من غيرها؟



A لديك BD 100 ، تصرف منها BD 5 أسبوعيًّا.

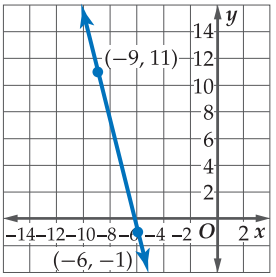
B لديك BD 100 ، توفر منها BD 5 أسبوعيًّا.

C تحتاج إلى BD 100 لشراء جهاز، وتوفر BD 5 أسبوعيًّا.

D تحتاج إلى BD 100 لشراء جهاز، وتصرف BD 5 أسبوعيًّا.

61) **إجابة قصيرة:** يعرض متجر هدية بقيمة BD 5 لكل من يشتري بمبلغ BD 75. كم يجب أن يشتري الزبون؛ ليحصل على هدية بقيمة BD 35 ؟

62) **اختيار من متعدد:** معادلة المستقيم المُمثّل بيانيًّا في الشكل المجاور هي:



A $y = -4x - 25$

B $y = -\frac{2}{3}x - 5$

C $y = \frac{4}{5}x + \frac{29}{25}$

D $y = 6x + 35$

مراجعة تراكمية

اكتب معادلة المستقيم الّذي يمر بكل زوج من النقاط فيما يأتي: (الدرس 2-1)

63) $(4, 2), (-2, -4)$

64) $(3, -2), (6, 4)$

65) $(-1, 3), (2, -3)$

66) $(2, -2), (3, 2)$

67) $(7, -2), (-4, -2)$

68) $(0, 5), (-3, 5)$

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم الذي يحقق الشروط في كل مما يأتي: (الدرس 2-1)

69) الميل 2−، مقطع المحور y يساوي 6

70) الميل 3 ، مقطع المحور y يساوي 5−

71) الميل $-\frac{1}{2}$ ، مقطع المحور y يساوي 3

72) الميل $-\frac{3}{5}$ ، مقطع المحور y يساوي 12

73) الميل 0 ، مقطع المحور y يساوي 3

74) الميل 1− ، مقطع المحور y يساوي 0

مراجعة المتطلبات السابقة

مثّل كل علاقة ممَّا يأتي بيانيًّا:

75) $\{(3, 8), (3, 7), (2, -9), (1, -9), (-5, -3)\}$

76) $\{(3, 4), (4, 3), (2, 2), (5, -4), (-4, 5)\}$

77) $\{(0, 2), (-5, 1), (0, 6), (-1, 9), (-4, -5)\}$

78) $\{(7, 6), (3, 4), (4, 5), (-2, 6), (-3, 2)\}$

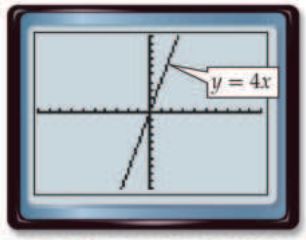
معمل الآلة الحاسبة البيانية:

التغيّر الطردي
Direct Variation

الهدف
أكتب معادلة تغيّر طردي.

معادلة التغيّر الطردي حالة خاصة من المعادلة الخطية، ويمكن كتابة معادلة التغيّر الطردي بالصيغة $y = kx$، حيث k هو ثابت التغيّر.

نلاحظ أن التَّمثيل البياني للمعادلة $y = 4x$ هو مستقيم يمر بنقطة الأصل، ومعادلة التغيّر الطردي هي حالة خاصة من معادلة مكتوبة بصيغة ميل – مقطع، أو $y = mx + b$.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

فإذا كانت $m = k$ و $b = 0$، فإن $y = kx$؛ لذا فالميل في هذه المعادلة هو ثابت التغيّر.

وللتعبير عن التغيّر الطردي نقول: إن y تتغيّر طرديًّا بتغيّر x، حيث تتغيّر قيمة y بمعدل ثابت بتغيّر قيمة x.

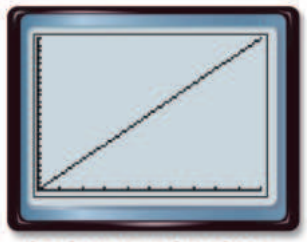
مفهوم أساسي — **التغيّر الطردي**

أضف إلى مطويتك

تتغيّر y طرديًّا مع x، إذا وُجد عدد ثابت k، $k \neq 0$، بحيث $y = kx$، ويُسمى العدد k ثابت التغيّر.

نشاط

ذهب: يُقاس عيار الذهب بالقيراط r، ويعتمد على نسبة الذهب الخالص p الموجودة فيه، فقطعة ذهب عيارها 14 قيراطًا تحوي 58.25% من الذهب الخالص.


[0, 1] scl: 0.1 by [0, 24] scl: 1

a) اكتب معادلة التغيّر الطردي الذي يربط بين r و p، ثم مثّلها بيانيًّا.

استعمل الزوج المرتب (0.5825, 14)؛ لإيجاد ثابت التغيّر.

معادلة التغيّر الطردي	$y = kx$
$x = 0.5825, y = 14$	$14 = k(0.5825)$
بقسمة كل طرف على 0.5825	$24.03 \approx k$

معادلة التغيّر الطردي هي $r = 24.03p$.

b) أوجد العيار بالقيراط لخاتم من الذهب، نسبة الذهب الخالص فيه 75% .

استعمل الآلة الحاسبة؛ لمعرفة عيار الذهب بالقيراط بالضغط على المفاتيح:

2nd [CALC] 0.75 ENTER 18.0225

عيار خاتم نسبة الذهب الخالص فيه 75% هو 18 قيراطًا.

تمارين:

1) **غوص:** عندما تغوص تحت الماء، فإن ضغط الماء على أذنك يتغيّر طرديًّا بتغيّر العمق، فإذا كنت تغوص على عمق 8 ft، فإن الضغط على أذنيك يكون $3.44\ \text{lb/in}^2$. اكتب معادلة التغيّر الطردي التي تربط بين الضغط والعمق، ومثّلها بيانيًّا، ثم أوجد الضغط على عمق 65 ft.

2) مثّل معادلات التغيّر الطردي بيانيًّا: $y = 2x,\ y = 4x,\ y = -2x,\ y = -4x$
ما أوجه الشبه والاختلاف بين التَّمثيلات البيانية؟

2-3

العلاقات والدوال

Relations and Functions

لماذا؟

يُبيّن الجدول أدناه المعدل الشهري التقريبي لأعلى درجة حرارة وأدناها في مدينة ما. لاحظ أن معدل كلٍّ من درجة الحرارة الدنيا، والعليا لكل شهر يمكن تمثيله بزوج مرتب. فعلى سبيل المثال: يمكن تمثيل معدلَي درجات الحرارة لشهر يناير بالزوج المرتب (9, 20).

معدل درجات الحرارة الشهرية (°C) في مدينة ما

الشهر	يناير	فبراير	مارس	إبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
الدنيا	9	11	15	20	26	28	29	29	26	21	15	11
العليا	20	23	27	33	39	42	43	43	40	35	27	22

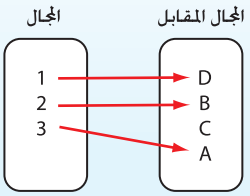
العلاقات والدوال الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في **المجال المقابل**، والمجال المقابل لمجال دالة ما هو مجموعة جميع العناصر التي تحوي صور عناصر المجال، بحيث يتشكل المدى من مجموعة العناصر من المجال المقابل التي ارتبطت بعناصر من المجال، وفي جميع الدوال ترتبط كل عناصر المجال بعناصر المجال المقابل، لكن قد يكون هناك اختلاف في طريقة ارتباط عناصر المجال بعناصر المجال المقابل.

مفهوم أساسي — الدوال

أضف إلى مطويتك

دالة واحد لواحد (متباينة)

كل عنصر في المدى هو صورة (يرتبط مع) عنصر واحد فقط في المجال.

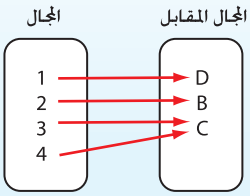


المدى = {D, B, A}

الدالة شاملة

كل عنصر في المجال المقابل هو صورة لعنصر واحد على الأقل في المجال، أي

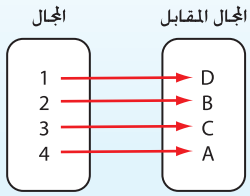
المجال المقابل = المدى.



المدى = {D, B, C}

دالة واحد لواحد وشاملة (تقابل)

إذا كانت الدالة واحد لواحد، وشاملة، فهي دالة تقابل. أي كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط في المجال المقابل، وكل عنصر في المجال المقابل هو صورة لعنصر واحد فقط في المجال



المدى = {D, B, C, A}

فيما سبق

درستُ تحديد كلٍّ من مجال ومدى علاقة معطاة.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أحلّل العلاقات والدوال.
- أستعمل معادلات العلاقات والدوال.

المفردات الأساسية

المجال المقابل
codomain

دالة واحد لواحد (متباينة)
one-to-one function

الدالة الشاملة
onto function

دالة تقابل
corresponding function

العلاقة المنفصلة
discrete relation

العلاقة المتصلة
continuous relation

اختبار الخط الرأسي
vertical line test

المتغير المستقل
independent variable

المتغير التابع
dependent variable

رمز الدالة
function notation

www.obeikaneducation.com

مثال 1 المجال والمدى

حدّد مجال كل علاقة مما يأتي ومداها، وبيّن أيّهما دالة. وإذا كانت دالة فهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟

a) $\{(-6, -1), (-5, -9), (-3, -7), (-1, 7), (6, -9)\}$

المجال $= \{6, -1, -3, -5, -6\}$ ، المدى $= \{7, -1, -7, -9\}$

هل هي دالة؟ نعم؛ لأن كل عنصر في المجال ارتبط بعنصر واحد فقط في المجال المقابل.

هل هي واحد لواحد؟ لا ؛ لأن العنصر 9− من المدى هو صورة لعنصرين من المجال هما 6 , 5−.

هل هي شاملة؟ نعم؛ لأن المجال المقابل = المدى.

بما أن الدالة ليست واحدًا لواحدٍ، فهي ليست تقابل.

b)

x	2	−1	−2	−1	2
y	−2	−1	0	1	2

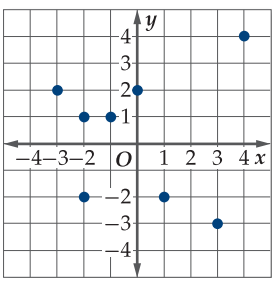
المجال $= \{2, -1, -2\}$ ، المدى $= \{2, 1, 0, -1, -2\}$

هذه العلاقة ليست دالة؛ لأن العنصر 2 في المجال ارتبط بالعنصرين 2− و 2 في المجال المقابل، والعنصر 1− في المجال ارتبط بالعنصرين 1− و 1 في المجال المقابل.

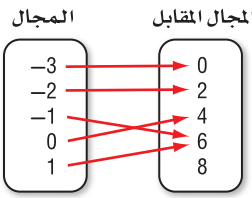
تأكد

حدّد مجال كل علاقة مما يأتي ومداها، وبيّن أيُّهما دالة. وإذا كانت دالة فهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟

1A)

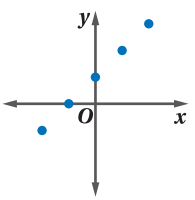


1B)



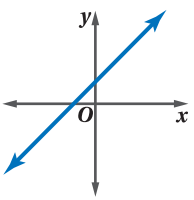
العلاقة التي يكون فيها المجال مجموعةً من النقاط المنفصلة، مثل العلاقة A أدناه تُسمى **علاقة منفصلة**. لاحظ أن تمثيلها البياني يتكون من نقاط غير متصلة، وعندما يكون المجال للعلاقة عددًا لا نهائيًّا من العناصر، وأمكن تمثيلها بيانيًّا بخطٍ مستقيمٍ، أو بمنحنًى متصلٍ، فإنها تكون **علاقة متصلة**.

العلاقة A



علاقة منفصلة

العلاقة B



علاقة متصلة

يمكن استعمال **اختبار الخط الرأسي** مع كلٍّ من العلاقات المتصلة والمنفصلة؛ لمعرفة ما إذا كانت العلاقة دالة أو لا.

إرشادات للدراسة

إذا أُعطيت العلاقة بأزواج مرتبة، فإن مجموعة كل الإحداثيات x من الأزواج المرتبة تمثّل المجال، ومجموعة كل الإحداثيات y من الأزواج المرتبة تمثّل المدى.

إرشادات للدراسة

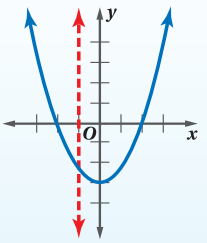
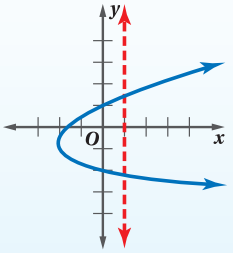
العلاقة المتصلة

إذا أمكن تمثيل العلاقة بيانيًّا دون رفع القلم عن الورقة، تكون العلاقة متصلة.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

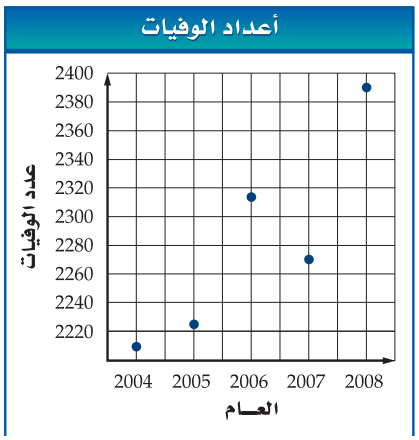
اختبار الخط الرأسي

التعبير اللفظي	إذا لم يقطع أي خط رأسي في المستوى الإحداثي التَّمثيل البياني للعلاقة في أكثر من نقطة، فالعلاقة دالة.
النموذج	
التعبير اللفظي	إذا قطع خط رأسي في المستوى الإحداثي التمثيل البياني للعلاقة في نقطتين أو أكثر، فالعلاقة ليست دالة.
النموذج	

مثال 2 من واقع الحياة

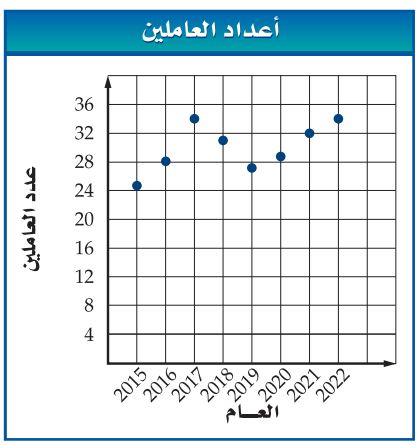
حوادث المرور: التّمثيل البياني المجاور يُبيّن أعداد الوفيات في مملكة البحرين نتيجة الحوادث المرورية من عام 2004 م إلى عام 2008 م ، فهل العلاقة التي يمثّلها منفصلة أم متصلة؟ وهل تُمثّل دالة أم لا؟

بما أن التَّمثيل البياني مكون من نقاط منفصلة، فالعلاقة منفصلة. و باستعمال اختبار الخط الرأسي، نلاحظ أنه لا يمكن رسم أي خط رأسي يمر بأكثر من نقطة من نقاط التَّمثيل؛ إذن العلاقة تُمثّل دالة.



تأكد

2) التّمثيل البياني المجاور يُبيّن عدد العاملين في إحدى المؤسسات في الأعوام من 2015 م إلى عام 2020 م ، حدد هل العلاقة التي تمثّلها هذه البيانات منفصلة، أم متصلة؟وهل تُمثّل دالة أم لا؟



الربط مع واقع الحياة

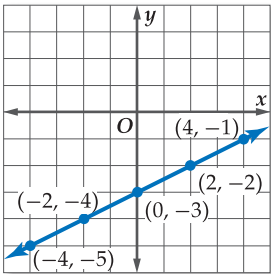
هل تعلم أن نسبة الحوادث المرورية في عام 2010 – 2009 في مملكة البحرين، والتي كان سببها تجاوز الإشارة الحمراء بلغت 7.98%.

المصدر: www.cio.gov.bh/

معادلات العلاقات والدوال يمكن تمثيل العلاقات والدوال بمعادلات، وقيم المتغيرين x , y في المعادلة هي مجموعة الأزواج المرتبة (x, y) التي تحقق المعادلة. ومن السهل في أغلب الأحيان تحديد ما إذا كانت المعادلة تُمثّل دالة أم لا، من خلال تمثيلها البياني.

مثال 3 تحليل التمثيلات البيانية للمعادلات

استعمل التمثيل البياني المجاور للمعادلة $y = \frac{1}{2}x - 3$ ، لتحديد مجالها ومداها، ثم حدّد ما إذا كانت تُمثّل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟ ثم حدّد ما إذا كانت منفصلة أم متصلة.

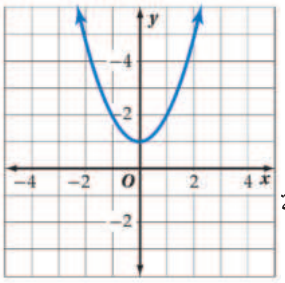


أي عدد حقيقي يمكن أن يكون الإحداثي x لنقطة ما على المستقيم، وأي عدد حقيقي أيضًا يمكن أن يكون الإحداثي y لنقطة ما على المستقيم؛ لذا فإن كلًّا من مجال هذه العلاقة، ومداها هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.

التَّمثيل البياني للعلاقة يحقق اختبار الخط الرأسي؛ لذا فإن المعادلة تُمثّل دالة. وكل قيمة لـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لـ y، وكل قيمة لـ y مرتبطة بقيمة واحدة فقط لـ x ؛ لذا فالدالة واحد لواحد شاملة؛ إذن فهي دالة تقابل.

وبما أن التَّمثيل البياني عبارة عن مستقيم متصل دون انقطاع، فالدالة متصلة.

تأكد



3) استعمل التَّمثيل البياني المجاور للمعادلة $y = x^2 + 1$؛ لتحديد مجالها ومداها، ثم حدّد ما إذا كانت تُمثّل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟ ثم حدّد ما إذا كانت منفصلة أم متصلة.

إذا كانت المعادلة تُمثّل دالة، فإن المتغير من المجال (غالبًا ما يكون x) يسمى **المتغير المستقل**. والمتغير الآخر (غالبًا ما يكون y) يسمى **المتغير التابع** ؛ لأن قيمه تعتمد على قيم المتغير x.

المعادلات التي تُمثّل دوالَّ تُكتب عادة باستعمال **رمز الدالة**، فالمعادلة $y = 5x - 1$ يمكن كتابتها في الصورة $f(x) = 5x - 1$، وإذا أردنا إيجاد قيمة في المدى ترتبط بالعنصر -6 في مجال الدالة f، فإن هذه القيمة هي $f(-6)$، ويمكن إيجادها بالتعويض عن كل x في المعادلة بالعدد -6 ؛ لذا فإن: $f(-6) = 5(-6) - 1 = -31$.

مثال 4 إيجاد قيمة الدالة

لتكن $f(x) = 2x^2 - 8$، أوجد قيمة كلٍّ ممَّا يأتي:

a) $f(6)$

الدالة المعطاة	$f(x) = 2x^2 - 8$
بالتعويض	$f(6) = 2(6)^2 - 8$
$6^2 = 36$	$= 2(36) - 8$
بالتبسيط	$= 72 - 8 = 64$

b) $f(2y)$

الدالة المعطاة	$f(x) = 2x^2 - 8$
بالتعويض	$f(2y) = 2(2y)^2 - 8$
$(2y)^2 = 2^2y^2$	$= 2(4y^2) - 8$
بالتبسيط	$= 8y^2 - 8$

تأكد

لتكن $g(x) = 0.5x^2 - 5x + 3.5$، أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

4A) $g(2.8)$ **4B)** $g(4a)$

مراجعة المفردات

المجال والمدى

المجال هو مجموعة القيم الممكنة للمتغير المستقل **x** جميعها. أما المدى فهو مجموعة جميع القيم الممكنة للمتغير التابع **y**.

إرشادات للدراسة

دالة واحد لواحد

لتكون الدالة واحد لواحد، يجب ألا يقطع أي خط أفقي في المستوى الإحداثي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة واحدة.

إرشادات للدراسة

الدالة الشاملة

لتكون الدالة شاملة، يجب أن يقطع أي خط أفقي في المستوى الإحداثي تمثيلها البياني في نقطة واحدة على الأقل.

قراءة الرياضيات

رمز الدالة

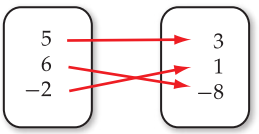
يستعمل الرمز **f(x)** للدوال بدلًا من **y** ، ويُقرأ "**f of x**". علمًا بأن **f** هو اسم الدالة، وليس متغيرًا مضروبًا في **x** .

تأكد من فهمك

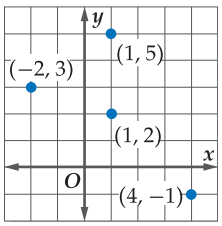
مثال 1
صفحة 74

حدّد مجال كل علاقة مما يأتي ومداها، وبيّن أيها دالة، وإذا كانت دالة، فهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟

1)



2)



3)

x	y
−2	−4
1	−4
4	−2
8	6

مثال 2
صفحة 75

4) كرة سلة: الجدولُ المجاورُ يُبيّن الوسطَ لعدد النقاط التي أحرزها فريق كرة سلة في مبارياته خلال 4 مواسم.

الموسم	الوسط للأعمار	الوسط لعدد النقاط
2013 – 2014	22	16.2
2014 – 2015	23	24.1
2015 – 2016	24	27.2
2016 – 2017	25	23.5

a) افترض أن الوسط للأعمار هو المجال. حدّد كلًّا من المجال والمدى.

b) اكتب علاقة في صورة أزواج مرتبة تُمثّل البيانات.

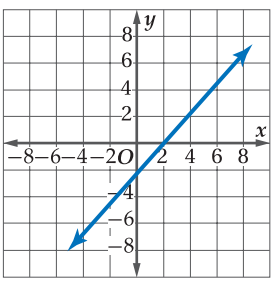
c) هل هذه العلاقة منفصلة أم متصلة؟

d) مثّل هذه العلاقة بيانيًّا، وهل هي دالة أم لا؟

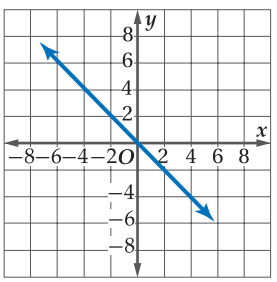
مثال 3
صفحة 76

استعمل التمثيل البياني للمعادلة في كل شكل أدناه؛ لتحديد مجالها ومداها، وحدّد ما إذا كانت تُمثّل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل ، أم غير ذلك؟ ثم حدّد ما إذا كانت منفصلة أم متصلة.

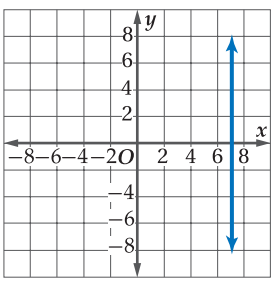
5) $y = x - 2$



6) $y = -x$



7) $x = 7$



مثال 4
صفحة 76

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

8) $f(-3)$، إذا كانت $f(x) = -4x - 8$

9) $g(5)$، إذا كانت $g(x) = -2x^2 - 4x + 1$

تدرب وحل المسائل

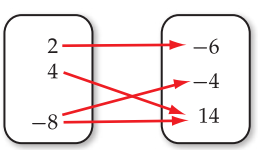
مثال 1
صفحة 74

حدّد مجال كل علاقة مما يأتي ومداها، وبيّن أيّها دالة، وإذا كانت دالة فهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟

10)

x	y
−0.3	−6
0.4	−3
1.2	−1

11)



12) $\{(3, -4), (-1, 0), (3, 0), (5, 3)\}$

مثال 2
صفحة 75

الربط مع واقع الحياة

الضغط الواقع على الغواص يزداد بازدياد عمق الغوص تحت الماء.

13) غوص: الجدول المجاور يُبيّن مقدار الضغط الواقع على الغواص عند أعماق معينة تحت سطح الماء:

العمق (ft)	0	20	40	60	80	100
الضغط الجوي	1	1.6	2.2	2.8	3.4	4

a) اكتب علاقة في صورة أزواج مرتبة تُمثّل البيانات المعطاة في الجدول.

b) مثّل العلاقة بيانيًّا.

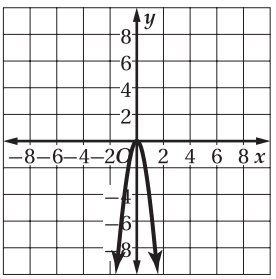
c) حدّد كلًّا من مجال العلاقة ومداها، وهل هي منفصلة أم متصلة؟

d) هل هذه العلاقة دالة أم لا؟ برّر إجابتك.

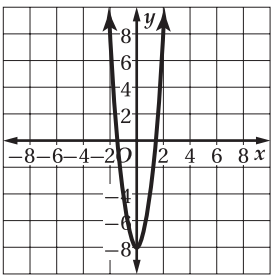
استعمل التَّمثيل البياني للمعادلة في كل شكل أدناه؛ لتحديد مجالها ومداها، وحدّد ما إذا كانت تُمثّل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟ ثم حدّد ما إذا كانت منفصلة أم متصلة؟

مثال 3
صفحة 76

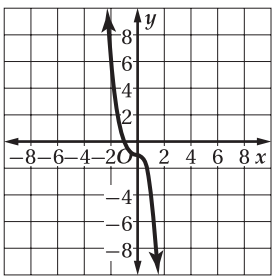
14) $y = -5x^2$



15) $y = 4x^2 - 8$



16) $y = -3x^3 - 1$



مثال 4
صفحة 76

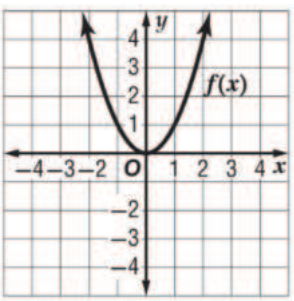
أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

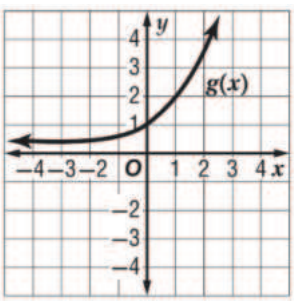
17) $f(-8)$، إذا كانت $f(x) = 5x^3 + 1$

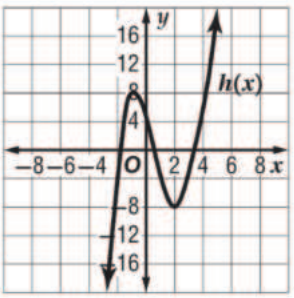
18) $f(2.5)$، إذا كانت $f(x) = 16x^2$

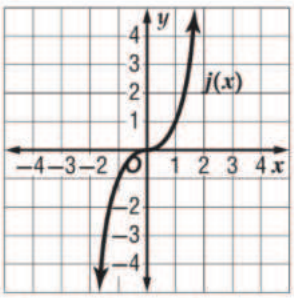
19) تمثيلات متعددة: في هذا التمرين سوف تستكشف دوال واحد لواحد، وشاملة.

استعمل التمثيلات البيانية أدناه للإجابة عن الفروع a – b :









a) جدولة: استعمل التَّمثيلات البيانية السابقة؛ لعمل جدول يُبيّن عدد المرات التي يمكن أن يقطع فيها خط أفقي التَّمثيل البياني لكل دالة مما سبق، اكتب جميع الحالات الممكنة.

b) جدولة: كوّن جدولًا، وصنّف فيه الدوال السابقة إلى واحد لواحد، أو شاملة.

إذا كانت: $f(x) = 3x + 2, g(x) = -2x^2, h(x) = -4x^2 - 2x + 5$، فأوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

20) $g(-6)$ **21)** $h(3)$ **22)** $h(8)$

23) $f\left(\frac{2}{3}\right)$ **24)** $g\left(\frac{3}{2}\right)$ **25)** $h\left(\frac{1}{5}\right)$

26) يملك فهد BD 800. إذا قرّر أن يُضيف إلى هذا المبلغ BD 200 شهريًّا، فإن الدالة $p(t) = 800 + 200t$؛ تُمثّل مقدار ما معه من نقود $p(t)$ بعد t شهرًا. كم يكون معه بعد 8 أشهرٍ؟

مسائل مهارات التفكير العليا

27) اكتشف الخطأ: أوجَدَ كلٌّ من أحمد وخالد قيمة $f(3d)$، حيث $f(x) = -4x^2 - 2x + 1$. أيُّهما حَلّه صحيح؟ برّر إجابتك.

أحمد

$$f(3d) = -4(3d)^2 - 2(3d) + 1$$
$$= -4(9d^2) - 6d + 1$$
$$= -36d^2 - 6d + 1$$

خالد

$$f(3d) = -4(3d)^2 - 2(3d) + 1$$
$$= 12d^2 - 6d + 1$$

28) تبرير: حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أو خاطئة. وبرّر إجابتك.

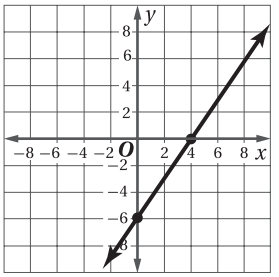
"إذا كانت الدالة شاملة، فهي واحد لواحد".

29) تحدٍّ: أوجد دالتين $f(x), g(x)$ تحققان الشروط: $f(a) = 19, g(a) = 33, f(b) = 31, g(b) = 51$، حيث $a = 5, b = 8$.

30) اكتب: اذكر وجه الاختلاف في مدى الدالة بين دالة واحد لواحد، والدالة الشاملة.

تدريب على اختبار معياري

31) ما مجال الدالة المُمثّلة في الشكل أدناه؟



A W **B** Z

C Q **D** R

32) إذا كانت $g(x) = x^2$، فأي تعبير مما يأتي يساوي $g(x + 1)$؟

A 1

B $x^2 + 1$

C $x^2 + 2x + 1$

D $x^2 - x$

مراجعة تراكمية

حدّد أي من المعادلات الآتية تُمثّل معادلة خطية: (مهارة سابقة)

33) $6y - 8x = 19$

34) $4x^2 = 2y - 9$

35) $18 = 2xy + 6$

حدّد الربع في المستوى الإحداثي الذي تقع فيه كل نقطة مما يأتي: (مهارة سابقة)

36) $(-4, -8)$

37) $(3, -1)$

مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين في كلٍّ مما يأتي:

38) (2, 3)، (9, 7)

39) (-3, 6)، (2, 4)

40) (2, 6)، (-1, 3)

41) (-3, 3)، (1, 3)

توسّع

2-3 الدوال المنفصلة والدوال المتصلة

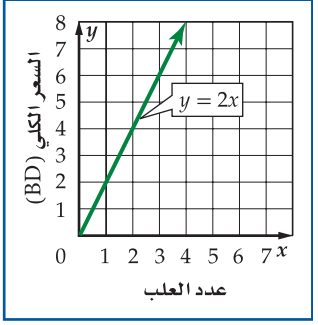
Discrete and Continuous Functions

الهدف

أستعمل الدوال المنفصلة والدوال المتصلة؛ لحل مسائل حياتية.

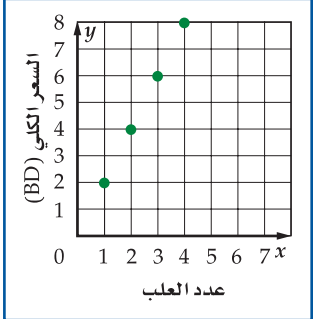
تُباع علبة العصير الواحدة من أحد الأنواع بسعر 2 BD، ويمكن إيجاد سعر x علبة عصير باستعمال الدالة المتصلة $y = 2x$، حيث y السعر الكلي بالدينار. ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيًّا كما هو موضح في الشكل المجاور.

سعر علب العصير



بالنظر إلى التمثيل البياني، يمكن أن ترى أن سعر علبتي عصير يساوي 4 BD، وسعر 3 علبٍ يساوي 6 BD وهكذا. يُبيّن التَّمثيل البياني أن سعر 1.5 علبة هو 2(1.5)، ويساوي 3 BD، إلَّا أن علب العصير لا تُباع مملوءة جزئيًّا. فهذه الدالة تُمثل بدقة أكثر بدالة منفصلة.

سعر علب العصير



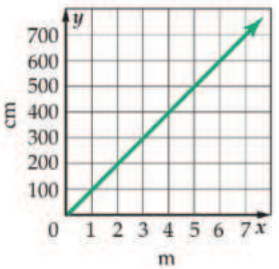
التَّمثيل البياني المجاور هو تمثيل الدالة المنفصلة التي تُمثّل سعر علب العصير. والمجال في هذا التَّمثيل البياني مقبول ومنطقي في هذا الموقف.

عند اختيار دالة منفصلة أو متصلة؛ لتمثيل موقف من واقع الحياة، يجب الأخذ بعين الاعتبار ما إذا كانت كل الأعداد الحقيقية تُعدُّ منطقية ومقبولة بوصفها عناصر في المجال.

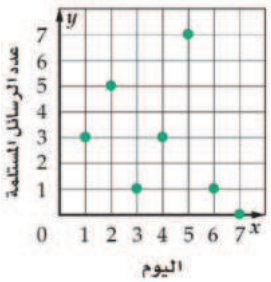
تمارين:

بيّن هل مُثِّلت كلٌّ مما يأتي بصورة صحيحة بوصفها دالة متصلة أو منفصلة، برّر إجابتك.

1) تحويل الوحدات



2) البريد الإلكتروني



3) y تُمثّل المسافة التي تقطعها سيارة في زمن مقداره x ساعة.

4) y تُمثّل العدد الكلي لراكِبي لعبة العجلة الدوَّارة بعد x دورةً من تشغيل اللعبة.

5) **اكتب:** أعْطِ مثالًا من واقع الحياة على دالة منفصلة وآخر على دالة متصلة، برّر إجابتك.

2-4 دوال خاصة

Special Functions

فيما سبق

درستُ تمثيل المعادلات الخطية بيانيًا، وكتابة معادلتها.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أمثّل الدوال الثابتة، والدوال الخطية بيانيًا.
- أمثّل الدوال الدرجية، والدوال المُعرفة بأكثر من قاعدة بيانيًا.

المفردات الأساسية

الدالة الأم
parent function

الدالة الثابتة
constant function

الدالة الخطية
linear function

الدالة الدرجية
step function

الدالة المُعرفة بأكثر من قاعدة خطية
piecewise-linear function

دالة أكبر عدد صحيح
greatest integer function

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

الوزن لا يزيد على (kg)	السعر (BD)
$\frac{1}{2}$	2
1	2.3
$1\frac{1}{2}$	2.6
2	2.9
...	...

تكلفة إرسال الطرود البريدية إلى أي دولة من دول مجلس التعاون الخليجي هي دالّة تعتمد على وزن الطرد، ولكنها ليست دالة خطية.

ففي الجدول المجاور، الطرود التي تقع أوزانها بين أي عددين في الجدول تقفز تكلفتها إلى القيمة العليا التي تليها. فمثلًا: تكون تكلفة الطرد الذي يزن 1.6 kg مساوية لتكلفة الطرد الذي يزن 2 kg وهي 2.9 BD .

الدالة الخطية تكتب الدالة الخطية على صورة $f(x) = ax + b$ حيث a , b أعداد حقيقية، فعلى سبيل المثال $g(x) = 3x + 5$ ، $m(x) = -x$ ، $k(x) = 3$ دوال خطية إذا كانت $a = 0$ تسمى **دالة ثابتة**.

الدالة الثابتة هي دالة من الدرجة الصفرية، وهي دالة مهما تختلف قيم x يكون لها صورة واحدة فقط، وتمثيلها البياني هو خط مستقيم أفقي يوازي المحور x ، ويكون مجالها مجموعة الأعداد الحقيقية أما مداها هو القيمة الثابتة التي تمثلها الدالة.

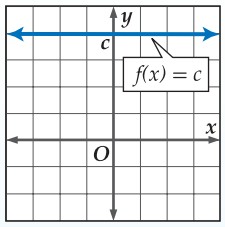
وعلى سبيل المثال: الدوال $g(x) = -7$ ، $r(x) = 2$ ، $I(x) = \sqrt{2}$ هي دوال ثابتة.

مفهوم أساسي

الدالة الثابتة

أضف إلى مطويتك

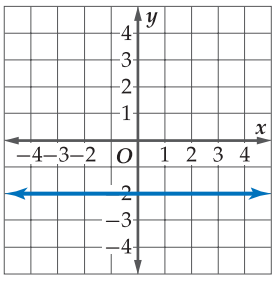
الدالة	$f(x) = c$ ، حيث c عدد حقيقي
شكل التّمثيل البياني	خط مستقيم أفقي يوازي المحور x
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	$\{c\}$



مثال 1

الدالة الثابتة

مثّل الدالة $f(x) = -2$ بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها.



الدالة هي دالة ثابتة قيمتها تساوي -2.

وتمثل بيانيًا بخط مستقيم أفقي يوازي المحور x وتقطع المحور y في النقطة $(0, -2)$

بما أن الدالة معرّفة عند جميع قيم x ، إذن المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى هو عدد واحد فقط هو -2 أي $\{-2\}$

تأكد

1) مثّل الدالة $f(x) = 3$ بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها.

أما إذا كانت $a \neq 0$ تكون **دالة خطية** من الدرجة الأولى، والتمثيل البياني لها هو خط مستقيم يقطع محوري الإحداثيات x , y ، ويكون كل من مجالها ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية.

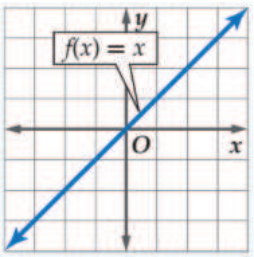
فعلى سبيل المثال:

الدوال $g(x) = 3x + 5$ ، $m(x) = -x + 7$ ، $k(x) = 4x$ دوال خطية من الدرجة الأولى.

مفهوم أساسي

الدالة الأم للدوال الخطية من الدرجة الأولى

أضف إلى مطويتك



الدالة الأم	$f(x) = x$
شكل التَّمثيل البياني	جميع الأزواج المرتبة (a,a)
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية

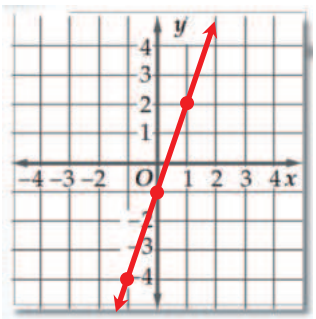
مثال 2

الدالة الخطية

مثّل الدالة $f(x) = 3x - 2$ بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها.

كوّن جدولًا، ثم اختر بعض القيم لـ x ، وأوجد قيمة الدالة عندها، ومثل النقاط في المستوى الإحداثي.

x	$2x - 3$	$f(x)$
-1	$3(-2) + 2$	-4
0	$3(-1) + 2$	-1
1	$3(0) + 2$	2



بما أن الدالة معرّفة عند جميع قيم x ، إذن المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

تأكد

2) مثّل الدالة $f(x) = 5 - 2x$ بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها.

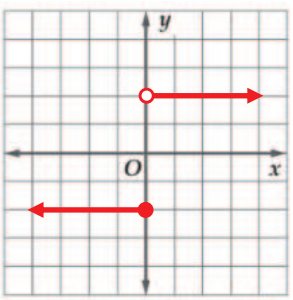
الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة هي دوال تُعرّف عن طريق عبارتين أو أكثر.

مثال 3

الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

مثّل الدالة $f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$ بيانيًّا،

وحدّد كلًّا من مجالها ومداها.



الخطوة 1 مثّل $f(x) = -2$ بيانيًّا عندما $x \leq 0$

الخطوة 2 مثّل $f(x) = 2$ بيانيًّا عندما $x > 0$

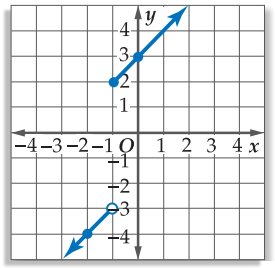
وبما أن العدد 0 لا يحقق المتباينة، إذن أبدأ بدائرة غير مظللة عند النقطة $(0,2)$

وبما أن الدالة معرّفة عند جميع قيم x ، فإن المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، وقيم $f(x)$ هي 2 وَ -2 لذلك مدى الدالة هو $\{-2, 2\}$

تأكد

3) مثّل الدالة $f(x) = \begin{cases} -4, & x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$ بيانيًّا، وحدّد كلًّا من مجالها ومداها.

مثال 4 الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة



مثّل الدالة $f(x)=\begin{cases} x-2 & , \ x<-1 \\ x+3 & , \ x\geq -1 \end{cases}$ بيانيًّا، وحدّد كلًّا من مجالها ومداها.

الخطوة 1 مثّل $f(x)=x-2$ بيانيًّا عندما $x<-1$.

احسب قيمة المقدار $x-2$ عندما $x=-1$، وعند قيمةٍ أخرى لِـ x أقل من -1 ولتكن -2

$f(x)=x-2$ $\qquad$ $f(x)=x-2$

$f(-2)=(-2)-2=-4$ $\qquad$ $f(-1)=(-1)-2=-3$

حدد النقطتين $(-2,-4)$, $(-1,-3)$ وصل بينهما بشعاع.

وبما أن العدد -1 لا يحقق المتباينة، إذن أبدأ بدائرة غير مظللة عند النقطة $(-1,-3)$.

الخطوة 2 مثّل $f(x)=x+3$ بيانيًّا، عندما $x\geq -1$.

احسب قيمة المقدار $x+3$ عندما $x=-1$، وعند قيمة أخرى لِـ x أكبر من أو تساوي -1 ولتكن 0

$f(x)=x+3$ $\qquad$ $f(x)=x+3$

$f(0)=(0)+3=3$ $\qquad$ $f(-1)=(-1)+3=2$

حدِّد النقطتين $(0,3)$, $(-1,2)$ وصِلْ بينهما بشعاع.

وبما أن العدد -1 يحقق المتباينة، إذن ابدأ بدائرة مظلّلة عند النقطة $(-1,2)$.

وبما أن الدالة معرّفة عند جميع قيم x، فالمجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

قيم $f(x)$ للأزواج المرتبة في التَّمثيل البياني للدالة هي جميع الأعداد الحقيقية الأقل من -3، وجميع الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 2؛ لذا فإن المدى هو $\{y \mid y<-3 \text{ أو } y\geq 2\}$.

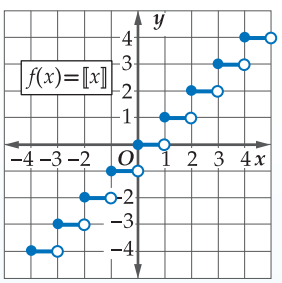
تأكد

4) مثّل الدالة $f(x)=\begin{cases} x+2 & , \ x<0 \\ x & , \ x\geq 0 \end{cases}$ بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها.

الدالة الدرجية التمثيل البياني **للدالة الدرجية** يتكون من قطع مستقيمة أفقية. ولأن كل دالة درجية هي دالة خطية، فإن هذا النوع من الدوال يسمى **دالة معرفة بأكثر من قاعدة خطية**، ومن أمثلتها **دالة أكبر عدد صحيح** التي تكتب في الصورة $f(x)=[\![x]\!]$، حيث الرمز $[\![x]\!]$ يعني أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x، فعلى سبيل المثال $[\![3.25]\!]=3$، لأن 3 أكبر عدد صحيح أقل من 3.25. وكذلك $[\![-4.6]\!]=-5$، وتسمى $f(x)=[\![x]\!]$ الدالة الأم للدوال الدرجية.

مفهوم أساسي الدالة الأم لدالة أكبر عدد صحيح

أضف إلى مطويتك



الدالة الأم	$f(x)=[\![x]\!]$
شكل التَّمثيل البياني	قطعة مستقيمة غير متقاطعة
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	مجموعة الأعداد الصحيحة

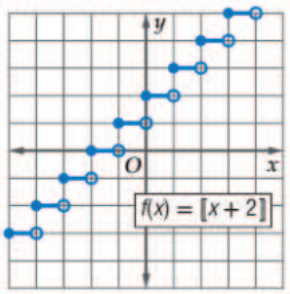
مثال 5 دالة أكبر عدد صحيح

مثّل الدالة $f(x) = [\![x + 2]\!]$ بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها.

أنشئ جدولًا، ثم اختر قيمًا بين الأعداد الصحيحة، عيّن النقاط وعلى التمثيل، ثم ضع دائرة لتمثيل النقطة غير المتضمنة في الدالة.

x	$x+2$	$[\![x+2]\!]$
0	2	2
0.25	2.25	2
0.5	2.5	2
1	3	3
1.25	3.25	3
1.5	3.5	3
2	4	4
2.25	4.25	4

x	$f(x)$
$0 \le x < 1$	2
$1 \le x < 2$	3
$2 \le x < 3$	4



لاحظ أن التمثيل البياني هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة الأم وحدتين إلى اليسار $f(x) = [\![x]\!]$

بما أن الدالة معرّفة عند جميع قيم x، إذن المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية والمدى هو مجموعة الأعداد الصحيحة.

تأكد

5) مثّل الدالة $f(x) = 2[\![x]\!]$ بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها.

يمكن استعمال الدوال الدرجية في الكثير من المواقف الحياتية التي تشمل النقود.

مثال 6 من واقع الحياة استعمال الدالة الدرجية

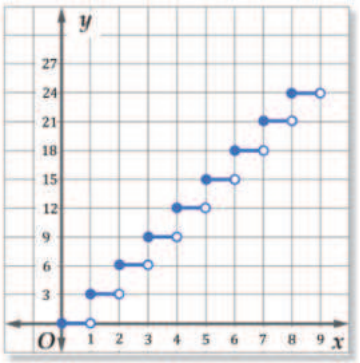
إعادة تدوير المخلفات الورقية: **تدفع شركة لإعادة تدوير المخلفات الورقية 3 BD عن كل صندوق من الورق يتم إحضاره للشركة، ولا تدفع أي شيء مقابل أي صندوق غير ممتلئ بالكامل. مثّل بيانيًّا المبلغ $P(x)$ الذي تدفعه الشركة لعدد الصناديق x التي تم إحضارها لتدويرها.**

افهم تدفع الشركة عن كل صندوق ممتلئ من الورق 3 BD يتم إحضاره إلى الشركة، ولا تدفع أي شيء مقابل أي صندوق غير ممتلئ بالكامل؛ لذا، فإن التمثيل البياني عبارة عن دالة درجية

خطّط صندوق واحد غير ممتلئ بالكامل لا تدفع الشركة شيء، صندوق ممتلئ والأخر غير ممتلئ تدفع الشركة 3 BD، صندوقان ممتلئان وأخر غير ممتلئ تدفع الشركة 6 BD، وهكذا ...

حلّ استعمل نمط عدد الصناديق مع ما تدفعه الشركة لعمل جدول، حيث x هي عدد الصناديق، و $P(x)$ هي المبلغ، ثم مثله بيانيا.

x	$P(x)$
$0 \le x < 1$	0
$1 \le x < 2$	3
$2 \le x < 3$	6
$3 \le x < 4$	9
$4 \le x < 5$	12
$5 \le x < 6$	15
$6 \le x < 7$	18
$7 \le x < 8$	21
$8 \le x < 9$	24



تحقق بما أن الشركة تحوّل أي كسر للعدد الصحيح السابق، فإن كل قطعة مستقيمة ستحتوي على دائرة غير مظلّلة عند طرفها الأيمن، وأخرى مظلّلة عند طرفها الأيسر كما في الشكل أعلاه.

تأكد

6) عقار: يتقاضى مجمع للشقق المفروشة 30 BD مقابل تأجير الشقة ليوم واحد أو جزء منه، و 25 BD مقابل تأجير الشقة ذاتها لأي يوم إضافي أو جزء منه. اكتب الدالة التي تُمثّل هذا الموقف، ومثّلها بيانيًّا.

الربط مع واقع الحياة

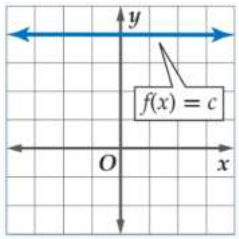
هناك ثلاث طرائق أساسية للمحافظة على الموارد الطبيعية؛ وهي الترشيد، وإعادة الاستعمال، والتدوير. وعمليات التدوير تقلل من كمية الطاقة التي نحتاجها لصناعة الأشياء، كما تقلل كمية النفايات، ومن ذلك إعادة تدوير الورق والبلاستيك.

ملخص المفاهيم

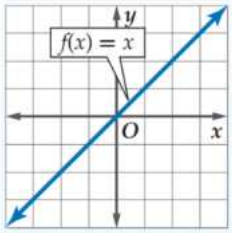
أضف إلى مطويتك

الدوال الخاصة

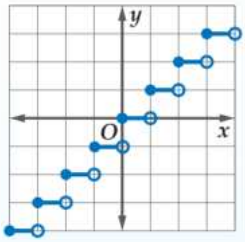
الدالة الثابتة



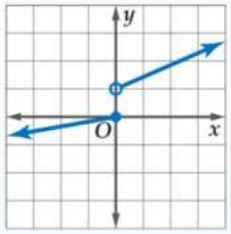
الدالة الخطية



الدالة الدرجية



الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة



تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 82

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها:

1) $f(x) = 6$ **2)** $f(x) = -1$ **3)** $f(x) = -0.5$

مثال 2 صفحة 83

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها:

4) $f(x) = x + 3$ **5)** $f(x) = 4x - 7$

6) $f(x) = 5 - \frac{1}{2}x$ **7)** $f(x) = -2x + 5$

المثالان 3, 4 الصفحتان 83, 84

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها:

8) $g(x) = \begin{cases} -3 , & x \le -2 \\ -x + 6 , & x > 2 \end{cases}$

9) $f(x) = \begin{cases} 8 , & x \le -1 \\ 2x , & -1 < x < 4 \\ -4 - x , & x \ge 4 \end{cases}$

مثال 5 صفحة 85

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها:

10) $f(x) = \frac{1}{2}[\![x]\!]$ **11)** $f(x) = -[\![x]\!]$ **12)** $f(x) = 3[\![x]\!]$

مثال 6 صفحة 85

13) ساحة سيارات: تبلغ تكلفة الوقوف في بعض مواقف السيارات للساعة الأولى 0.2 BD ، ويضاف إليها مبلغ 0.1 BD عن كل ساعة أو جزء من الساعة بعد الساعة الأولى، مثّل بيانيًّا دالة تُعبّر عن هذا الموقف.

تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 82

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها:

14) $f(x) = 4$ **15)** $f(x) = -2$ **16)** $f(x) = 9$

BH MT10 SE1 CH02 .indd 86 9/5/23 11:06 AM

مثال 2
صفحة 83

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها:

17) $f(x) = 2x$ **18)** $f(x) = 3x - 6$

19) $f(x) = 4x - 9$ **20)** $f(x) = -5x + 14$

المثالان 3, 4
الصفحات 83, 84

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها:

21) $f(x) = \begin{cases} -3x, & x \le -4 \\ x, & 0 < x \le 3 \\ 8, & x > 3 \end{cases}$ **22)** $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \le -6 \\ 5, & -6 < x \le 2 \\ -2x + 1, & x > 4 \end{cases}$

مثال 3
صفحة <?>

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها:

23) $f(x) = [\![x]\!] - 6$ **24)** $h(x) = [\![x + 8]\!]$ **25)** $f(x) = [\![x]\!] + 2$ **26)** $g(x) = 2[\![x + 4]\!]$

مثال 4
صفحة 84

27) جمعية خيرية: تقوم جمعية خيرية بجمع الصدقات؛ لإيصالها إلى مستحقيها، وتتبرع الجمعية أيضًا بمبلغ مساوٍ لأي صدقة دون BD 100، أو تساويها، كما تضيف الجمعية BD 100 إلى أي صدقة تزيد على BD 100. مثّل بيانيًّا دالة تُعبّر عن هذا الوضع.

مسائل مهارات التفكير العليا

28) مسألة مفتوحة: اكتب دالة مُعرّفة بأكثر من قاعدة، بحيث يكون المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة.

29) تحدٍّ: مثّل المعادلة $x = [\![y]\!] + 3$ بيانيًّا.

30) تبرير: أعط مثالًا مضادًّا للعبارة الآتية، وبرّر إجابتك.

«حتى تجد أكبر عدد صحيح لعدد غير صحيح x، فإنك تقرِّب x إلى أقرب عدد صحيح".

مراجعة تراكمية

إذا كان: $f(x) = -4x + 6,\ g(x) = -x^2,\ h(x) = -2x^2 - 6x + 9$، فأوجد كلًّا مما يأتي: (الدرس 3-2)

31) $f(2c)$ **32)** $g(a + 1)$ **33)** $h(6)$

مراجعة المتطلبات السابقة

مثّل كلًّا مما يأتي بيانيًّا:

34) $y = -0.25x + 8$ **35)** $y = \frac{4}{3}x + 2$ **36)** $8x + 4y = 32$

2-5 دوال القيمة المطلقة

Absolute Value Functions

فيما سبق

درستُ استعمال الدوال الخاصة وتمثيلها.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أمثل دوال القيمة المطلقة بيانيًا.
- أصف التحويلات الهندسية في التمثيلات البيانية لدوال القيمة المطلقة.
- اكتب دوال القيمة المطلقة.

المفردات الأساسية

دالة القيمة المطلقة
absolute value function
التمثيل البياني الأم
parent graph
الدالة الأم
parent function
الإزاحة
translation
الانعكاس
reflection
محور الانعكاس
line of reflection
التمدد
dilation

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يقوم أحد المطاعم بتوصيل الطلبات للمنازل وذلك باستعمال القاعدة $c(x) = 0.01\ |x-338| + 0.5$ ، حيث x هي رقم المجمع السكاني موضع توصيل الطلب، c هي تكلفت التوصيل بالدينار البحريني.

هذه القاعدة هي قاعدة لدالة قيمة مطلقة

دوال القيمة المطلقة هناك نوع آخر من أنواع الدوال المعرّفة بأكثر من قاعدة خطية تسمى **دالة القيمة المطلقة**. إن القيمة المطلقة لأيّ عدد تكون غير سالبة دائمًا، لذلك فإن الدالة الأم للقيمة المطلقة تكتب في الصورة $f(x) = |x|$ ، وجميع قيم المدى غير سالبة.

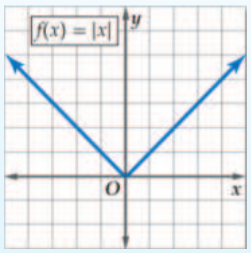
مفهوم أساسي — الدوال الأم

أضف إلى مطويتك

الدالة الأم

$f(x) = |x|$ ، وتُعرّف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} x\ , & x > 0 \\ 0\ , & x = 0 \\ -x\ , & x < 0 \end{cases}$$



شكل التَّمثيل البياني	على شكل أفقي حرف V
المجال	$\mathbf{R}$
المدى	$[0, \infty)$
المقطعان	$x = 0\ ,\ y = 0$
غير معرفة	$f(x) < 0$

مثال 1 — تمثيل دالة القيمة المطلقة

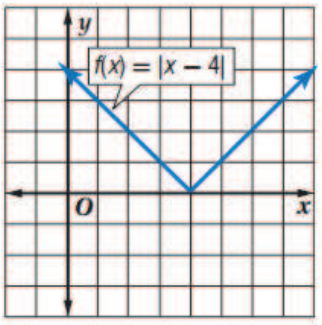
مثّل الدالة $f(x) = |x - 4|$ بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها.

بما أن $f(x)$ لا يمكن أن تكون سالبةً، فإن أصغر نقطة في التمثيل هي $f(x) = 0$

الدالة الأصلية	$f(x) = |x - 4|$
بالتعويض عن $f(x)$ بـ 0 ، $|x-4|$ بـ $x-4$	$0 = x - 4$
بإضافة العدد 4 إلى كلا الطرفين	$4 = x$

والآن كوّن جدولًا للقيم، بحيث يشتمل على قيمٍ أكبر من 4 وقيمٍ أصغر من 4.

$f(x) = \lvert x - 4 \rvert$	
x	$f(x)$
1	3
2	2
3	1
4	0
5	1
6	2
7	3



المجال هو $\mathbf{R}$ ، والمدى هو $[0, \infty)$

لاحظ أن التمثيل البياني للدالة هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = |x|$ بمقدار 4 وحدات إلى اليمين.

تأكد

1) مثّل الدالة $f(x) = |2x + 1|$ بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها.

التَّحويلات الهندسية التَّحويلات الهندسية على التَّمثيلات البيانية الأم مختلفة، فمنها قلب أو عكس الشكل حول مستقيم، أو محور ما، أو توسيع للتَّمثيل البياني، أو تضييقه. وقد تشبه التَّمثيلات البيانية الجديدة بعد إجراء التحويل الهندسي للتَّمثيل البياني الأم، وقد لا تشبهه.

قراءة الرياضيات

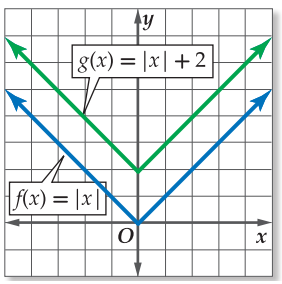
الإزاحة تُسمى الإزاحة أيضًا انسحابًا أو تحركًا.

الإزاحة هي تحريك التَّمثيل البياني إلى أعلى، أو إلى أسفل، أو إلى اليسار، أو إلى اليمين، ويكون ذلك بأحد أمرين:

- إضافة العدد الحقيقي k أو طرحه من الدالة الأم، فالتَّمثيل البياني للدالة الناتجة $f(x) \pm k$ هو إزاحة للتَّمثيل البياني للدالة الأم $f(x)$ إلى أعلى، أو إلى أسفل.
- إضافة العدد الحقيقي h أو طرحه من المتغير x قبل حساب الدالة الأم، فالتَّمثيل البياني للدالة الناتجة $f(x \pm h)$ هو إزاحة للتَّمثيل البياني للدالة الأم $f(x)$ إلى اليسار، أو إلى اليمين.

مثال 2 وصفُ الإزاحة

صِفْ الإزاحة في التّمثيل البياني للدالة $g(x) = |x| + 2$، ثم مثّل الدالة بيانيًّا.



التَّمثيل البياني للدالة $g(x) = |x| + 2$ هو إزاحة للتَّمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = |x|$ وحدتين إلى أعلى.

تأكد

صِفْ الإزاحة في التّمثيل البياني للدالتين الآتيتين، ثم مثّلهما بيانيًّا:

2A) $g(x) = |x + 3|$

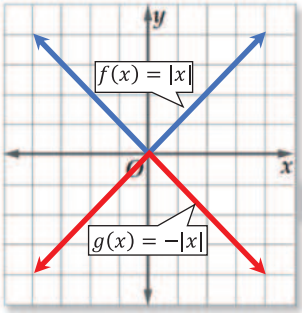
2B) $g(x) = |x - 1| - 5$

الانعكاس هو قلب أو عكس الشكل حول مستقيم يُسمّى **محور الانعكاس**، وعند ضرب الدالة الأم في العدد 1−، فالتَّمثيل البياني للدالة الناتجة $-f(x)$ هو انعكاس للتَّمثيل البياني للدالة الأم $f(x)$ حول المحور x .

مثال 3 وصف الانعكاس

صِفِ الانعكاس في التّمثيل البياني للدالة $g(x) = -|x|$.

التَّمثيل البياني للدالة $g(x) = -|x|$ هو انعكاس للتَّمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = |x|$ حول المحور x.



تأكد

صِفِ الانعكاس في التّمثيل البياني للدالتين الآتيتين:

(3A) $g(x) = -|x-7|$

(3B) $g(x) = 4-|x|$

مراجعة المفردات

الرأس هو النقطة العظمى أو الصغرى لمنحنى دالة القيمة المطلقة.

التّمدد يُكبّر (توسيع) أو يُصغر (تضييق) الشكل بصورة متناسبة. وعند ضرب المتغيّر في الدالة الخطية الأم في عدد حقيقي غير صفري، فإن ميل التَّمثيل البياني للدالة يتغيّر.

وعند ضرب الدالة الأم غير الخطية في عدد غير صفري، فإن التَّمثيل البياني للدالة يتوسّع أو يضيق رأسيًّا.

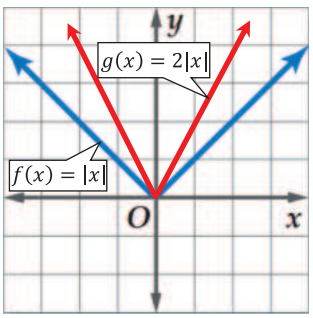
وإذا كان العدد أكبر من 1، فإن التَّمثيل البياني للدالة يتوسّع رأسيًّا، أما إذا كان العدد بين 0 و 1 ، فإن التَّمثيل البياني للدالة يضيق رأسيًّا.

مثال 4 وصف التّمدد وتمثيله بيانيًّا

صِفِ التمدد في التّمثيل البياني للدالة $g(x) = 2|x|$، ثم مثّلها بيانيًّا.

التَّمثيل البياني للدالة $g(x) = 2|x|$ هو توسّع رأسي للتَّمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = |x|$.

حيث تم ضرب الدالة الأم $f(x) = |x|$ في عدد أكبر من 1



تأكد

صِفِ التّمدد في التمثيل البياني للدالتين الآتيتين:

(4A) $g(x) = \frac{5}{2}|x|$

(4B) $g(x) = \frac{1}{3}|x|$

إرشادات للدراسة

التمدد عندما يتوسّع التمثيل البياني لدالة القيمة المطلقة رأسيًّا، فإن شكله يكون أضيق من التمثيل البياني للدالة الأم. وعندما يضيق رأسيًّا، فإن شكله يكون أوسّع من التمثيل البياني للدالة الأم.

ملخص المفاهيم

أضف إلى مطويتك

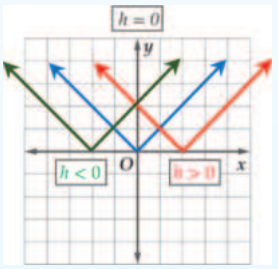
التحويلات الهندسية في التمثيلات البيانية لدوال القيمة المطلقة

$f(x) = a|x - h| + k$

h ، إزاحة أفقية

$|h|$ وحدة إلى اليمين إذا كانت h موجبة.

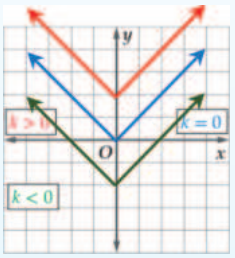
$|h|$ وحدة إلى اليسار إذا كانت h سالبة.



k ، إزاحة رأسية

$|k|$ وحدة إلى الأعلى إذا كانت k موجبة.

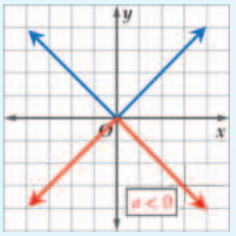
$|k|$ وحدة إلى الأسفل إذا كانت k سالبة.



a ، إنعكاس

إذا كانت $a > 0$، إتجاه فتحة التمثيل البياني تكون إلى أعلى. (على شكل ∨)

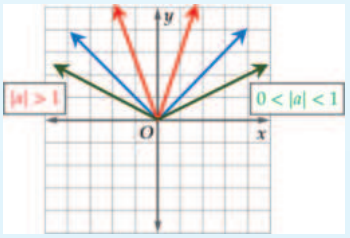
إذا كانت $a < 0$، إتجاه فتحة التمثيل البياني تكون إلى أسفل. (على شكل ∧)



a ، توسيع، تضييق

إذا كانت $|a| > 1$، يتوسع التمثيل البياني رأسيًا.

إذا كانت $0 < |a| < 1$، يضيق التمثيل البياني رأسيًا.



إرشادات للدراسة

القيمة المطلقة

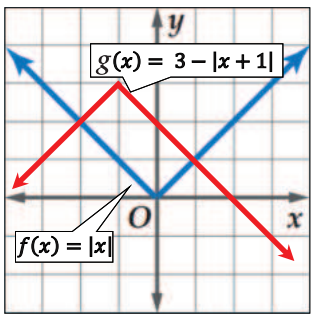
$0 < |a| < 1$ تعني أن a عدد نسبي بين 0 و 1 مثل $\frac{3}{4}$ ، أو عدد نسبي بين -1 و 0، مثل -0.3.

مثال 5

وصف التحويلات الهندسية

صِفِ التحويلات الهندسية في التّمثيل البياني للدالة $g(x) = 3 - |x + 1|$، ثم مثلها بيانيًّا.

التَّمثيل البياني للدالة $g(x) = 3 - |x + 1|$ هو إنعكاس للتَّمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = |x|$ حول محور x مع إزاحة وحدة واحدة إلى اليسار وثلاث وحدات إلى الأعلى.



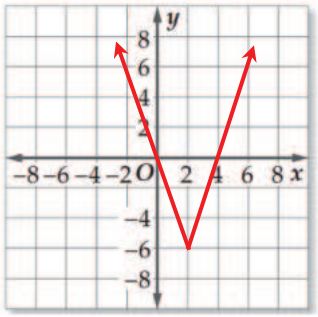
تأكد

صِفِ التحويلات الهندسية في التّمثيل البياني للدالتين الآتيتين:

(3A) $g(x) = 0.5\,|x - 2| + 4$

(3B) $g(x) = -3|x| - 5$

مثال 6 كتابة دوال القيمة المطلقة



اكتب معادلة (قاعدة) دالة القيمة المطلقة الممثّلة بيانيًّا في الشكل المجاور.

التَّمثيل البياني للدالة الممثّلة هو إزاحة للتَّمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = |x|$ بوحدتين إلى اليمين وستة وحدات إلى الأسفل.

أي أن $h = 2$ ، $k = -6$

قاعدة دالة القيمة المطلقة $g(x) = a\,|x - h| + k$

بالتعويض عن $h = 2$ ، $k = -6$ $g(x) = a\,|x - 2| - 6$

لإيجاد قيمة a اختر أي نقطة تقع على التمثيل البياني للدالة مثل $(4, 0)$

أي أن $g(4) = 0$

$$g(4) = a\,|4 - 2| - 6 = 0$$
$$2a - 6 = 0$$
$$a = 3$$

إذن تكون معادلة الدالة الممثلة بيانيًّا هي $g(x) = 3\,|x - 2| - 6$

تحقق: استعمل أي نقطة أخرى تقع على التمثيل البياني للدالة، مثل $(-2, 6)$

قاعدة دالة $g(x) = 3|x - 2| - 6$

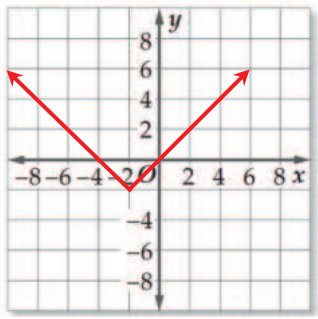
بالتعويض عن $g(-2) = 6$ $g(-2) \stackrel{?}{=} 3\,|-2 - 2| - 6$

$$6 \stackrel{?}{=} 3\,(4) - 6$$
$$6 = 6\ \surd$$

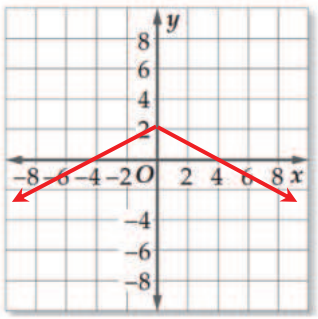
تأكد

اكتب معادلة (قاعدة) دالة القيمة المطلقة الممثّلة بيانيًّا في كل شكل أدناه.

(6A



(5B



تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 88

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها:

1) $g(x) = |-3x|$ **2)** $f(x) = 2|x|$

3) $h(x) = |x + 4|$ **4)** $s(x) = |-2x| + 6$

مثال 2 صفحة 89

صِفِ الإزاحة في التّمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

5) $g(x) = |x + 1|$ **6)** $g(x) = |x - 2| - 5$

BH MT10 SE1 CH02 .indd 92 9/5/23 11:12 AM

مثال 3 صفحة 90

7) صِفِ الانعكاس في التمثيل البياني للدالة $g(x) = -|x-2| + 11$

مثال 4 صفحة 90

صِفِ التمدّد في التّمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

8) $g(x) = \frac{3}{5}|x|$ **9)** $g(x) = 3|x|$

مثال 5 صفحة 91

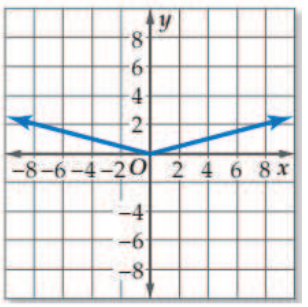
صِفِ التحويلات الهندسية في التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

10) $g(x) = 0.2|x+5|$ **11)** $g(x) = -4|x-3| + 2$

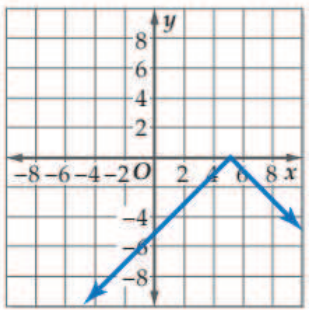
مثال 6 صفحة 92

اكتب معادلة (قاعدة) دالة القيمة المطلقة الممثّلة بيانيًا في كل شكل أدناه.

12)



13)



تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 88

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها:

14) $f(x) = |x-5|$ **15)** $g(x) = |x+2|$ **16)** $f(x) = 9$

17) $k(x) = |x| + 3$ **18)** $f(x) = 2|x-4| + 6$ **19)** $h(x) = -3|x+1| - 2$

مثال 2 صفحة 89

صِفِ الإزاحة في التّمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

20) $g(x) = |x-3|$ **21)** $g(x) = |x| - 3$ **22)** $g(x) = 4 - |x|$

23) $g(x) = |5 + x| + 7$ **24)** $g(x) = |6 - x| + 9$ **25)** $g(x) = |x+6|$

مثال 3 صفحة 90

26) صِفِ الانعكاس في التمثيل البياني للدالة $g(x) = -|x+10|$

مثال 4 صفحة 90

صِفِ التمدّد في التّمثيل البياني لكل دالة مما يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا:

27) $g(x) = \frac{1}{4}|x|$ **28)** $g(x) = 4|x|$

مثال 5 صفحة 91

صِفِ التحويلات الهندسية في التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

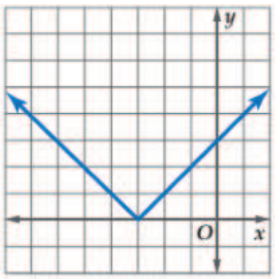
29) $g(x) = -|x| + 5$ **30)** $g(x) = 3|x-4| + 1$

31) $g(x) = -|x-2|$ **32)** $g(x) = \frac{2}{5}|x| + 6$

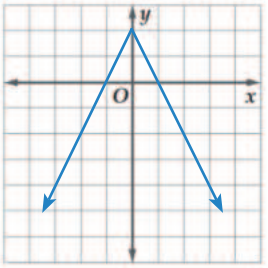
مثال 6 صفحة 92

اكتب معادلة (قاعدة) كل دالة ممثلة بيانيًّا في كل شكل أدناه:

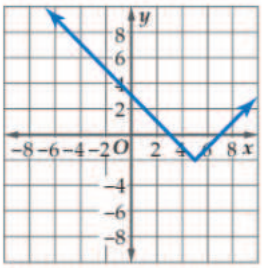
(33)



(34)



(35)



(36) مقهى: يتأكد مدير مقهى من أن كمية الحليب والقهوة الموجودة في كل كوب يُقَدَّم للزبائن وُضعت بشكل دقيق، وذلك باختيار أحد الأكواب عشوائيًّا لفحصه. ووفقًا لمواصفات المقهى، يجب أن يحتوي كل كوب من القهوة الجاهزة على الكمية نفسها من القهوة ومن الحليب. إذا كانت كمية الحليب التي يمكن أن يحويها كوب فيه 200ml من القهوة الجاهزة،و x ml من الحليب والقهوة معًا تمثل بِـ $g(x)=\frac{1}{2}|x-200|$ ، فصِفِ التحويلات الهندسية على التّمثيل البياني للدالة الأم.

مسائل مهارات التفكير العليا

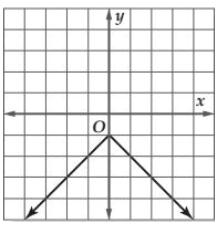
(37) تحدٍّ: اشرح: لماذا يشبه عمل إزاحة أفقية تليها إزاحة رأسية، عمل إزاحة رأسية تليها إزاحة أفقية؟

(38) مسألة مفتوحة: ارسم دالة قيمة مطلقة غير الدالة الأم وصِفِ التحويلات الهندسية لها.

(39) اكتب: وضِّح لماذا لا يتغير شكل التمثيل البياني لـ $g(x)=|x|$ عند انعكاسه حول المحور y ؟ هل هذا ينطبق على جميع انعكاسات دوال **القيمة المطلقة**؟ إذا كانت الإجابة لا، فأعطِ مثالًا، ووضِّحه.

تدريب على اختبار معياري

(40) ما المعادلة الأم للتمثيل البياني المرسوم أدناه؟



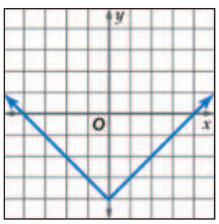
A $y=x^2$

B $y=x$

C $y=|x|$

D $y=\sqrt{x}$

(41) ما المعادلة الدالة الممثلة بيانيًا في الشكل المجاور؟



A $f(x)=|x|$

B $f(x)=-4|x|$

C $f(x)=|x+4|$

D $f(x)=|x|-4$

مراجعة تراكمية

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها: (الدرس 4-1)

(42) $f(x)=4x-5$

(43) $h(x)=[\![x]\!]-5$

(44) $f(x)=\begin{cases} -2x, & x\le -2 \\ x, & -2<x\le 1 \\ 4, & x>1 \end{cases}$

مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد قيمة كلٍّ من التعابير الجبرية الآتية إذا كانت $x=-4$ ، $y=6$:

(45) $4x-8y+12$

(46) $5y+3x-8$

(47) $-12x+10y-24$

اختبار منتصف الفصل

الدروس 2-1 إلى 2-5

1) اختيار من متعدد: ما معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(0, -3), (4, 1)$؟ (الدرس 2-1)

A $y = -x + 3$

B $y = -x - 3$

C $y = x - 3$

D $y = x + 3$

اكتب معادلة المستقيم بصيغة ميل – مقطع، والذي يحقق الشروط في كلٍّ من الأسئلة 4–2: (الدرس 2-2)

2) الميل $\frac{2}{3}$، ويمر بالنقطة $(3, -4)$.

3) يمر بالنقطتين $(4, 1), (-2, 3)$.

4) الميل -3، ويمر بالنقطة $(0, 0)$.

اكتب معادلة المستقيم بصيغة نقطة – ميل، والذي يحقق الشروط في كلٍّ من الأسئلة 7–5: (الدرس 2-3)

5) الميل $\frac{2}{3}$، ويمر بالنقطة $(3, -4)$.

6) يمر بالنقطتين $(4, 1), (-2, 3)$.

7) الميل -3، ويمر بالنقطة $(0, 0)$.

8) حدد المجال والمدى للعلاقة $\{(4,1), (0,3), (5,-2), (2,7)\}$، وهل تمثّل الدالة؟ (الدرس 2-3)

9) مثّل $y = 2x - 3$ بيانيًّا، ثم حدّد ما إذا كانت تمثّل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك فهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل 'أم غير ذلك؟ وحدّد ما إذا كانت متصلة أم منفصلة؟ (الدرس 2-3)

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا: (الدرس 2-4)

10) $f(x) = [\![x]\!] - 2$

11) $h(x) = \begin{cases} x + 2, & x < -2 \\ 3, & x \geq -2 \end{cases}$

مثّل كلًّا مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها: (الدرس 2-5)

12) $f(x) = |x - 3|$

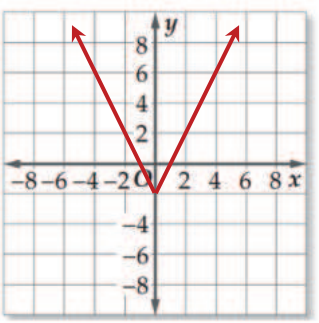
13) $g(x) = |x| - 2$

صِف الإزاحة في التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي: (الدرس 2-5)

14) $g(x) = -2\,|x + 23| - 17$

15) $g(x) = 0.7\,|x - 20| + 11$

16) اكتب معادلة (قاعدة) دالة القيمة المطلقة الممثّلة بيانيًّا في الشكل التالي: (الدرس 2-5)



2-6

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا

Graphing Linear and Absolute Value Inequalities

فيما سبق

درست تمثيل الدوال الخطية.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أمثّل المتباينات الخطية بيانيًا .
- أمثّل متباينات القيمة المطلقة بيانيًا .

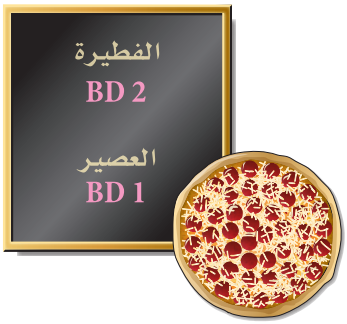
المفردات الأساسية

المتباينة الخطية
linear inequality

الحد
boundary

www.obeikaneducation.com

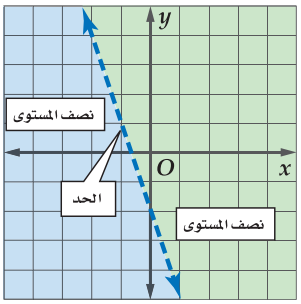
لماذا؟



دعا تركي زملاءه إلى وجبة من الفطائر والعصير، ورصد لتلك الدعوة مبلغ BD 15 فقط.

ويمكنه أن يستعمل المتباينة الخطية $2p + d \leq 15$، حيث p عدد الفطائر، و d عدد أكواب العصير الطبيعي؛ للتأكد من أن سعر عددٍ معيَّنٍ من الفطائر وأكواب العصير سيكون ضمن ميزانيته.

تمثيل المتباينات الخطية بيانيًّا تشبه **المتباينة الخطية** المعادلة الخطية، والفرق بينهما فقط هو وضع رمز المتباينة بدلًا من رمز المساواة. فمثلًا؛ $y > -3x - 2$ هي متباينة خطية في متغيرين، و $y = -3x - 2$ هي المعادلة الخطية المرتبطة بها.



يتكوّن التمثيل البياني للمتباينة الخطية من مجموعة النقاط التي تُمثّل جميع الحلول الممكنة للمتباينة وتسمى منطقة الحل. أما التّمثيل البياني للمعادلة المرافقة للمتباينة فيعد حدًّا للمنطقة يقسِّم المستوى الإحداثي إلى نصفين.

قد يكون **الحدُّ** جزءًا من التمثيل البياني للمتباينة ويرسم مستقيمًا متصلًا، وقد لا يكون جزءًا منه ويرسم مستقيمًا متقطعًا. فإذا كان الحد ضمن التمثيل البياني للمتباينة يكون حل المتباينة نصف مستوى مغلق. وإذا لم يكن الحد ضمن التمثيل البياني للمتباينة، يكون حل المتباينة نصف مستوى مفتوح.

مفهوم أساسي — تمثيل المتباينة الخطية بيانيًّا

أضف إلى مطويتك

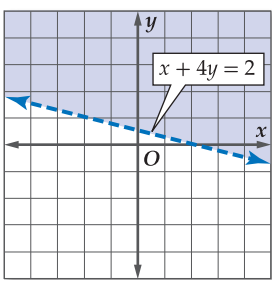
الخطوة 1 ارسم الحد، واستعمل خطًّا متصلًا إذا احتوت المتباينة على الرمز $\leq$ أو $\geq$ ، واستعمل خطًّا متقطعًا إذا احتوت المتباينة على الرمز $<$ أو $>$.

الخطوة 2 استعمل نقطة اختبار لتحديد نصف المستوى الذي سيتم تظليله.

الخطوة 3 ظلل نصف المستوى الذي يحتوي على حل المتباينة.

مثال 1 — تمثيل البيانات في المستوى الإحداثي

مثّل المتباينة $x + 4y > 2$ بيانيًّا.



الخطوة 1 مثّل الحد وهو المستقيم $x + 4y = 2$ ، وبما أن رمز المتباينة هو $>$ ، فإن الحد سيكون متقطعًا.

الخطوة 2 اختبر باستعمال النقطة $(0, 0)$ ، والتي لا تقع على حد المتباينة .

المتباينة الأصلية $x + 4y > 2$

$(x, y) = (0, 0)$ $0 + 4(0) \stackrel{?}{>} 2$

خاطئة ✗ $0 > 2$

ظلّل المنطقة التي لاتحوي $(0, 0)$.

التحقق يُبين التَّمثيل البياني أن النقطة (0, 3) تقع في منطقة الحلّ.

المتباينة الأصلية	$x + 4y > 2$
$(x, y) = (0, 3)$	$0 + 4(3) \stackrel{?}{>} 2$
صحيحة ✓	$12 > 2$

إذن الحل صحيح.

تأكد

1A) مثّل المتباينة $3x + \frac{1}{2}y < 2$ بيانيًّا.

1B) مثّل المتباينة $-x + 2y > 4$ بيانيًّا.

حل المتباينات الخطية يمكننا استعمال المستوى الإحداثي لحل المتباينات الخطية بمتغيرٍ واحدٍ.

مثال 2 حل المتباينات باستعمال التمثيل البياني

استعمل التمثيل البياني لحل المتباينة $3x + 5 \leq 14$

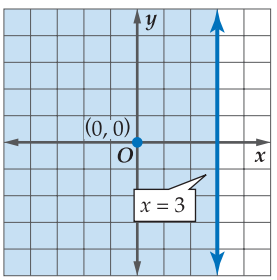
الخطوة 1 ارسم الحد أولًا، وهو التمثيل البياني للمعادلة المرتبطة بالمتباينة.
ضع رمز المساواة بدلًا من رمز المتباينة ثم أوجد قيمة x .

المتباينة الأصلية	$3x + 5 \leq 14$
باستبدال $\leq$ بـ $=$	$3x + 5 = 14$
بطرح العدد 5 من كلا الطرفين	$3x = 9$ ✓
بقسمة كلا الطرفين على 3	$x = 3$

مثّل $x = 3$ بيانيًّا.

الخطوة 2 اختبر النقطة (0, 0) بوصفها نقطة اختبار، وبتعويضها في المتباينة ينتج أن $5 < 14$

الخطوة 3 بما أن هذه العبارة صحيحة، إذن ظلل نصف المستوى الذي يحتوي النقطة (0, 0).



لاحظ أن مقطع المحور x لهذا التمثيل البياني هو 3، وبما أن نصف المستوى الواقع عن يسار مقطع المحور x هو المظلل، إذن حل هذه المتباينة هو المنطقة المظلّلة، فيكون حل هذه المتباينة هو $x \leq 3$.

إرشادات للدراسة

اختيار نقطة اختبار
يفضل اختيار نقطة الأصل عند اختيار نقطة اختبار لأنها تجعل الحسابات أبسط. وأما إذا وقعت نقطة الأصل على الحد، فيجب اختيار نقطة أخرى لا تقع على الحد.

تأكد

2A) $4x - 3 \geq 17$

2B) $-2y + 6 > 12$

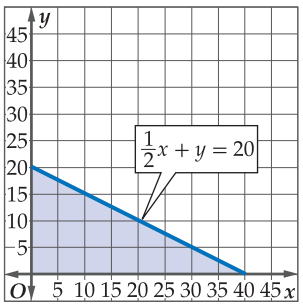
مثال 3 من واقع الحياة

كتابة المتباينات

رسم: يقدم مركز تدريب نوعين من دروس تعلم اللغة الإنجليزية؛ الأول دروس مدتها 30 min للدرس الواحد، والثاني دروس مدتها 60 min للدرس الواحد. وقرر مدير المركز ألّا يزيد زمن دروس تعلم اللغة الإنجليزية على 20 h أسبوعيًّا.

a) اكتب متباينةً تمثّل عدد دروس تعلم اللغة الإنجليزية أسبوعيًّا، ثم مثّلها بيانيًّا.

لتكن x عدد الدروس التي مدتها 30 min، و y عدد الدروس التي مدتها 60 min. وبما أن مجموع الدروس يمكن أن يساوي 20 h، فإن المتباينة تحتوي على الرمز $\leq$ ؛ لذا يكون المستقيم الذي يمثّل الحد متصلًا. المتباينة هي $\frac{1}{2}x + y \leq 20$.



الخطوة 1 مثّل الحد $\frac{1}{2}x + y = 20$ بيانيًّا.

الخطوة 2 اختبر النقطة (0, 0) ، والتي لا تقع على الحد.

المتباينة الأصلية $\frac{1}{2}x + y \leq 20$

$(x, y) = (0, 0)$ $\frac{1}{2}(0) + (0) \stackrel{?}{\leq} 20$

صحيحة ✓ $0 \leq 20$

ظلّل المنطقة التي تحوي (0, 0).

b) هل يمكن أن يقدم المركز 25 درسًا من الدروس التي مدتها 30 min، و 15 درسًا من الدروس التي مدتها 60 min خلال أسبوعٍ ما؟ فسّر إجابتك.

النقطة (25, 15) تقع خارج المنطقة المظلّلة؛ لذا فهي لا تحقق المتباينة، وعليه فلا يمكن أن يقدم المركز ذلك العدد من الدروس خلال أسبوعٍ ما .

تأكد

3) مع صالح BD 10 يستطيع إنفاقها في مدينة الألعاب. إذا كان ثمن تذكرة الألعاب الإلكترونية BD 2، وثمن تذكرة كل لعبةٍ عاديةٍ BD 3، فاكتب متباينةً تصِف هذا الموقف، ثم مثّلها بيانيًّا .

الربط مع واقع الحياة

تُزوِّد معامل اللغات المتخصصة بأحدث الأجهزة التقنية، والتجهيزات الإلكترونية والصوتية المتطورة التي تنمّي مهارتَي المحادثة والاستماع لدى الدارسين، وتؤهلهم لاكتساب اللفظ الصحيح.

تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانيًّا تمثيل متباينة القيمة المطلقة مشابه لتمثيل المتباينات الخطية في متغيرين. أولًا مثّل معادلة القيمة المطلقة المرتبطة بيانيًّا، وبعد ذلك حدّد ما إذا كان حد المتباينة متقطعًا أو متصلًا، ثم حدّد المنطقة التي يجب تظليلها باختبار نقطة ما.

مثال 4

تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانيًّا

مثّل المتباينة $y \geq |x| - 4$ بيانيًّا.

بما أن المتباينة تحتوي على الرمز $\geq$، فإن الحد يكون متصلًا.

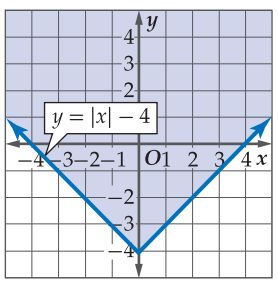
مثّل المعادلة المرتبطة $y = |x| - 4$، ثم اختبر باستعمال (0, 0).

المتباينة الأصلية $y \geq |x| - 4$

$(x, y) = (0, 0)$ $0 \stackrel{?}{\geq} |0| - 4$

صحيحة ✓ $0 \geq -4$

ظلّل المنطقة التي تحوي (0, 0).



تأكد

4A) مثّل المتباينة $y \leq 2|x| + 3$ بيانيًّا.

4B) مثّل المتباينة $y \geq 3|x + 1|$ بيانيًّا.

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 96

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانيًّا:

1) $y \leq 4$

2) $x \geq -6$

3) $x + y \leq 0$

4) $3x + y > -8$

مثال 2 صفحة 97

استعمل التمثيل البياني لحل كل متباينة مما يأتي:

5) $7x + 1 < 15$

6) $-3x - 2 \geq 11$

7) $3y - 5 \leq 34$

8) $4y - 21 > 1$

مثال 3 صفحة 98

9) مع عامر BD 15 ، ويريد تزويد سيارته بالوقود، وشراء علب زيت للمحرك. إذا كان سعر لتر الوقود BD 0.200، وسعر عبوة زيت المحرك BD 3، فأجب عما يأتي:

a) اكتب متباينةً تمثّل هذا الموقف، حيث q عدد لترات الوقود، و g عدد علب زيت المحرك التي يمكنه شراؤها.

b) مثّل المتباينة بيانيًّا.

c) هل يستطيع عامر تزويد سيارته بـ 20 L من الوقود وشراء 4 علب زيت محرك؟ فسِّر إجابتك.

مثال 4 صفحة 98

مثّل المتباينتين الآتيتين بيانيًّا.

10) $y \geq |x + 3|$

11) $y - 6 < |x|$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 96

مثّل كل متباينة ممَّا يأتي بيانيًّا:

12) $x + 2y > 6$

6) $y \geq -3x - 2$

7) $2y + 3 \leq 11$

8) $4x - 3y > 12$

9) $6x + 4y \leq -24$

10) $y \geq 3x$

مثال 2 صفحة 97

استعمل التمثيل البياني لحل كل متباينة مما يأتي:

11) $10x - 8 < 22$

12) $20x - 5 > 35$

13) $4y - 77 \geq 23$

14) $5y + 8 \leq 33$

15) $35x + 25 < 6$

16) $14x - 12 > -31$

مثال 3 صفحة 98

17) **درجات:** تُحتسب درجات الطلبة في مادة الرياضيات في إحدى الكليات على أساس 60 درجة للاختبار النهائي، و 40 درجة للاختبارات الشهرية. ويتعين على كوثر الحصول على الدرجة 90 على الأقل؛ لتنال تقدير ممتاز في المادة.

a) المتباينة $x + y \geq 90$ تمثّل هذا الموقف، حيث x هي درجة كوثر في الاختبار النهائي، و y هي درجتها في الاختبارات الشهرية. مثّل هذه المتباينة بيانيًّا.

b) اعتمادًا على التَّمثيل البياني، إذا كانت درجتها في الاختبار النهائي 50، وفي الاختبارات الشهرية 35، فهل ستحصل على التقدير ممتاز أم لا؟

مثال 4 صفحة 98

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانيًّا:

18) $y > |3x|$

19) $y + 4 \leq |x - 2|$

20) $y - 6 < |-2x|$

21) $y + 8 < 2\left|\frac{2}{3}x + 6\right|$

22) $2y > |4x - 5|$

23) $-y \leq |3x - 4|$

24) يؤدي حسين عملين؛ ليحقق دخلًا أسبوعيًّا لا يقل عن BD 100 . إذا كان الأجر الذي يتقاضاه عن كل ساعة موضحًا في الجدول المجاور.

العمل	الأجر في الساعة
بائع في محل تجاري	BD 2
سائق أجرة	BD 1.5

a) اكتب متباينة تمثّل هذا الموقف.

b) مثّل المتباينة بيانيًّا.

c) هل سيحصل حسين على المبلغ المطلوب إذا عمل 30 h أسبوعيًّا في كل عمل؟

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانيًّا:

25) $y \geq |-2x - 6|$ **26)** $y \leq |x - 3| + 4$ **27)** $y - 3 > -2|x + 4|$

28) $|y| > |x|$ **29)** $|x - y| > 5$ **30)** $|x + 3y| \geq -2$

الربط مع واقع الحياة

يُصنع الخرز من طين الفيمو اللين، حيث يجفف في فرن حرارته عالية، ويمكن تشكيله إلى أشكال عديدة.

31) **زينة:** تصنع ميساء عقودًا وأساور من الخرز؛ لتشارك بها في المعرض الفني للمدرسة، ولديها من الخرز ما يكفي لصنع 50 قطعة. لتكن x عدد الأساور، و y عدد العقود.

a) اكتب متباينةً تُبيّن عدد العقود والأساور التي يمكن أن تصنعها ميساء.

b) مثّل المتباينة بيانيًّا.

c) أعطِ ثلاثة خيارات ممكنة لعدد العقود والأساور التي يمكن لميساء صنعها.

32) مع سعاد BD 20، وتريد أن تشتري عددًا من الأطباق d . وعددًا من الكؤوس c ؛ لتجهز لمناسبة اجتماعية. إذا كان سعر الطبق BD 1.5 ، وسعر الكأس BD 0.5 .

a) اكتب متباينة تمثّل العدد الذي يمكن شراؤه من الأطباق والكؤوس .

b) مثّل المتباينة بيانيًّا.

c) أعطِ ثلاثة حلول للمتباينة.

مسائل مهارات التفكير العليا

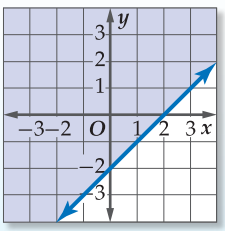
33) **مسألة مفتوحة:** استعمل القيمة المطلقة؛ لتكوين متباينة على ألَّا يقع حلّها في الرُّبعين الثاني أو الثالث.

34) **تحدٍّ:** مثّل المتباينة الآتية بيانيًّا:

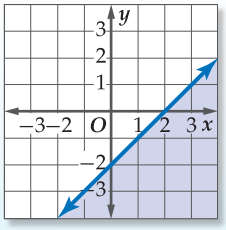
$$y > \begin{cases} |x + 1| , & x \leq -4 \\ -|x| , & -4 < x < 2 \\ |x - 4| , & x \geq 2 \end{cases}$$

35) **اكتشف الخطأ:** مَثّل كلٌّ من زيد ومصعب المتباينة $x - y \geq 2$ بيانيًّا، أيُّهما تمثيله البياني صحيح؟ فسّر إجابتك.

زيد



مصعب

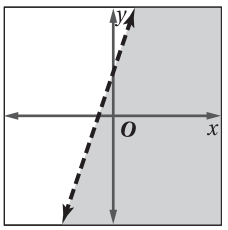


36) **تبرير:** متى يمكن تظليل منطقتين مختلفتين عند تمثيل متباينة القيمة المطلقة؟ فسر إجابتك.

37) **اكتب:** اذكر حالةً لمتباينة قيمة مطلقة ليس لها حل. فسّر إجابتك.

تدريب على اختبار معياري

38) ما المتباينة التي تمثيلها البياني كما في الشكل أدناه؟



A $y < 3x + 2$

B $y \leq 3x + 2$

C $y > 3x + 2$

D $y \geq 3x + 2$

39) أيُّ الدوال الآتية مداها هو $\{y \mid y \leq 0\}$؟

A $f(x) = -x$

B $f(x) = [\![x]\!]$

C $f(x) = |x|$

D $f(x) = -|x|$

مراجعة تراكمية

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 4-2)

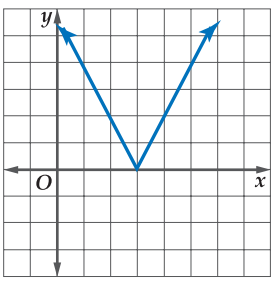
40) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 3, & 1 \leq x \leq 3 \\ -2x, & x > 3 \end{cases}$

41) $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < -2 \\ 2x, & -2 \leq x \leq 2 \\ -3x, & x > 2 \end{cases}$

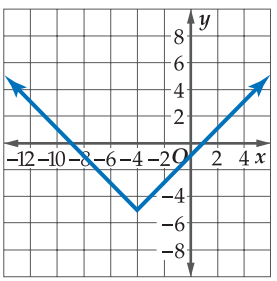
42) $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq -2 \\ x + 1, & 0 < x \leq 6 \\ x - 5, & x > 6 \end{cases}$

اكتب معادلة (قاعدة) كل دالة ممثلة بيانيًّا في كل شكل أدناه: (الدرس 5-2)

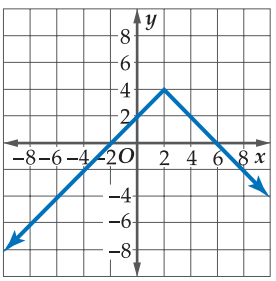
43)



44)



45)



مراجعة المتطلبات السابقة

مثّل كل معادلة خطيّة مما يأتي بيانيًّا:

46) $y = 2x - 8$

47) $y = -\frac{3}{4}x + 2$

48) $3y - 4x = 24$

2-7 حَلّ أنظمة المتباينات الخطية بيانيًّا

Solving Systems of Linear Inequalities by Graphing

فيما سبق

درستُ حَلّ نظام من معادلتين خطيتين بيانيًّا.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أحلّ نظام متباينات خطية بيانيًّا.
- أحدّد إحداثيات النقاط التي تُمثّل رؤوس منطقة الحلّ.

المفردات الأساسية

نظام المتباينات الخطية

system of linear inequalities

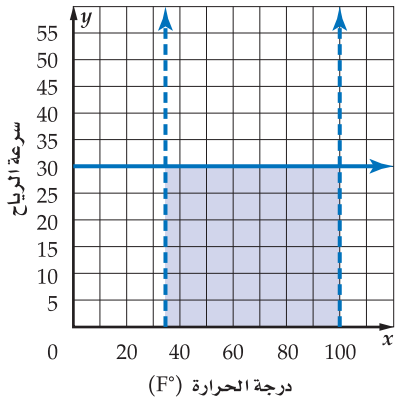
منطقة الحلّ المحتملة

feasible region

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

عند إطلاق المركبات الفضائية تؤخذ الحالة الجوية في الاعتبار، فيجب أن تكون درجة الحرارة بين 35°F و 100°F، وألّا تزيد سرعة الرياح على 30 عقدةً. ويمكن تمثيل هذه الشروط بنظامٍ من المتباينات الخطية كما في الشكل المجاور.



نظام المتباينات الخطية حلّ نظام المتباينات الخطية يعني إيجاد أزواج مرتبة تحقق جميع المتباينات في النظام.

مفهوم أساسي أضف إلى مطويتك

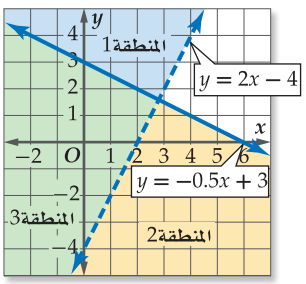
حَلّ أنظمة المتباينات الخطية

الخطوة 1 مثّل كل متباينة في النظام بيانيًّا، وظلّل منطقة الحلّ.

الخطوة 2 حدّد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حَلّ متباينات النظام، والتي تُمثّل منطقة الحَلّ المحتملة للنظام.

مثال 1 مناطق الحلّ المتقاطعة

حُلّ نظام المتباينات الآتي بيانيًّا: $y > 2x - 4$ ، $y \leq -0.5x + 3$



حلُّ المتباينة $y > 2x - 4$ ← المنطقتين 1 , 3

حلُّ المتباينة $y \leq -0.5x + 3$ ← المنطقتين 2 , 3

المنطقة 3 هي منطقة مشتركة بين منطقتَي حَلّ المتباينتين .

وعليه؛ فتكون هي منطقة الحَلّ المحتملة للنظام.

تحقق:

لاحظ أن نقطة الأصل تنتمي إلى منطقة الحل المحتملة للنظام، ويمكن استعمال نقطة الأصل نقطة اختبار.

والتحقق من صحة الحَلّ بتعويض (0, 0) بدلًا من x, y في كلتا المتباينتين.

$y > 2x - 4$

$0 \stackrel{?}{>} 2(0) - 4$

$0 \stackrel{?}{>} 0 - 4$

$0 > -4$ ✓

$y \leq -0.5x + 3$

$0 \stackrel{?}{\leq} -0.5\,(0) + 3$

$0 \stackrel{?}{\leq} 0 + 3$

$0 \leq 3$ ✓

تأكد

حُلّ كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا:

(1A) $y \leq -2x + 5$ ، $y > -\frac{1}{4}x - 6$

(1B) $y \geq |x|$ ، $y < \frac{4}{3}x + 5$

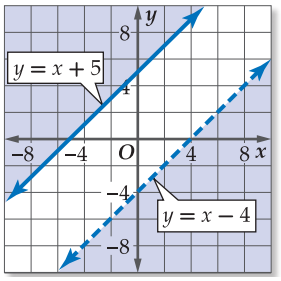
يمكن ألّا تتقاطع منطقتا حَلّ متباينتين، وعليه فلا يوجد حَلّ للنظام في هذه الحالة، وتكون مجموعة الحَلّ هي المجموعة الخالية.

قراءة الرياضيات

المجموعة الخالية

هي المجموعة التي لا تحتوي على عناصر، ويُرمز إليها بأحد الرمزين Ø ، أو { }.

مثال 2 مناطق الحل غير المتقاطعة



حُلّ نظام المتباينات الآتي بيانيًّا:

$y \geq x + 5$

$y < x - 4$

مثّل المتباينتين بيانيًّا، وبما أن منطقتَي الحَلّ لا تتقاطعان، فإنه لا توجد نقاط مشتركة بينهما؛ لذا فليس للنظام حَلّ. ومجموعة الحلّ هي المجموعة الخالية.

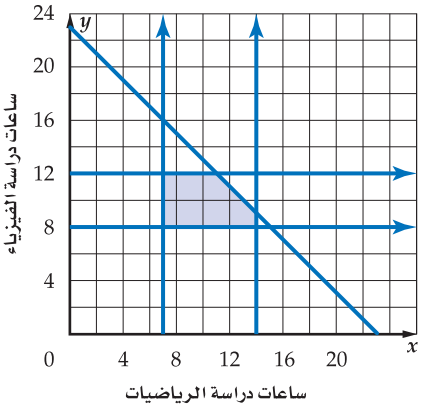
تأكد

حُلّ كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا:

(2A) $y \geq -4x + 8$ ، $y < -4x + 4$

(2B) $y \geq |x|$ ، $y < x - 2$

مثال 3 من واقع الحياة كتابة نظام من المتباينات واستعماله



إدارة الوقت: لدى فاطمة 23 h على الأكثر للاستعداد لأداء اختبارين في الرياضيات والفيزياء، فوضعت جدولًا زمنيًّا استعدادًا لذلك، فخصصت من 7 h إلى 14 h لدراسة الرياضيات، أما الفيزياء فخصصت لدراستها من 8 h إلى 12 h.

اكتب نظام متباينات خطيَّة يُمثّل هذا الموقف، ومثِّله بيانيًّا.

الرياضيات: عدد ساعات الدراسة لا تقل عن 7h، ولا تزيد على 14h. $7 \leq x \leq 14$

الفيزياء: عدد ساعات الدراسة لا تقل عن 8h، ولا تزيد على 12h. $8 \leq y \leq 12$

إجمالي وقت الدراسة هو 25h ؛ منها 2h لدراسة مادة التاريخ، ويتبقى 23h على الأكثر لدراسة الرياضيات والفيزياء. $x + y \leq 23$

مثّل المتباينات بيانيًّا. أي زوج مرتب في منطقة الحل المحتملة للنظام يمثّل حلًّا للنظام؟ أحد الحلول الممكنة هو 10h لدراسة الفيزياء، و 12h لدراسة الرياضيات.

تأكد

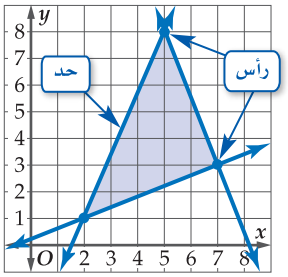
(3) سفر: خرج حسن وبدر في رحلة لزيارة بعض دول مجلس التعاون الخليجي برًّا، فتناوبا قيادة السيارة. إذا كانت فترات قيادة حسن للسيارة على نحوٍ متواصل في اليوم لا تقل عن 4h، ولا تزيد على 8h، وكانت فترات قيادة بدر للسيارة على نحوٍ متواصل في اليوم لا تقل عن 2h، ولا تزيد على 5h، وكان إجمالي زمن قيادة كليهما يوميًّا لا يزيد على 10h، فاكتب نظام متباينات خطية يُمثّل هذا الموقف، ثم مثّله بيانيًّا.

إرشادات للدراسة

حد المتباينة

إذا احتوت المتباينة على رمز $>$ أو $<$، فإن الحد لا يدخل ضمن منطقة الحل، ويمثّل الحد بخطٍّ متقطع.

إيجاد رؤوس منطقة الحل المحتملة ينتج أحيانًا عن التَّمثيل البياني لنظام متباينات خطية منطقة مغلقة على شكل مضلَّع، ويمكن إيجاد إحداثيات رؤوس تلك المنطقة؛ بإيجاد إحداثيات نقاط تقاطع المستقيمات المحدّدة للمنطقة (الحدود).



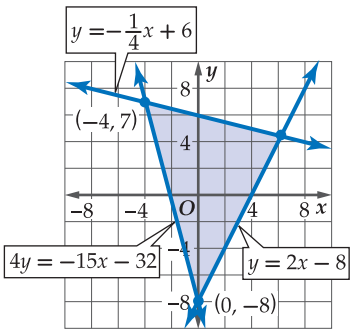
مثال 4 إيجاد رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة

أوجد رؤوس منطقة الحَلّ الناتجة عن التَّمثيل البياني للنظام الآتي:

$12\,y \geq 25\,x - 96,\ y \leq -\frac{1}{4}x + 6,\ 4y \geq -15x - 32$

مثّل كل متباينة بيانيًّا. وبالنظر إلى التمثيل البياني، يمكن إيجاد رؤوس منطقة الحل وهي

$(6, 4, 5), (-4, 7), (0, -8)$



تحقق من التمثيل البياني يمكن إيجاد رأسين من رؤوس منطقة الحل وهما الزوجان المرتبان $(-4, 7), (0, -8)$، لإيجاد الرأس الثالثة يمكن التحقق جبريًا بحل نظام المعادلات الخطية: $12\,y = 25x - 96,\ y = -\frac{1}{4}x + 6$.

الخطوة 1 عوِّض عن y بقيمتها في المعادلة الثانية.

بالتعويض عن y بـ $-\frac{1}{4}x - 6$ — $12\left(-\frac{1}{4}x + 6\right) = 25x - 96$

خاصية التوزيع — $-3x + 72 = 25x - 96$

بإضافة $72 - 25x$ لكلا الطرفين — $-28x = -168$

بالقسمة على -28 — $x = 6$

الخطوة 2 أوجد قيمة y.

بالتعويض عن x بالعدد 6 — $y = -\frac{1}{4}(6) + 6$

خاصية التوزيع — $= -\frac{3}{2} + 6$

بالتبسيط — $= \frac{9}{2} = 4.5$

إذن الرأس الثالثة لمنطقة الحل هي $(6, 4.5)$.

وتكون رؤوس منطقة الحل المحتملة هي $(0, -8), (-4, 7), (6, 4.5)$.

تأكد

أوجد رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة الناتجة عن التَّمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

(4A) $y \geq -3x - 6$
$2y \geq x - 16$
$11y + 7x \leq 12$

(4B) $5y \leq 2x + 9$
$y \leq -x + 6$
$9y \geq -2x + 5$

تأكد من فهمك

المثالان 2 , 1
الصفحتان 102,103

حُلّ كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا:

1) $y \leq 6$
$y > -3 + x$

2) $y \leq -3x + 4$
$y \geq 2x - 1$

3) $y > -2x + 4$
$y \leq -3x - 3$

مثال 3
صفحة 103

4) مشتريات: خصصت ليلى مبلغًا لا يتجاوز 35 BD لشراء نوعين من الأقلام؛ يُباع الأول في رزم تضم الواحدة منها 10 أقلام، وثمنها 3.5 BD، ويُباع الثاني في رزم تضم الواحدة منها 8 أقلامٍ، وثمنها 2.5 BD. إذا أرادت ليلى شراء 40 قلمًا على الأقل من كلا النوعين.

a) مثّل بيانيًّا نظام المتباينات الذي يُبيّن عدد الرزم الذي يمكنها شراؤه من كلا النوعين.

b) أعط 3 خيارات ممكنة لعدد الرزم التي يمكنها شراؤه من كلا النوعين.

مثال 4
صفحة 104

أوجد رؤوس منطقة الحل المحتملة الناتجة عن التَّمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

5)
$y \geq 2x + 1$
$y \leq 8$
$4x + 3y \geq 8$

6)
$y \geq -2x - 4$
$6y \leq x + 28$
$y \geq 13x - 34$

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 , 1
الصفحتان 102,103

حُلّ كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا:

7)
$x < 3$
$y \geq -4$

8)
$y > 3x - 5$
$y \leq 4$

9)
$y < -3x + 4$
$3y + x > -6$

10)
$y \geq 0$
$y < x$

11)
$6x - 2y \geq 12$
$3x + 4y > 12$

12)
$-8x > -2y - 1$
$-4y \geq 2x - 5$

13)
$5y < 2x + 10$
$y - 4x > 8$

14)
$3y - 2x \leq -24$
$y \geq \frac{2}{3}x - 1$

15)
$y > -\frac{2}{5}x + 2$
$5y \leq -2x - 15$

مثال 3
صفحة 103

16) عمل جزئي: يعمل يوسف عملين جزئيين، ويتقاضى عن كل منهما أجرًا؛ فيتقاضى 9 BD عن كل يوم في العمل الأول، و 12 BD عن كل يوم في العمل الثاني. إذا علمت أنه يعمل مدة لا تزيد على 25 يومًا في كلا العملين شهريًّا، فمثّل بيانيًّا نظامًا من متباينتين يُبيّن عدد الأيام التي يعملها في كلٍّ من العملين؛ ليجمع مبلغًا لا يقل عن 925 BD في 8 شهورٍ.

مثال 4
صفحة 104

أوجد رؤوس منطقة الحل المحتملة الناتجة عن التَّمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

17)
$x \geq 0$
$y \geq 0$
$x + 2y < 4$

18)
$y \geq 3x - 7$
$y \leq 8$
$x + y > 1$

19)
$x \leq 4$
$y > -3x + 12$
$y \leq 9$

20)
$-3x + 4y \leq 15$
$2y + 5x > -12$
$10y + 60 \geq 27x$

21)
$8y - 19x < 74$
$38y + 26x \leq 119$
$54y - 12x \geq -198$

22)
$6y - 24x \geq -168$
$8y + 7x > 10$
$20y - 2x \leq 64$

23 **اتصالات:** يجري فهد مكالمات هاتفية من هاتفه المحمول مدتها لا تزيد على 800 min، بشرط ألّا يقل عدد دقائق الاتصال نهارًا عن ضعف عددها ليلًا، ولا يقل عدد دقائق الاتصال ليلًا عن 200 min. اكتب نظام متباينات يُمثّل الموقف.

24 **أشجار:** تصنف الأشجار في مناطق الغابات الاستوائية تبعًا للارتفاع، ومحيط الساق إلى أربع مجموعات، ويُبيّن الجدول أدناه ارتفاع ومحيط ساق أشجار كل مجموعة من هذه المجموعات في إحدى مناطق الغابات الاستوائية:

المجموعة	الأشجار الكثيفة	الأشجار شبه الكثيفة	الأشجار المتوسطة الكثافة	الأشجار غير الكثيفة
الارتفاع (ft)	أكثر من 72	56 – 72	40 – 55	أقل من 39
محيط الساق (in)	أكثر من 60	48 – 60	34 – 48	أقل من 33

a. اكتب نظام متباينات خطية يمثّل مدى كلٍّ من الارتفاع h، ومحيط الساق c للأشجار شبه الكثيفة، ومثّله بيانيًّا.

b. ما المجموعة التي تنتمي إليها شجرة زيزفون ارتفاعها 48ft؟ أوجد محيط ساقها المتوقّع.

حُلّ كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا:

25 $y \geq |2x + 4| - 2$
$3y + x \leq 15$

26 $y \geq |6 - x|$
$|y| \leq 4$

27 $|y| \geq x$
$y < 2x$

28 $y > -3x + 1$
$4y \leq x - 8$
$3x - 5y < 20$

29 $6y + 2x \leq 9$
$2y + 18 \geq 5x$
$y > -4x - 9$

30 $|x| > y$
$y \leq 6$
$y \geq -2$

31 $2x + 3y \geq 6$
$y \leq |x - 6|$

32 $8x + 4y < 10$
$y > |2x - 1|$

33 $x - 3y > 2$
$2x - y < 4$
$2x + 4y \geq -7$

34 **إدارة الوقت:** يستثمر راشد وقت فراغه في ممارسة الرياضة، وتلاوة القرآن. إذا كان مجمل وقت فراغه لا يتجاوز 20 ساعةً أسبوعيًّا، ويقضي من 4h إلى 10h منها في ممارسة الرياضة، ولا يقل زمن تلاوته للقرآن عن 10h، ولا يزيد على 14h، فاكتب نظام متباينات خطية يُمثّل ذلك الموقف، ومثّله بيانيًّا.

الربط مع واقع الحياة

حثَّ الإسلام على استثمار الوقت والحرص عليه، فقال صلى الله عليه وسلم: "لا تزول قدما عبدٍ يوم القيامة حتى يُسأل عن أربع: عن عمره فيما أفناه وعن علمه ما عمل به، وعن ماله من أين اكتسبه وفيم أنفقه وعن جسمه فيما أبلاه."

رواه الترمذي من حديث ابن مسعود.

أوجد رؤوس منطقة الحل المحتملة الناتجة عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

35 $y \geq 2x - 12$
$y \leq -4x + 20$
$4y - x \leq 8$
$y \geq -3x + 2$

36 $y \geq -x - 8$
$2y \geq 3x - 20$
$4y + x \leq 24$
$y \leq 4x + 22$

37 $2y - x \geq -20$
$y \geq -3x - 6$
$y \leq -2x + 2$
$y \leq 2x + 14$

38 يريد معلم التربية البدنية أن يختار من 10 إلى 15 لاعبًا، ليشكّل فريقًا على أن يكون اللاعبون من طلاب الصفين الثاني والثالث الثانوي، ويكون عدد اللاعبين من الصف الثالث الثانوي أكثر من لاعبي الصف الثاني الثانوي.

a) اكتب نظام متباينات يمثّل ذلك الموقف، ومثّله بيانيًّا.

b) اكتب جميع الاحتمالات الممكنة لعدد اللاعبين من كلا الصفين.

39 إدارة الأموال: يستثمر علي BD 10000 في مشروعين تجاريين. إذا كان المشروع الأول يدرّ ربحًا سنويًّا نسبته 6 %، ويدرُّ المشروع الثاني ربحًا سنويًّا نسبته 10 %، فما أقل مبلغ يمكن لعلي استثماره في المشروع الثاني على ألَّا يقل ربحه في المشروعين بعد سنة واحدة عن BD 740؟

مسائل مهارات التفكير العليا

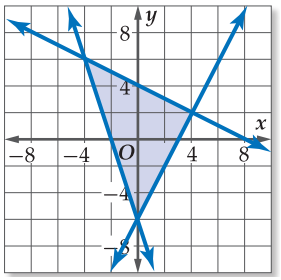
40 مسألة مفتوحة: اكتب نظامًا من متباينتين على أن يكون الحَلّ:

a. في الربع الثالث فقط.

b. غير موجود.

c. واقعًا على مستقيم.

d. نقطة واحدة فقط.



41 تحدٍّ: تُمثّل المنطقة المظللة في المستوى الإحداثي المجاور حلا لنظامٍ من المتباينات. اكتب هذا النظام.

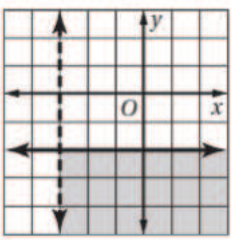
42 تبرير: حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أو خاطئة. وإذا كانت خاطئة فأعطِ مثالًا مضادًّا.

"النظام المكوّن من متباينتين خطيتين؛ إما أن يكون ليس له حل، أو أن يكون له عدد لا نهائي من الحلول".

43 اكتب: وضِّح في خطوات مكتوبة، طريقة تحديد المنطقة المظللة عند حَلّ نظام متباينات خطية بيانيًّا.

تدريب على اختبار معياري

44 اختر نظام المتباينات فيما يأتي، بحيث يكون حلّه التمثيل البياني أدناه.



A $y < -2$ ، $x < -3$

B $y \le -2$ ، $x > -3$

C $x \le -2$ ، $y > -3$

D $x < -3$ ، $y < -3$

45 مراجعة: لكي يكون الطالب عضوًا في فرقة العرض العسكري، يجب ألا يقل معدّله التراكمي عن نقطتين، وأن يحضر على الأقل خمسة تمارين بعد الدوام. اختر نظام المتباينات الذي يمثّل هذا الوضع؟

F $x \ge 2$ ، $y \ge 5$

G $x \le 2$ ، $y \le 5$

H $x < 2$ ، $y < 5$

J $x > 2$ ، $y > 5$

مراجعة تراكمية

مثِّل كل متباينة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 2-6)

46 $x + y \le 6$

47 $4x - 3y < 10$

48 $5x + 7y \ge -20$

مثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدِّد كلًّا من مجالها ومداها: (الدرس 2-4)

49 $f(x) = |x - 3|$

50 $h(x) = [\![x]\!] - 5$

مراجعة المتطلبات السابقة

إذا كان: $g(x) = 3x - 4$ ، $f(x) = 2x + 5$ ، فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

51 $g(-2)$

52 $f(-0.25)$

53 $g(-0.75)$

معمل الآلة الحاسبة البيانية:

أنظمة المتباينات الخطية

Systems of Linear inequlities

الهدف
أستعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لحَلّ أنظمة متباينات خطية.

يمكنك تمثيل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية مستعملًا Y = menu. كما يمكنك أيضًا اختيار أساليب مختلفة للتمثيل البياني للتظليل فوق المستقيم أو تحته.

مثال حَلّ نظامٍ من متباينتين خطيتين

استعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لتمثيل النظام المكوّن من المتباينتين الآتيتين بيانيًّا في نافذة العرض القياسية:

$y \geq -3x + 4$

$y \leq 2x - 1$

الخطوة 1 أدخل $-3x + 4$ بوصفها قيمة لـ **Y1**. وبما أن y أكبر من $-3x + 4$، فظلِّل المنطقة الواقعة فوق المستقيم بالضغط على المفاتيح:

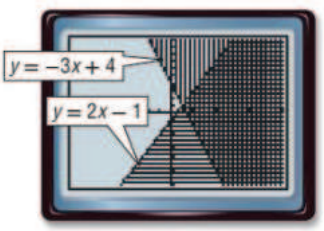
Y= ▶ ▶ ENTER ENTER ▶ ▶

(–) 3 X,T,θ,n + 4 ENTER

الخطوة 2 أدخل $2x - 1$ بوصفها قيمة لـ **Y2**. وبما أن y أقل من $2x - 1$، فظلِّل المنطقة تحت المستقيم بالضغط على المفاتيح:

▶ ▶ ENTER ENTER ENTER ▶ ▶ 2

X,T,θ,n – 1 ENTER



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

الخطوة 3 اعرض التَّمثيل البياني على شاشة العرض القياسية، وذلك بالضغط على:

ZOOM 6

لاحظ نمط التظليل فوق المستقيم $y = -3x + 4$، وتحت المستقيم $y = 2x - 1$.

إن منطقة الحَلّ المحتملة هي المنطقة الناتجة عن تقاطع نمطَي التظليل، وهي المنطقة التي تحوي جميع النقاط التي تحقق النظام $y \leq 2x - 1$, $y \geq -3x + 4$.

تمارين:

استعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لحلِّ كل نظام من متباينتين مما يأتي:

1) $y \geq 3$
$y \leq -x + 1$

2) $y \geq -4x$
$y \leq -5$

3) $y \geq 2 - x$
$y \leq x + 3$

4) $y \geq 2x + 1$
$y \leq -x - 1$

5) $2y \geq 3x - 1$
$3y \leq -x + 7$

6) $y + 5x \geq 12$
$y - 3 \leq 10$

7) $5y + 3x \geq 11$
$3y - x \leq -8$

8) $10y - 7x \geq -19$
$7y - 5x \leq 11$

9) $\frac{1}{6}y - x \geq -3$
$\frac{1}{5}y + x \leq 7$

2-8 البرمجة الخطية
Linear Programming

لماذا؟

يقوم قسم الإنتاج بشركة ألومنيوم البحرين (ألبا) يوميًّا بصب نوعين من الألومنيوم المنصهر في قوالب على دفعات كما هو مبين في الجدول أدناه.

عدد القوالب التي يصب فيها الألومنيوم المنصهر يوميًّا			
النوع	أقل عدد	أكبر عدد	تكلفة القالب الواحد (BD)
الأول	9	11	36000
الثاني	12	18	135000

إذا كان عدد القوالب المطلوب إنتاجها من النوعين لا يقل عن 25 قالبًا يوميًّا، فكم قالبًا من كل نوع يجب إنتاجه يوميًّا لتكون التكلفة أقل ما يمكن؟

هناك **قيود** أو حدود على إنتاج الشركة ناجمة عن الطلب، والشحن وكفاءة المشغل، وللتعبير عن هذه القيود يمكن استعمال أنظمة المتباينات الخطية.

القيمة العظمى والقيمة الصغرى تواجه الشركات في كثير من الأحيان أوضاعًا ضمن قيود مختلفة، وتسعى للوصول إلى أقل تكلفة أو إلى أعلى ربح. مثل هذه القضايا يمكن أن توجه عادة باستعمال البرمجة الخطية.

البرمجة الخطية هي طريقة لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالةٍ ما تحت قيودٍ معينةٍ، كلٌّ منها عبارة عن متباينة خطية، وذلك بعد تمثيل نظام المتباينات بيانيًّا، وتوجد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة ذات الصلة دائمًا عند أحد رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة.

فيما سبق
درست حَلّ أنظمة متباينات خطية بيانيًّا.

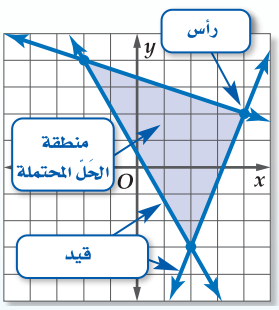
والآن
الأفكار الرئيسة
- أجد القيمة العظمى، والقيمة الصغرى لدالة ضمن منطقة معينة.
- أستعمل البرمجة الخطية؛ لإيجاد الحَل الأمثل لمسائل حياتية.

المفردات الأساسية
القيود
constraints
البرمجة الخطية
linear programming
محدودة
bounded
غير محدودة
unbounded
الحلُ الأمثل
optimize

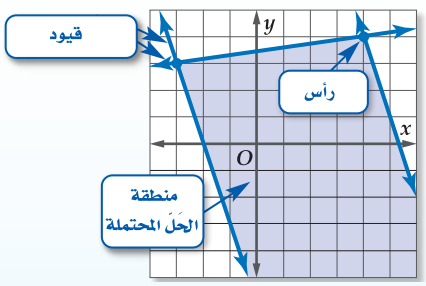
www.obeikaneducation.com

مفهوم أساسي
منطقة الحَلّ المحتملة

أضف إلى مطويتك



تكون منطقة الحَلّ المحتملة **محدودة** أو محصورة بقيود، وتظهر القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة عادةً عند رؤوس منطقة الحَلّ.

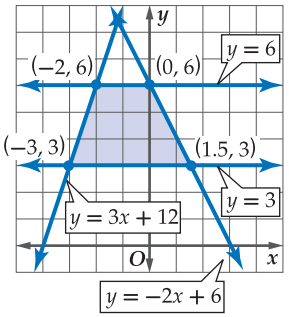


تكون منطقة الحَلّ المحتملة مفتوحة وممتدة، فهي بذلك **غير محدودة**، ويمكن أن تحتوي على قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

مثال 1 منطقة الحَل المحتملة المحدودة

مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا، ثم حدّد رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$$3 \le y \le 6$$
$$y \le 3x + 12$$
$$y \le -2x + 6$$
$$f(x, y) = 4x - 2y$$



الخطوة 1 مثّل المتباينات بيانيًّا، وحدّد رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة.

الخطوة 2 أوجد قيمة الدالة عند كل رأس.

(x, y)	$4x - 2y$	$f(x, y)$	
$(-3, 3)$	$4(-3) - 2(3)$	-18	
$(1.5, 3)$	$4(1.5) - 2(3)$	0	← قيمة عظمى
$(0, 6)$	$4(0) - 2(6)$	-12	
$(-2, 6)$	$4(-2) - 2(6)$	-20	← قيمة صغرى

القيمة العظمى للدالة تساوي 0، وتكون عند النقطة $(1.5, 3)$، والقيمة الصغرى للدالة تساوي -20، وتكون عند النقطة $(-2, 6)$.

تأكد

مثّل كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا، ثم حدّد رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

(1A

$$-2 \le x \le 6$$
$$1 \le y \le 5$$
$$y \le x + 3$$
$$f(x, y) = -5x + 2y$$

(1B

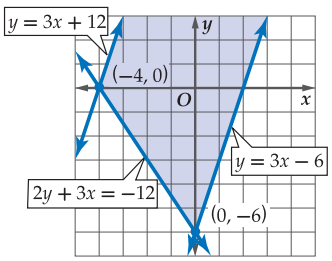
$$-6 \le y \le -2$$
$$y \le -x + 2$$
$$y \le 2x + 2$$
$$f(x, y) = 6x + 4y$$

إذا نتج عن التَّمثيل البياني لنظام متباينات منطقةٌ غير مغلقة، فإن منطقة الحَلّ المحتملة تكون غير محدودة.

مثال 2 منطقة الحّل المحتملة غير المحدودة

مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا، ثم حدّد رؤوس منطقة الحل المحتملة، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة (إن وجدت).

$$2y + 3x \ge -12,\ y \le 3x + 12,\ y \ge 3x - 6,\ f(x, y) = 9x - 6y$$



مثّل المتباينات بيانيًّا، وأوجد قيمة الدالة عند رؤوس منطقة الحل المحتملة.

(x, y)	$9x - 6y$	$f(x, y)$
$(-4, 0)$	$9(-4) - 6(0)$	-36
$(0, -6)$	$9(0) - 6(-6)$	36

القيمة العظمى للدالة تساوي 36، وتكون عند النقطة $(0, -6)$، ولا توجد قيمة صغرى للدالة؛ لأن هناك نقطة أخرى في منطقة الحل المحتملة وهي $(0, 8)$، وتُعطى القيمة -48 للدالة وهي أقل من -36.

قراءة الرياضيات

رمز الدالة

يستعمل الرمز $f(x, y)$ للتعبير عن الدالة في المتغيرين x, y. وتُقرأ f of x وَ y

تنبيه!

القيمة العظمى

لا تفترض عدم وجود قيم عظمى إذا كانت منطقة الحل المحتملة غير محدودة، بل اختبر قيمة الدالة عند كل رأس؛ لتحدد ما إذا كانت هناك قيمة عظمى أو صغرى.

تأكد

مثّل كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا، ثم حدّد رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة (إن وجدت).

(2A

$y \le 8$
$y \ge -x + 4$
$y \le -x + 10$
$f(x, y) = -6x + 8y$

(2B

$y \ge x - 9$
$y \le -4x + 16$
$y \ge -4x - 4$
$f(x, y) = 10x + 7y$

إيجاد الحلّ الأمثل يُسمّى البحث عن السعر أو الكمية الأفضل أو الأنسب لتقليل التكلفة أو زيادة الربح **الحلّ الأمثل**، ويمكن الحصول على ذلك الحل باستعمال البرمجة الخطية.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

استعمال البرمجة الخطية؛ لإيجاد الحلّ الأمثل

الخطوة 1 حدّد المتغيرات.
الخطوة 2 اكتب نظام متباينات خطية يمثّل المسألة.
الخطوة 3 مثّل نظام المتباينات بيانيًّا.
الخطوة 4 أوجد رؤوس منطقة الحلّ المحتملة.
الخطوة 5 اكتب الدالة الخطية التي تريد إيجاد قيمتها العظمى أو الصغرى.
الخطوة 6 عوّض إحداثيات الرؤوس في الدالة.
الخطوة 7 اختر القيمة العظمى أو الصغرى وفقًا لما هو مطلوب في المسألة.

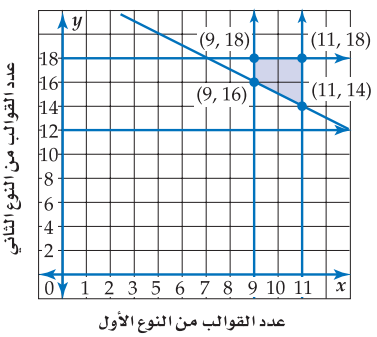
الربط مع واقع الحياة

شهد القطاع الصناعي في مملكة البحرين تطورًا ملحوظًا حتى وصلت منتجات مصانع البحرين إلى معظم دول العالم، فكانت البحرين من أوائل الدول العالمية التي دخلت مجال صناعة الألومنيوم.

مثال 3 من واقع الحياة

استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

أعمال: بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" الواردة في بداية هذا الدرس، استعمل البرمجة الخطية؛ لإيجاد عدد القوالب التي يفترض إنتاجها يوميًّا؛ لتكون التكلفة أقل ما يمكن.



الخطوة 1 افترض أن a هو عدد القوالب من النوع الأول، و v هو عدد القوالب من النوع الثاني.

الخطوة 2
$9 \le a \le 11$
$12 \le v \le 18$
$a + v \ge 25$

الخطوتان 3 و 4 مثّل نظام المتباينات بيانيًّا كما في الشكل أعلاه، ثم حدّد رؤوس منطقة الحلّ المحتملة.

الخطوة 5 الدالة التي تريد إيجاد قيمتها الصغرى هي $f(a, v) = 36000a + 135000v$

الخطوة 6

(a, v)	$36000a + 135000v$	$f(a, v)$	
(9, 16)	36000(9) + 135000(16)	2484000	
(9, 18)	36000(9) + 135000(18)	2754000	
(11, 14)	36000(11) + 135000(14)	2286000	← قيمة صغرى
(11, 18)	36000(11) + 135000(18)	2826000	← قيمة عظمى

الخطوة 7 يجب إنتاج 11 قالبًا من النوع الأول، و 14 قالبًا من النوع الثاني يوميًّا لتكون التكلفة أقل ما يمكن.

إرشادات للدراسة

منطقية الحلّ
اختبر منطقية حلك بالتأمل في سياق المسألة.

تأكد

3) مجوهرات: يصوغ فهد من 10 إلى 25 عقدًا، ومن 15 إلى 40 سوارًا شهريًّا. إذا كانت أجرة صياغة العقد 50 BD، وأجرة صياغة السوار 30 BD، وصاغ في أحد الأشهر 30 قطعة من العقود والأساور على الأقل، فكم قطعةً من كلا النوعين عليه صياغتها؛ ليحصل على أكبر أجر؟

تأكد من فهمك

المثالان 2 , 1
صفحة 110

مثّل كل نظام مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد رؤوس منطقة الحلّ المحتملة، وأوجد القيمة العظمى والصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة (إن وجدت):

1)
$y \le 5$
$x \le 4$
$y \ge -x$
$f(x,y) = 5x - 2y$

2)
$y \le -3x + 6$
$-y \le x$
$y \le 3$
$f(x,y) = 8x + 4y$

3)
$y \ge -3x + 2$
$9x + 3y \le 24$
$y \ge -4$
$f(x,y) = 2x + 14y$

4)
$-2 \le y \le 6$
$3y \le 4x + 26$
$y \le -2x + 2$
$f(x,y) = -3x - 6y$

5)
$-3 \le y \le 7$
$4y \ge 4x - 8$
$6y + 3x \le 24$
$f(x,y) = -12x + 9y$

6)
$y \le 2x + 6$
$y \ge 2x - 8$
$y \ge -2x - 18$
$f(x,y) = 5x - 4y$

مثال 3
صفحة 111

7) ثقافة مالية: يبلغ مجموع ساعات العمل اليومي لعمال قسم الإنتاج في مصنع للغسالات 200 h على الأكثر، ولعمال قسم ضبط الجودة 90 h على الأكثر، والجدول أدناه يُبيّن عدد الساعات التي يتطلبها إنتاج، وضبط جودة نوعين من الغسالات.

الزمن اللازم لإنتاج الغسالة

	قسم الإنتاج	قسم ضبط الجودة
النوع الأول	5 h	2 h
النوع الثاني	4 h	2 h

a) اكتب نظام متباينات يمثّل هذا الموقف.

b) مثّل نظام المتباينات بيانيًّا، وحدّد منطقة الحَلّ المحتملة.

c) حدّد رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة.

d) إذا كان ربح الغسالة من النوع الأول 80 BD، ومن النوع الثاني 50 BD، فاكتب دالة تُمثّل الربح الكلي لكلا النوعين.

e) ما عدد الغسالات التي يجب تصنيعها من كل نوع للحصول على أكبر ربح ممكن؟ أوجد قيمته.

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 , 1
صفحة 110

مثّل كل نظام مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد رؤوس منطقة الحلّ المحتملة، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة (إن وجدت):

8)
$-8 \le y \le -2$
$y \le x$
$y \le -3x + 10$
$f(x, y) = 5x + 14y$

9)
$2 \ge x \ge -3$
$y \ge -2x - 6$
$4y \le 2x + 32$
$f(x, y) = -4x - 9y$

10)
$x + 4y \ge 2$
$2x + 4y \le 24$
$2 \le x \le 6$
$f(x, y) = 6x + 7y$

11)
$x \ge -6$
$y + x \le -1$
$2x + 3y \ge -9$
$f(x, y) = -10x - 12y$

12)
$x \ge -8$
$3x + 6y \le 36$
$2y + 12 \ge 3x$
$f(x, y) = 10x - 6y$

13)
$y \ge |x - 2|$
$y \le 8$
$8y + 5x \le 49$
$f(x, y) = -5x - 15y$

14)
$y \le x + 4$
$y \ge x - 4$
$y \le -x + 10$
$y \ge -x - 10$
$f(x, y) = -10x + 9y$

15)
$-4 \le x \le 8$
$-8 \le y \le 6$
$y \ge x - 6$
$4y + 7x \le 31$
$f(x, y) = 12x + 8y$

16)
$-9 \le x \le -3$
$-9 \le y \le -5$
$3y + 12x \le -75$
$f(x, y) = 20x + 8y$

مثال 3
صفحة 111

17) صناعة: ينتج مصنع نوعين من وحدات الإنارة؛ يُباع النوع الأول بسعر 25 BD، أما النوع الثاني فيُباع بسعر 35 BD. إذا كانت الطاقة الإنتاجية للمصنع لا تزيد على 450 وحدة إنارة يوميًّا، وكان على المصنع أن ينتج ما لا يقل عن 100 وحدة إنارة من النوع الأول وما لا يزيد على 200 وحدة إنارة من النوع الثاني، فما عدد وحدات الإنارة التي يتطلب إنتاجها من كل نوع؛ ليكون دخل المصنع اليومي أكبر ما يمكن؟

18) أعمال: يريد مدير مكتب سياحة وسفر طباعة كتيبات ونشرات دعائية. إذا كان الكتيب يتكون من 3 صفحات، والنشرة من صفحتين، وكانت تكلفة طباعة الكتيب 0.8 BD، والنشرة 0.4 BD، وقرَّر مدير المكتب ألا يزيد عدد صفحات المطبوعات على 600 صفحة، وأن يطبع ما لا يقل عن 50 كتيبًا، و 150 نشرة، فما عدد الكتيبات والنشرات المطبوعة؛ لتكون التكلفة أقل ما يمكن؟

19) شحن: يشحن مصنع منتجاته بالتعاون مع شركة شحن مختصة في حاويات مبردة تبلغ حمولة الواحدة منها 4200 kg، وحجم الحيز الذي توضع فيه البضائع داخلها 480 ft^3، وتوضع المنتجات في أثناء الشحن في صناديق بمقاسين؛ صغيرة حجمها 3 ft^3 وتزن 25 kg، وكبيرة حجمها 5 ft^3، وتزن 50 kg، وأجرة شركة الشحن هي 5 BD عن كل صندوق من المقاس الصغير، و 8 BD عن كل صندوق من المقاس الكبير.

a) أوجد عدد الصناديق المشحونة من كلا النوعين؛ لتكون الأجرة أكبر ما يمكن.

b) ما أكبر أجرة ممكنة لحاوية الشحن؟

20) إعادة التدوير: يقوم مصنع بإعادة تدوير ما لايزيد على 1200 Ton من البلاستيك شهريًّا؛ لصنع حاويات بمقاسين صغير وكبير، وعلى المصنع أن يستعمل ما لايقل عن 300 Ton في صنع الحاويات الصغيرة وما لا يقل عن 450 Ton في صنع الحاويات الكبيرة. إذا كان المصنع يحقق ربحًا قدره 17.5 BD لكل طن بلاستيك تم استعماله لصنع الحاويات الصغيرة، و 20 BD لكل طن تم استعماله لصنع الحاويات الكبيرة. فما أكبر ربح يمكن تحقيقه؟ وما عدد الأطنان المستعملة لكل نوع من الحاويات؛ لتحقيق ذلك الربح؟

الربط مع واقع الحياة

تدوير المواد يحمي الإنسان، ويقلل الاستهلاك، ويرشد الطاقة، ويقي البيئة من المخلفات والانبعاثات الضارة.

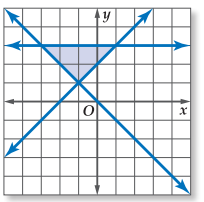
مسائل مهارات التفكير العليا

21) **مسألة مفتوحة:** اكتب نظام متباينات خطية على أن تكون منطقة الحلّ المحتملة محدودة وتقع في الربع الرابع فقط، ومساحتها 20 وحدةً مربعةً.

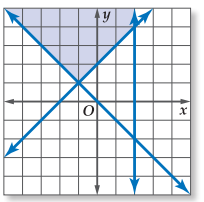
22) **تحدٍّ:** أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمتباينات: $y \geq |x| - 3, y \leq -|x| + 3, x \geq |y|$.

23) **أيها لا ينتمي؟** حدِّد نظام المتباينات المختلف عن الأنظمة الثلاثة الأخرى في كل شكل أدناه، وضح إجابتك.

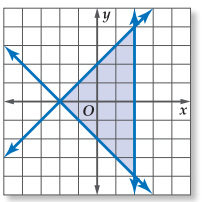
(a



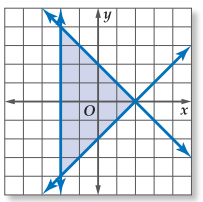
(b



(c



(d



24) **تبرير:** حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. برّر إجابتك.

"المنطقة غير المحدودة لا يكون لها قيمة عظمى وقيمة صغرى في الوقت نفسه".

25) **اكتب:** استعمل المعلومات الواردة في فقرة "لماذا؟" في الصفحة 62 ؛ لشرح كيفية استعمال البرمجة الخطية في جدولة عدد القوالب التي يصب فيها الألومنيوم المنصهر يوميًّا، وتوضيح الدالة الخطية ذات الصلة التي ترغب الشركة في إيجاد القيمة الصغرى لها.

تدريب على اختبار معياري

26) يصنع نجار نوعين من الأثاث، ويستغرق مدة 1h في صناعة كل قطعة من النوع الأول، ومدة 2h في صناعة كل قطعة من النوع الثاني. إذا كان النجار ملتزمًا بصناعة ثلاث قطع على الأقل من النوع الأول، وقطعتين على الأقل من النوع الثاني يوميًّا، ولا يمكنه العمل أكثر من 10 ساعات عمل في اليوم، فاكتب نظامًا من المتباينات يُمثّل هذه الحالة.

27) **هندسة:** أيٌّ مما يأتي يُعدُّ وصفًا مناسبًا للتمثيل البياني للمعادلتين $4y = 12x + 16$, $y = 3x - 5$؟

A مستقيمان لهما مقطع المحور y نفسه.

B مستقيمان متعامدان.

C مستقيمان لهما مقطع المحور x نفسه.

D مستقيمان متوازيان.

مراجعة تراكمية

حُلّ كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا: (الدرس 7-2)

28) $3x + 2y \geq 6$
$4x - y \geq 2$

29) $4x - 3y < 7$
$2y - x < -6$

30) $3y \leq 2x - 8$
$y \geq \frac{2}{3}x - 1$

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم المارِّ بزوج النقاط في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 2-2)

31) $(5, 1)$ ، $(8, -4)$

32) $(-3, 5)$ ، $(3, 2)$

الفصل 2

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

كتابة المعادلات الخطية (الدرسان 2-2 و2-1)

- صيغة ميل - مقطع: $y = mx + b$
- صيغة نقطة - ميل: $y - y_1 = m(x - x_1)$

العلاقات والدوال (الدروس 2-3 و 2-4 و2-5)

- الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المجال المقابل.
- الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة: هي الدالة التي تُكتب باستعمال أكثر من تعبير.
- التمثيل البياني للدالة الدرجية يتكون من قطع مستقيمة أفقية.
- تكوّن التحويلات الهندسية على التّمثيل البياني الأم عائلة التّمثيلات البيانية.

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا (الدرس 2-6)

- يمكنك تمثيل المتباينة باتباع الخطوات الآتية:

الخطوة 1 حدّد ما إذا كان حد المتباينة متقطعًا أو متصلًا، ثم مثله بيانيًّا.

الخطوة 2 اختر نقطةً لا تقع على حد المتباينة، واختبرها إذا كانت تحقق المتباينة أو لا.

الخطوة 3 إذا كانت النقطة المختارة تحقق المتباينة، فظلّل المنطقة التي تحوي النقطة، وإلّا فظلّل المنطقة الأخرى.

حُلّ أنظمة المتباينات الخطية بيانيًّا (الدرس 2-7)

- يمكن إيجاد حلّ نظام متباينات خطية عن طريق تمثيل المتباينات بيانيًّا، وإيجاد منطقة الحَلّ المحتملة.

البرمجة الخطية (الدرس 2-8)

- إيجاد القيمة الصغرى أو العظمى لدالة في منطقة على المستوى الإحداثي يحدّدها نظام متباينات يُمثّل قيودًا على الدالة.
- إيجاد الحّل الأمثل يعني إيجاد السعر، أو الكمية التي تجعل الربح أكبر ما يمكن، أو التكلفة أقل ما يمكن.

مطويتك منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات الأساسية

صيغة ميل - مقطع ص 54
التنبؤ الخطي ص 58
صيغة نقطة - ميل ص 64
الموازي ص 66
العمودي ص 66
المجال المقابل ص 73
دالة واحد لواحد ص 73
الدالة الشاملة ص 73
دالة تقابل ص 73
العلاقة المنفصلة ص 74
العلاقة المتصلة ص 74
اختبار الخط الرأسي ص 74
المتغيّر المستقل ص 75
المتغيّر التابع ص 75
رمز الدالة ص 76
الدالة الثابتة ص 82
التمثيل البياني الأم ص 83
الدالة الأم ص 83
الدالة الخطية ص 83
الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة
خطية ص 83
الدالة الدرجية ص 84
دالة أكبر عدد صحيح ص 84
دالة القيمة المطلقة ص 88
الإزاحة ص 89
الانعكاس ص 90
محور الانعكاس ص 90
التمدد ص 90
المتباينة الخطية ص 96
الحد ص 96
نظام المتباينات الخطية ص 102
منطقة الحلّ المحتملة ص 102
القيود ص 109
البرمجة الخطية ص 109
محدودة ص 109
غير محدودة ص 109
الحَلّ الأمثل ص 111

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي:

1) تكون الدالة (منفصلة، واحدًا لواحد) إذا كان كل عنصر في المجال مرتبطًا بعنصر واحد فقط في المدى.

2) (مجال، مدى) العلاقة هو مجموعة الإحداثيات x للأزواج المرتبة التي تكوّن العلاقة.

3) الدالة (الثابتة، المحايدة) هي الدالة الخطية $f(x) = x$.

4) تُسمى الدالة التي تكتب باستعمال تعبيرين أو أكثر دالة (خطية، معرفة بأكثر من قاعدة).

5) التمثيل البياني (لدالة القيمة المطلقة – للدالة الدرجية) يتكون من قطع مستقيمة أفقية.

أكمل كل عبارة مما يأتي بالمفردة المناسبة من القائمة أعلاه:

6) _____ هي طريقة لإيجاد القيمة الصغرى أو العظمى لدالة تحت شروط معينة يُعبّر عنها بنظامٍ من المتباينات.

7) إيجاد _____ يعني إيجاد السعر الأفضل أو التكلفة الأنسب باستعمال البرمجة الخطية.

8) منطقة الحلّ المفتوحة تُسمى _____.

2-1 المعادلات الخطية بصيغة ميل - مقطع (الصفحات 54-63)

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم الّذي يحقق الشروط في كل مما يأتي:

9) الميل 2– ، ويمر بالنقطة $(-3, -5)$

10) الميل $\frac{2}{5}$، ويمر بالنقطة $(-3, -1)$

11) يمر بالنقطتين $(-2, 4)$ ، $(0, 8)$

12) يمر بالنقطتين $(3, 5)$ و $(-1, 5)$

13) **أسماك الزينة:** اشترى صالح حوضًا للأسماك بسعر 30 BD، وكانت التكلفة الشهرية للعناية بالحوض 5 BD. اكتب معادلة تمثّل التكلفة الكلية لحوض الأسماك بعد x من الأشهر.

مثال 1

أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين $(0, -9)$ ، $(-2, 5)$، ثم اكتب معادلته.

صيغة الميل
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$(x_1, y_1) = (-2, 5)$، $(x_2, y_2) = (0, -9)$
$$= \frac{-9 - 5}{0 - (-2)}$$

بالتبسيط
$$= \frac{-14}{2} = -7$$

اكتب المعادلة.

صيغة نقطة – ميل
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

بالتعويض
$$y - 5 = -7(x - (-2))$$

بالتبسيط
$$y - 5 = -7(x + 2)$$

خاصية التوزيع
$$y - 5 = -7x - 14$$

بإضافة 5 لكل طرف
$$y = -7x - 9$$

إذن، المعادلة هي $y = -7x - 9$.

2-2 المعادلات الخطية بصيغة نقطة - ميل (الصفحات 64-72)

اكتب معادلة بصيغة نقطة – ميل للمستقيم الذي يحقق الشروط في كلٍّ مما يأتي:

14) الميل 5 ، ويمر بالنقطة $(6, 3)$

15) الميل 0 ، ويمر بالنقطة $(-4, 2)$

16) يمر بالنقطة $(1, 2)$، ويوازي المستقيم $y = 4x - 3$

17) يمر بالنقطة $(-3, 5)$، وعمودي على المستقيم $y = \frac{2}{3}x - 8$

مثال 2

اكتب معادلة بصيغة نقطة – ميل للمستقيم المار بالنقطة (3, 4) وميله 2– .

صيغة نقطة – ميل
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

بالتعويض عن m بـ 2–، (x_1, y_1) بـ (3, 4)
$$y - 4 = -2(x - 3)$$

2-3 العلاقات والدوال (الصفحات 73-81)

حدّد مجال ومدى كل علاقة مما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانت تمثّل دالة أم لا؟ وهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟

18) $\{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$

19) $\{(-3, 0), (0, 2), (2, 4), (4, 5), (5, 2)\}$

20) $\{(-4, 1), (3, 3), (1, 1), (-2, 5), (3, -4)\}$

إذا كانت $f(x) = -3x + 2$، فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

21) $f(4)$ **22)** $f(0)$

23) $f(-a)$ **24)** $f(2w)$

25) مناسبات: تتقاضى مؤسسة لتجهيز المناسبات 25 BD عن توصيل اللوازم لمكان المناسبة، و 4 BD أجرةً يوميةً عن كل طاولة. ويمكن تمثيل ما تتقاضاه هذه المؤسسة عند استئجار x طاولة بالمعادلة $y = 25 + 4x$. أوجد مجال هذه المعادلة ومداها، ثم حدّد ما إذا كانت المعادلة دالة أم لا، وهل هي متصلة أم منفصلة؟

مثال 3

حدّد مجال ومدى العلاقة: $\{(6, 2), (-1, 3), (2, 4), (0, -1), (-4, 3)\}$، ثم حدّد إن كانت تمثّل دالة أو لا، وهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟

المجال $= \{-4, -1, -2, 3, 2\}$، المدى $= \{3, 0, 4, -1, 6\}$

كل عنصر في المجال مرتبط بعنصر واحد فقط في المجال المقابل؛ ممَّا يعني أن العلاقة تُمثّل دالة. والعناصر المختلفة في المجال لها صور مختلفة في المدى، إذن الدالة واحد لواحد.

المجال المقابل = المدى، إذن الدالة شاملة.

بما أن الدالة واحد لواحد وشاملة، إذن هي تقابل.

مثال 4

إذا كانت $f(x) = 4x - 3$، فأوجد $f(-2)$.

عوض عن x بـ -3 $f(-2) = 4(-2) - 3$

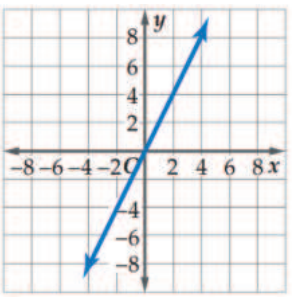
بالضرب $= -8 - 3$

بالتبسيط $= -11$

2-4 دوال خاصة (الصفحات 82-87)

26) مثّل الدالة: $f(x) = \begin{cases} -3 & , x < -1 \\ 4x - 3 & , -1 \le x \le 3 \\ x & , x > 3 \end{cases}$ بيانيًّا، ثم حدّد مجالها ومداها.

27) اكتب معادلة (قاعدة) الدالة الخطية الممثّلة بيانيًا في الشكل المجاور.

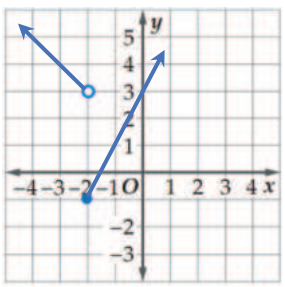


مثل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد مجالها ومداها:

28) $f(x) = [\![x]\!] + 2$ **29)** $f(x) = [\![x + 3]\!]$

مثال 5

مثّل الدالة $f(x) = \begin{cases} 1 - x & , x < -2 \\ 2x + 3 & , x \ge -2 \end{cases}$ بيانيًّا، وحدّد كلًّا من مجالها ومداها.



الخطوة1: مثل $f(x) = 1 - x$ بيانيًا عندما $x < -2$. احسب قيمة المقدار $1 - x$ عندما $x = -2$، وعند قيمة أخرى لِـ x أقل من -2 ولتكن -3

$f(x) = 1 - x$

$f(-2) = 1 - (-2) = 3$

$f(-3) = 1 - (-3) = 4$

حدد النقطتين $(-3,4), (-2,3)$ بينهما بشعاع.

وبما أن العدد -2 لا يحقق المتباينة، إذن أبدأ بدائرة غير مظللة عند النقطة $(-2,3)$

الخطوة2: مثل $f(x) = 2x + 3$ بيانيًا عندما $x \ge -2$. احسب قيمة المقدار $2x + 3$ عندما $x = -2$، وعند قيمة أخرى لِـ x أكبر من -2 ولتكن -1

$f(x) = 2x + 3$ $f(x) = 2x + 3$

$f(-1) = 2(-1) + 3 = 1$ $f(-2) = 2(-2) + 3 = -1$

حدد النقطتين $(-1,1), (-2,-1)$ بينهما بشعاع.

وبما أن العدد -2 يحقق المتباينة، إذن أبدأ بدائرة مظللة عند النقطة $(-2,-1)$

مجال الدالة: مجموعة الأعداد الحقيقية R

المدى: $\{y | y \ge -1\}$

2-5 دوال القيمة المطلقة (الصفحات 88-94)

30) مثّل الدالة: $g(x)=2|x+3|-5$ بيانيًّا، ثم حدّد مجالها ومداها.

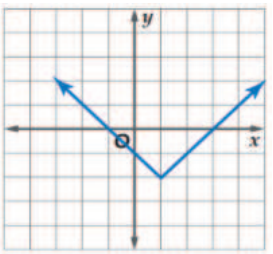
صِفِ التحويلات الهندسية في التّمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

31) $g(x)=-|x|-19$

32) $g(x)=24-3|x+7|$

33) $g(x)=\frac{5}{6}|x-20|+10$

34) اكتب معادلة (قاعدة) دالة القيمة المطلقة الممثّلة بيانيًا في الشكل المجاور.

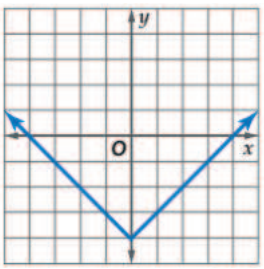


مثال 6

مثّل الدالة: $k(x)=|x|-4$ بيانيًّا، ثم حدّد مجالها ومداها.

كون جدولًا للقيم، بحيث يشتمل على قيم أكبر من 0 وقيم أصغر منه.

x	$k(x)$
−2	−2
−1	−3
0	−4
1	−3
2	−2



مثال 8

صِفِ الإزاحة في التمثيل البياني للدالة $g(x)=|x+6|$.

التّمثيل البياني للدالة $g(x)=|x+6|$ هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x)=|x|$، إلى اليسار 6 وحداتٍ.

2-6 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا (الصفحات 96-101)

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانيًّا:

35) $x-3y<6$

36) $y\geq 2x+1$

37) $2x+4y\leq 12$

38) $y<-3x-5$

39) $y>|2x|$

40) $y\geq|2x-2|$

41) $y+3<|x+1|$

42) $2y\leq|x-3|$

43) شراء: وفّر علي 6 BD؛ لشراء مجموعة من الدفاتر، والأسطوانات المدمجة، إذا كان سعر الدفتر الواحد 1 BD، وسعر الأسطوانة المدمجة 0.5 BD، فاكتب متباينةً تمثّل عدد الدفاتر والأسطوانات المدمجة التي يمكن شراؤها، ثم مثّلها بيانيًّا.

مثال 9

مثّل المتباينة $x-2y>6$ بيانيًّا.

بما أن المتباينة تحتوي على الرمز $>$ ، فإن حد المتباينة يكون متقطعًا. مثّل المعادلة المرافقة $x-2y=6$ بيانيًّا

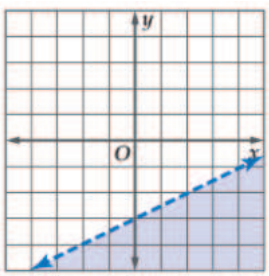
اختبر باستعمال النقطة (0, 0)، والتي لا تقع حد المتباينة

$x-2y>6$

$0-2(0)\stackrel{?}{>}6$

$0>6$ ✗

ظلل المنطقة التي لا تحوي (0, 0)



2-7 حَلّ أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا (الصفحات 102-108)

حِلْ كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا :

44) $y < 2x - 3$
$y \geq 4$

45) $|y| > 2$
$x > 3$

46) $y \geq x + 3$
$2y \leq x - 5$

47) $y > x + 1$
$x < -2$

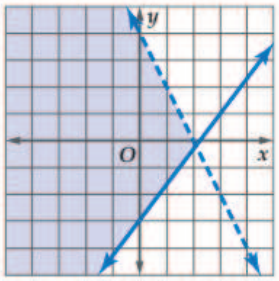
48) مجوهرات: أمضى صائغ مجوهرات ما لا يزيد على 3 h في صياغة الخواتم. إذا كان الزمن الذي يتطلبه تجهيز المعدات 15 min، والزمن الذي تتطلبه صياغة الخاتم الواحد 25 min، فاكتب نظام متباينات يصف الموقف، ومثّله بيانيًّا.

مثال 9

حِلْ نظام المتباينات الآتي بيانيًّا:

$$y \geq \frac{3}{2}x - 3$$
$$y < 4 - 2x$$

منطقة الحَلّ المحتملة هي المنطقة التي كل نقطة من نقاطها تحقق كلتا المتباينتين، وهي المنطقة المظلّلة في الشكل أدناه.



2-8 البرمجة الخطية (الصفحات: 109-114)

تصنيع: استعمل المعلومات الآتية لحَلّ التمرينين 57, 58

يربح مصنع للأدوات الرياضية 0.5 BD في كل كرة قدم يصنعها، و 0.4 BD في كل كرة يد. ويستغرق قطع الجلد 2 h لكل 75 كرة قدم و 3 h لكل 60 كرة يد، وتستغرق الخياطة 3 h لكل 75 كرة قدم، و 2 h لكل 60 كرة يد. إذا كان لدى دائرة القطع 500 ساعة عمل، كما يتوافر لدى دائرة الخياطة 450 ساعة عمل، فأجب عما يأتي:

49) ما عدد كرات القدم وكرات اليد التي يجب تصنيعها؛ لتحقيق أكبر ربح ممكن للمصنع؟

50) ما أكبر ربح يمكن للمصنع تحقيقه من هذين المنتجين؟

51) صناعة: ينتج مصنع نوعين من الأحذية على مرحلتين، ويحتاج الحذاء من النوع الأول إلى 2 h في المرحلة الأولى، و 1 h في المرحلة الثانية، ويحقق ربحًا قدره 20 BD. أما الحذاء من النوع الثاني فيحتاج إلى 1 h في المرحلة الأولى، و 3 h في المرحلة الثانية، ويحقق ربحًا قدره 15 BD. إذا كان مجموع ساعات العمل اليومي لموظفي المرحلة الأولى لا يزيد على 40 h، ولا يزيد على 60 h لموظفي المرحلة الثانية، فما أكبر ربح يمكن أن تحققه الشركة يوميًّا؟ وما عدد الأحذية الذي يحقق هذا الربح من كل نوع؟

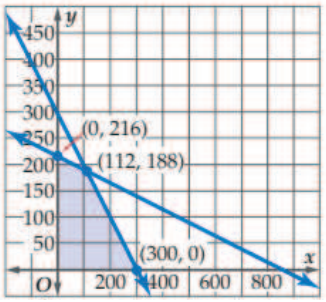
مثال 11

يزرع فيصل ما لا يزيد على 300 شتلة من نوعين من الأشجار في مزرعته التي مساحتها $5184\ m^2$، حيث تحتاج الشجرة الواحدة من النوع (A) إلى مساحة $6\ m^2$، ومن النوع (B) إلى $24\ m^2$؛ لتوفير مسافة كافية بين الأشجار. إذا كان سعر بيع الشتلة الواحدة من النوع (A) 0.8 BD، وسعر بيع الشتلة الواحدة من النوع (B) 1.2 BD، فما عدد الشتلات التي يجب بيعها من كل نوع ليكون الربح أكبر ما يمكن؟

افترض أن a هي عدد الشتلات من النوع (A)، و b عددها من النوع (B).

$$a + b \le 300 \quad , \quad 6a + 24b \le 5184 \quad , \quad a \ge 0, b \ge 0$$

مثّل المتباينات بيانيًّا، ثم حدّد رؤوس منطقة الحل المحتملة وهي: (0, 0), (300, 0), (112, 188), (0, 216) الحل .



دالة الربح هي :
$f(a, b) = 0.8a + 1.2b$.

القيمة 315.2 BD هي القيمة العظمى للربح، وتكون عند النقطة (112, 188)، لذلك إذا باع فيصل 112 شتلة من النوع (A)، و 188 شتلة من النوع (B)، فإن الربح يكون أكبر ما يمكن.

اختبار الفصل

1) حدد مجال ومدى العلاقة في الجدول المجاور، وبيّن ما إذا كانت دالة أم لا. وإذا كانت دالة فهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟

x	y
-2	3
4	-1
3	2
6	3

2) **اختيار من متعدد:** أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(0, -3), (4, 1)$.

A $y = -x + 3$ **C** $y = x - 3$

B $y = -x - 3$ **D** $y = x + 3$

مثّل بيانيًّا كلًّا من المتباينات والدوال الآتية:

3) $-2x + 5 \le 3y$ **4)** $y < 4|x - 1|$

5) $h(x) = \begin{cases} -x & , x < -2 \\ x + 2 & , 2 \ge x \ge -2 \\ 5 & , x > 2 \end{cases}$

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم الذي يحقّق الشروط في كلٍّ مما يأتي:

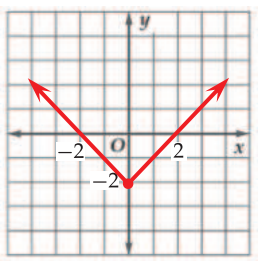
6) الميل $= -5$، مقطع المحور y يساوي 11

7) مقطع المحور x يساوي 9، مقطع المحور y يساوي -4

8) يمرّ بالنقطة $(-6, 15)$، ويوازي المستقيم $2x + 3y = 1$

9) يمرّ بالنقطة $(5, 2)$، وعمودي على المستقيم $x + 3y = 7$

لحلّ الأسئلة 12 – 10، استعمل التمثيل البياني المجاور:



10) اكتب الدالة الأم للتمثيل البياني.

11) صف الإزاحة في التمثيل البياني.

12) اكتب قاعدة الدالة.

13) أوجد المجال والمدى للدالة $g(x) = [\![x]\!] + 2$.

صِفِ التحويل الهندسي في التمثيل البياني للدالتين الآتيتين:

14) $g(x) = x^2 + 5$

15) $g(x) = -|x|$

حلّ كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا:

16)
$$x + 2y \ge 7$$
$$3x - 4y < 12$$

17)
$$3x + y < -5$$
$$2x - 4y \ge 6$$

مثّل كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا، وعيّن إحداثيات الرؤوس لمنطقة الحل، ثم أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة (إن وجدت):

18)
$$5 \ge y \ge -3$$
$$4x + y \le 5$$
$$-2x + y \le 5$$
$$f(x, y) = 4x - 3y$$

19)
$$x \ge -10$$
$$1 \ge y \ge -6$$
$$3x + 4y \le -8$$
$$2y \ge x - 10$$
$$f(x, y) = 2x + y$$

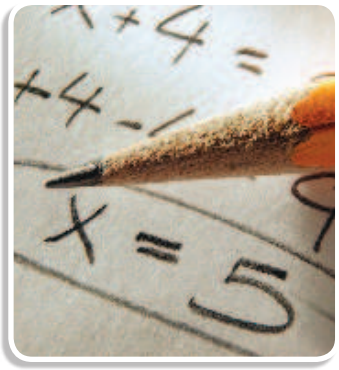
20) تبلغ مساحة موقف للمركبات $600\,m^2$. وتحتاج السيارة الصغيرة إلى $6\,m^2$ من الفراغ، في حين تحتاج الحافلة إلى $30\,m^2$. ولا يستوعب الموقف أكثر من 60 مركبة. إذا كانت أجرة وقوف السيارة 0.3 BD، وأجرة وقوف الحافلة 0.8 BD، فما عدد مركبات كلٍّ من النوعين، التي يجب استقبالها لكي يحقق موقف المركبات أكبر ربح ممكن؟

21) **اختيار من متعدد:** ما ميل المستقيم الموازي للمستقيم $y - 2 = 4(x+1)$؟

A -4 **C** $\frac{1}{4}$

B $-\frac{1}{4}$ **D** 4

الأسئلة ذات الإجابات القصيرة



الأسئلة ذات الإجابات القصيرة تتطلب منك أن تعطي الإجابة بالإضافة إلى شرح الحلّ، وتفسير وتبرير الخطوات.

استراتيجيات حلّ الأسئلة ذات الإجابات القصيرة

الخطوة 1

يتم وضع درجات الأسئلة ذات الإجابات القصيرة عادةً باستعمال سلم تقدير، وفيما يأتي مثال على هذا السلم:

سلم تقدير	
المعيار	الدرجة
الدرجة الكاملة: الإجابة الصحيحة مع التبرير الكامل لكل خطوة.	2
درجة جزئية ليست كاملة • الإجابة صحيحة، ولكن التبرير والتوضيح غير كامل. • الإجابة غير صحيحة، ولكن التبرير صحيح وكامل.	1
بدون درجة: إما أن تكون الإجابة غير موجودة، أو ليست ذات معنى.	0

الخطوة 2

عندَ حلّ الأسئلة ذات الإجابات القصيرة، تذكّر ...

- **توضيح تبريرك، أو كتابة طريقتك في حَل المسألة.**
- **كتابة كل خطوات الحل التي تقوم بها.**
- **التحقق من إجابتك إذا كان لديك الوقت.**

مثال

اقرأ المسألة، وعيّن المطلوب، ثم استعمل معطيات المسألة لحلّها.

عند قيام مها بتسخين محلول في المختبر، كانت درجات الحرارة بحسب الأوقات موضحة في الجدول المجاور.

أوجد المعادلة الخطية التي تُمثّل البيانات المدونة بالجدول.

الزمن (min)	درجة الحرارة (°C)
0	133.2
2	130.4
5	126.2
9	120.6

لإيجاد المعادلة الخطية نجد مقطع المحور y أولًا، وهو يساوي 133.2 ،

ثم نجد ميل المستقيم باختيار النقطتين (0, 133.2), (2, 130.4)

ونطبق صيغة الميل:

صيغة الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$(x_1, y_1) = (0, 133.2)$، $(x_2, y_2) = (2, 130.4)$ $= \frac{130.4 - 133.2}{2 - 0}$

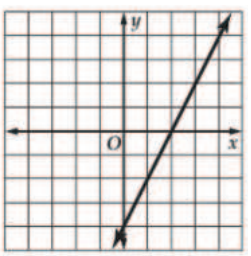
بالتبسيط $= -1.4$

إذن معادلة المستقيم $y = -1.4x + 133.2$

تمارين

اقرأ كل مسألة مما يأتي، وحدّد المطلوب واستعمل المعطيات في الحلّ:

1) ما معادلة المستقيم الممثل بيانيًّا في الشكل أدناه؟



2) يريد هشام أن يشتري معدات لرحلة بمبلغ لا يزيد عن BD 50. إذا كان سعر الصنارة BD 12 ، وسعر الحصيرة BD 6 ، ويريد هشام أن يشتري اثنين على الأقل من كل نوع، فاكتب نظامًا من المتباينات الخطية يُمثّل الموقف، ثم مثّل منطقة الحَلّ بيانيًّا. أعطِ ثلاثة حلول مختلفة للنظام.

3) تشتري علياء عقودًا خرزية بسعر الجملة، وهو BD 400 لكل 50 عقدًا، ويضاف إلى سعر كل عقد BD 3؛ لكتابة حرف من أحرف الهجاء عليه. إذا باعت علياء العقد الواحد بمبلغ BD 20، فكم عقدًا يجب أن تبيع ليكون ربحها BD 225 على الأقل؟

اختبار معياري تراكمي

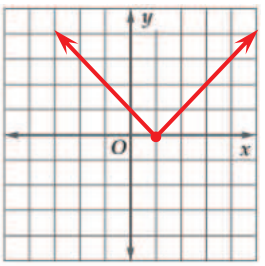
للفصلين 2، 1

أسئلة الاختيار من متعدد

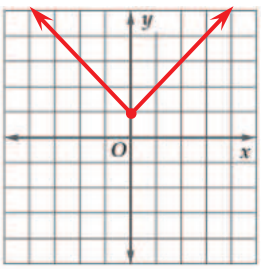
اختر رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممَّا يأتي:

1) أي الأشكال الآتية يُمثل الدالة $f(x)=|x-1|$ ؟

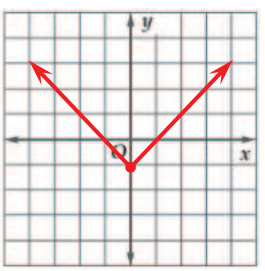
A



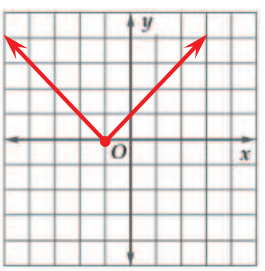
B



C



D



2) ما مجال العلاقة الموضحة بالجدول المجاور ؟

x	y
−3	4
1	−1
2	0
6	−3

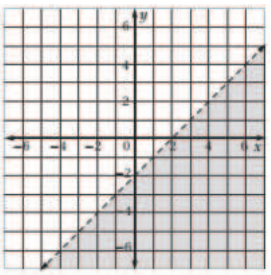
A $\{0, 1, 2, 4, 6\}$

B $\{-3, -1, 0, 4\}$

C $\{-3, 1, 2, 6\}$

D $\{-3, -1\}$

3) **اختيار من متعدد:** أي من النقاط الآتية تحقق المتباينة الممثلة بيانيًّا في الشكل أدناه؟



A $(0, 0)$

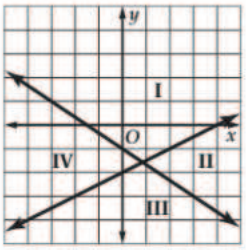
B $(2, 0)$

C $(2, 4)$

D $(4, -2)$

4) منطقة الحَلّ المحتملة لنظام المتباينات الآتي هي:

$$y \le \frac{1}{2}x - 2$$
$$y \le -\frac{2}{3}x - 1$$



A المنطقة I

B المنطقة II

C المنطقة III

D المنطقة IV

5) النقطة التي لا تُمثّل رأسًا لمنطقة الحَلّ المحتملة لنظام المتباينات الخطية

$$x \ge 0, y \ge 0$$
$$y \le -2x + 6$$

هي:

F $(0, 0)$

G $(0, 3)$

H $(0, 6)$

J $(3, 0)$

اختبار معياري تراكمي

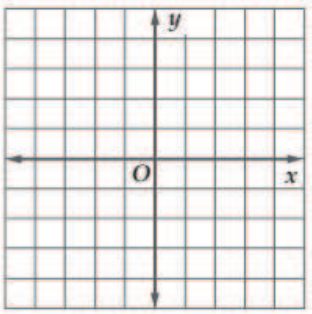
للفصلين 2 ،1

أسئلة مقالية

أسئلة ذات إجابات قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

6) مثّل بيانيًّا الدالة: ؟



$$f(x)=\begin{cases}5 & ,x<4\\ -x-2 & ,-4\le x\le 4\\ 2x-12 & ,x>4\end{cases}$$

7) ما مقطع المحور y للمعادلة $2y=4x+3$ ؟

حِلْ كل معادلة ممّا يأتي:

8) $|x+3|=5$

9) $|2y-1|+7=y$

أوجد مجموعة حَل كل من المتباينات الآتية، ومثلها على خط الأعداد:

10) $-7\le 3x+2<14$

11) $|a|-7>-4$

أسئلة ذات إجابات مطولة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضحًا خطوات الحلّ:

12) يُعد عامل نوعين من أطباق الحلوى، ويحتاج النوع الأول إلى 5 أكواب من الدقيق، وكوبين من السكر. والنوع الثاني يحتاج إلى 5 أكواب من الدقيق، وكوب واحد من السكر. إذا كانت كمية الطحين المتوافرة 40 كوبًا، وكمية السكر المتوافرة 15 كوبًا، وكان ربح النوع الأول BD 1.2، وربح النوع الثاني BD 0.8، فاستعمل هذه المعلومات في الإجابة عمَّا يأتي:

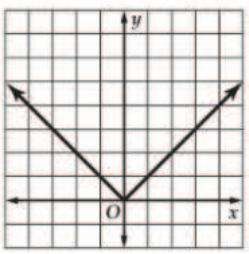
a) اكتب نظامًا من المتباينات الخطية؛ ليُمثّل عدد الأطباق من كل نوع، الذي يستطيع العامل إعداده باستعمال الكميات المتوافرة لديه.

b) مَثّل نظام المتباينات الخطية الذي حصلت عليه في الفرع **(a)** بيانيًّا، واكتب نقاط رؤوس منطقة الحلّ المحتملة.

c) اكتب دالة تُمثّل الربح.

d) ما عدد الأطباق التي يجب أن يصنعها العامل من كل نوع؛ ليكون الربح أكبر ما يمكن، وما مقدار الربح في هذه الحالة؟

13) يُبين الشكل أدناه التمثيل البياني لدالة القيمة المطلقة الأم.



a) اكتب معادلة هذه الدالة.

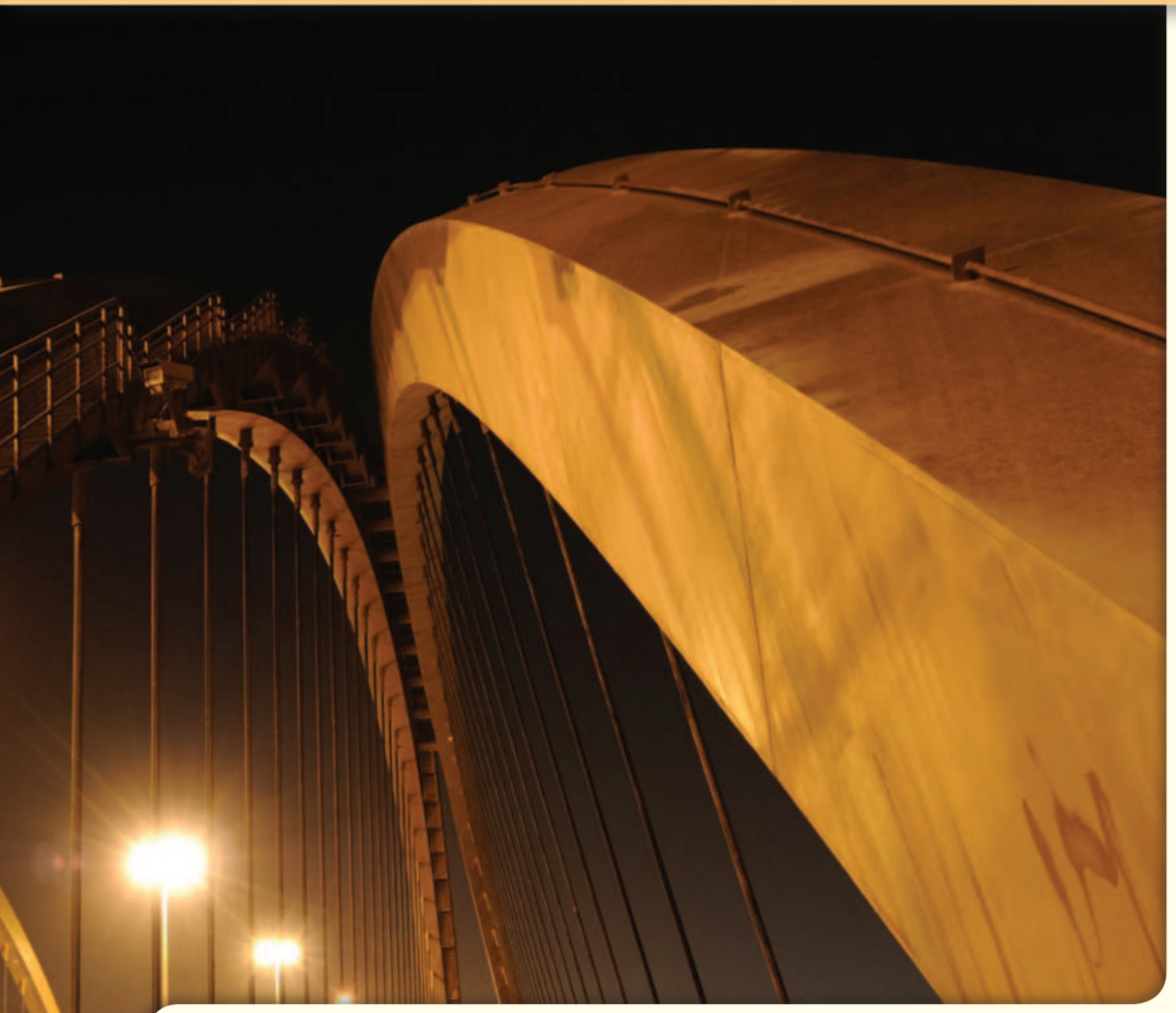
b) إذا أجرينا انعكاسًا للدالة الأم حول المحور x ، ثم أجرينا إزاحة وحدتين إلى أعلى، فما الدالة الناتجة؟.

c) إذا أجرينا إزاحة 3 وحدات إلى اليسار للدالة الأم، ثم وحدة واحدة إلى أسفل، فما الدالة الناتجة؟.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟													
إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فاذهب للدرس ...	2-5	2-3	2-6	2-7	2-8	2-4	2-1	1-2	1-2	1-4	1-4	2-8	2-5

الفصل 3

الدوال التربيعية
Quadratic Functions



فيما سبق

درستُ تمثيل الدوال والمتباينات الخطية بيانيًا.

والآن

الأفكار العامة

- أمثّل الدوال التربيعية بيانيًا.
- أحل المعادلات التربيعية.
- أجري العمليات على الأعداد المركبة.

لماذا؟

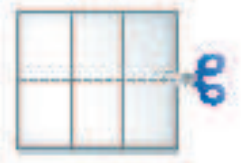
الجسور المعلقة يمكن استعمال الدوال التربيعية؛ لنمذجة ظواهر حقيقية مثل حركة جسم ساقط. كما يمكن استعمال الدوال التربيعية؛ لنمذجة الأشكال والتصميمات المعمارية مثل الأسلاك الداعمة لبعض الجسور المعلقة.

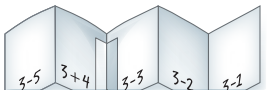
مطويتك

منظم أفكار

الدوال التربيعية: اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك للفصل الثالث حول الدوال التربيعية، ابدأ بورقة أبعادها 21 cm × 28 cm.

1. **اثن** الورقة بعرض 5 cm بصورة موازية للضلع الأطول.
2. **اثن** الورقة بصورة موازية للضلع الأقصر إلى أربعة أقسام متساوية العرض.
3. **ثبّت** الحافتين الطرفيتين للثنية كما يظهر في الشكل أدناه.
4. **عنون** الأقسام الأربعة بالعناوين: الأعداد المركبة، كثيرات الحدود، دوال كثيرات الحدود، معادلات كثيرات الحدود.





التهيئة للفصل الثالث

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة .

البديل 1

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" ؛ لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

إذا كان $f(x) = 2x^2 - 6$, $g(x) = -x^2 + 4x - 4$، فأوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 3-2)

1) $f(1)$
2) $f(4)$
3) $f(0)$
4) $f(-2)$
5) $g(0)$
6) $g(-1)$
7) $g(2)$
8) $g(0.5)$

أسماك: استعمل المعطيات الآتية لحل السؤالين 9, 10 :

يسبح سمك التونة بسرعة ثابتة مقدارها 9 mi/h ، ولا يتوقف عن الحركة حتى نهاية حياته. (مهارة سابقة)

9) اكتب دالة لنمذجة هذا الموقف.

10) أوجد قيمة الدالة لتقدير المسافة التي قطعتها سمكة تونة عمرها سنتان؟

حلِّل كل مقدار مما يأتي تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن قابلًا للتحليل فاكتب عبارة "مقدار أولي".

11) $x^2 + 11x + 30$
12) $x^2 - 13x + 36$
13) $x^2 - x - 56$
14) $x^2 - 5x - 14$
15) $x^2 + x + 2$
16) $x^2 + 10x + 25$
17) $x^2 - 22x + 121$
18) $x^2 - 9$

19) **طول الأرضية:** إذا كانت مساحة أرضية غرفة للمعيشة $(x^2 + 11x + 28)\ m^2$، وكان عرضها $(x + 4)\ m$، فكم مترًا طولها؟

مراجعة سريعة

مثال 1

إذا كان $f(x) = 3x^2 + 2$, $g(x) = 0.5x^2 + 2x - 1$، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

a $f(3)$

الدالة الأصلية: $f(x) = 3x^2 + 2$

بالتعويض عن x بـ 3: $f(3) = 3(3)^2 + 2$

بالتبسيط: $= 27 + 2 = 29$

b $g(-4)$

الدالة الأصلية: $g(x) = 0.5x^2 + 2x - 1$

بالتعويض عن x بـ -4: $g(-4) = 0.5(-4)^2 + 2(-4) - 1$

بالضرب: $= 8 + (-8) - 1$

بالتبسيط: $= -1$

مثال 2

حلّل المقدار $x^2 - x - 2$ تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن قابلًا للتحليل فاكتب عبارة "مقدار أولي".

لإيجاد معاملات الحدود التي تحوي x يجب أن نجد عددين حاصل ضربهما يساوي (-2) ، ومجموعهما يساوي -1.
العددان هما $-2, 1$ ؛ لأن $(1)(-2) = -2, 1 + (-2) = -1$
لذا نعيد كتابة المقدار $x^2 - x - 2$ على النحو الآتي:

المقدار الأصلي: $x^2 - x - 2$

بالتعويض عن x بـ $(x - 2x)$: $= x^2 + x - 2x - 2$

خاصية التجميع: $= (x^2 + x) + (-2x - 2)$

بإخراج العامل المشترك: $= x(x + 1) - 2(x + 1)$

خاصية التوزيع: $= (x + 1)(x - 2)$

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

3-1

تمثيل الدوال التربيعية بيانيًّا

Graphing Quadratic Functions

لماذا؟

شكلت نافورة الملك حمد التي أهداها لشعب البحرين عام 2004 معلمًا مميزًا وبارزًا بين جسر الشيخ عيسى وجسر الشيخ حمد باتجاه محافظة المحرق، ويبلغ ارتفاعها 404 ft، ويمكن تمثيل حركة المياه في النافورة بمعادلات تربيعية. كما يمكنك استعمال التمثيلات البيانية لهذه المعادلات لتوضيح مسار المياه.

الدوال التربيعية درست سابقًا الدوال الخطية، وهناك أيضًا **دوال غير خطية** تختلف أشكال تمثيلاتها البيانية. **فالدوال التربيعية** مثلا هي دوال غير خطية، ويسمى التمثيل البياني للدالة التربيعية **قطعًا مكافئًا**

فيما سبق

درستُ دوال القيمة المطلقة والتحويلات الهندسية في التمثيلات البيانية.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أمثّل الدوال التربيعية بيانيًا.
- أجد القيم العظمى والصغرى للدوال التربيعية وأفسرها.

المفردات الأساسية

الدالة غير الخطية nonlinear function

الدالة التربيعية quadratic function

الصورة القياسية standard form

القطع المكافئ parabola

محور التماثل axis of symmetry

الرأس vertex

القيمة الصغرى minimum value

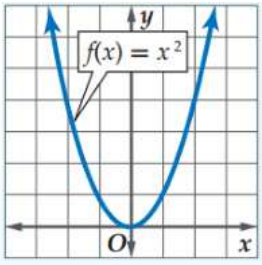
القيمة العظمى maximum value

متماثل symmetry

www.obeikaneducation.com

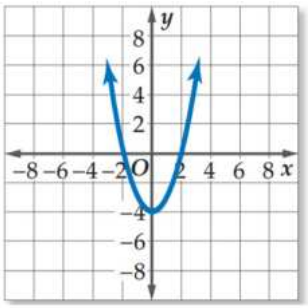
مفهوم أساسي — الدوال التربيعية

أضف إلى مطويتك



الدالة الأم	$f(x) = x^2$
شكل التمثيل البياني	قطع مكافئ
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية R
المدى	$[0,\infty)$ أو $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$
المقطعان	$x=0$, $y=0$

مثال 1 — الدوال التربيعية



استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2 - 4$ لتحديد مجال الدالة ومداها.

مقطع بما أن الدالة معرفة عند جميع قيم x

إذن المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

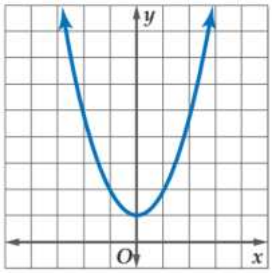
المدى هو $[-4,\infty)$

لاحظ أن التمثيل البياني للدالة هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$ بمقدار 4 وحدات إلى الأسفل

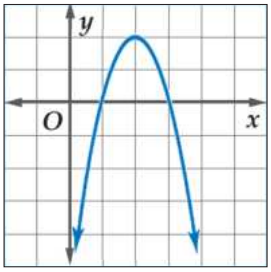
تأكد

حدد مجال ومدى الدوال التي لها التمثيل البياني التالي:

(1A)



(1B)



BH MT10 SE1 CH03.indd 128 9/5/23 11:21 AM

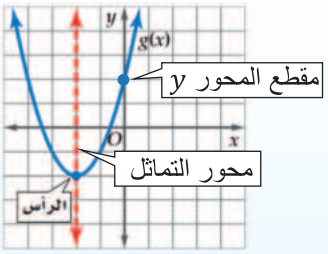
خصائص الدوال التربيعية يُمكن كتابة الدالة التربيعية على الصورة $f(x)=ax^2+bx+c$، حيث $a\neq 0$، وتُسمى هذه الصورة **بالصورة القياسية** للدالة التربيعية، وتتماثل الدوال التربيعية حول خط يتوسطها يُسمى **محور التماثل**، ويقطع التمثيل البياني للدالة في نقطة واحدة تسمى **الرأس**.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خصائص الدوال التربيعية

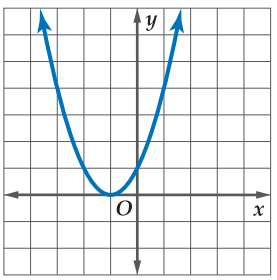
الصورة القياسية	$g(x) = ax^2 + bx + c$
شكل محور التماثل	$x = -\frac{b}{2a}$
إحداثي نقطة الرأس	$\left(\frac{-b}{2a}, g\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$
مقطع المحور y	c



مثال 2 تحديد خصائص القطع المكافئ من تمثيله البياني

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، ومقطع المحور y لكل تمثيل بياني مما يأتي:

(a)

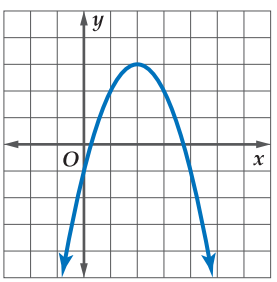


الخطوة 1 أوجد الرأس.
بما أن القطع المكافئ مفتوح إلى أعلى، فالرأس يمثل النقطة الصغرى له، وهي $(-1, 0)$.

الخطوة 2 أوجد معادلة محور التماثل
بما أن محور التماثل هو المستقيم الّذي يمر بالرأس، ويقسم القطع المكافئ إلى نصفين متطابقين، لذا فإن معادلة محور التماثل هي $x = -1$.

الخطوة 3 أوجد مقطع المحور y
بما أن مقطع المحور y هو النقطة التي يتقاطع فيها القطع المكافئ مع المحور y، وهي النقطة $(0, 1)$. لذا، فإن مقطع المحور y هو 1.

(b)



الخطوة 1 أوجد الرأس.
بما أن القطع المكافئ مفتوح إلى أسفل، فالرأس يمثّل النقطة العظمى له، وهي $(2, 3)$.

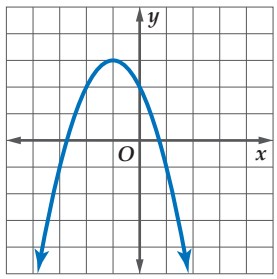
الخطوة 2 أوجد معادلة محور التماثل.
بما أن محور التماثل هو المستقيم الّذي يمر بالرأس، ويقسم القطع المكافئ إلى نصفين متطابقين؛ لذا تكون معادلة محور التماثل هي $x = 2$.

الخطوة 3 أوجد مقطع المحور y.
بما أن مقطع المحور y هو النقطة التي يتقاطع فيها القطع المكافئ مع المحور y، وهي النقطة $(0, -1)$؛ لذا يكون مقطع المحور y هو -1.

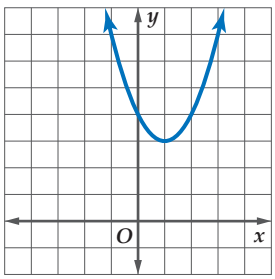
تأكد

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، ومقطع المحور y لكل تمثيل بياني مما يأتي:

(2A



(2B



مثال 3 تحديد خصائص القطع المكافئ من قاعدة دالته

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل ومقطع المحور y لكل دالة مما يأتي:

(a $y = 2x^2 + 4x - 3$

صيغة معادلة محور التماثل $x = -\frac{b}{2a}$

$a = 2, b = 4$ $x = -\frac{4}{2 \times 2}$

بالتبسيط $x = -1$

معادلة محور التماثل هي $x = -1$.

ولإيجاد إحداثيي الرأس، خذ القيمة الناتجة عن معادلة محور التماثل، واعتبرها الإحداثي x لرأس القطع المكافئ، ثم عوّضها في معادلة القطع المكافئ لإيجاد الإحداثي y.

المعادلة الأصلية $y = 2x^2 + 4x - 3$

$x = -1$ $= 2(-1)^2 + 4(-1) - 3$

بالتبسيط $= -5$

إذن، الرأس هو $(-1, -5)$.

مقطع المحور y يقع دائمًا عند النقطة $(0, c)$. لذلك، فإن مقطع المحور y هو -3

(b $y = -x^2 + 6x + 4$

صيغة معادلة محور التماثل $x = -\frac{b}{2a}$

$a = -1, b = 6$ $x = -\frac{6}{2(-1)}$

بالتبسيط $x = 3$

معادلة محور التماثل هي $x = 3$.

المعادلة الأصلية $y = -x^2 + 6x + 4$

$x = 3$ $= -(3)^2 + 6(3) + 4$

بالتبسيط $= 13$

الرأس هو $(3, 13)$.

مقطع المحور y هو 4.

إرشادات للدراسة

المقطع الصادي

الإحداثي الصادي للمقطع الصادي هو الحد الثابت (c) للدالة التربيعية في الصورة القياسية

تأكد

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل ومقطع المحور y لكل دالة مما يأتي:

(3A $y = -3x^2 + 6x - 5$

(3B $y = 2x^2 + 2x + 2$

BH_MT10_SE1_CH03.indd 130 9/5/23 11:15 AM

سوف تتعلم كيف تحدد إن كان القطع المكافئ مفتوح إلى أعلى أو إلى أسفل، وإذا كان الرأس يمثّل نقطة صغرى أو نقطة عظمى.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

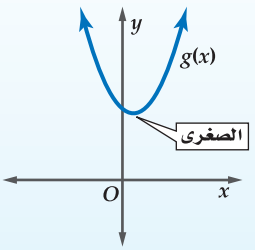
القيمة العظمى و الصغرى

التعبير اللفظي يكون التمثيل البياني للدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، حيث $a \neq 0$ ،

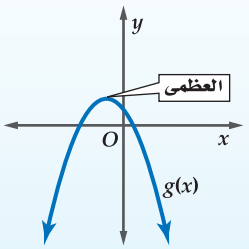
- مفتوحًا إلى أعلى وله قيمة صغرى عندما $a > 0$.
- مفتوحًا إلى أسفل وله قيمة عظمى عندما $a < 0$.
- مدى الدالة التربيعية هو جميع الأعداد الحقيقية التي أكبر من أو تساوي القيمة الصغرى، أو جميع الأعداد الحقيقية التي أصغر من أو تساوي القيمة العظمى.

أمثلة

a موجبة



a سالبة



مثال 4

القيم العظمى أو الصغرى

لتكن $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$ ، فأجب عما يأتي:

a) حدّد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

في الدالة $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$، $a = -2, b = -4, c = 6$.

بما أن a عدد سالب، فالتمثيل البياني يكون مفتوحًا إلى أسفل، ويكون للدالة قيمة عظمى.

b) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة.

القيمة العظمى هي الإحداثي y للرأس.

الإحداثي x للرأس هو $x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2(-2)} = -1$

الدالة الأصلية $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$

$x = -1$ $f(-1) = -2(-1)^2 - 4(-1) + 6$

بالتبسيط $f(-1) = 8$

إذن القيمة العظمى تساوي 8

c) حدد مجال الدالة ومداها.

المجال هو جميع الأعداد الحقيقية، والمدى هو جميع الأعداد الحقيقية التي أصغر من أو تساوي القيمة العظمى، أي هو $\{y \mid y \leq 8\}$.

تأكد

لتكن $g(x) = 2x^2 - 4x - 1$ ، فأجب عما يأتي:

4A) حدّد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

4B) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة.

4C) حدد مجال الدالة ومداها.

تنبيه!

القيم الصغرى والقيم العظمى

لا تنسَ إيجاد كلا الإحداثيين السيني والصادي للرأس (x, y)، حيث إن القيمة الصغرى أو القيمة العظمى تمثّل الإحداثي الصادي له.

إرشادات للدراسة

المجال والمدى

مجال الدالة التربيعية هو مجموعة الأعداد الحقيقية، بينما المدى هو جميع الأعداد الحقيقة الأكبر من القيمة الصغرى أو تساويها، أو جميع الأعداد الحقيقية الأقل من القيمة العظمى أو تساويها.

يمكنك استعمال خصائص الدوال التربيعية وجدول قيم لتمثيل الدالة التربيعية

مثال 5 تمثيل الدالة التربيعية

إذا كانت $f(x) = x^2 + 4x - 3$، فأجب عما يأتي:

a) أوجد مقطع المحور y، ومعادلة محور التماثل والإحداثي x لرأس القطع المكافئ.

الدالة على الصورة $f(x) = ax^2 + bx + c$؛ لذا نحدد قيم a, b, c.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$f(x) = 1x^2 + 4x - 3 \quad \rightarrow \quad a = 1, b = 4, c = -3$$

مقطع المحور y يساوي -3، ولإيجاد معادلة محور التماثل نستعمل a, b.

معادلة محور التماثل $\quad x = -\frac{b}{2a}$

$a = 1, b = 4$ $\quad = -\frac{4}{2(1)}$

بالتبسيط $\quad = -2$

معادلة محور التماثل هي $x = -2$؛ لذا الإحداثي x لرأس القطع هو -2

b) كوّن جدولًا لبعض قيم x، على أن يتوسط فيه الإحداثي x لرأس القطع المكافئ هذه القيم.

اختر بعض القيم لِـ x بحيث يكون بعضها أقل من -2 والبعض الآخر أكبر من -2؛ لتتأكد أن النقاط التي تقع على جانبي محور التماثل قد تم تمثيلها.

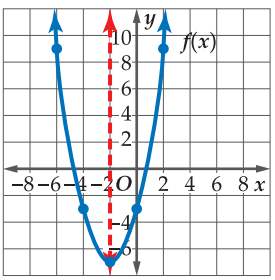
x	$x^2 + 4x - 3$	$f(x)$	$(x, f(x))$
-6	$(-6)^2 + 4(-6) - 3$	9	$(-6, 9)$
-4	$(-4)^2 + 4(-4) - 3$	-3	$(-4, -3)$
-2	$(-2)^2 + 4(-2) - 3$	-7	$(-2, -7)$
0	$(0)^2 + 4(0) - 3$	-3	$(0, -3)$
2	$(2)^2 + 4(2) - 3$	9	$(2, 9)$

رأس القطع

c) استعمل المعلومات التي حصلت عليها لتمثيل الدالة التربيعية.

عيّن رأس القطع ومقطع المحور y، والنقاط الموجودة في الجدول، ثم صل بينها بمنحنى ممهد مناسب.

وللتحقق ارسم محور التماثل $x = -2$ كمستقيم متقطع، وتأكد أن تمثيل القطع المكافئ متماثل حوله .



تأكد

5) إذا كانت $f(x) = -5x^2 - 10x + 6$، فأجب عما يأتي:

A) أوجد مقطع المحور y، ومعادلة محور التماثل، والإحداثي x لرأس القطع المكافئ.

B) كوّن جدولًا لبعض قيم x، على أن يتوسط فيه الإحداثي x لرأس القطع المكافئ لهذه القيم.

C) استعمل المعلومات التي حصلت عليها لتمثيل الدالة التربيعية.

عندما تستعمل الدوال التربيعية لنمذجة مواقف من واقع الحياة، فإن قيمها العظمى أو الصغرى يكون لها معنى حقيقي مرتبط بالحياة الواقعية.

مثال 6 من واقع الحياة — استعمال التمثيلات البيانية للدوال التربيعية

فيزياء: حضر طلاب مدرسة فيلمًا وثائقيًّا لإطلاق نموذج صاروخ، حيث يمكن تمثيل ارتفاع الصاروخ عن الأرض بالأقدام بعد x ثانية بالدالة $g(x) = -13x^2 + 130x + 312$.

a) مثّل الدالة بيانيًّا.

معادلة محور التماثل $x = -\frac{b}{2a}$

$a = -13, b = 130$ $x = -\frac{130}{2(-13)} = 5$

بما أن معادلة محور التماثل $x = 5$؛ لذا فالإحداثي x للرأس هو 5

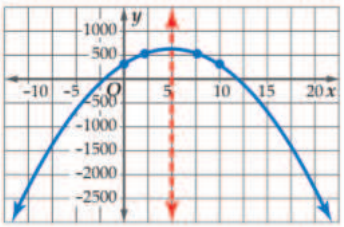
المعادلة الأصلية $y = -13x^2 + 130x + 312$

$x = 5$ $= -13\ (5)^2 + 130\ (5) + 312$

بالتبسيط $= -325 + 650 + 312 = 637$

الرأس هو $(5, 637)$.

ولتجد نقطة أخرى، اختر $x = 0$ وعوّض ذلك في الدالة الأصلية، فتكون النقطة الجديدة هي $(0, 312)$، وتكون النقطة المقابلة لها على الطرف الآخر لمحور التماثل هي $(10, 312)$.



كرّر هذه العملية واختر $x = 2$ لتحصل على النقطة $(2, 520)$، وتكون النقطة المقابلة لها $(8, 520)$، ثم صل بين هذه النقاط بمنحنى ممهد.

b) ما الارتفاع الّذي أُطلق منه الصاروخ؟

أُطلق الصاروخ عندما كان الزمن صفرًا، أو عند مقطع المحور y للدالة، أيْ من على ارتفاع 312 ft عن الأرض.

c) ما أقصى ارتفاع يصله الصاروخ؟

القيمة العظمى للارتفاع تقع عند الرأس. لذا، يصل الصاروخ إلى أقصى ارتفاع له 637 ft بعد خمس ثوانٍ من بدء الانطلاق.

لاحظ أن: حركة الصاروخ الفعلية تمثل جزء من منحنى الدالة التربيعية حيث $x \geq 0$ (الزمن)، $g(x) \geq 0$ (الارتفاع)

تأكد

6) رمي الرمح: يشارك علي في مسابقة رمي الرمح، ويمكن تمثيل ارتفاع الرمح (y) بالأقدام بعد (x) ثانية، بالمعادلة $y = -16x^2 + 64x + 6$.

A) مثّل مسار هذا الرمح بيانيًّا.

B) ما الارتفاع الّذي أُطلق منه الرمح؟

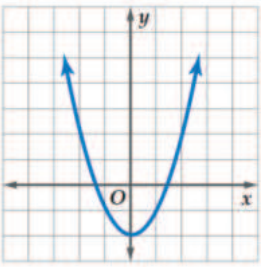
C) ما أقصى ارتفاع يصله الرمح؟

تأكد من فهمك

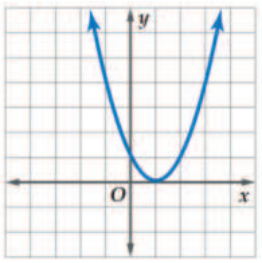
مثال 1
صفحة 128

حدد مجال ومدى الدوال التي لها التمثيل البياني التالي:

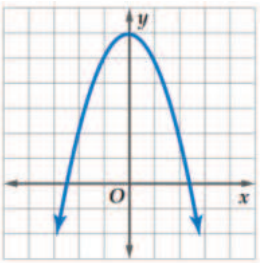
1)



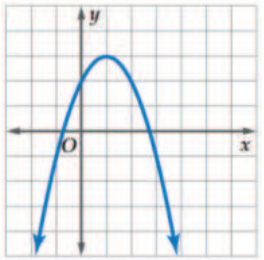
2)



3)



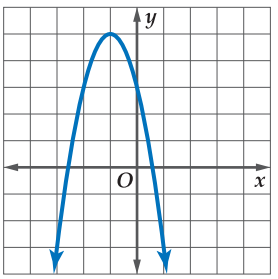
4)



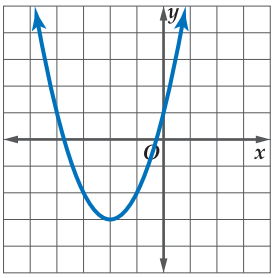
مثال 2
صفحة 129

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، ومقطع المحور y لكل تمثيل بياني مما يأتي:

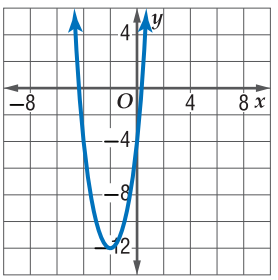
5)



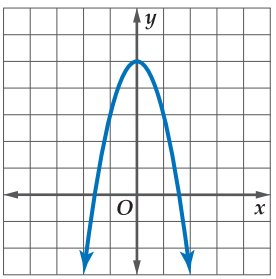
6)



7)



8)



مثال 3
صفحة 130

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، ومقطع المحور y لكل تمثيل بياني مما يأتي:

9) $y = -3x^2 + 6x - 1$

10) $y = -x^2 + 2x + 1$

11) $y = x^2 - 4x + 5$

12) $y = 4x^2 - 8x + 9$

مثال 4
صفحة 131

في الأسئلة 13–18 أجب عما يأتي:

a) حدّد ما إذا كان للدالة قيمة صغرى أو قيمة عظمى.

b) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

c) حدِّد مجال الدالة ومداها.

13 $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

14 $f(x) = -x^2 - 2x + 2$

15 $f(x) = -3x^2 + 6x + 3$

16 $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$

17 $f(x) = x^2 + 3x - 12$

18 $f(x) = 3x^2 + 8x + 5$

مثال 5
صفحة 132

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

19 $f(x) = -3x^2 + 6x + 3$

20 $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

21 $f(x) = 2x^2 - 8x - 4$

22 $f(x) = 3x^2 - 6x - 1$

23 $f(x) = 3x^2$

24 $f(x) = -6x^2$

25 $f(x) = x^2 - 4x$

26 $f(x) = -x^2 - 3x + 4$

مثال 6
صفحة 133

27 **كرة:** يقذف ياسر كرة في الهواء، وفق المعادلة $y = -16x^2 + 16x + 5$، حيث تمثِّل y ارتفاع الكرة بالأقدام بعد x ثانية.

a) مثّل الدالة بيانيًّا.

b) ما الارتفاع الّذي قُذفت منه الكرة؟

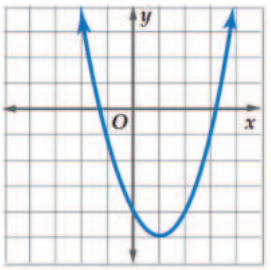
c) ما أقصى ارتفاع تصله الكرة؟

تدرب وحل المسائل

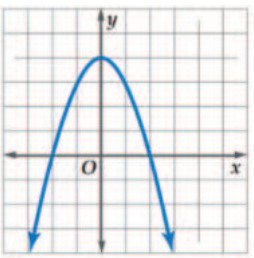
مثال 1
صفحة 128

حدد مجال ومدى الدوال التي لها التمثيل البياني التالي:

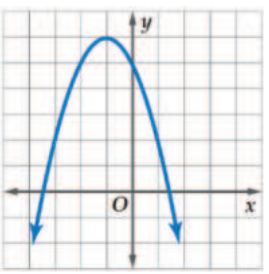
28



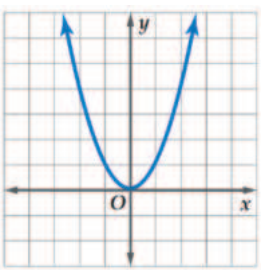
29



30



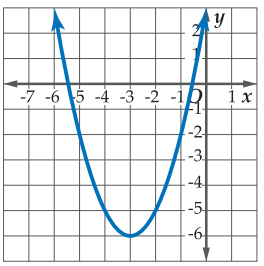
31



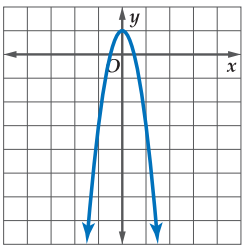
مثال 2
صفحة 129

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، ومقطع المحور y لكل تمثيل بياني مما يأتي:

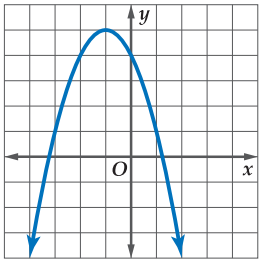
(32



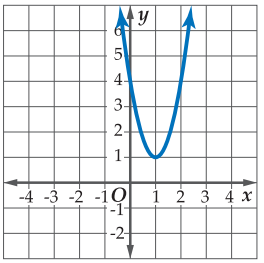
(33



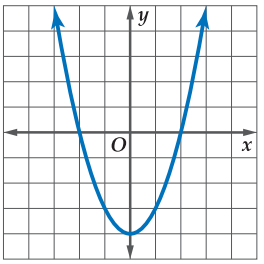
(34



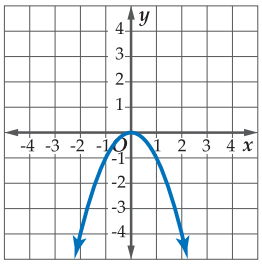
(35



(36



(37



مثال 3
صفحة 130

أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل ومقطع المحور y لكل دالة مما يأتي:

(38 $y = x^2 + 8x + 10$

(39 $y = 2x^2 + 12x + 10$

(40 $y = -3x^2 - 6x + 7$

(41 $y = -x^2 - 6x - 5$

(42 $y = 5x^2 + 20x + 10$

(43 $y = 7x^2 - 28x + 14$

(44 $y = 2x^2 - 12x + 6$

(45 $y = -3x^2 + 6x - 18$

(46 $y = -x^2 + 10x - 13$

مثال 4
صفحة 131

في الأسئلة 57–47 أجب عما يأتي:

a) حدّد ما إذا كان للدالة قيمة صغرى أو قيمة عظمى.

b) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

c) حدِّد مجال الدالة ومداها؟

(47 $y = -2x^2 - 8x + 1$

(48 $y = x^2 + 4x - 5$

(49 $y = 3x^2 + 18x - 21$

(50 $y = -2x^2 - 16x + 18$

(51 $y = -x^2 - 14x - 16$

(52 $y = 4x^2 + 40x + 44$

(53 $y = -x^2 - 6x - 5$

(54 $y = 2x^2 + 4x + 6$

(55 $y = -3x^2 - 12x - 9$

(56 $f(x) = 5x^2$

(57 $f(x) = 15 - 5x^2$

مثال 5
صفحة 132

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

(58 $y = -3x^2 + 6x - 4$

(59 $y = -2x^2 - 4x - 3$

(60 $y = -2x^2 - 8x + 2$

(61 $y = x^2 + 6x - 6$

(62 $y = x^2 - 2x + 2$

(63 $y = 3x^2 - 12x + 5$

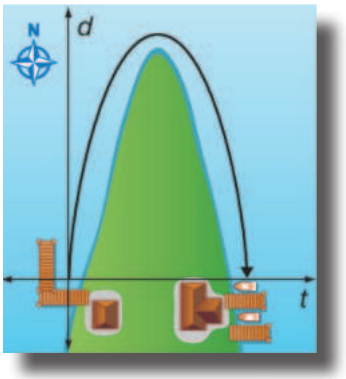
(64 $f(x) = 4x^2$

(65 $f(x) = x^2 - 5$

(66 $f(x) = x^2 + 3$

(67 $f(x) = -3x^2 + 5$

مثال 6
صفحة 133



68) فيزياء: استعمل المعلومات الآتية للإجابة عن الفروع a , b, c:

أطلق جسم إلى أعلى من قمة برج ارتفاعه 200 ft بسرعة مقدارها 80 ft/sec. فإذا كان ارتفاع الجسم $h(t)$ بعد زمن مقداره t ثانية من إطلاقه يُعطى بالعلاقة $h(t) = -16t^2 + 80t + 200$.

a) فما مجال $h(t)$ ؟ وما مداها؟ وما القيم المعقولة لكل منهما في هذه المسألة؟

b) أوجد أقصى ارتفاع يمكن أن يصل إليه الجسم، والزمن اللازم لذلك.

c) فسّر ماذا يعني مقطع المحور y في سياق هذه المسألة.

69) جمع التبرعات: استعمل المعلومات الآتية للإجابة عن الفرعين a , b :

حضر 300 شخص لإحدى دور الأيتام لمشاهدة عرض مسرحي خيري في السنة الماضية. وكان سعر تذكرة الدخول 8 BD. وقد قدّر المشرف أن عدد الحضور سيقل نحو 20 شخصًا لكل زيادة مقدارها 1 BD في سعر التذكرة.

a) ماسعر التذكرة إذا أردنا الحصول على أكبر دخل ممكن؟

b) إذا زادت دار الأيتام سعر التذكرة إلى هذا السعر (أي السعر الذي أوجدته في الفرع a) ، فما مقدارالدخل المتوقع؟

الربط مع واقع الحياة

تدعم بعض المباني الحديثة بأقواس من الفولاذ الصلب من الداخل ومن الخارج مما يزيد من ثباتها .

70) عمارة: استعمل المعلومات الآتية للإجابة عن الفرعين a , b :

يمكن نمذجة كل قوس من الأقواس الداعمة لبعض المباني الحديثة بالدالة الآتية:
$h(x) = -0.025x^2 + 2x$ ، حيث $h(x)$ هو ارتفاع القوس بالأمتار.

a) اكتب معادلة محور التماثل، وأوجد إحداثيي رأس القطع للدالة h .

b) ما أقصى ارتفاع للقوس بحسب هذا النموذج؟

71) كرة قدم: قذف حارس المرمى الكرة من مستوى سطح الأرض إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 90 ft /sec، والدالة $h(n) = -16n^2 + 90n$ تمثّل ارتفاع الكرة بعد (n) ثانية.

a) ما ارتفاع الكرة بعد ثانية واحدة؟

b) متى تكون الكرة على ارتفاع 126 ft؟

c) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟

72) الاستدلال: إذا كانت $f(x) = x^2 - 9$ فأجب عما يأتي:

a) ما مجال $f(x)$ ؟

b) ما مدى $f(x)$ ؟

c) ما قيم x التي تجعل $f(x)$ سالبة؟

d) ما مجال ومدى الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ عندما يكون x عددًا حقيقيًّا؟

73) **تمثيلات متعددة:** لتكن $f(x) = x^2 - 4x + 8$, $g(x) = 4x^2 - 4x + 8$.

a) جدولة: كوّن جدولًا للقيم لكل من $f(x)$, $g(x)$ إذا كانت $-4 \le x \le 4$.

b) تمثيل بياني: مثّل كلًّا من $f(x), g(x)$ بيانيًّا.

c) تعبير لفظي: وضّح الفرق بين التمثيلين البيانيين لِـ $f(x), g(x)$. وما القيمة التي تغيرت وأحدثت هذا الفرق؟

d) تحليل: توقّع التمثيل البياني لِـ $h(x) = 0.25x^2 - 4x + 8$، بتمثيل الدوال الثلاث إذا كانت $-10 \le x \le 10$.

مسائل مهارات التفكير العليا

74) **مسألة مفتوحة:** اكتب دالة تربيعية، معادلة محور التماثل لتمثيلها البياني هي $x = -\frac{3}{8}$، ملخصًا خطوات حلك.

75) **اكتشف الخطأ:** تحاول عبير ومنى إيجاد معادلة محور التماثل لقطع مكافئ، أيهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.

منى

$y = x^2 - 4x + 6$

$x = -\frac{b}{2a}$

$x = -\frac{4}{2(-1)}$

$x = 2$

عبير

$y = x^2 - 4x + 6$

$x = -\frac{b}{2a}$

$x = -\frac{-4}{2(-1)}$

$x = -2$

76) **تحدٍّ:** يُبيّن الجدول المجاور مجموعة نقاط على منحنى دالة تربيعية.

x	y
-20	-377
c	-13
-5	-2
-1	22
$d - 1$	a
5	$a - 24$
7	$b-$
15	-202
$14 - c$	-377

a) أوجد قيم كل من a, b, c, d.

b) ما الإحداثي x لرأس القطع المكافئ؟

c) هل للدالة قيمة عظمى أم صغرى؟

77) **مسألة مفتوحة:** أعط مثالًا لدالة تربيعية لكل ما يأتي:

a) قيمتها العظمى 8.

b) قيمتها الصغرى -4.

c) نقطة رأس القطع $(-2, 6)$.

78) **التبرير** اكتب مثالًا مضادًّا تبين فيه خطأ الجملة الآتية: «رأس القطع المكافئ هو دائمًا القيمة الصغرى للتمثيل البياني».

79) **اكتب:** صف كيف تُميّز ما إذا كانت الدالة تربيعية، وكيف تحدد إن كان لها قيمة عظمى أم صغرى؟

تدريب على اختبار معياري

80) أيّ المعادلات الآتية يكون تمثيلها البياني متماثلًا حول المحور y؟

A) $y = x^2 + 3x - 1$

B) $y = -x^2 + x$

C) $y = 6x^2 + 9$

D) $y = 3x^2 - 3x + 1$

81) إذا كانت $f(x) = 3x^2 - 9 + 6x$، فأي من العبارات الآتية صحيحة:

A) للدالة قيمة عظمى تساوي 12

B) للدالة قيمة عظمى تساوي -12

C) للدالة قيمة صغرى تساوي 12

D) للدالة قيمة صغرى تساوي -12

مراجعة تراكمية

82) صناعة: تقوم جمعية بصنع حقائب جلدية وحقائب من القماش وتسويقها لصالح ذوي الاحتياجات الخاصة، فإذا كانت مقابض الحقائب جميعها من الجلد، وتحتاج حقيبة القماش إلى 4 m من القماش و1 m من الجلد، بينما تحتاج حقيبة الجلد إلى 3 m من الجلد و 2 m من القماش، وكان لدى الجمعية 56 m من الجلد، 104 m من القماش، فأجب عمَّا يأتي: (الدرس 7-2)

a) إذا مثلت c عدد حقائب القماش، و l عدد الحقائب الجلدية. فاكتب نظام متباينات لعدد الحقائب التي يمكن صنعها.

b) مثّل النظام بيانيًّا موضحًا منطقة الحل.

c) حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

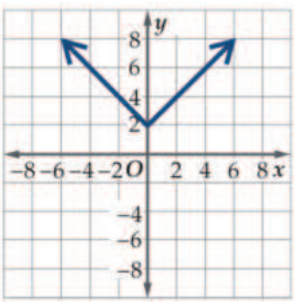
d) إذا قررت الجمعية أن تبيع حقيبة القماش بمبلغ BD 2، والحقيبة الجلدية بمبلغ BD 3.5، فاكتب دالة تمثل مجموع عائدات الجمعية من الحقائب.

e) ما العدد الّذي يجب صنعه من كل نوع للحصول على أكبر عائد؟

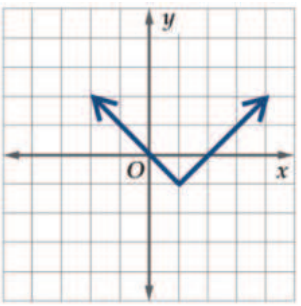
f) ما أكبر عائد يمكن أن تحققه الجمعية؟

اكتب معادلة (قاعدة) دالة القيمة المطلقة التي لها التمثيل البياني في كل شكل أدناه:

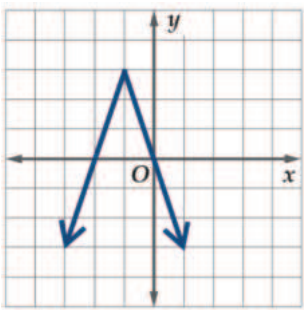
83)



84)



85)



صِف التحويلات الهندسية في التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

86) $f(x)=-|x-1|$

87) $f(x)=|x+4|-5$

88) $f(x)=2|x|+3$

مراجعة المتطلبات السابقة

حِلْ كل معادلة مما يأتي:

89) $3x-7=11$

90) $0.5x+2=10$

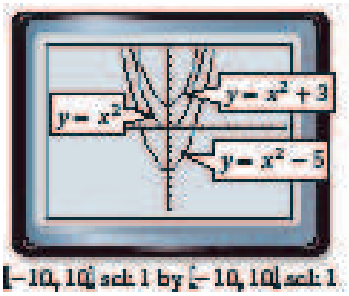
91) $x^2-16=0$

معمل الآلة الحاسبة البيانية:
عائلة القطوع المكافئة

صيغة الرأس للدّالة التربيعية هي $y = a(x - h)^2 + k$، وتغيير قيم a, h, k ينتج عنه قطوع مكافئة مختلفة في عائلة الدّوال التربيعية، والدّالة الأم لعائلة القطوع المكافئة هي $y = x^2$.

يمكنك استعمال الآلة الحاسبة البيانية TI–83/84 لتحليل الأثر الناتج من تغيير كل قيمة من a, h, k.

النشاط 1



مثّل مجموعة المعادلات الآتية على الشاشة نفسها بالحجم القياسي للعرض.

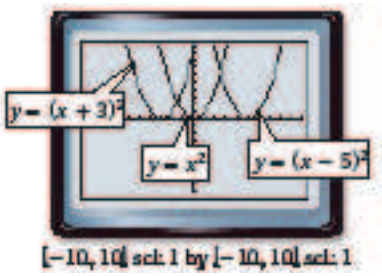
$$y = x^2, y = x^2 + 3, y = x^2 - 5$$

ثم صف أوجه التشابه والاختلاف بين تمثيلاتها البيانية.

يُبيّن النشاط 1 كيف أن تغيير قيمة k في المعادلة $y = a(x - h)^2 + k$ يحرّك أو يزيح المنحنى رأسيًّا على طول المحور y. فإذا كانت $k > 0$، فإن المنحنى يتحرك $|k|$ وحدة إلى أعلى، وإذا كانت $k < 0$، فإن المنحنى يتحرك $|k|$ وحدة إلى أسفل.

بيِّن كيف يؤثر تغيير قيمة h في منحنى $y = (x - h)^2$ مقارنة بمنحنى $y = x^2$.

النشاط 2



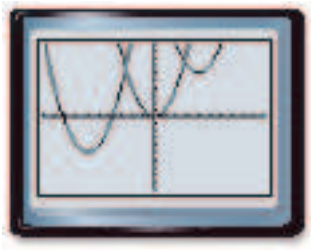
مثّل مجموعة المعادلات الآتية على الشاشة نفسها بالحجم القياسي للعرض

$$y = x^2, y = (x + 3)^2, y = (x - 5)^2$$

ثم صف أوجه التشابه والاختلاف بين تمثيلاتها البيانية.

يُبيّن النشاط 2 أن تغيير قيمة h في المعادلة $y = a(x - h)^2 + k$ يحرك المنحنى أفقيًّا على طول المحور x. فإذا كانت $h > 0$، فإن المنحنى يتحرك إلى اليمين $|k|$ وحدة، وإذا كانت $h < 0$، فإن المنحنى يتحرك إلى اليسار $|k|$ وحدة.

النشاط 3



مثّل مجموعة المعادلات الآتية على الشاشة نفسها بالحجم القياسي للعرض.

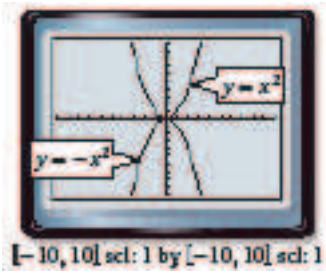
$$y = x^2, y = (x + 6)^2 - 5, y = (x - 4)^2 + 6$$

ثم صف أوجه التشابه والاختلاف بين المنحنيات.

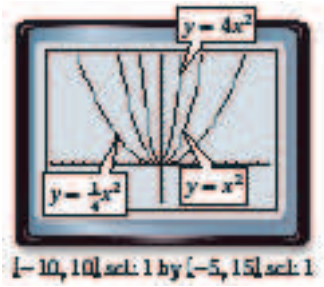
النشاط 4

مَثّل كل مجموعة من المعادلات على الشاشة نفسها، وبيّن أوجه التشابه والاختلاف بين تمثيلاتها البيانية.

a) $y = x^2, y = -x^2$



b) $y = x^2, y = 4x^2, y = \frac{1}{4}x^2$



يمكن أن يؤثر تغير قيم a في المعادلة $y = a(x-h)^2 + k$ في اتجاه فتحة القطع وشكله. فإذا كانت $a > 0$، يكون القطع المكافئ مفتوحًا إلى أعلى. وإذا كانت $a < 0$ يكون القطع المكافئ مفتوحًا إلى أسفل أو منعكسًا حول المحور x. وإذا كانت $|a| > 1$، فإن التمثيل البياني أضيق من التمثيل البياني $y = x^2$. وإذا كانت $|a| < 1$، فإن التمثيل البياني أوسع من التمثيل البياني $y = x^2$. وهكذا، ينتج عن التغيّر في القيمة المطلقة لـ a توسيع أو تضييق للتمثيل البياني $y = x^2$.

حلل النتائج

ليكن $y = a(x-h)^2 + k$ حيث $a \neq 0$.

1) كيف يؤثر التغير في قيمة h على المنحنى؟ أعط مثالًا على ذلك.

2) كيف يؤثر التغير في قيمة k على المنحنى؟ أعط مثالًا على ذلك.

3) كيف يؤثر استعمال $-a$ بدلًا من a على المنحنى؟ أعط مثالًا على ذلك.

افحص كل زوج من المعادلات الآتية وتنبأ بالتشابه والاختلاف بين تمثيلاتها البيانية. (استعمل الآلة الحاسبة البيانية للتحقق من إجابتك)، واكتب جملة أو اثنتين تقارن فيهما بين التمثيلات البيانية:

5) $y = x^2, y = x^2 + 2.5$

6) $y = x^2, y = 3x^2$

8) $y = x^2, y = (x+3)^2$

10) $y = x^2, y = (x-7)^2$

12) $y = x^2, y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$

14) $y = 3(x+2)^2 - 1$

$y = 6(x+2)^2 - 1$

5) $y = -x^2, y = x^2 - 9$

7) $y = x^2, y = -6x^2$

9) $y = -\frac{1}{3}x^2, y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$

11) $y = x^2, y = 3(x+4)^2 - 7$

13) $y = (x+3)^2 - 2, y = (x+3)^2 + 5$

15) $y = 4(x-2)^2 - 3$

$y = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 1$

3-2 التحويلات الهندسية في التمثيلات البيانية للدوال التربيعية

Transformations with Quadratic Functions

فيما سبق

درست التحويلات الهندسية في التمثيلات البيانية لبعض الدوال الأم.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أكتب معادلة دالة تربيعية بالصيغة: $y = a(x - h)^2 + k$
- أستعمل التحويلات الهندسية في تمثيل الدوال التربيعية المكتوبة بالصيغة: $y = a(x - h)^2 + k$

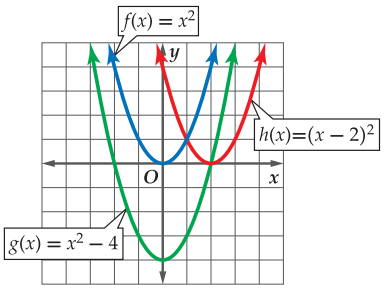
المفردات الأساسية

صيغة الرأس

vertex form

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



تذكر أن عائلة التمثيلات البيانية عبارة عن مجموعة من التمثيلات البيانية التي تعرض واحدة أو أكثر من الخصائص المتشابهة وتوضحها. التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ يسمّى التمثيل الأم لعائلة الدّوال التربيعية، ويمكن إيجاد تمثيلات بيانية للدّوال التربيعية الأخرى مثل $g(x) = x^2 - 4$ ، $h(x) = (x - 2)^2$، عن طريق استعمال أحد التحويلات الهندسية وذلك بإزاحة (انسحاب) التمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$.

كتابة معادلات الدوال التربيعية بصيغة الرأس يمكن كتابة معادلة كل دالة مما سبق ذكره في فقرة "لماذا؟" على الصورة $y = a(x - h)^2 + k$، حيث (h, k) هو رأس القطع المكافئ. و $x = h$ هو محور التماثل، و a تحدد شكل القطع المكافئ واتجاه فتحته وتسمى هذه الصيغة صيغة الرأس للدّالة التربيعية.

إذا أُعطيت معادلة دالة تربيعية بالصيغة $y = ax^2 + bx + c$ فإنك تستطيع أن تستعمل طريقة إكمال المربع لتكتبها بصيغة الرأس. إذا كان معامل x^2 لا يساوي 1، فأول خطوة ينبغي عملها هي تحليل معامل x^2 ومعامل x قبل إكمال المربع.

إرشادات للدراسة

الدالة المرتبطة بالمعادلة

$f(x)$ تعني قيمة الدالة f عند x، وبما أن $f(x)$ تمثل قيمة y التي ترتبط بقيمة x، فإننا نكتب $y = f(x)$، لذا فالدالة المرتبطة بالمعادلة $y = -2x$ هي $f(x) = -2x$.

مثال 1 كتابة معادلات الدوال التربيعية بصيغة الرأس

اكتب معادلة الدالة التربيعية في كل مما يأتي بصيغة الرأس:

a $y = x^2 + 6x - 5$

$x^2 + 6x - 5$ ليس مربعًا كاملا — $y = x^2 + 6x - 5$

بإضافة $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$ لإكمال المربع، وبطرح 9 لنوازن المعادلة — $y = (x^2 + 6x + 9) - 5 - 9$

بكتابة $x^2 + 6x + 9$ على صورة مربع كامل — $y = (x + 3)^2 - 14$

b $y = -2x^2 + 8x - 3$

المعادلة الأصلية — $y = -2x^2 + 8x - 3$

بتجميع $ax^2 + bx$ والتحليل بإخراج a عامل مشترك — $y = -2(x^2 - 4x) - 3$

بإضافة 4 داخل الأقواس لإكمال المربع، وهذا يكافئ إضافة $-2(4)$ ، وبطرح $-2(4)$ لنوازن المعادلة — $y = -2(x^2 - 4x + 4) - 3 - (-2)(4)$

بكتابة $x^2 - 4x + 4$ على صورة مربع كامل — $y = -2(x - 2)^2 + 5$

تأكد

اكتب معادلة الدالة التربيعية في كل مما يأتي بصيغة الرأس:

1A $y = x^2 + 4x + 6$

1B $y = 2x^2 - 12x + 17$

إذا عُلم إحداثيا رأس القطع المكافئ ونقطة أخرى على منحناه، فيمكن كتابة معادلته بصيغة رأس القطع.

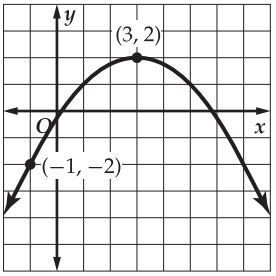
إرشادات للاختبار

معنى a

إشارة a في صيغة الرأس لاتحدد مقدار اتساع القطع، ولكنها تحدد إذا كانت فتحة القطع إلى أعلى أو إلى أسفل، ويحدد اتساع المنحنى بالقيمة المطلقة لـ a.

مثال 2 على اختبار معياري

أي مما يأتي معادلة للدالة الممثلة بيانيًّا؟



A $y = -4(x-3)^2 + 2$

B $y = -\frac{1}{4}(x-3)^2 + 2$

C $y = \frac{1}{4}(x+3)^2 - 2$

D $y = 4(x+3)^2 - 2$

اقرأ فقرة الاختبار

أعطي التمثيل البياني للقطع المكافئ بمعلومية رأسه ونقطة عليه، والمطلوب إيجاد معادلة القطع المكافئ.

حُلّ فقرة الاختبار

إحداثيا الرأس $(3, 2)$؛ لذا $h = 3$, $k = 2$، وبما أن النقطة $(-1, -2)$ تقع عليه، عوض عن x بـ -1 و y بـ -2 في المعادلة المكتوبة بصيغة الرأس وحلها؛ لإيجاد a .

صيغة الرأس $y = a(x - h)^2 + k$

$y = -2, x = -1, h = 3, k = 2$ $-2 = a(-1 - 3)^2 + 2$

بالتبسيط $-2 = a(16) + 2$

بطرح 2 من كلا الطرفين $-4 = 16a$

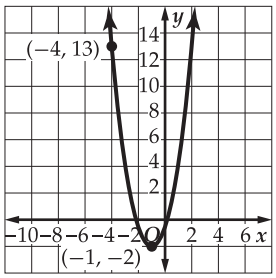
بالقسمة على 16 $-\frac{1}{4} = a$

إذن معادلة القطع المكافئ بصيغة الرأس هي $y = -\frac{1}{4}(x-3)^2 + 2$.

فالجواب B.

تأكد

2) أي مما يأتي معادلة للدالة الممثلة بيانيًّا؟



A $y = \frac{9}{25}(x-1)^2 + 2$

B $y = \frac{3}{5}(x+1)^2 - 2$

C $y = \frac{5}{3}(x+1)^2 - 2$

D $y = \frac{25}{9}(x-1)^2 + 2$

التحويلات الهندسية في التمثيلات البيانية للدوال التربيعية درست في الدرس 5–2 كيف تؤثر التحويلات الهندسية المختلفة في التمثيلات البيانية للدالة الأم لدالة القيمة المطلقة، وفيما يأتي تلخيص لتأثير هذه التحويلات للدالة التربيعية.

ملخص المفاهيم

أضف إلى مطويتك

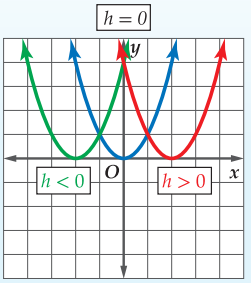
التحويلات الهندسية في التمثيلات البيانية للدوال التربيعية بصيغة الرأس

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

h، إزاحة أفقية

$|h|$ وحدة إلى اليمين إذا كانت h موجبة.

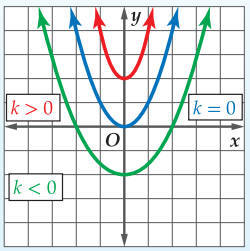
$|h|$ وحدة إلى اليسار إذا كانت h سالبة.



k، إزاحة رأسية

$|k|$ وحدة إلى الأعلى إذا كانت k موجبة.

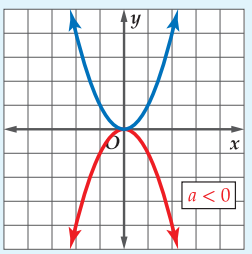
$|k|$ وحدة إلى الأسفل إذا كانت k سالبة.



a، انعكاس

إذا كانت $a > 0$، اتجاه فتحة القطع المكافئ تكون إلى أعلى.

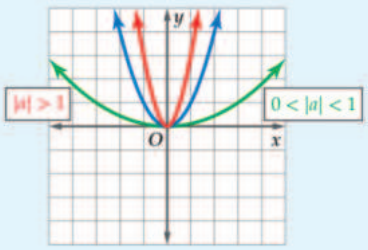
إذا كانت $a < 0$، اتجاه فتحة القطع المكافئ تكون إلى أسفل.



a، توسيع ، تضييق

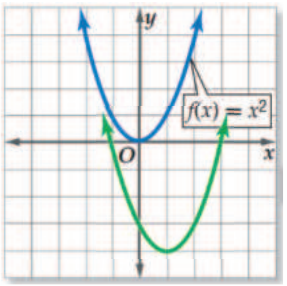
إذا كانت $|a| > 1$، يتوسع القطع المكافئ رأسيًا.

إذا كانت $0 < |a| < 1$، يضيق القطع المكافئ رأسيًا.



مثال 3 تمثيل دالة تربيعية مكتوبة بصيغة الرأس

صِفْ الإزاحة في التّمثيل البياني للدالة $g(x) = (x - 1)^2 - 4$، ثم مثّل الدالة بيانيًّا.



التمثيل البياني للدالة $g(x) = (x - 1)^2 - 4$ هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$، وحدة واحدة إلى اليمين وأربع وحدات إلى الأسفل.

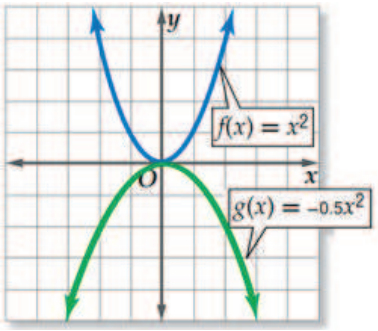
تأكد

صِف الإزاحة في التّمثيل البياني للدالتين الآتيتين:

(3A) $g(x) = x^2 + 3$

(3B) $g(x) = (x + 2)^2 + 1$

مثال 4 وصف التمدد ووصف الانعكاس



صِفِ الانعكاس والتمدد في التّمثيل البياني للدالة $g(x) = -0.5x^2$.

$a = -0.5$

بما أن $a < 0$ فإن التمثيل البياني للدالة $g(x) = -0.5x^2$ يكون قطع مكافئ مفتوحًا إلى أسفل.

أي أن التمثيل البياني للدالة $g(x) = -0.5x^2$ هو انعكاس للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$ حول المحور x.

بما أن $0 < |a| < 1$ فإن التمثيل البياني للدالة $g(x) = -0.5x^2$ يضيق رأسيًا عن التمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$

إرشادات للدراسة

التمدد عندما يتوسّع التمثيل البياني للدالة التربيعية رأسيًا، فإن شكله يكون أضيق من التمثيل البياني للدالة الأم. وعندما يضيق رأسيًا، فإن شكله يكون أوسّع من التمثيل البياني للدالة الأم.

تأكد

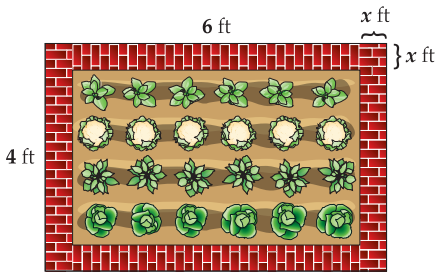
صِفِ الانعكاس والتمدد في التمثيل البياني للدالتين الآتيتين:

(4A $g(x) = -2x^2$

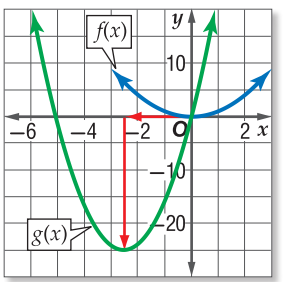
(4B $g(x) = \frac{1}{3}x^2$

مثال 5 من واقع الحياة وصف التحويلات الهندسية للدوال التربيعية مكتوبة بصيغة الرأس

حديقة منزلية: حديقة منزلية محاطة بممرٍّ، يُعبّر عن مساحة الممر بالدالة $g(x) = 4(x + 2.5)^2 - 25$، حيث x عرض الممرِّ. صِفْ التّحويل الهندسي (التحويلات الهندسية) على التَّمثيل البياني للدالة الأم.



التّمثيل البياني للدالة $g(x) = 4(x + 2.5)^2 - 25$ ينتج عن عدة تحويلات هندسية على التمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$.
بيِّن كيف أثّر كل تحويل في التمثيل البياني للدالة الأم.



$g(x) = 4(x + 2.5)^2 - 25$

$+2.5$ تعني إزاحة التّمثيل البياني للدالة الأم 2.5 وحدة إلى اليسار.

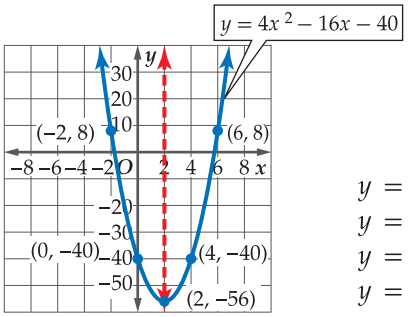
-25 تعني إزاحة التّمثيل البياني للدالة الأم 25 وحدة إلى أسفل.

4 تعني توسّع التَّمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$ رأسيًّا.

تأكد

(5 علوم: تستعمل $g(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$؛ لتحويل درجة الحرارة الفهرنهايتية إلى درجة الحرارة المئوية. صِفْ التّحويل الهندسي (التحويلات الهندسية) على التّمثيل البياني للدالة الأم.

مثال 6 وصف التحويلات الهندسية للدوال التربيعية بالصورة القياسية



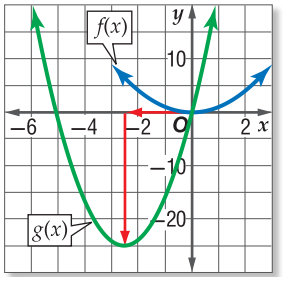
صِف التحويلات الهندسية في التمثيل البياني للدالة

$g(x) = 4x^2 - 16x - 40$

الخطوة 1 أعد كتابة الدالة بصيغة الرأس.

الدالة الأصلية	$y = 4x^2 - 16x - 40$
خاصية التوزيع	$y = 4(x^2 - 4x) - 40$
بإكمال المربع	$y = 4(x^2 - 4x + 4) - 40 - 4(4)$
بالتبسيط	$y = 4(x - 2)^2 - 56$

الخطوة 2 التّمثيل البياني للدالة $g(x) = 4(x - 2)^2 - 56$ ينتج عن عدة تحويلات هندسية على التمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$.



بيِّن كيف أثَّر كل تحويل في التمثيل البياني للدالة الأم.

$g(x) = 4(x - 2)^2 - 56$

-2 تعني إزاحة التّمثيل البياني للدالة الأم 2 وحدة إلى اليسار.

-56 تعني إزاحة التّمثيل البياني للدالة الأم 25 وحدة إلى أسفل.

4 تعني توسّع التَّمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = 56^2$ رأسيًّا.

تأكد

صِف التحويلات الهندسية في التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

(6A $g(x) = x^2 + 4$

(6B $g(x) = 3x^2 - 24x + 49$

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 142

اكتب معادلة الدالة التربيعية في كل مما يأتي بصيغة الرأس:

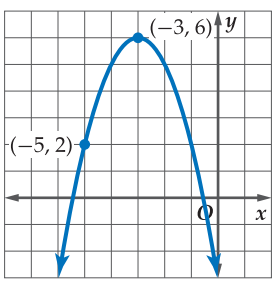
(1 $y = x^2 + 6x + 2$

(2 $y = -2x^2 + 8x - 5$

(3 $y = 4x^2 + 24x + 24$

مثال 2 صفحة 143

(4 اختيار من متعدد: أي مما يأتي معادلة للدالة الممثلة بيانيًّا في الشكل المجاور؟



A $y = -(x + 3)^2 + 6$

B $y = -(x - 3)^2 - 6$

C $y = -2(x + 3)^2 + 6$

D $y = -2(x - 3)^2 - 6$

مثال 3 صفحة 144

صِف الإزاحة في التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

(5 $g(x) = x^2 + 4$

(6 $g(x) = (x + 5)^2 - 8$

مثال 4
صفحة 145

صِفِ الانعكاس والتمدد في التمثيل البياني للدالتين الآتيتين:

7) $g(x) = -\frac{3}{5}x^2$ **8)** $g(x) = -8x$

مثال 5
صفحة 145

9) ألعاب نارية: تطلق الألعاب النارية في أثناء الاحتفالات، ويُعطى ارتفاع القذيفة h بالأمتار بالدالة $h = -4.9(t-4)^2 + 80$. حيث تمثل t الزمن بالثواني.

مثال 6
صفحة 146

صِفِ التحويلات الهندسية في التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

10) $g(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 3$ **11)** $g(x) = x^2 - 10x^2 + 17$

تدرب وحل المسائل

مثال 1
صفحة 142

اكتب معادلة الدالة التربيعية في كل مما يأتي بصيغة الرأس:

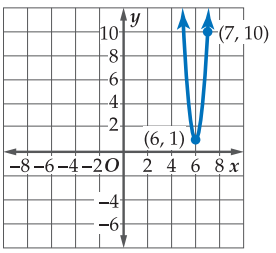
12) $y = x^2 + 9x + 8$ **13)** $y = x^2 - 6x + 3$ **14)** $y = -2x^2 + 5x$

15) $y = -3x^2 + 12x - 10$ **16)** $y = x^2 + 8x + 16$ **17)** $y = 2x^2 - 4x - 3$

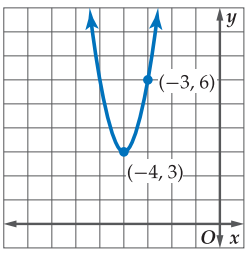
مثال 3
صفحة 143

اكتب معادلة بصيغة الرأس لكل من القطوع المكافئة الممثلة أدناه:

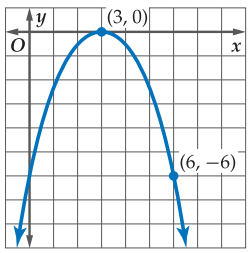
18)



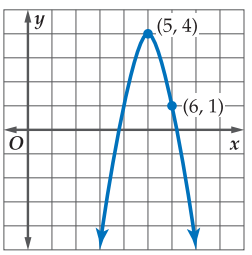
19)



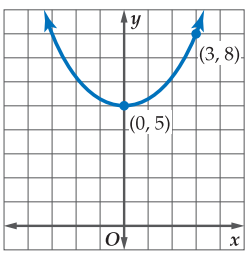
20)



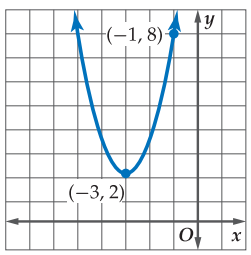
21)



22)



23)



مثال 3,4,5
الصفحات 144-145

صِفِ التحويلات الهندسية في التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

24) $y = (x-5)^2 + 3$ **25)** $y = 9x^2 - 8$ **26)** $y = -2(x-5)^2$

27) $y = \frac{1}{10}(x+6)^2 + 6$ **28)** $y = -3(x-5)^2 - 2$ **29)** $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$

30) $y = -(x+3)^2$ **31)** $y = (x-9)^2 - 7$ **32)** $y = -\frac{5}{8}x^2 - 8$

اكتب كل معادلة مما يأتي بصيغة الرأس، ثم حدد رأس القطع المكافئ، ومعادلة محور التماثل واتجاه فتحة المنحنى:

33 $3x^2 - 4x = 2 + y$ **34** $-2x^2 + 7x = y - 12$ **35** $-x^2 - 4.7x = y - 2.8$

36 $x^2 + 1.4x - 1.2 = y$ **37** $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{26}{9} = y$ **38** $x^2 + 7x + \frac{49}{4} = y$

الربط مع واقع الحياة

تجاوز السرعات المقررة أو السير بسرعات غير آمنة يشكل أغلب الأخطاء المرورية.

39 سيارات: يمكن استعمال المعادلة $S(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$؛ لتحديد الموقع $S(t)$ لجسيم متحرك بعد t ثانية، بمعدل تسارع a، وسرعة ابتدائية v_0، ويمكن لسيارة خالد أن تتسارع بمعدل 0.002mil/sec^2.

a) عبِّر عن $S(t)$ بصيغة الرأس عندما تتسارع ابتداءً من سرعة 35 mil/h لدخول الخط السريع.

b) كم من الوقت يستغرق خالد حتى تصل سرعة السيارة 68 mil/h؟
(إرشاد: استعمل التسارع . الزمن = السرعة)

مسائل مهارات التفكير العليا

40 مسألة مفتوحة: اكتب معادلة قطع مكافئ أُجرى عليه التحويلات الآتية:
إزاحة، توسع، وانعكاس حول المحور x.

41 تحدّ: بيّن كيف تجد معادلة قطع مكافئ عُلم إحداثيات ثلاث نقاط على منحناه.

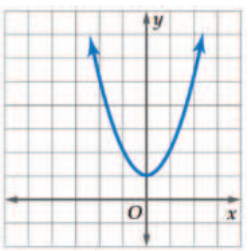
42 تحدٍّ: اكتب المعادلة $y = ax^2 + bx + c$ بصيغة الرأس، وحدد إحداثيات الرأس ومعادلة محور التماثل.

43 تبرير: صف منحنى الدالة $f(x) = a(x-h)^2 + k$ عندما $a = 0$. هل سيكون نفس منحنى الدالة $g(x) = ax^2 + bx + c$ عندما $a = 0$؟ وضح إجابتك.

44 اكتب: صف كيف يمكن استعمال منحنى الدالة $y = x^2$ لتمثيل أي دالة تربيعية بيانيًّا، وضمِّن إجابتك توضيح تأثير تغيير قيم a, h, k في المعادلة $y = a(x-h)^2 + k$.

تدريب على اختبار معياري

45 مراجعة: أيّ مما يأتي معادلة للدالة الممثلة في الشكل المجاور:



A $y = x^2 - 1$

B $y = x^2 + 1$

C $y = (x-1)^2$

D $y = (x+1)^2$

46 مراجعة: أي مما يأتي تُعد أدق وصف لإزاحة المنحنى من $y = (x+5)^2 - 1$ إلى المنحنى $y = (x-1)^2 + 3$؟

A 4 وحدات إلى أعلى و 6 وحدات إلى اليمين.

B 4 وحدات إلى أعلى ووحدة واحدة إلى اليسار.

C وحدة إلى أسفل ووحدة واحدة إلى اليمين.

D وحدة واحدة إلى أسفل و 5 وحدات إلى اليسار.

مراجعة تراكمية

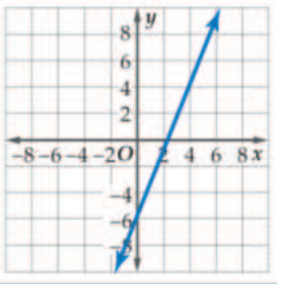
حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين ، ثم تحقَّق من صحة حلِّك:

47 $2\,|x+1| - x = 3x - 4$

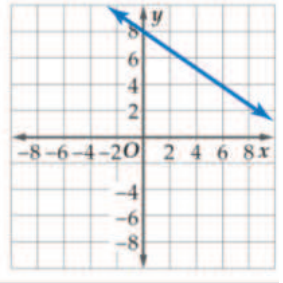
48 $3\,|2x+2| - 2x = x + 3$

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع لكل مستقيمٍ مُمثّل بيانيًّا أدناه: (الدرس 2-1)

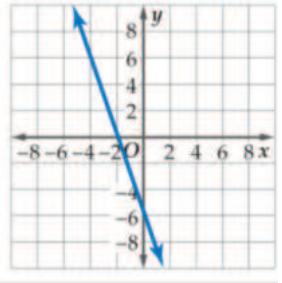
49



50



51



52 مثّل بيانيًّا نظام المتباينات أدناه، ثم حدد رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى للدالة المعطاة في منطقة الحل: (الدرس 8-2)

$$x \geq 0\,,\, y \geq 0$$
$$2x + 5y \leq 40$$
$$f(x\,,\, y) = 3x + 11y$$

مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد قيمة كل من الدوال الآتية لقيم x المعطاة:

53 $f(x) = 3x^2 - 4x + 6, x = -2$

54 $f(x) = -2x^2 + 6x - 5, x = 4$

55 $f(x) = 6x^2 + 18, x = -5$

3-3

حل المعادلات التربيعية بيانيًّا

Solving Quadratic Equations by Graphing

فيما سبق

درستُ حل أنظمة معادلات بيانيًا.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أحل المعادلات التربيعية بيانيًا.
- أقدّر الحلول للمعادلات التربيعية بيانيًا.

المفردات الأساسية

المعادلة التربيعية
quadratic equation

الصيغة القياسية
standard form

الجذر
root

الصفر
zero

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

عند تسارع صعودك في "برج السقوط الحُرّ" (اسم لعبة في مدينة الألعاب). فإنك تثبت بشدّة إلى مقعدك، بحيث تشعر بأنك تُدفع نحو الأسفل، لكن عندما يبدأ السقوط الحر فإنك ستسقط بنفس سرعة سقوط المقعد دون أن تشعر بأي قوة تضغط عليك من المقعد، أي أنك ستشعر بأنك فقدت وزنك. ويُعطى الارتفاع عن سطح الأرض (بالأقدام) لجسم يسقط سقوطًا حرًّا بالدالة الآتية:

$$h(t) = -16t^2 + h_0,$$

حيث t هو الزمن بالثواني، و h_0 الارتفاع عند نقطة البدء (بالأقدام).

حل المعادلات التربيعية عندما تساوي دالة تربيعية قيمة معينة، فإن الناتج يصبح معادلة تربيعية. ويمكن كتابة **المعادلة التربيعية** على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$، حيث $a \neq 0$. وعندما تكتب المعادلة بهذه الطريقة وتكون a, b, c أعدادًا حقيقية، تكون المعادلة **بالصيغة القياسية**.

تُسمّى حلول المعادلة التربيعية **جذور المعادلة**، وإحدى طرائق إيجاد جذور المعادلة هي إيجاد **أصفار الدالة** المرافقة لهذه المعادلة.

صفر أو صفرا الدالة التربيعية هما المقطعان من المحور x لمنحنى الدالة، أيْ الإحداثيان x لنقطتي التقاء المنحنى مع المحور x في التمثيل البياني لها.

دالة تربيعية

$$f(x) = x^2 - x - 6$$

$$f(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 0$$
$$f(3) = 3^2 - 3 - 6 = 0$$

صفرا الدالة التربيعية $-2, 3$

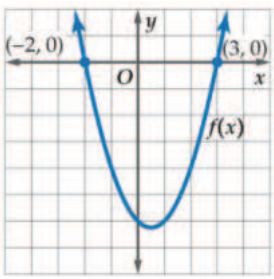
معادلة تربيعية

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(-2)^2 - (-2) - 6 = 0$$
$$3^2 - 3 - 6 = 0$$

جذرا المعادلة التربيعية $-2, 3$

منحنى دالة تربيعية



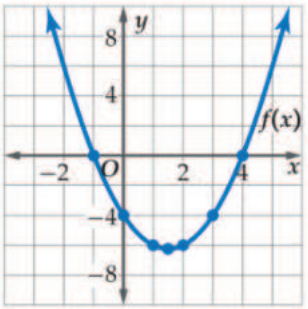
المقطعان من المحور x هما $-2, 3$

مثال 1 حلان حقيقيان

حُلّ المعادلة $x^2 - 3x - 4 = 0$ بيانيًّا.

مثّل بيانيًّا الدالة التربيعية المرافقة $f(x) = x^2 - 3x - 4$، معادلة محور التماثل هي $x = -\frac{-3}{2(1)} = 1.5$.

كوِّن جدولًا باستعمال قيم للمتغير x حول القيمة 1.5 ، ثمّ عيّن كل نقطة في المستوى الإحداثي، وصل بينها بمنحنى ممهد.



x	−1	0	1	1.5	2	3	4
$f(x)$	0	−4	−6	−6.25	−6	−4	0

لاحظ أن صفري الدالة هما 1, 4−؛ لذا فإن حلّي المعادلة هما 1, 4− .

تأكد

1) حل كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا:

A) $x^2 + 2x - 15 = 0$

B) $x^2 - 8x = -12$

إرشادات للدراسة

تمثيل بياني

أحيانًا تحتاج إلى أكثر من 5 نقاط قبل تحديد صفر الدالة.

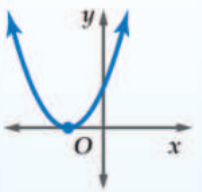
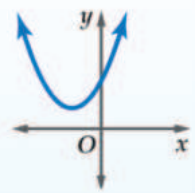
بما أن عدد أصفار الدالة التربيعية في مثال 1 يساوي 2، فإن للمعادلة التربيعية حلين حقيقيين، وهذه حالة من ثلاث حالات ممكنة عند حل المعادلة التربيعية.

مفهوم أساسي حلول المعادلة التربيعية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي المعادلة التربيعية يمكن أن يكون لها حل حقيقي واحد، أو حلّان حقيقيان أو ليس لها حلول حقيقية.

النموذج

حل حقيقي واحد	حلّان حقيقيان	ليس لها حلول حقيقية
		

إرشادات للدراسة

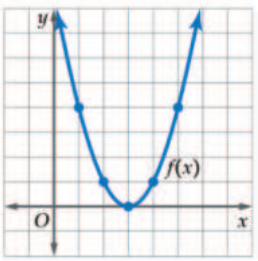
حل حقيقي واحد عندما يكون للمعادلة التربيعية حل حقيقي واحد، فهي في الحقيقة لها حلان حقيقيان لكنهما متساويان.

مثال 2 حل حقيقي واحد

حُلّ المعادلة $-6x + 23 = 14 - x^2$ بيانيًّا.

المعادلة الأصلية	$14 - x^2 = -6x + 23$
بإضافة x^2 للطرفين	$14 = x^2 - 6x + 23$
بطرح 14 من الطرفين	$0 = x^2 - 6x + 9$

مثّل بيانيًّا الدالة المرافقة $f(x) = x^2 - 6x + 9$.



x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	1	0	1	4

لاحظ أن للدالة صفرًا واحدًا فقط؛ لذا فللمعادلة جذر حقيقي واحد هو 3 .

تأكد

2) حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين بيانيًّا:

A) $x^2 + 5 = -8x - 11$

B) $12 - x^2 = 48 - 12x$

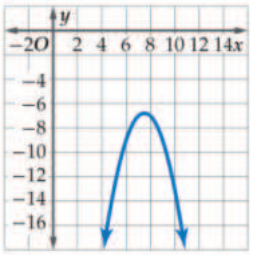
إرشادات للدراسة

تمثيل اختياري

لو مثلت الدالة $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ بيانيًّا سيظهر تمثيلها البياني مختلفًا عن التمثيل البياني للدالة في مثال 2، لكن لهما الأصفار نفسها.

مثال 3 عدم وجود حلول حقيقية

نظرية الأعداد: أوجد عددين حقيقيين مجموعهما 15 ، وحاصل ضربهما 63 ، أو بيّن أنه لا يوجد مثل هذين العددين.



افهم افترض (العدد الأول) $= x$ ، فيكون (العدد الثاني) $= 15 - x$

خطط

حاصل الضرب يساوي 63	$x(15 - x) = 63$
خاصية التوزيع	$15x - x^2 = 63$
بطرح 63 من الطرفين	$-x^2 + 15x - 63 = 0$

حل مثِّل الدالة المرافقة بيانيًّا.

لاحظ من التمثيل البياني أنه لا يوجد نقطة تقاطع بين منحنى الدالة والمحور x ، مما يعني أن المعادلة الأصلية ليس لها جذور حقيقية؛ لذا لا يمكن أن يوجد عددان حقيقيان مجموعهما 15 وحاصل ضربهما 63.

تحقق حاول إيجاد حاصل ضرب عدة أزواج من الأعداد مجموع كل منها 15، هل حاصل ضرب كلٍّ منها أقل من 63 كما يبدو من خلال التمثيل البياني؟

تأكد

3) أوجد عددين حقيقيين مجموعهما 6 وحاصل ضربهما 55−، أو بيّن أنه لا يوجد مثل هذين العددين.

تقدير الحلول غالبًا ما يكون إيجاد القيم الفعلية للجذور عن طريق التمثيل البياني غير دقيق تمامًا؛ لذا نقوم بتقدير قيمة الجذر عن طريق حصره بين العددين الصحيحين اللذين يقع بينهما.

فعندما تكون قيمة الدالة موجبة لإحدى قيم n وسالبة لقيمة أخرى، فإن هنالك صفرًا حقيقيًّا واحدًا على الأقل بين هاتين القيمتين.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	12	3	−6	−2	4	8	14

صفر صفر

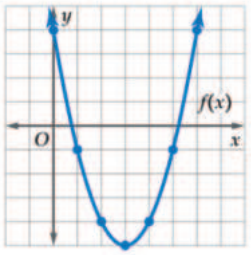
تنبيه!

الأصفار ستجد لاحقًا أنه يمكن أن يكون للدالة عدة أصفار في فترة صغيرة.

مثال 4 تقدير الجذور

حُلّ المعادلة $x^2 - 6x + 4 = 0$ بيانيًّا. وإذا لم تتمكن من إيجاد القيم الفعلية للجذور، فحدّد العددين الصحيحين المتتاليين اللذين يقع بينهما كل جذر.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	4	−1	−4	−5	−4	−1	4



يُبيّن الشكل المجاور والجدول أعلاه، أن المقطعين من المحور x للمنحنى يحددان أن الحل الأول يقع بين 0, 1 ، وأن الحل الثاني يقع بين 5, 6.

تأكد

4) حُلّ المعادلة $x^2 - x - 10 = 0$ بيانيًّا. وإذا لم تتمكن من إيجاد القيم الفعلية للجذور، فحدّد العددين الصحيحين المتتاليين اللذين يقع بينهما كل جذر.

مثال 5 من واقع الحياة

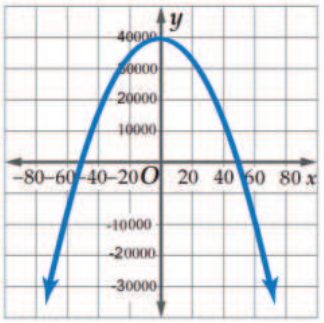
الحل باستعمال الآلة الحاسبة البيانية

رياضة خطرة: قام أحد هواة الألعاب الخطرة بتحطيم الرقم القياسي لأطول فترة لطيران السقوط الحر من الطائرة. فقد طار مسافة 10 mi من نقطة السقوط، واستغرق زمن هبوط مقداره 4 min و 55 sec باستعمال المظلّة. استعن بالمعطيات في الشكل المجاور وقدِّر الزمن الذي سيستغرقه اللاعب حتى يقوم بفتح المظلة (أهمل مقاومة الهواء). استعمل الدالة الآتية $h(t) = -16t^2 + h_0$ ، حيث الزمن (t) بالثواني، والارتفاع الابتدائي (h_0) بالأقدام.

نحتاج لإيجاد t عندما $h_0 = 40500$، و $h(t) = 500$

حُلّ $500 = -16t^2 + 40500$

مثّل الدالة المرافقة $y = -16t^2 + 40000$ بيانيًا.



لاحظ من التمثيل البياني أن أصفار الدالة هي 50−، 50

وبما أن الزمن لا يمكن أن يكون سالبا؛ فيكون الصفر الموجب للدالة 50.

وهكذا سيسقط اللاعب سقوطًا حرًا مدة 50 sec.

تحقق

حُلّ $500 = -16t^2 + 40500$ باستعمال خاصية الجذر التربيعي

المعادلة الأصلية	$500 = -16t^2 + 40500$
بإضافة $16t^2$ للطرفين	$16t^2 + 500 = 40500$
بطرح 500 من الطرفين	$16t^2 = 40000$
بقسمة الطرفين على 16	$t^2 = 2500$
بأخذ الجذر التربيعي للطرفين	$t = \pm\sqrt{2500}$
	$t = \pm 50$

وبما أن الزمن لا يمكن أن يكون سالبا؛ فيكون الصفر الموجب للدالة 50. وهكذا سيسقط اللاعب سقوطًا حرًا مدة 50 sec.

تأكد

6) إذا قفز اللاعب في التمرين السابق من ارتفاع 40000 ft، فما الزمن الذي سيستغرقه حتى يفتح المظلة في أثناء السقوط الحر؟

الربط مع واقع الحياة

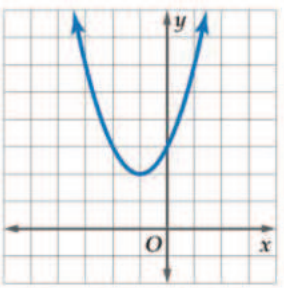
رياضة السقوط الحر التي يمارسها كثير من الأفراد حول العالم، تعني قيام فرد أو مجموعة من الأفراد بالقفز من الطائرة، وذلك بشكل جريء للغاية، وتحتاج قدرات خاصة من إرادة وجرأة وقوة شخصية كبيرة.

تأكد من فهمك

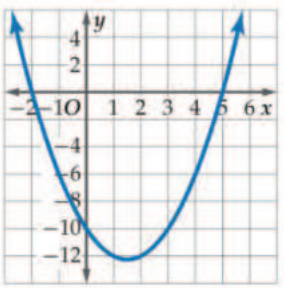
مثال 1
صفحة 151

استعمل التمثيل البياني المرافق لكل معادلة مما يأتي لتحديد حلولها الحقيقية (إن وجدت):

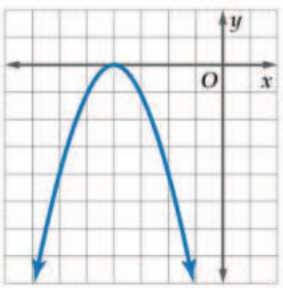
1) $x^2 + 2x + 3 = 0$



2) $x^2 - 3x - 10 = 0$



3) $-x^2 - 8x - 16 = 0$



مثال 4–2
الصفحات 151– 152

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا. وإذا لم تتمكن من إيجاد القيم الفعلية للجذور فحدد العددين الصحيحين المتتاليين اللذين يقع بينهما كل جذر.

4) $x^2 + 8x = 0$

5) $x^2 - 3x - 18 = 0$

6) $4x - x^2 + 8 = 0$

7) $-12 - 5x + 3x^2 = 0$

8) $x^2 - 6x + 4 = -8$

9) $9 - x^2 = 12$

10) $5x^2 + 10x - 4 = -6$

11) $x^2 - 20 = 2 + x$

12) نظرية الأعداد: استعمل معادلة تربيعية؛ لإيجاد عددين حقيقيين مجموعهما 2 وحاصل ضربهما 24–.

مثال 5
صفحة 153

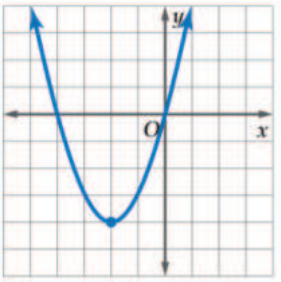
13) فيزياء: كم يستغرق من الوقت سقوط جسم من بناية ترتفع 400 ft فوق سطح الأرض؟ استعمل الصيغة $h(x) = -16t^2 + h_0$، حيث t تمثل الزمن بالثواني، h_0 الارتفاع الابتدائي بالأقدام .

تدرب وحل المسائل

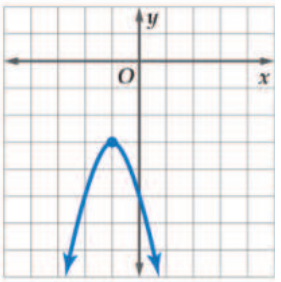
مثال 1
صفحة 151

استعمل التمثيل البياني المرافق لكل معادلة مما يأتي لتحديد حلولها الحقيقية (إن وجدت):

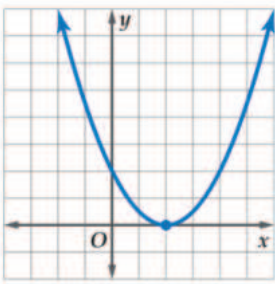
14) $x^2 + 4x = 0$



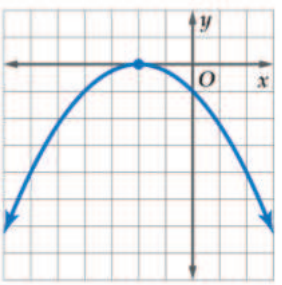
15) $-2x^2 - 4x - 5 = 0$



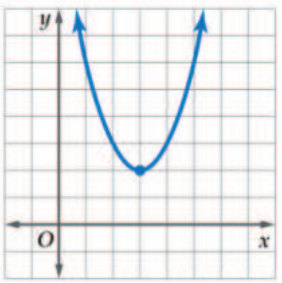
16) $0.5x^2 - 2x + 2 = 0$



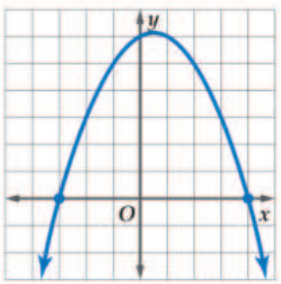
17) $-0.25x^2 - x - 1 = 0$



18) $x^2 - 6x + 11 = 0$



19) $-0.5x^2 + 0.5x + 6 = 0$



الأمثلة 4–2
الصفحتان 151-152

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا. وإذا لم تتمكن من إيجاد القيم الفعلية للجذور فحدد العددين الصحيحين المتتاليين اللذين يقع بينهما كل جذر.

20) $x^2 = 5x$

21) $-2x^2 - 4x = 0$

22) $x^2 - 5x - 14 = 0$

23) $-x^2 + 2x + 24 = 0$

24) $x^2 - 18x = -81$

25) $2x^2 - 8x = -32$

26) $2x^2 - 3x - 15 = 4$

27) $-3x^2 - 7 + 2x = -11$

28) $-0.5x^2 + 3 = -5x - 2$

29) $-2x + 12 = x^2 + 16$

استعمل الجداول؛ لتحديد موقع الأصفار للدوال التربيعية فيما يأتي:

(30)

x	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0
$f(x)$	−8	−1	4	4	−1	−8	−22	−48

(31)

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	32	14	2	−3	−3	2	14	32

نظرية الأعداد: استعمل معادلة تربيعية؛ لإيجاد عددين حقيقيين يحققان كل عبارة مما يأتي. أو بيّن أنه لا يوجد مثل هذين العددين.

32 مجموع العددين 15− وحاصل ضربهما 54−.

33 مجموع العددين 4 وحاصل ضربهما 117−.

34 مجموع العددين 12 وحاصل ضربهما 84−.

35 مجموع العددين 13− وحاصل ضربهما 42.

36 مجموع العددين 8− وحاصل ضربهما 209−.

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا. وإذا لم تتمكن من إيجاد القيم الفعلية للجذور فحدد العددين الصحيحين المتتاليين اللذين يقع بينهما كل جذر.

(37) $2x^2 + x = 15$

(38) $-5x - 12 = -2x^2$

(39) $4x^2 - 15 = -4x$

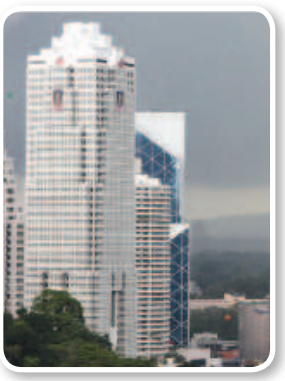
(40) $-35 = -3x - 2x^2$

(41) $-3x^2 + 11x + 9 = 1$

(42) $13 - 4x^2 = -3x$

(43) $-0.5x^2 + 18 = -6x + 33$

(44) $0.5x^2 + 0.75 = 0.25x$



الربط مع واقع الحياة

من ارتفاع **86** طابقًا (أيْ نحو **320 m**) يمكن أن ترى منظرًا شاملًا رائعًا للمنطقة المحيطة بالبرج.

45 فيزياء: إذا تم إسقاط جسيم من مبنى عالٍ ارتفاعه 320 m، فكم سيستغرق الجسيم حتى يصل إلى سطح الأرض؟ استعمل الصيغة $h(t) = -5t^2 + h_0$، حيث t الزمن بالثواني، و h_0 الارتفاع الابتدائي بالأمتار.

46 خراطيم المياه: ينطلق الماء من خرطوم إلى أعلى بسرعة ابتدائية 40 ft/sec استعمل الصيغة $h(t) = v_0t - 16t^2$، حيث t الزمن بالثواني، $h(t)$ الارتفاع بعد t ثانية بالأقدام، v_0 السرعة الابتدائية للإجابة عن كل مما يأتي:

a) بعد كم ثانية يعود الماء إلى مستوى فتحة الخرطوم؟

b) على فرض أن فتحة الخرطوم فوق مستوى سطح الأرض بـ 5 ft، ما أقصى ارتفاع يصل إليه الماء؟

مسائل مهارات التفكير العليا

47) اكتشف الخطأ: حاول كل من غانم وسليم أن يحدد موقع جذور المعادلة التربيعية الممثلة بالجدول أدناه. هل يُعدُّ حل أيٍّ منهما صحيحًا ؟ برّر إجابتك.

x	−4	−2	0	2	4	6	8	10
$f(x)$	52	26	8	−2	−4	2	16	38

غانم
الجذور بين 4, 6 لأن $f(x)$ توقفت عن التناقص وبدأت في التزايد

سليم
الجذران بين -2, 0 لأن إشارة x تغيرت بين هاتين القيمتين

48) تحدٍّ: أوجد قيمة العدد الصحيح الموجب k بحيث يكون للمعادلة $f(x) = x^2 - 2kx + 55$ جذور عند $k-3$ ، $k+3$.

49) مسألة مفتوحة: اكتب دالة تربيعية بحيث يكون أصفارها 2− ، 8 ، ولها قيمة عظمى عند (3,125).

50) اكتب: كيف تستعمل التمثيل البياني المرافق للمعادلة التربيعية لحلها؟

تدريب على اختبار

51) ما جذور المعادلة $(x-2)^2 = 9$ ؟

A $-1, 1$

B $-3, 3$

C $-5, 5$

D $-1, 5$

52) إذا كان العدد 4 هو أحد جذور المعادلة $x^2 + kx - 12 = 0$ ، فما قيمة k؟

A -1

B 0

C 1

D 3

مراجعة تراكمية

حدد ما إذا كان لكل دالة من الدوال التربيعية الآتية قيمة عظمى أو قيمة صغرى، وأوجد هذه القيمة، ثم حدد المجال والمدى لكل دالة. (درس 3-1)

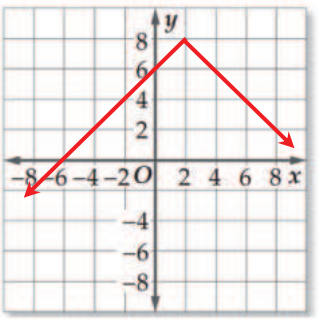
53) $f(x) = -4x^2 + 8x - 16$ **54)** $f(x) = 3x^2 + 12x - 18$ **55)** $f(x) = 4x + 13 - 2x^2$

حُلَّ كل معادلة مما يأتي:

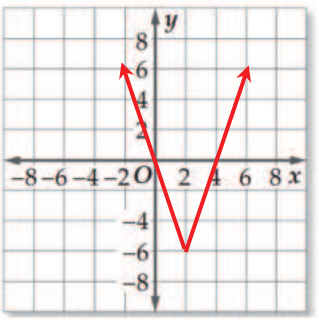
56) $-4|x-2| = -12$ **57)** $|3x+4| = 21$ **58)** $2|4x-1| + 3 = 9$

اكتب معادلة (قاعدة) دالة القيمة المطلقة الممثّلة بيانيًا في الشكلين التاليين. (درس 2-5)

59)



60)



مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ) لكل مجموعة من الأعداد الآتية:

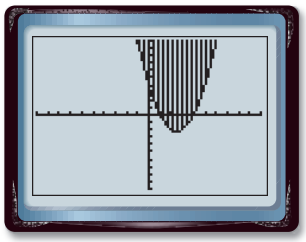
61) 16, 48, 128 **62)** 15, 21, 49 **63)** 12, 28, 36

المتباينات التربيعية
Quadratic Inequalities

تذكر أن التمثيل البياني للمتباينة الخطية يتكون من الحد الفاصل والمنطقة المظللة،وتقع مجموعة حل المتباينة في المنطقة المظللة من التمثيل، ويشبه تمثيل البيانات التربيعية تمثيل البيانات الخطية.

نشاط 1 التظليل داخل القطع المكافئ

مثّل المتباينة $y \geq x^2 - 5x + 4$ في واجهة العرض القياسية.



امسح أولًا جميع الدوال من Y= list.

لتمثيل المتباينة $y \geq x^2 - 5x + 4$، أدخل المعادلة Y= list.
ثم استعمل السهم الأيسر لاختيار = ، ثم اضغط ENTER حتى يتم اختيار التظليل فوق الخط.

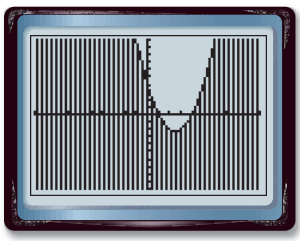
المفاتيح: GRAPH 4 + X,T, θ,n 5 − x^2 X,T, θ,n ENTER ENTER ◀ ◀ ▶ ▶

تقع جميع الأزواج المرتبة التي تكون قيمة y فيها أكبر أو تساوي $x^2 - 5x + 4$ ، والتي تمثّل حل المتباينة للمنطقة التي تقع أعلى المستقيم أو عليه.

سوف يُستعمل إجراء مشابه لتمثيل المتباينة التي يكون فيها التظليل خارج القطع المكافئ.

نشاط 2 التظليل خارج القطع المكافئ

مثّل المتباينة $y - 4 \leq x^2 - 5x$ في واجهة العرض القياسية.



امسح أولًا جميع التمثيلات المعروضة.

المفاتيح: Y= CLEAR

ثم أعد كتابة $y - 4 \leq x^2 - 5x$ على الصورة $y \leq x^2 - 5x + 4$ ، ومثّلها بيانيًا.

المفاتيح: GRAPH 4 + X,T, θ,n 5 − x^2 X,T, θ,n ENTER ENTER ◀ ◀ ▶ ▶

تقع جميع الأزواج المرتبة التي تكون قيمة y فيها أصغر من أو تساوي $x^2 - 5x + 4$ والتي تمثل حل المتباينة تحت الخط أو عليه.

تمارين:

1) قارن بين التمثيلين المبينين أعلاه.

2) مثّل المتباينة $y - 2x + 6 \geq 5x^2$ في واجهة العرض القياسية، ثم سمّ ثلاثة حلول للمتباينة.

3) مثّل المتباينة $y - 6x \leq -x^2 - 3$ في واجهة العرض القياسية، ثم سمّ ثلاثة حلول للمتباينة.

الفصل 3

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 3-1 إلى 3-3

1) أوجد مقطع المحور y، ومعادلة محور التماثل، والإحداثي x لرأس القطع المكافئ لـ $f(x) = 2x^2 + 8x - 3$، ثمّ مثّلها بيانيًّا. (الدرس 3-1)

2) **اختيار من متعدد:** أي الدوال الآتية تكون معادلة محور التماثل لها $x = 5$ ؟ (الدرس 3-1)

A $f(x) = x^2 - 5x + 3$ **C** $f(x) = x^2 + 10x - 3$

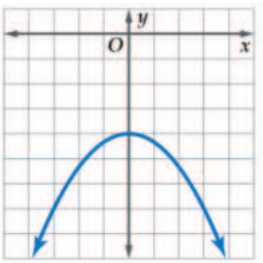
B $f(x) = x^2 - 10x + 7$ **D** $f(x) = x^2 + 5x + 2$

3) حدّد ما إذا كان لـ $f(x) = 5 - x^2 + 2x$ قيمة عظمى أو قيمة صغرى، وأوجدها، ثم حدّد مجال الدالة ومداها. (الدرس 3-1)

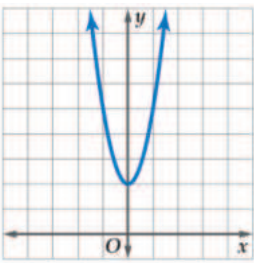
4) **كرة طائرة:** رمى لاعب كرة من ارتفاع 4ft إلى أعلى بسرعة مقدارها 18ft/sec. إذا كان الارتفاع $h(t)$ للكرة بعد زمن t ثانية من رميها معطى بـ $h(t) = -16t^2 + 18t + 4$. فأوجد أقصى ارتفاع تبلغه الكرة، وزمن بلوغها هذا الارتفاع. (الدرس 3-1)

أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل ومقطع المحور y للتمثيل البياني الآتي: (الدرس 3-2)

5)



6)



اكتب كل معادلة مما يأتي باستعمال صيغة الرأس، ثم حدد رأس القطع ومعادلة محور التماثل واتجاه فتحة القطع: (الدرس 3-2)

7) $y = x^2 - 8x + 5$

8) $2y - x^2 = 6x - 9$

9) $5x^2 - 20x - 12 = y$

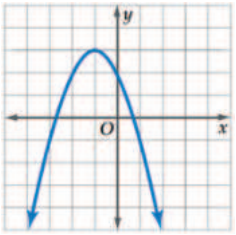
صِفِ التحويلات الهندسية في التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي: (الدرس 3-2)

10) $g(x) = x^2 - 15$

11) $g(x) = 4 - 2(x - 6)^2$

12) $g(x) = x^2 - 8x - 5$

13) أيّ مما يأتي معادلة للدالة الممثلة بيانيا؟



A $y = (x-1)^2 + 3$

B $y = (x+1)^2 + 3$

C $y = -(x-1)^2 + 3$

D $y = -(x+1)^2 + 3$

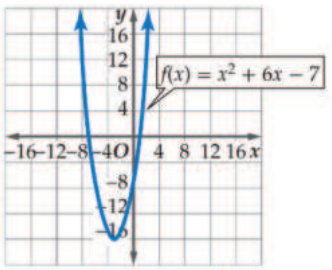
14) حُلّ المعادلة $3x^2 - 17x + 5 = 0$ بيانيًّا، وإذا لم تتمكن من إيجاد القيمة الفعلية للجذور، فحدد عددين صحيحين متتاليين يقع بينهما كل جذر. (الدرس 3-3)

نظرية الأعداد: استعمل معادلة تربيعية؛ لإيجاد عددين حقيقيين يحققان كلًّا من الموقفين الآتيين، أو بيّن أنه لا يوجد مثل هذين العددين. (الدرس 3-3)

15) مجموع العددين 15، وحاصل ضربهما 36

16) مجموع العددين 7، وحاصل ضربهما 15

17) **اختيار من متعدد:** بالاعتماد على التمثيل البياني أدناه لـ $f(x) = x^2 + 6x - 7$، أي مما يأتي حل للمعادلة $x^2 + 6x - 7 = 0$ ؟ (الدرس 3-3)



F $-1, 6$

G $1, -6$

H $-1, 7$

J $1, -7$

18) **كرة قدم:** إذا ضرب اللاعب كرة القدم إلى أعلى بسرعة مقدارها 10 m/sec، فما الزمن الذي تستغرقه الكرة حتى تصطدم بسطح الأرض (أهمل ارتفاع قدم اللاعب عن أرض الملعب)؟
إرشاد: استعمل الدالة الآتية: $h(t) = v_0 t - 5t^2$، حيث $h(t)$ هي ارتفاع الكرة بالأمتار، و v_0 هي السرعة الابتدائية بالمتر لكل ثانية، و t هو الزمن بالثواني. (الدرس 3-3)

3-4

الأعداد المركبة

Complex Numbers

فيما سبق

درستُ تبسيط الجذور التربيعية.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أجري العمليات على الأعداد التخيلية البحتة.
- أجري العمليات على الأعداد المركبة.

المفردات الأساسية

الوحدة التخيلية
imaginary unit

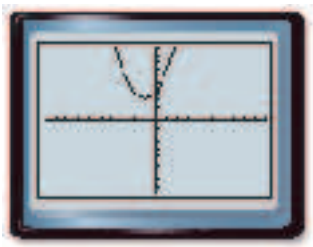
العدد التخيلي البحت
pure imaginary number

العدد المركب
complex number

عددان مركبان مترافقان
complex conjugates

www.obeikaneducation.com

لماذا ؟



بدراسة الشكل المجاور، تلاحظ أن التمثيل البياني للمعادلة $y = x^2 + 2x + 4$ لا يقطع المحور x ؛ لذا فليس للمعادلة جذور حقيقية. هل يعني ذلك أنه ليس للمعادلة حلول؟

للتأكد من ذلك، استعمل أداة Solver في الآلة الحاسبة البيانية من قائمة Math ، أدخل المعادلة واختر $x = 2$ تخمينًا للحل.

اضغط ALPHA ENTER فيظهر على الشاشة كلمة Error ، وهذا يعني أنه لا توجد حلول حقيقية للمعادلة، ولكن هناك حلول تخيلية.

الأعداد التخيلية البحتة قادت المعادلات منها المعادلة السابقة الرياضيين إلى تعريف الأعداد التخيلية، وتعرف **الوحدة التخيلية** i على أنها الجذر التربيعي الأساسي للعدد -1 ، وبعبارة أخرى فإن $i^2 = -1$ ، أو $i = \sqrt{-1}$

وتسمى الأعداد على الصورة $6i,\ -2i\ ,\ i\sqrt{3}$ **أعدادًا تخيلية بحتة**، وهي جذور تربيعية لأعداد حقيقية سالبة.

لأي عدد حقيقي موجب مثل b، فإن $bi = \sqrt{-b^2} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{b^2}$.

مثال 1 الجذور التربيعية للأعداد السالبة

بسّط كلًّا مما يأتي :

a) $\sqrt{-27}$

$$\begin{aligned}\sqrt{-27} &= \sqrt{-1 \cdot 3^2 \cdot 3}\\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3}\\ &= i \cdot 3 \cdot \sqrt{3}\\ &= 3i\sqrt{3}\end{aligned}$$

b) $\sqrt{-216}$

$$\begin{aligned}\sqrt{-216} &= \sqrt{-1 \cdot 6^2 \cdot 6}\\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{6^2 \cdot 6}\\ &= i \cdot 6 \cdot \sqrt{6}\\ &= 6i\sqrt{6}\end{aligned}$$

تأكد

بسّط كلًّا مما يأتي :

1A) $\sqrt{-18}$

1B) $\sqrt{-125}$

تحقق الأعداد التخيلية البحتة كلًّا من الخاصيتين التجميعية والإبدالية لعملية الضرب، ويُبيّن الجدول أدناه بعض قوى الوحدة التخيلية i:

$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^4 = (i^2)^2 = 1$
$i^5 = i^4 \cdot i = i$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$	$i^8 = (i^2)^4 = 1$

مثال 2 ضرب الأعداد التخيلية البحتة

أوجدْ ناتجَ كلٍّ مما يأتي :

a) $-5i \cdot 3i$

	$-5i \cdot 3i = -15i^2$
بالضرب	
$i^2 = -1$	$= -15(-1)$
بالتبسيط.	$= 15$

b) $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15}$

	$\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15} = i\sqrt{6} \cdot i\sqrt{15}$
$i = \sqrt{-1}$	$= i^2\sqrt{90}$
بالضرب	$= -1 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{10}$
بالتبسيط	$= -3\sqrt{10}$
بالضرب	

تأكد

أوجدْ ناتجَ كلٍّ مما يأتي :

2A) $3i \cdot 4i$ **2B)** $\sqrt{-20} \cdot \sqrt{-12}$ **2C)** i^{31}

إرشادات للدراسة

خصائص الجذر التربيعي راجع خصائص الجذر التربيعي التي درستها سابقًا .

يمكنك حل بعض المعادلات التربيعية باستعمال خصائص الجذر التربيعي .

مثال 3 معادلة حلولها أعداد تخيلية بحتة

حُلّ المعادلة $4x^2 + 256 = 0$.

المعادلة الأصلية	$4x^2 + 256 = 0$
بطرح 256 من الطرفين	$4x^2 = -256$
بقسمة كلا الطرفين على 4	$x^2 = -64$
خاصية الجذر التربيعي	$x = \pm\sqrt{-64}$
$\sqrt{-64} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{-1} = 8i$	$x = \pm 8i$

تأكد

حُلّ كل معادلة مما يأتي :

3A) $4x^2 + 100 = 0$ **3B)** $x^2 + 4 = 0$

العمليات على الأعداد المركبة يتكون التعبير $3i + 2$، حيث 2 عدد حقيقي، $3i$ عدد تخيلي بحت، من حدين غير متشابهين، ولا يمكن جمعهما. ويسمى هذا النوع من التعابير **بالعدد المركب**.

مفهوم أساسي الأعداد المركبة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي العدد المركب هو أي عدد يمكن كتابته على الصورة $a + bi$، حيث a ، b عددان حقيقيان، i الوحدة التخيلية، ويسمى a الجزء الحقيقي، وb الجزء التخيلي.

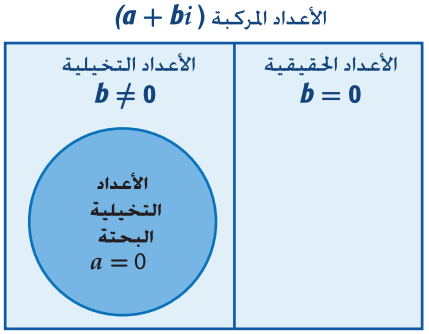
أمثلة $5 + 2i$ $1 - 3i = 1 + (-3)i$

يوضح شكل ڤن المجاور مجموعة الأعداد المركبة .

- إذا كانت $b = 0$ ، فإن العدد المركب يكون عددًا حقيقيًّا.
- إذا كانت $b \neq 0$ ، فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًّا.
- إذا كانت $a = 0$ ، فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًّا بحتًا.

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزآن الحقيقيان، والجزآن التخيليان ، أيْ أن:

$a + bi = c + di$ إذا وفقط إذا كان $a = c$ ، $b = d$.



إرشادات للدراسة

الأعداد المركبة

على الرغم من أن الأعداد الحقيقية هي أيضًا أعداد مركبة، إلا أن التعبير "عدد مركب" يشير عادة إلى الأعداد غير الحقيقية فقط.

مثال 4 تساوي الأعداد المركبة

أوجد قيمتي x ، y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة $3x - 5 + (y - 3)i = 7 + 6i$ صحيحة.

ساوِ الجزأين الحقيقيين أحدهما بالآخر، وكذلك الجزأين التخيليين.

الجزآن الحقيقيان	$3x - 5 = 7$	الجزآن التخيليان	$y - 3 = 6$
بإضافة 5 لكلا الطرفين	$3x = 12$	بإضافة 3 لكلا الطرفين	$y = 9$
بقسمة كلا الطرفين على 3	$x = 4$		

تأكد

4) أوجد قيمتي x ، y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة $5x + 1 + (3 + 2y)i = 2x - 2 + (y - 6)i$ صحيحة.

ويمكن استعمال كل من الخاصية الإبدالية والخاصية التجميعية وخاصية التوزيع عند جمع الأعداد المركبة وضربها، ولكي تجمع أو تطرح أعدادًا مركبة، جمّع الأجزاء المتشابهة؛ أيْ جمِّع الأجزاء الحقيقية معًا وجمِّع الأجزاء التخيلية معًا.

مثال 5 جمع الأعداد المركّبة وطرحها

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي :

a) $(5 - 7i) + (2 + 4i)$

خاصيتي الإبدال و التجميع

$(5 - 7i) + (2 + 4i) = (5 + 2) + (-7 + 4)i$

بالتبسيط

$= 7 - 3i$

b) $(4 - 8i) - (3 - 6i)$

خاصيتي الإبدال والتجميع

$(4 - 8i) - (3 - 6i) = (4 - 3) + [-8 - (-6)]i$

بالتبسيط

$= 1 - 2i$

تأكد

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي :

5A) $(-2 + 5i) + (1 - 7i)$

5B) $(4 + 6i) - (-1 + 2i)$

تستعمل الأعداد المركبة في مسائل الكهرباء، ففي الدوائر الكهربائية ذات التيار المتردد يمكن تمثيل فرق الجهد، وشدة التيار، والمقاومة بأعداد مركبة، ولضرب هذه الأعداد تستعمل طريقة التوزيع بالترتيب.

مثال 6 من واقع الحياة — ضرب الأعداد المركبة

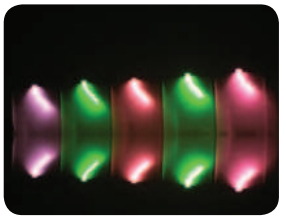
كهرباء: يرتبط فرق الجهد V، وشدة التيار C، والمقاومة I في الدوائر الكهربائية ذات التيار المتردد بالصيغة $V = C \cdot I$. أوجد فرق الجهد في دائرة كهربائية ذات تيار متردد إذا كانت شدة تيارها Amp $(2 + 4i)$، ومقاومتها Ω $(9 - 3i)$.

الصيغة الرياضية	$V = C \cdot I$
$C = 2 + 4i$, $I = 9 - 3i$	$= (2 + 4i) \cdot (9 - 3i)$
باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب	$= 2(9) + 2(-3i) + 4i(9) + 4i(-3i)$
بالضرب	$= 18 - 6i + 36i - 12i^2$
$i^2 = -1$	$= 18 + 30i - 12(-1)$
بالجمع	$= 30 + 30i$

فرق الجهد هو V $(30 + 30i)$.

تأكد

6) أوجد فرق الجهد لتيار متردد شدته Amp $(2 - 4i)$، ومقاومته Ω $(3 - 2i)$.



الربط مع واقع الحياة

مصابيح الزينة هي من الأمثلة على الدوائر الكهربائية الموصولة على التوالي، ويؤثر عدد المصابيح فيها في شدة التيار، فينعكس هذا على شدة الإضاءة.

المصدر:
Popular Science

يسمّى العددان $a - bi$, $a + bi$ **عددين مركبين مترافقين**، وناتج ضربهما هو عدد حقيقي دائمًا. ويمكنك استعمال هذه الحقيقة لإيجاد ناتج قسمة عددين مركّبين.

مثال 7 — قسمة الأعداد المركبة

بسّط كلًّا مما يأتي :

a) $\frac{2i}{3 + 6i}$

$3 - 6i$ ، $3 + 6i$ عددان مركبان مترافقان	$\frac{2i}{3 + 6i} = \frac{2i}{3 + 6i} \cdot \frac{3 - 6i}{3 - 6i}$
بالضرب	$= \frac{6i - 12i^2}{9 - 36i^2}$
$i^2 = -1$	$= \frac{6i - 12(-1)}{9 - 36(-1)}$
بالتبسيط	$= \frac{6i + 12}{45}$
بكتابة الناتج على الصورة $a + bi$	$= \frac{4}{15} + \frac{2}{15}i$

b) $\frac{4 + i}{5i}$

بالضرب في $\frac{i}{i}$	$\frac{4 + i}{5i} = \frac{4 + i}{5i} \cdot \frac{i}{i}$
بالضرب	$= \frac{4i + i^2}{5i^2}$
$i^2 = -1$	$= \frac{4i - 1}{-5}$
بكتابة الناتج على الصورة $a + bi$	$= \frac{1}{5} - \frac{4}{5}i$

تأكد

بسّط كلًّا مما يأتي :

7A) $\frac{-2i}{3 + 5i}$ **7B)** $\frac{2 + i}{1 - i}$

تأكد من فهمك

المثالان 1 , 2
الصفحتان 159, 160

بسّط كلًّا مما يأتي :

1) $\sqrt{-81}$

2) $\sqrt{-32}$

3) $(4i)(-3i)$

4) $3\sqrt{-24} \cdot 2\sqrt{-18}$

5) i^{40}

6) i^{63}

مثال 3
صفحة 160

حُلّ كل معادلة مما يأتي :

7) $4x^2 + 32 = 0$

8) $2x^2 + 24 = 0$

مثال 4
صفحة 161

في كل معادلة مما يأتي أوجد قيمتي a , b الحقيقيتين اللتين تجعلانها صحيحة :

9) $3a + (4b + 2)i = 9 - 6i$

10) $4b - 5 + (-a - 3)i = 7 - 8i$

الأمثلة 5 - 7
الصفحتان 161, 162

بسّط كلًّا مما يأتي :

11) $(-1 + 5i) + (-2 - 3i)$

12) $(7 + 4i) - (1 + 2i)$

13) $(6 - 8i)(9 + 2i)$

14) $(3 + 2i)(-2 + 4i)$

15) $\frac{3 - i}{4 + 2i}$

16) $\frac{2 + i}{5 + 6i}$

مثال 5
صفحة 161

17) **كهرباء:** تبلغ شدة التيار في أحد أجزاء دائرة كهربائية موصولة على التوالي Amp $(5 - 3i)$، وفي الجزء الآخر من الدائرة Amp $(7 + 9i)$. اجمع هذين العددين المركبين؛ لإيجاد شدة التيار الكلية في الدائرة.

تدرب وحل المسائل

المثالان 1 , 2
الصفحتان 159, 160

بسّط كلًّا مما يأتي :

18) $\sqrt{-121}$

19) $\sqrt{-169}$

20) $\sqrt{-100}$

21) $\sqrt{-81}$

22) $(-3i)(-7i)(2i)$

23) $4i(-6i)^2$

24) i^{11}

25) i^{25}

26) $(-3 + i) + (-4 - i)$

27) $(11 - 8i) - (2 - 8i)$

28) $(1 + 2i)(1 - 2i)$

29) $(3 + 5i)(5 - 3i)$

30) $(4 - i)(6 - 6i)$

31) $\frac{2i}{1 + i}$

32) $\frac{5}{2 + 4i}$

33) $\frac{5 + i}{3i}$

مثال 3
صفحة 160

حُلّ كل معادلة مما يأتي :

34) $4x^2 + 4 = 0$

35) $3x^2 + 48 = 0$

36) $2x^2 + 10 = 0$

37) $6x^2 + 108 = 0$

مثال 4
صفحة 161

في كل معادلة مما يأتي أوجد قيمتي x, y الحقيقيتين اللتين تجعلانها صحيحة :

38 $x + 1 + 2yi = 3 - 6i$

39 $2x + 7 + (3 - y)i = -4 + 6i$

40 $5 + y + (3x - 7)i = 9 - 3i$

41 $(2x - 4y)i + x + 5y = 15 + 58i$

بسّط كلًّا مما يأتي :

الأمثلة 7 - 5
الصفحتان 161, 162

42 $\sqrt{-10} \cdot \sqrt{-24}$

43 $4i\left(\frac{1}{2}i\right)^2(-2i)^2$

44 i^{41}

45 $(4 - 6i) + (4 + 6i)$

46 $(8 - 5i) - (7 + i)$

47 $(-6 - i)(3 - 3i)$

48 $(1 + i)(2 + 3i)(4 - 3i)$

49 $\frac{4 - i\sqrt{2}}{4 + i\sqrt{2}}$

50 $\frac{2 - i\sqrt{3}}{2 + i\sqrt{3}}$

مثال 5
صفحة 161

51 **كهرباء:** تبلغ المقاومة في أحد أجزاء دائرة كهربائية $(7 + 8i)\ \Omega$، وفي الجزء الآخر منها $(13 + 4i)\ \Omega$. اجمع هذين العددين المركّبين ؛ لإيجاد المقاومة الكلية في الدائرة الكهربائية.

كهرباء: استعمل الصيغة $V = C \cdot I$، حيث V فرق الجهد، C شدة التيار، I المقاومة في حل التمرينين 53 , 52 :

52 إذا كانت شدة التيار في دائرة كهربائية $(3 - 6i)$ Amp، والمقاومة $(5 + i)\ \Omega$ ، فكم يكون فرق الجهد ؟

53 إذا كان فرق الجهد في دائرة كهربائية $(20 - 12i)$ V، والمقاومة $(6 - 4i)\ \Omega$ ، فكم تكون شدة التيار؟

54 أوجد ناتج جمع $7 + x(4 + 5i) - ix^2$ مع $-8i + x(2 + 6i) + 3x^2$.

55 بسّط التعبير $[(2 + i)x^2 - ix + 5 + i] - [(-3 + 4i)x^2 + (5 - 5i)x - 6]$

56 **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذا التمرين جمع الأعداد المركبة في المستوى المركب. فالمستوى المركب يشبه إلى حد بعيد المستوى الحقيقي، وفيه تكون الأعداد الحقيقية على المحور x والأعداد التخيلية البحتة على المحور y.

a) تمثيل بياني: مثّل العدد $3 + 4i$ بيانيًّا في المستوى المركب برسم قطعة مستقيمة من نقطة الأصل إلى النقطة $(3, 4)$، وسمِّ تلك النقطة A.

b) تمثيل بياني: مثّل العدد $-2 - 5i$ بيانيًّا في المستوى المركب برسم قطعة مستقيمة من نقطة الأصل إلى النقطة $(-2, -5)$، وسمِّها B.

c) تمثيل بياني: إذا كانت النقطتان A, B ونقطة الأصل ثلاثة رؤوس لمتوازي أضلاع فأكمل رسمه بإضافة النقطة الرابعة C .

d) تحليل: ما العدد المركب الذي تمثله النقطة C ؟ وما العلاقة بين النقاط A, B, C؟

الربط مع واقع الحياة

الكهرباء التي نستعملها هي أحد مصادر الطاقة التي يتم توليدها أيضًا من الوقود والمفاعلات النووية ومصادر طبيعية أخرى.

المصدر:
Energy Information Administration

مسائل مهارات التفكير العليا

57) اكتشف الخطأ: قامت كل من صفاء ومنال بتبسيط $(2i)(3i)(4i)$، أيهما كانت إجابتها صحيحة؟ برِّر إجابتك:

صفاء	منال
$24i^3 = -24i$	$24i^3 = -24$

58) تحدٍّ: بسّط العدد المركب $(1 + 2i)^3$.

59) تبرير: حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا . برِّر إجابتك.

"يتكون كل عدد مركب من جزء حقيقي وجزء تخيلي".

60) مسألة مفتوحة: اكتب عددين مركّبين يكون حاصل ضربهما يساوي 20

61) اكتب: وضح كيف ترتبط الأعداد المركبة بالمعادلات التربيعية، وكيف تحدد ما إذا كان للمعادلة التربيعية حلول مركبة فقط أو لا ؟

تدريب على اختبار معياري

62) ما قيمتا x , y الحقيقيتان اللتان تجعلان $(5 + 4i) - (x+yi) = (-1-3i)$ صحيحة؟

A $x = 6, y = 7$ **C** $x = 4, y = i$

B $x = 4, y = i$ **D** $x = 4, y = 7$

63) ما قيمة $(3 + 6i)^2$ ؟

A $-27 + 36i$ **C** $9 - 36$

B $9 + 36$ **D** $36 - 27i$

مراجعة تراكمية

حُلّ كل معادلة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 3-3)

64) $2x^2 + 7x = 15$ **65)** $4x^2 - 12 = 22x$ **66)** $6x^2 = 5x + 4$

نظرية الأعداد: استعمل معادلة تربيعية؛ لإيجاد عددين حقيقيين يحققان كلًّا مما يأتي. أو بيّن أنه لا يوجد مثل هذين العددين : (الدرس 3-3)

67) مجموعهما 3−، وحاصل ضربهما 40 − .

68) مجموعهما 21 −، وحاصل ضربهما 108

مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد قيمة $b^2 - 4ac$ في كلٍّ مما يأتي:

69) $a = 5, b = 6, c = 2$ **70)** $a = -2, b = -7, c = 3$ **71)** $a = -5, b = -8, c = -10$

3-5 حل المعادلات التربيعية جبريًّا
Solving Quadratic Equations Algebraically

فيما سبق

درستُ حل المعادلات التربيعية بيانيًا

والآن

الأفكار الرئيسة

- أحل معادلات تربيعية بالتحليل.
- أحل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام.
- أستعمل المميز؛ لتحديد عدد جذور معادلة تربيعية وأنواعها.

المفردات الأساسية

الصورة التحليلية
Factored Form

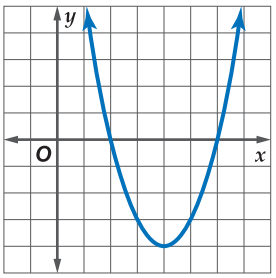
القانون العام
Quadratic Formula

المميز
discriminant

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

الصورة التحليلية للمعادلة التربيعية هي: $(x - p)(x - q) = 0$، حيث p,q مقطعا التمثيل البياني من المحور x ، ففي الشكل المجاور مقطعا المحور x هما 2 ، 6.



مقطعا المحور x هما 2 , 6

ستتعلم في هذا الدرس كيفية تحويل المعادلة التربيعية من الصورة التحليلية إلى الصورة القياسية والعكس .

الصورة القياسية	الصورة التحليلية
$x^2 - 8x + 12 = 0$	$(x - 6)(x - 2) = 0$

العوامل

حل المعادلات بالتحليل تساعدك طرائق التحليل الآتية في تحليل كثيرات الحدود.

ملخص مفاهيم — **طرائق التحليل**

أضف إلى مطويتك

طريقة التحليل	الحالة العامة
إخراج العامل المشترك الأكبر	$a^3b^2 - nab^2 = ab^2\,(a^2 - n)$
الشكل العام لثلاثي الحدود	$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
الفرق بين مربعين	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
المربع الكامل	$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

يُعدُّ حل المعادلة التربيعية باستعمال التحليل تطبيقًا لخاصية حاصل الضرب الصفري.

مفهوم أساسي — **خاصية حاصل الضرب الصفري**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي لأي عددين حقيقيين a ، b ، إذا كان $ab = 0$ ، فإما أن تكون $a=0$ أو $b=0$ أو كلاهما يساوي صفرًا.

مثال إذا كان $(x + 3)(x - 5) = 0$، فإن $x + 3 = 0$ أو $x - 5 = 0$.

مثال 1 حل المعادلات التربيعية

حل المعادلات التربيعية الآتية:

a $16x^2 + 8x = 0$

بإخراج العامل المشترك الأكبر $8x\,(2x+1) = 0$

خاصية حاصل الضرب الصفري $2x + 1 = 0$ أو $8x = 0$

بحل كل معادلة $2x = -1$ أو $8x = 0$

بالتبسيط $x = \frac{-1}{2}$ أو $x = 0$

وعليه يكون الحلان هما 0 , $\frac{-1}{2}$

تحقق

عوض بكلتا القيمتين في المعادلة الأصلية.

$16x^2 + 8x = 0$

$16(\frac{-1}{2})^2 + 8(\frac{-1}{2}) \stackrel{?}{=} 0$

$4 + (-4) \stackrel{?}{=} 0$

$0 = 0$ ✓

$500 = -16t^2 + 40500$

$16\,(0)^2 + 8(0) \stackrel{?}{=} 0$

$0 = 0$ ✓

b $x^2 + 16x + 64 = 0$

وعليه الحل باستعمال المربع الكامل، الصيغة العامة للمربع الكامل هي

$(a \pm b)^2 = (a^2 \pm 2ab + b^2)$

حيث أن $x^2+16x+64=((x)^2+(2)(8)x+(8)^2)$ وعليه فإن $x^2+16x+64$ يمثل مربعًا كاملًا، ويمكن كتابة المعادلة الأصلية بصورة مربع كامل

$(x+8)^2 = 0$

خاصية الجذر التربيعي $x + 8 = 0$

بحل المعادلة $x = -8$

وعليه يكون الحل هو -8

تحقق

عوض بقيمة الحل في المعادلة الأصلية.

$x^2 + 16x + 64 = 0$

$(-8)^2 + 16(-8) + 64 \stackrel{?}{=} 0$

$64 + (-128) + 64 \stackrel{?}{=} 0$

$0 = 0$ ✓

إرشادات للدراسة

كتابة المعادلات

الصورة التحليلية للمعادلة التربيعية $(x-p)(x-q) = 0$ تنتج معادلة واحدة لها الجذران p, q . في الحقيقة هنالك عدد غير منتهي من المعادلات التي لها الجذران نفسهما.

إرشادات للدراسة

ابدأ بإخراج العامل المشترك الأكبر (إن وجد) عند تحليل حدود المعادلة لأنه يجعل الحل أسهل

مراجعة المفردات

مربع كامل هو عدد له جذر تربيعي موجب كلي.

BH MT10 SE1 CH03 .indd 167 9/5/23 12:08 PM

c) $x^2 + 9x + 20 = 0$

$x^2 + 9x + 20 = 0$

بتحليل ثلاثية الحدود: $(x + 5)(x + 4) = 0$

خاصية حاصل الضرب الصفري: $x + 4 = 0$ أو $x + 5 = 0$

بحل المعادلة: $x = -4$ أو $x = -5$

وعليه يكون الحلان هما -4 , -5

تحقق

عوض بكلتا القيمتين في المعادلة الأصلية.

$x^2 + 9x + 20 = 0$

$(-4)^2 + 9(-4) + 20 \stackrel{?}{=} 0$

$0 = 0$ ✓

$x^2 + 9x + 20 = 0$

$(-5)^2 + 9(-5) + 20 \stackrel{?}{=} 0$

$0 = 0$ ✓

تأكد

حل المعادلات التربيعية الآتية:

1A) $20x^2 + 15x = 0$

1B) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

1C) $x^2 - 4x - 21 = 0$

1D) $-12x^2 + 8x + 15 = 0$

مثال 2 حل المعادلات التربيعية

رياضة: يعطى ارتفاع الرمح عند رميه وفق $h(t) = -16t^2 + 79t + 5$ ، حيث t تمثل الزمن بالثواني. كم من الوقت يستغرق حتى يعود إلى سطح الأرض؟

لنجد كم يمضي الرمح في الهواء، علينا أن نحسب t عندما يكون الارتفاع صفرًا، أي حل المعادلة $-16t^2 + 79t + 5 = 0$.

المعادلة الأصلية: $-16t^2 + 79t + 5 = 0$

$-16(5) = -80,\ 80\,(-1) = -80,\ 80 + (-1) = 79$: $m = 80, p = -1$

بكتابة النمط: $-16t^2 + 80t - t + 5 = 0$

بتجميع الحدود التي لها عامل مشترك: $(-16t^2 + 80t) + (-t + 5) = 0$

بإخراج العامل المشترك الأكبر: $16t(-t + 5) + 1(-t + 5) = 0$

خاصية التوزيع: $(16t + 1)(-t + 5) = 0$

خاصية حاصل الضرب الصفري: $16t + 1 = 0$ أو $-t + 5 = 0$

بحل كل معادلة: $16t = -1$ أو $-t = -5$

$t = -\frac{1}{16}$ أو $t = 5$

تحقق لدينا حلان:

- الحل الأول سالب، وحيث إن الزمن لن يكون سالبًا نحذف هذه الإجابة.
- الحل الثاني 5 sec، وهو معقول لبقاء الرمح في الهواء.

الربط مع واقع الحياة

حطمت اللاعبة الكوبية أوزليدس مينيديز (Osleidys Menedez) الرقم القياسي العالمي لرمي الرمح عام 2002 م، حيث وصلت مسافة الرمح 234 ft و 8 in.

المصدر: New York Times

- ويمكن التأكد بتعويض القيمة 5 في المعادلة الأصلية.

$$-16t^2 + 79t + 5 = 0$$

$$-16(5)^2 + 79(5) + 5 \stackrel{?}{=} 0$$

$$-400 + 395 + 5 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \quad ✓$$

يبقى الرمح في الهواء 5 sec.

تأكد

2) تتم عملية إنزال بعض المعونات من طائرة على ارتفاع 1100 ft لتستقر على تلة ترتفع 76 ft عن الموقع المستهدف. إذا كان ارتفاع الطرد النازل بعد t من الثواني يعطى بالعلاقة $f(t) = -16t^2 + c$، حيث c ارتفاع الطائرة، فكم من الوقت يمضي حتى يلامس الطرد التلة من لحظة سقوطه؟

تمكنت من حل بعض المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني، أو باستعمال خاصية الجذر التربيعي أو بالتحليل إلى العوامل.

وعلى الرغم من أن التحليل إلى العوامل أسهل لحل بعض المعادلة التربيعية. إلا أن **القانون العام** للمعادلة يحل أية معادلة تربيعية.

قانون

أضف إلى مطويتك

القانون العام لحل المعادلة التربيعية

التعبير اللفظي يمكن حل المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ باستعمال القانون العام لحل المعادلة:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال باستعمال القانون العام لحل المعادلة $x^2 + 5x + 6 = 0$

حدّد قيم كل من a, b, c

$$a = 1, b = 5, c = 6$$

عوّض هذه القيم في القانون العام

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

مثال 3 جذران حقيقيان (نسبيان)

حِلْ المعادلة $x^2 - 10x = 11$ باستعمال القانون العام.

أولًا: اكتب المعادلة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ ، وحدّد قيم كل من a, b, c .

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$x^2 - 10x = 11 \quad \rightarrow \quad 1x^2 - 10x - 11 = 0$$

ثم عوّض هذه القيم في القانون العام.

القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

بالتعويض عن a بالعدد 1، b بالعدد -10، c بالعدد -11

$$= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(-11)}}{2(1)}$$

بالضرب

$$= \frac{10 \pm \sqrt{100 + 44}}{2}$$

بالتبسيط

$$= \frac{10 \pm \sqrt{144}}{2}$$

$\sqrt{144} = 12$

$$= \frac{10 \pm 12}{2}$$

بكتابتها معادلتين

$$x = \frac{10 + 12}{2} \quad \text{أو} \quad x = \frac{10 - 12}{2}$$

بالتبسيط

$$= 11 \qquad = -1$$

وعليه يكون الحلان هما 11، -1.

تحقق عوّض كلتا القيمتين في المعادلة الأصلية.

$x^2 - 10x = 11$	$x^2 - 10x = 11$
$(-1)^2 - 10(-1) \stackrel{?}{=} 11$	$(11)^2 - 10(11) \stackrel{?}{=} 11$
$1 + 10 \stackrel{?}{=} 11$	$121 - 110 \stackrel{?}{=} 11$
$11 = 11$ ✓	$11 = 11$ ✓

تأكد

حِلْ كلًّا من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام:

(3A $x^2 + 6x = 16$

(3B $2x^2 + 25x + 33 = 0$

عندما تساوي قيمة ما تحت الجذر 0 في القانون العام، يكون للمعادلة التربيعية جذر حقيقي (نسبي) واحد .

تاريخ الرياضيات

براهام جوبتا

(598-668 م) عالم رياضي هندي، وهو أول من أوجد حلًا عامًا للمعادلة التربيعية التي على الصورة $ax^2 + bx = c$، وهو ما يُسمى الآن بالقانون العام لحل المعادلة التربيعية.

مثال 4 جذر حقيقي (نسبي) واحد

حِلْ المعادلة $x^2 + 8x + 16 = 0$ باستعمال القانون العام .

حدّد قيم كل من a, b, c، ثم عوّض هذه القيم في القانون العام .

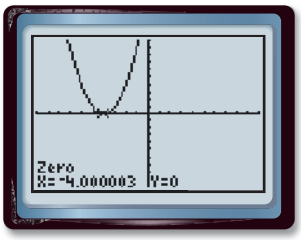
القانون العام $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

بالتعويض عن a بالعدد 1 ، b بالعدد 8 ، c بالعدد 16 $= \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)}$

بالتبسيط $= \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2}$

$\sqrt{0} = 0$ $= \frac{-8}{2} = -4$

الحل هو -4 .



تحقق يظهر التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة وجود حل واحد عند $x = -4$.

تأكد

حِلْ كلًّا من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام:

(4A) $x^2 - 16x + 64 = 0$ **(4B)** $x^2 + 34x + 289 = 0$

يمكنك التعبير عن الجذور غير النسبية بكتابتها على الصورة الجذرية .

مثال 5 جذران حقيقيان (غير نسبيين)

حِلْ المعادلة $2x^2 + 6x - 7 = 0$ باستعمال القانون العام.

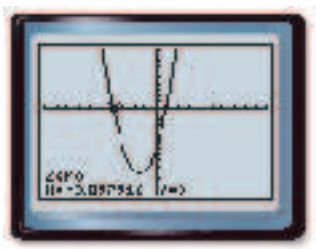
القانون العام $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

بالتعويض عن a بالعدد 2 ، b بالعدد 6 ، c بالعدد -7 $= \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(2)(-7)}}{2(2)}$

بالتبسيط $= \frac{-6 \pm \sqrt{92}}{4}$

$\sqrt{92} = \sqrt{4\,(23)} = 2\sqrt{23}$ $= \frac{-6 \pm 2\sqrt{23}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{23}}{2}$

الحلان التقريبيان هما 0.9 ، -3.9



تحقق: تحقق من صحة الحل بتمثيل الدالة المرتبطة بالمعادلة $y = 2x^2 + 6x - 7$ بيانيًّا. مستعملًا خاصية Zero في الآلة الحاسبة البيانية للحصول على القيمتين التقريبيتين لصفري الدالة المرتبطة وهما: 0.9 ، -3.9

تأكد

حِلْ كلًّا من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام:

(5A) $3x^2 + 5x + 1 = 0$ **(5B)** $x^2 - 8x + 9 = 0$

إذا كان ما تحت الجذر في القانون العام عددًا سالبًا، فإن الحلين يكونان عددين مركبين مترافقين.

مثال 6 الجذور المركبة

حِلْ المعادلة $x^2 - 6x = -10$ باستعمال القانون العام.

القانون العام
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

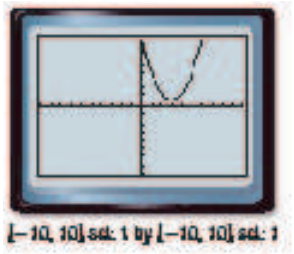
بالتعويض عن a بالعدد 1 ، b بالعدد -6 ، c بالعدد 10
$$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

بالتبسيط
$$= \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = 2i$
$$= \frac{6 \pm 2i}{2}$$

بالتبسيط
$$= 3 \pm i$$

الحلان هما $3 - i$ ، $3 + i$ عددان مركبان مترافقان.



تحقق يظهر التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة أن الحلّين هما عددان مركبان، ولكن لا يساعدك التمثيل البياني على إيجادهما . وللتحقق من صحة الحلين المركبين، عوّض بهما في المعادلة الأصلية.

المعادلة الأصلية
$$x^2 - 6x = -10$$

$x = 3 + i$
$$(3 + i)^2 - 6(3 + i) \stackrel{?}{=} -10$$

بإيجاد مفكوك $(3 + i)^2$ ، وخاصية التوزيع
$$9 + 6i + i^2 - 18 - 6i \stackrel{?}{=} -10$$

بالتبسيط
$$-9 + i^2 \stackrel{?}{=} -10$$

$i^2 = -1$
$$-9 - 1 = -10 \quad \checkmark$$

المعادلة الأصلية
$$x^2 - 6x = -10$$

$x = 3 - i$
$$(3 - i)^2 - 6(3 - i) \stackrel{?}{=} -10$$

بإيجاد مفكوك $(3 - i)^2$ ، وخاصية التوزيع
$$9 - 6i + i^2 - 18 + 6i \stackrel{?}{=} -10$$

بالتبسيط
$$-9 + i^2 \stackrel{?}{=} -10$$

$i^2 = -1$
$$-9 - 1 = -10 \quad \checkmark$$

تأكد

حِلْ كلًّا من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام:

(6A) $3x^2 + 5x + 4 = 0$ **(6B)** $x^2 - 4x = -13$

الجذور والمميز في المعادلة التربيعية لاحظ العلاقة بين قيمة التعبير تحت الجذر وجذور المعادلة التربيعية في الأمثلة السابقة. يسمى التعبير $b^2 - 4ac$ **بالمميّز**.

المميّز ←
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

يمكن استعمال قيمة المميّز لتحديد عدد جذور المعادلة التربيعية، ونوعها، ويلخص الجدول في الصفحة الآتية الأنواع الممكنة للجذور . ويمكن أن يستعمل المميّز للتأكد من عدد الحلول وأنواعها بعد حل المعادلة التربيعية.

إرشادات للدراسة

الأعداد المركبة تذكّر أن تكتب حلك على الصورة $a + bi$ ، وتسمى هذه الصورة الصورة القياسية للعدد المركب.

إرشادات للدراسة

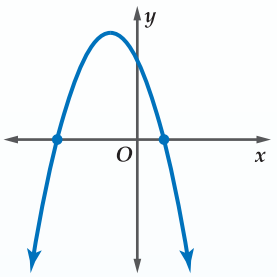
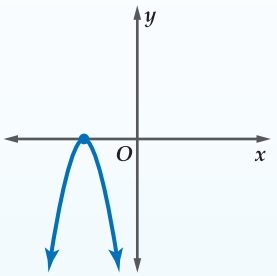
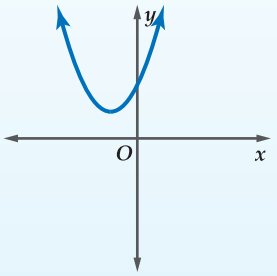
الجذور تذكّر أن حلول المعادلة تسمى جذورًا، وهي قيم x التي يقطع عندها التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة المحور x.

مفهوم أساسي

اضف إلى مطويتك

المميز

في المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث a,b,c أعداد نسبية، $a \neq 0$.

قيمة المميز	عدد الجذور وأنواعها	مثال على التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة
$b^2 - 4ac > 0$ ، والعبارة $b^2 - 4ac$ مربع كامل .	جذران حقيقيان نسبيان	
$b^2 - 4ac > 0$ ، والعبارة $b^2 - 4ac$ ليست مربعًا كاملًا.	جذران حقيقيان غير نسبيين	
$b^2 - 4ac = 0$	جذر حقيقي (نسبي) واحد	
$b^2 - 4ac < 0$	جذران مركبان	

مثال 7

وصف الجذور

أوجد قيمة المميّز لكل من المعادلتين التربيعيتين الآتيتين ، ثم حدد عدد جذور كل منهما وأنواعها:

a $7x^2 - 11x + 5 = 0$

$a = 7, b = -11, c = 5$

$b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4(7)(5)$

$= 121 - 140$

$= -19$

المميز سالب؛ لذا يوجد جذران مركبان.

b $x^2 + 22x + 121 = 0$

$a = 1, b = 22, c = 121$

$b^2 - 4ac = (22)^2 - 4(1)(121)$

$= 484 - 484$

$= 0$

المميز يساوي صفرًا؛ لذا يوجد جذر حقيقي واحد.

تأكد

أوجد قيمة المميّز لكل من المعادلتين التربيعيتين الآتيتين ، ثم حدد عدد جذور كل منهما وأنواعها:

7A $-5x^2 + 8x - 1 = 0$

7B $-7x + 15x^2 - 4 = 0$

درست فيما سبق طرائق مختلفة لحل المعادلات التربيعية، ويلخص الجدول أدناه تلك الطرائق.

إرشادات للدراسة

دراسة الملاحظات

قد ترغب في تدوين جدول الطرائق المجاور في دفتر ملاحظاتك أو في مطويتك لتكون مرجعًا لك عند الدراسة.

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

حل المعادلات التربيعية

الطريقة	إمكانية استعمالها	متى تستعمل
التمثيل البياني	أحيانًا	عندما لا يطلب إيجاد الحل الفعلي، وأفضل استعمال لها عند التحقق من معقولية الحلول التي يتم إيجادها بالطرائق الجبرية.
التحليل إلى العوامل	أحيانًا	عندما يساوي الحد الثابت صفرًا، أو عندما يكون من السهل إيجاد العوامل . **مثال:** $x^2 - 7x = 0$
خاصية الجذر التربيعي	أحيانًا	مع المعادلات المكتوبة في صورة مربع كامل يساوي ثابتًا. **مثال:** $(x - 5)^2 = 18$
القانون العام	دائمًا	**عندما لا يمكن استعمال بقية الطرائق السابقة أو عندما يكون من الصعب استعمالها.** **مثال:** $2.3x^2 - 1.8x + 9.7 = 0$

تأكد من فهمك

مثال 1
الصفحتان 167,168

حِلْ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال التحليل:

(1) $x^2 + 9x = 0$

(2) $x^2 - 3x + 28 = 0$

(3) $2x^2 - 24x = -72$

(4) $35x^2 + 15x = 0$

(5) $18x^2 - 3x = 4 - 24x$

(6) $x^2 - 12 = -32$

(7) $x^2 + 4x - 21 = 0$

(8) $2x^2 + 7x - 30 = 0$

(9) $16x^2 - 16x = -3$

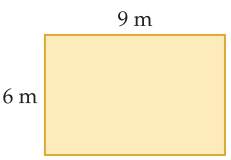
(10) $x^2 - 36 = 0$

(11) $12x^2 - 2x = 2$

(12) $x^2 + 5x = -4$

مثال 2
صفحة 168

(13) **بستنة:** تريد عائشة أن تجعل مساحة سطح حديقتها مثليْ ما هي عليها الآن من خلال زيادة طولها وعرضها بالمقدار نفسه. ما الأبعاد الجديدة للحديقة؟



الأمثلة 3-6
الصفحات 170-172

حِلْ كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

(14) $x^2 + 12x - 9 = 0$

(15) $x^2 + 8x + 5 = 0$

(16) $4x^2 - 5x - 2 = 0$

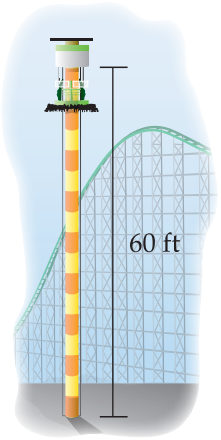
(17) $9x^2 + 6x - 4 = 0$

(18) $10x^2 - 3 = 13x$

(19) $22x = 12x^2 + 6$

(20) $-3x^2 + 4x = -8$

(21) $x^2 + 3 = -6x + 8$



22) ترفيه: تمثل حركة لعبة ترفيهية بالدالة $h = -16t^2 - 64t + 60$، حيث h الارتفاع بالأقدام، و t الزمن بالثواني. إذا علمت أنها ترتفع إلى قمة البرج، ثم تهوي بسرعة تصل إلى 80 ft\sec، فما الزمن الذي يستغرقه هبوطها من ارتفاع 60 ft إلى 0 ft ؟

مثال 7
صفحة 172

أجب عن الفرعين a،b لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميّز.

b) أوجد عدد الجذور، وحدد أنواعها.

23) $3x^2 + 8x + 2 = 0$

24) $2x^2 - 6x + 9 = 0$

25) $-16x^2 + 8x - 1 = 0$

26) $5x^2 + 2x + 4 = 0$

تدرب وحل المسائل

مثال 1
الصفحتان 167,168

حِلْ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال التحليل:

27) $x^2 + 4x - 45 = 0$

28) $x^2 - 5x - 24 = 0$

29) $x^2 = 121$

30) $x^2 + 13 = 17$

31) $-3x^2 - 10x + 8 = 0$

32) $-8x^2 + 46x - 30 = 0$

33) $5x^2 = 15x$

34) $16x^2 + 36 = -48x$

35) $4x^2 - 144 = 0$

36) $10x^2 + 25x = 15$

37) $27x^2 + 5 = 48x$

38) $x^2 + 0.25x = 1.25$

39) $48x^2 - 15 = -22x$

40) $3x^2 + 2x = 3.75$

41) $-32x^2 + 56x = 12$

42) $49a^2 - 32a = 0$

43) $51c^2 - 34c = 0$

44) $12y^2 - 108 = 0$

45) $3x^2 - 12 = 0$

46) $15y^2 - 240 = 0$

47) $12x^2 + 13x = 14$

48) $x^2 + 13x + 40 = 0$

49) $x^2 - 9x = 22$

50) $3x^2 + 12x - 36 = 0$

51) $15x^2 - 7x = 2$

52) $4x^2 + 29x = -30$

53) $18x^2 + 15x = 12$

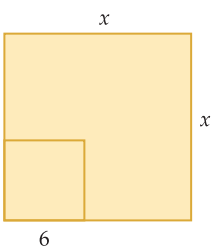
54) $8z^2 - 4z + 12 = 0$

55) $9x^2 - 25 = 0$

56) $18y^2 - 24y = -36$

مثال 2
صفحة 168

57) تصميم: قطع مربع من الشكل الموضّح المجاور، اكتب تعبيرًا لمساحة سطح الشكل المتبقي، ثم حلله.



58) ثقافة مالية: بعد دراسة السوق، قرر صاحب مصنع اعتماد دالة الربح $P(x) = -16x^2 + 368x - 2035$، حيث تمثل x سعر المنتج، $p(x)$ ربح المصنع. حدد مجال سعر المنتج كي لا يتعرض المصنع للخسارة.

59) نظرية الأعداد: أوجد عددين صحيحين زوجيين متتالين حاصل ضربهما 624.

الأمثلة 3-6
الصفحات 170-172

حِلْ كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

60) $x^2 + 45x = -200$

61) $4x^2 - 6 = -12x$

62) $5x^2 - 9 = 11x$

63) $12x^2 + 9x - 2 = -17$

64) سباحة: يقفز متسابق من فوق منصة ارتفاعها 10 m عن سطح الماء عاليًا مبتعدًا عن المنصة، ويمكن تقدير ارتفاع المتسابق عن سطح الماء h بالأمتار بعد t ثانية بالمعادلة $h = -4.9t^2 + 3t + 10$.

a) حدد كلًّا من المجال والمدى المقبولين لهذه الدالة .

b) متى يصل المتسابق إلى سطح الماء؟

مثال 7
صفحة 172

أجب عن الفروع a–c لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميّز.

b) أوجد عدد الجذور، وحدد أنواعها.

c) حِلْ المعادلة باستعمال القانون العام.

65) $2x^2 + 3x - 3 = 0$

66) $3x^2 - 3x + 8 = 0$

67) $2x^2 + 4x + 7 = 0$

68) $-5x^2 + 4x + 1 = 0$

69) $x^2 - 6x = -9$

70) $x^2 + 2x - 4 = -9$

71) $-6x^2 + 5 = -4x + 8$

72) $5x^2 + 8x = 0$

73) $8x^2 = -2x + 1$

74) $4x - 3 = -12x^2$

75) $0.8x^2 + 2.6x = -3.2$

76) $0.6x^2 + 1.4x = 4.8$

الربط مع واقع الحياة

في إطار الجهود العالمية لمكافحة التدخين، تقوم وزارة الصحة بالمملكة بحملات توعوية لمكافحة التدخين؛ لما له من أضرار جسيمة على الفرد والمجتمع، حيث أكدت بعض الإحصائيات أن عدد المتوفّين من جراء آفة التدخين يقدَّر بخمسة ملايين شخص سنويًا.

77) التدخين: تبذل دول العالم جهودًا مكثَّفة للتوعية بأخطار التدخين، أثمرت عن تناقص أعداد المدخنين. وفي إحدى البلدان أُجريت دراسة حول الإصابات بمرض سرطان الرئة بين كل 100000 شخص في بعض الأعوام، كانت نتائجها التقريبية كما في الجدول المجاور. ويمكن تمثيل العدد التقريبي للمصابين بالمعادلة $y = -0.26x^2 - 0.55x + 91.81$، حيث x عدد السنوات بعد عام 2000.

العام	عدد الإصابات لكل 100000
2000	92
2002	90
2004	85
2010	?
2015	?

a) احسب عدد المصابين بسرطان الرئة لكل 100000 شخص في عامي 2010, 2015 .

b) استعمل القانون العام؛ لإيجاد قيمة x عندما $y = 50$.

c) اعتمادًا على الدالة التربيعية، متى يصبح معدل الإصابة يساوي صفرًا؟ وهل هذا التوقع معقول؟ برِّر إجابتك.

78) نظرية الأعداد: يُعطى مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية n ,..., 3, 2, 1 بالقانون $S = \frac{1}{2} n(n+1)$. كم عددًا صحيحًا متتاليًا بدءًا بالعدد 1 مجموعها يساوي 666؟

إرشادات للدراسة

الثوابت الثوابت a، b، c يمكن أن تكون أعدادًا صحيحة، أو غير نسبية، أو مركبة.

مسائل مهارات التفكير العليا

79) اكتشف الخطأ: يحل كلٌّ من منير، وعبد اللطيف المعادلة $-12x^2 + 5x + 2 = 0$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

منير

$-12x^2 + 5x + 2 = 0$

$-12x^2 + 8x - 3x + 2 = 0$

$4x(-3x + 2) + (-3x + 2) = 0$

$(4x + 1)(-3x + 2) = 0$

$x = -\frac{1}{4}$ أو $\frac{2}{3}$

عبد اللطيف

$-12x^2 + 5x + 2 = 0$

$-12x^2 + 8x - 3x + 2 = 0$

$4x(-3x + 2) - (3x + 2) = 0$

$(4x - 1)(3x + 2) = 0$

$x = \frac{1}{4}$ أو $\frac{2}{3}$

80) تحدٍّ: حِلْ المعادلة $4ix^2 - 4ix + 5i = 0$ باستعمال القانون العام.

81) تبرير: حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا أو أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وضّح إجابتك:

" إذا كان مميّز المعادلة التربيعية أكبر من 1، فإن لها جذرين حقيقيين غير نسبيين".

82) اكتب: صِف ثلاث طرائق مختلفة لحل المعادلة $x^2 - 2x - 15 = 0$. وأيها تفضل؟ ولماذا؟

تدريب على اختبار معياري

83) قدرت شركة ربحها الشهري p بـ: $P = -8x^2 + 165x - 100$، حيث x سعر بيع القطعة الواحدة من المنتج. أي مما يأتي يُعد تقديرًا لأعلى سعر للقطعة الواحدة من المنتج بحيث لا تتعرض الشركة للخسارة؟

A BD 10 **B** BD 20 **C** BD 30 **D** BD 40

84) أي القيم الآتية ستكون مساوية تقريبًا لإحدى قيمتي x في المعادلة $2x^2 - 5x - 9 = 0$؟

A -1.12 **B** 1.54 **C** 2.63 **D** 3.71

مراجعة تراكمية

بسّط كلًّا مما يأتي: (الدرس 4-3)

85) i^{26} **86)** $\sqrt{-16}$ **87)** $(4\sqrt{-9}) \cdot (2\sqrt{-25})$

مثِّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا: (الدرس 3-1)

88) $f(x) = x^2 - 6x + 2$ **89)** $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$ **90)** $f(x) = (x - 3)(x + 4)$

توسّع

3-5 مجموع الجذرين وحاصل ضربهما

Sums and Products of Roots

الهدف

كتابة المعادلة التربيعية بمعرفة مجموع جذريها وحاصل ضربهما.

إذا علمت جذري معادلة تربيعية فإنه يمكنك كتابتها باستعمال مجموع جذريها وحاصل ضربهما.

للمعادلة التربيعية $x^2 + 5x - 24 = 0$ جذران هما -8 , 3
ومجموعهما -5 ، وحاصل ضربهما -24.

مجموع الجذرين $3 + (-8) = -5$

-5 هو النظير الجمعي لمعامل x

$x^2 + 5x - 24 = 0$

-24 هو الحد الثابت

حاصل ضرب الجذرين $3(-8) = -24$

ويمكن تعميم ذلك لأي معادلة تربيعية باستعمال القانون العام لحل المعادلة التربيعية. إذا كان جذرا المعادلة التربيعية r_1 , r_2 فإن:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مجموع الجذرين

$$r_1 + r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

بالتبسيط

$$= \frac{-2b + 0}{2a} = -\frac{b}{a}$$

مجموع الجذرين يساوي $-\frac{b}{a}$

حاصل ضرب الجذرين

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

بالضرب

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

الخاصية التوزيعية

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

بالتبسيط

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

حاصل ضرب الجذرين يساوي $\frac{c}{a}$

مما سبق يمكن التوصل للقانون الآتي الذي يستعمل لكتابة أي معادلة تربيعية علم جذراها.

قانون — **مجموع جذري معادلة وحاصل ضربهما**

أضف إلى مطويتك

إذا كان r_1 , r_2 هما جذري المعادلة $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ ، فإن

$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$, $r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$.

النشاط 1 استعمال مجموع جذرين وحاصل ضربهما

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها -7 , 2.

الخطوة 1 أوجد مجموع الجذرين

$$r_1 + r_2 = 2 + (-7)$$
$$= -5$$

الخطوة أوجد حاصل ضرب الجذرين

$$r_1 \cdot r_2 = 2(-7)$$
$$= -14$$

الخطوة 3 اكتب المعادلة

بما أن $-14 = \frac{c}{a}$, $-5 = -\frac{b}{a}$ ، وإذا كانت $a = 1$، فإن $b = -5$, $c = -14$.

لذا فالمعادلة $x^2 + 5x - 14 = 0$ تحقق المطلوب.

النشاط 2 استعمال مجموع جذرين وحاصل ضربهما

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها $-\frac{12}{5}$, $\frac{3}{4}$.

الخطوة 1 أوجد مجموع الجذرين

$$r_1 + r_2 = \frac{3}{4} + \left(-\frac{12}{5}\right)$$
$$= \frac{15}{20} - \frac{48}{20} = -\frac{33}{20}$$

الخطوة 2 أوجد حاصل ضرب الجذرين

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{3}{4}\left(-\frac{12}{5}\right)$$
$$= -\frac{36}{20}$$

الخطوة 3 اكتب المعادلة.

بما أن $-\frac{36}{20} = \frac{c}{a}$, $-\frac{33}{20} = -\frac{b}{a}$ ، وإذا كانت $a = 20$، فإن $b = 33$, $c = -36$.

لذا فالمعادلة $20x^2 + 33x - 36 = 0$ تحقق المطلوب.

تمارين:

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها العددان المعطيان في كل مما يأتي:

1) $-\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ **2)** $-7, \frac{2}{3}$ **3)** $\pm\frac{2}{5}$ **4)** $4 \pm \sqrt{3}$

5) $1 \pm \sqrt{6}$ **6)** $\frac{-2 \pm 3\sqrt{5}}{7}$ **7)** $7 \pm 3i$ **8)** $\sqrt{5} \pm 8i$

اكتب المعادلة التربيعية التي تحقق كلًّا مما يأتي:

9) مجموع جذريها 4، وحاصل ضربهما $\frac{13}{12}$.

10) مجموع جذريها $\frac{1}{6}$، وحاصل ضربهما $\frac{5}{21}$.

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا (الدرس 3-1)

- التمثيل البياني للدالة $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$، هو قطع مكافئ يكون مفتوحًا إلى أعلى، وله قيمة صغرى عندما تكون $a>0$. ويكون مفتوحًا إلى أسفل وله قيمة عظمى عندما تكون $a<0$.

تحويلات التمثيلات البيانية للدوال التربيعية (الدرس 3-2)

- عند تغيير قيم h ، k ، فإن منحنى الدالة $y = (x - h)^2 + k$ هو منحنى الدالة $y = x^2$ نفسه، ولكن تمّت إزاحته $|h|$ وحدة إلى اليسار إذا كانت h سالبة، أو $|h|$ وحدة إلى اليمين إذا كانت h موجبة، و $|k|$ وحدة إلى أعلى إذا كانت k موجبة، و $|k|$ وحدة إلى أسفل إذا كانت k سالبة.

- في المعادلة $y = a(x - h)^2 + k, a \neq 0$. إذا كان $a > 0$، يكون المنحنى مفتوحًا إلى أعلى، وإذا كان $a < 0$ يكون مفتوحًا إلى أسفل، وإذا كان $|a|>1$ يكون أضيق من المنحنى $y = x^2$. أما إذا كان $|a|<1$، فإن المنحنى يكون أوسع من منحنى $y = x^2$.

حل المعادلات التربيعية (الدرس 3-3)

- الحلول أو الجذور للمعادلات التربيعية هي أصفار الدالة التربيعية المرافقة، وبإمكانك أن تجد أصفار الدالة التربيعية عن طريق إيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع المحور x مع منحنى الدالة.

الأعداد المركبة (الدرس 3-4)

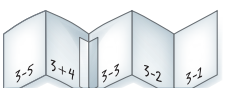
- i هي الوحدة التخيلية حيث $i^2 = -1$, $i = \sqrt{-1}$

القانون العام لحل المعادلة التربيعية والمميّز (الدرس 3-5)

- القانون العام هو $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

مطويتك منظم أفكار

تأكد أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.



المفردات الأساسية

الدالة غير الخطية ص 128
الدالة التربيعية ص 128
القطع المكافئ ص 128
الصورة القياسية ص 129
محور التماثل ص 129
الرأس ص 129
القيمة العظمى ص 131
القيمة الصغرى ص 131
صيغة الرأس ص 142
المعادلة التربيعية ص 150
الصيغة القياسية ص 150
جذور المعادلة ص 150
أصفار الدالة ص 150
الصورة التحليلية ص 166
الوحدة التخيلية ص 159
العدد التخيلي البحت ص 159
العدد المركب ص 160
عددان مركبان مترافقان ص 162
القانون العام ص 169
المميز ص 173

اختبر مفرداتك

حدّد ما إذا كانت العبارات الآتية صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة، فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة.

1) الصيغة التحليلية لمعادلة الدرجة الثانية هي $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$، a, b, c أعداد صحيحة.

2) التمثيل البياني لأي دالة تربيعية قطع مكافئ.

3) صيغة الرأس للمعادلة التربيعية هي $y = a(x-p)(x-q)$.

4) محور تماثل القطع المكافئ يقطعه عند الرأس.

5) تُسمى المعادلة $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ بالمميز.

6) العدد $6i$ عدد تخيلي بحت.

7) $2i + 3$ ، $2i - 3$ عددان مركبان مترافقان.

8) العدد المركب يكتب بالصورة $a + bi$.

مراجعة الدروس

3-1 تمثيل الدوال التربيعية بيانيًّا (الصفحات 128-139)

أجب عن الفروع من a, b, c لكل دالة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد كلًّا من مقطع المحور y، ومعادلة محور التماثل، والإحداثي x لرأس القطع المكافئ.

b) كوّن جدولًا لبعض قيم x ، $f(x)$،على أن يتوسط فيه الإحداثي x لرأس القطع هذه القيم.

c) استعمل المعلومات التي حصلت عليها لتمثيل الدالة التربيعية.

9) $f(x) = x^2 + 5x + 12$

10) $f(x) = -2x^2 + 9x - 5$

11) حدّد ما إذا كان لـ $f(x) = -x^2 + 3x - 1$ قيمة عظمى أو قيمة صغرى، وأوجدها، ثم اذكر مجالها ومداها.

12) إطار صورة: تصنع عبلة إطار صورة مستطيل الشكل، ولديها 72cm من الخشب لصنعه، ما أبعاد الإطار بحيث يحيط بأكبر مساحة ممكنة؟

مثال 1

أوجد مقطع المحور y، ومعادلة محور التماثل، والإحداثي x لرأس القطع المكافئ الذي معادلته $f(x) = x^2 - 4x + 11$.

$a = 1, b = -4, c = 11$

إذن مقطع المحور y يساوي 11

استعمل a, b ؛ لإيجاد معادلة محور التماثل

معادلة محور التماثل $x = -\frac{b}{2a}$

$a = 1, b = -4$ $= -\frac{-4}{2(1)}$

بالتبسيط $= 2$

إذن معادلة محور التماثل $x = 2$

أي الإحداثي x لرأس القطع هو 2 .

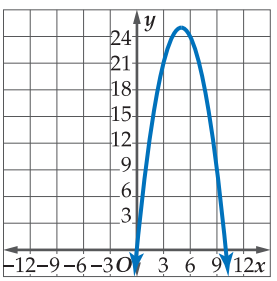
3-2 التحويلات الهندسية في التمثيلات البيانية للدوال التربيعية (الصفحات 142-149)

اكتب كل معادلة مما يأتي بصيغة الرأس، (إن لم تكن مكتوبة كذلك)، ثم حدّد رأس القطع، ومعادلة محور التماثل، واتجاه فتحة القطع، ومثل الدالة بيانيًّا:

13) $y = -3(x - 1)^2 + 5$ **14)** $y = 2x^2 + 12x - 8$

15) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 12$ **16)** $y = 3x^2 + 36x + 25$

17) نظرية الأعداد: يُبيّن التمثيل البياني أدناه حاصل ضرب عددين مجموعهما 10. أوجد المعادلة التي تمثل حاصل الضرب، واستعملها لمعرفة هذين العددين اللذين سيعطيان أكبر حاصل ضرب.



مثال 2

اكتب المعادلة التربيعية $y = 3x^2 + 24x + 15$ بصيغة الرأس، ثم حدّد رأس القطع، ومعادلة محور التماثل، واتجاه فتحة القطع.

المعادلة الأصلية $y = 3x^2 + 24x + 15$

الخاصية التجميعية، ثم التحليل $y = 3(x^2 + 8x) + 15$

بإكمال المربع $y = 3(x^2 + 8x + 16) + 15 - 3(16)$

بكتابة $x^2 + 8x + 16$ على صورة مربع كامل $y = 3(x + 4)^2 - 33$

وهكذا فإن $a = 3, h = -4, k = -33$. ويكون رأس القطع $(-4, -33)$، ومعادلة محور التماثل $x = -4$، وبما أن a موجبة، فإن القطع مفتوح إلى أعلى.

3-3 حل المعادلات التربيعية بيانيًا (الصفحات 150-165)

حِلْ كل معادلة مما يأتي بيانيًّا، وإذا لم تتمكن من إيجاد القيم الفعلية للجذور، فحدد العددين الصحيحين المتتاليين اللذين يقع بينهما هذا الجذر:

18) $x^2 - x - 20 = 0$

19) $2x^2 - x - 3 = 0$

20) $4x^2 - 6x - 15 = 0$

21) $\frac{1}{5}(x+3)^2 - 5 = 0$

22) قُذفت كرة إلى أعلى بسرعة 120ft/sec وكانت معادلة حركتها $h(t) = v_0 t - 16t^2$، حيث $h(t)$ هو ارتفاع الكرة بالأقدام، و t الزمن بالثواني، و v_0 سرعتها الابتدائية بالقدم لكل ثانية. كم من الزمن تستغرقه الكرة حتى ترتطم بالأرض (أهمل ارتفاع الكرة)؟

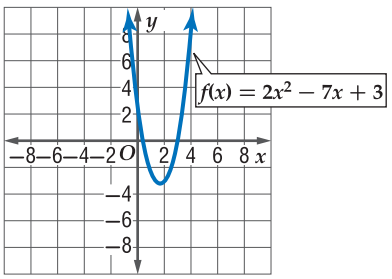
مثال 3

حِلْ المعادلة $2x^2 - 7x + 3 = 0$ بيانيًّا.

معادلة محور التماثل هي:

$$x = -\frac{-7}{2(2)} = \frac{7}{4}$$

x	0	1	$\frac{7}{4}$	2	3
$f(x)$	3	−2	$-2\frac{5}{8}$	−3	0



أصفار الدالة المرافقة هي $\frac{1}{2}$ ، 3.

لذا فحلول المعادلة هي $\frac{1}{2}$ ، 3.

3-4 الأعداد المركبة (الصفحات 159-165)

بسّط كلًّا مما يأتي:

23) $\sqrt{-8}$

24) $(2 - i) + (13 + 4i)$

25) $(6 + 2i) - (4 - 3i)$

26) $(6 + 5i)(3 - 2i)$

27) كهرباء: إذا كانت المقاومة في أحد أجزاء دائرة كهربائية موصولة على التوالي $(3 + 2i)\ \Omega$، وفي الجزء الآخر منها $(4 - 3i)\ \Omega$. اجمع هذين العددين؛ لإيجاد المقاومة الكلية في الدائرة الكهربائية.

حِلْ كلًّا من المعادلات الآتية:

28) $2x^2 + 50 = 0$

29) $4x^2 + 1 = 0$

30) $3x^2 + 15 = 0$

31) $8x^2 + 16 = 0$

مثال 4

بسّط $(12 + 3i) - (-5 + 2i)$.

$$(12 + 3i) - (-5 + 2i)$$

بتجميع الحدود الحقيقية معًا والحدود التخيلية معًا: $= [12 - (-5)] + (3 - 2)i$

بالتبسيط: $= 17 + i$

مثال 5

حِلْ المعادلة $3x^2 + 12 = 0$.

المعادلة الأصلية	$3x^2 + 12 = 0$
بطرح 12 من كلا الطرفين	$3x^2 = -12$
بقسمة كلا الطرفين على 3	$x^2 = -4$
خاصية الجذر التربيعي	$x = \pm\sqrt{-4}$
$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}$	$x = \pm 2i$

3-5 حل المعادلات التربيعية جبريًا (الصفحات 159-165)

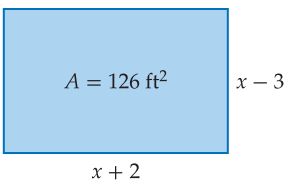
حِلْ كل معادلة مما يأتي بالتحليل:

32) $2x^2 - 2x - 24 = 0$

33) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

34) $3x^2 - 16x + 5 = 0$

35) أوجد قيمة x وبُعدي المستطيل الممثل أدناه.



أجب عن الفروع a–c لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميّز.

b) أوجد عدد الجذور المختلفة، وحدد أنواعها.

c) حِلْ المعادلة باستعمال القانون العام.

36) $x^2 - 10x + 25 = 0$ **37)** $x^2 + 4x - 32 = 0$

38) $2x^2 + 3x - 18 = 0$ **39)** $4x^2 - 4x + 1 = 0$

40) فيزياء: قذف محمد كرة رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 40 ft/s. إذا علمت أن ارتفاع الكرة عن الأرض (h) بالأقدام يعطى بالدالة $h(t) = -16t^2 + 40t + 5$، حيث t الزمن بالثواني، فأوجد الزمن اللازم لتصل الكرة إلى الارتفاع الذي قذفت منه.

مثال 6

حِلْ المعادلة $x^2 + 9x + 20 = 0$ باستعمال التحليل.

المعادلة الأصلية $x^2 + 9x + 20 = 0$

بالتحليل إلى عوامل $(x + 4)(x + 5) = 0$

خاصية حاصل الضرب الصفري $x + 4 = 0$ أو $x + 5 = 0$

$x = -4$ أو $x = -5$

مجموعة الحل هي $\{-5, -4\}$.

مثال 7

حِلْ المعادلة $x^2 - 4x - 45 = 0$ باستعمال القانون العام.

$a = 1, b = -4, c = -45$

القانون العام $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-45)}}{2(1)}$

$= \dfrac{4 \pm 14}{2}$

بالكتابة على صورة معادلتين $x = \dfrac{4 + 14}{2}$ أو $x = \dfrac{4 - 14}{2}$

$= 9$ $= -5$

إذن مجموعة الحل $\{-5, 9\}$.

اختبار الفصل

أجب عن الفروع a, b, c في كل معادلة مما يأتي:

a) أوجد مقطع المحور y، ومعادلة محور التماثل، والإحداثي x لرأس القطع.

b) كوّن جدولًا لبعض قيم x ، $f(x)$ على أن يتوسط فيه الإحداثي x لرأس القطع هذه القيم.

c) استعمل المعلومات التي حصلت عليها لتمثيل الدالة بيانيًّا.

1) $f(x) = x^2 + 4x - 7$

2) $f(x) = -2x^2 + 5x$

3) $f(x) = -x^2 - 6x - 9$

حدد ما إذا كان لكل دالة مما يأتي قيمة عظمى أو قيمة صغرى، وأوجدها:

4) $f(x) = x^2 + 10x + 25$

5) $f(x) = -x^2 + 6x$

حِلْ كل معادلة مما يأتي باستعمال أي طريقة تختارها، وأوجد الحلول الفعلية:

6) $x^2 - 8x - 9 = 0$

7) $-4.8x^2 + 1.6x + 24 = 0$

8) $12x^2 + 15x - 4 = 0$

9) $x^2 - 7x - \frac{17}{4} = 0$

10) $4x^2 + x = 3$

11) $-9x^2 + 40x + 84 = 0$

12) ألقى أحد الهواة جسمًا رأسيًّا إلى أسفل بسرعة ابتدائية مقدارها 30 ft\sec من منطاد يرتفع 350 ft عن سطح الأرض، كم يستغرق الجسم حتى يصل سطح الأرض (استعمل المعادلة $-16t^2 - 30t + 350 = 0$ لحساب الزمن اللازم)؟

13) **اختيار من متعدد:** أي المعادلات الآتية جذراها $\frac{1}{5}, -6$ ؟

a) $0 = 5x^2 - 29x - 6$

b) $0 = 5x^2 + 31x + 6$

c) $0 = 5x^2 + 29x - 6$

d) $0 = 5x^2 - 31x + 6$

بسط كلًّا مما يأتي:

14) $(3 - 4i) - (9 - 5i)$

15) $\frac{4i}{4 - i}$

أجب عن الفروع a, b, c في كل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميّز.

b) أوجد عدد الجذور، وحدد أنواعها.

c) حِلْ المعادلة باستعمال القانون العام.

16) $6x^2 + 7x = 0$

17) $5x^2 = -6x + 1$

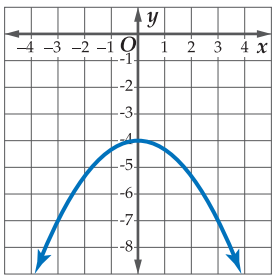
18) $2x^2 + 5x - 8 = -13$

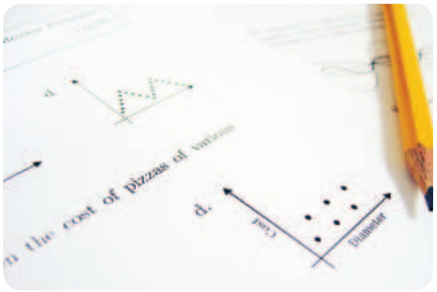
اكتب كل معادلة مما يأتي باستعمال صيغة الرأس، ثم حدد رأس القطع ومعادلة محور التماثل واتجاه فتحة القطع:

19) $3x^2 + 6x = 2 + y$

20) $x^2 + 9x + \frac{81}{4} = y$

21) أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل ومقطع المحور y للتمثيل البياني المجاور.





استعمال التمثيل البياني

استعمال الرسومات والمنحنيات يساعدك على حل أنواع مختلفة من المسائل في الاختيارات المعيارية. فالرسم يساعدك على حل المعادلات، وتجد قيم الدوال، وتفسير حلول المسائل الحياتية.

استراتيجيات استعمال التمثيل البياني

الخطوة 1

اقرأ المسألة بعناية، واسأل نفسك:

- ما المطلوب حله؟
- ما المعلومات المعطاة في المسألة؟
- كيف يمكن أن يساعد الرسم على حل المسألة؟

الخطوة 2

ارسم التمثيل البياني.

- مثل التمثيل البياني على ورقة مسودة مناسبة.
- يمكنك استعمال الآلة الحاسبة البيانية للتمثيل البياني.

الخطوة 3

حِلْ مسألة.

- استعمل تمثيلك البياني لحل المسألة.
- تحقق إن كان حلك منطقيًّا أو معقولًا.

مثال

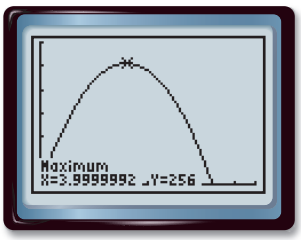
اقرأ المسألة، وحدد المطلوب، ثم استعمل معطيات المسألة لحلِّها.

صنع طلاب أحد الصفوف نموذج صاروخ، وأطلق في حقل واسع إلى أعلى بسرعة ابتدائية 128 ft/sec، وتمثل $h(t) = -16t^2 + 128t$ ارتفاع الصاروخ h بالأقدام بعد t ثانية. كم يحتاج من الوقت ليصل أقصى ارتفاع؟

A 4 sec
B 5 sec
C 6 sec
D 8 sec

التهيئة للاختبارات المعيارية

يسمح لك التمثيل البياني للدالة التربيعية أن تحدد قيمة ارتفاع الصاروخ عندما تحدث. وتساعدك الآلة الحاسبة البيانية في سرعة الحصول على الشكل وتحليله.



اضغط المفاتيح: Graph 128 X,T,θ,n + x^2 X,T,θ,n 16 (–) Y=

بعد تمثيل المعادلة استعمل Maximum قائمة CALC.

اضغط 4 [CALC] 2nd . ثم ◀ لوضع المؤشر على يسار النقطة العظمى،

ثم اضغط ENTER . استعمل الأسهم ▶ لوضع المؤشر على يمين النقطة العظمى،
ثم اضغط ENTER مرتين.

يوضّح التمثيل البياني لمسار الصاروخ أنه يحتاج إلى 4 sec للوصول إلى أقصى ارتفاع ويبلغ 256 ft ،

الإجابة الصحيحة هي A.

تمارين

اقرأ كل مسألة مما يأتي، وحدّد المطلوب، ثم استعمل معطيات المسألة لحلها.

1) ما جذرا المعادلة $y = 2x^2 + 10x - 48$؟

A $-5, 4$ **C** $-8, 3$

B $-6, 1$ **D** $2, 3$

2) كم مرة يقطع التمثيل البياني لـ $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ المحور x ؟

A 0 **C** 2

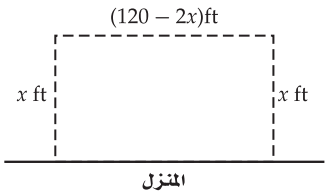
B 1 **D** 3

3) ما قيمة x التي تجعل قيمة $f(x) = x^2 + 5x + 6$ أقل ما يمكن؟

F -5 **H** $-\frac{5}{2}$

G -3 **J** -2

4) يستعمل محمد 120 ft من السياج؛ ليغلق 3 جهات من حديقته التي تشكل مستطيلًا، ويغلق منزله وهو الجهة الرابعة للحديقة.



وتمثل $f(x) = x(120 - 2x)$ مساحة سطح الحديقة. ما أكبر مساحة يمكن أن يسيجها محمد؟

F 1650 ft² **H** 1980 ft²

G 1800 ft² **J** 2140 ft²

5) لأي معادلة يكون الإحداثي x لرأس القطع يساوي 4؟

A $f(x) = x^2 - 8x + 15$ **C** $f(x) = x^2 + 6x + 8$

B $f(x) = -x^2 - 4x + 12$ **D** $f(x) = -x^2 - 2x + 2$

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1) ما التأثير الحادث للتمثيل البياني للدالة $y = x^2 + 4$ عندما تتغير إلى $y = x^2 - 3$؟

A يضيق القطع المكافئ.

B يتسع القطع المكافئ.

C يبقى القطع المكافئ نفسه، ويتحرك رأس القطع إلى الأسفل.

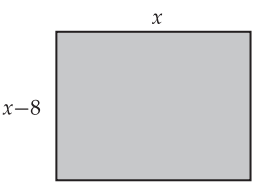
D يبقى القطع المكافئ نفسه، ويتحرك رأس القطع إلى اليسار.

2) ما مجموعة الحل للمعادلة $3(2x + 1)^2 = 27$ ؟

A $\{-5, 4\}$ **C** $\{2, -1\}$

B $\{-2, 1\}$ **D** $\{-3, 3\}$

3) ما قيمة x التي تجعل مساحة سطح المستطيل أدناه 48 وحدة مربعة؟



A 4 **C** 8

B 6 **D** 12

4) مجموعة الأعداد التي ينتمي إليها العدد $-\sqrt{27}$ هي:

A Z **C** W

B I **D** Q

5) أي معادلات القطوع المكافئة الآتية يكون تمثيلها البياني أوسع رأسيًّا ؟

A $y = 3x^2$ **C** $y = \frac{3}{4}x^2$

B $y = -\frac{3}{4}x^2$ **D** $y = -6x^2$

6) ما أبسط صورة للمقدار $\frac{2}{1 - 5i}$ ؟

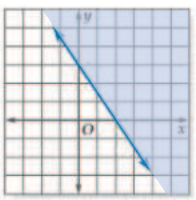
A $\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$ **C** $\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i$

B $\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$ **D** $2 - \frac{2}{5}i$

7) ما المتباينة التي تمثيلها البياني كما في الشكل أدناه؟

A $2x + 3y \geq 6$ **C** $3x + 2y \leq 6$

B $2x - 3y \geq 6$ **D** $3x + 2y \geq 6$

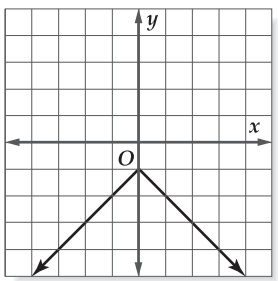


8) ما مجموعة حل المعادلة: $|2x - 1| = 2x - 3$ ؟

A $\{1\}$ **C** $\{1, -2\}$

B $\{-2\}$ **D** $\{\}$

9) ما المعادلة الأم للدالة الممثلة أدناه؟



A $y = x^2$ **C** $y = |x|$

B $y = x$ **D** $y = [[x]]$

10) ما جذرا المعادلة التربيعية $4 = 3x^2 + x$ ؟

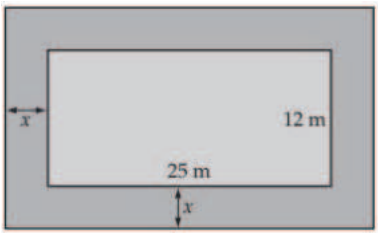
A $-1, \frac{4}{3}$ **C** $-2, \frac{2}{3}$

B $-\frac{4}{3}, 1$ **D** $-\frac{2}{3}, 2$

أسئلة مقالية

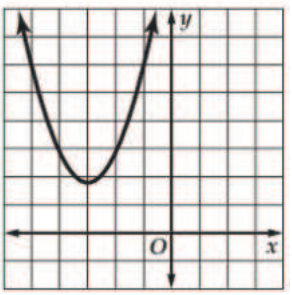
أسئلة ذات إجابات قصيرة

11) يُبيّن الشكل أدناه حديقة محاطة بممر عرضه x مترًا. إذا علمت أن مساحة سطح الحديقة مع الممر $558\ \text{m}^2$ ، فأوجد عرض الممر بالأمتار.



12) ما معادلة المستقيم المار بالنقطة (2, 3) وعمودي على المستقيم $4y + 2x = 4$ ؟

13) استعمل الدالة التربيعية أدناه للإجابة عن الفروع الآتية:



a) كم جذرًا حقيقيًّا للدالة؟

b) كم جذرًا تخيليًّا للدالة؟

c) ماذا تعرف عن المميّز لهذه الدالة؟ فسّر إجابتك.

14) أوجد مجموعة حل المتباينة: $3x \geq \frac{2y - 5}{4}$ ، ثم مثلها على خط الأعداد.

15) أوجد مقطع المحور y ، ومعادلة محور التماثل، والإحداثي x لرأس القطع لِـ $f(x) = x^2 - 8x + 9$.

أسئلة ذات إجابات مطولة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضحًا خطوات الحل:

16) أُطلِق صاروخ تجريبي من مستوى سطح الأرض. إذا عبرت المعادلة $h = -4.9t^2 + 56t$ عن ارتفاع الصاروخ بالأمتار، و t تمثل الزمن بالثواني بعد الإطلاق

a) ما أقصى ارتفاع سيصل إليه الصاروخ؟ قرِّب إلى أقرب عُشْر، وبيِّن كل خطوة مفسِّرًا طريقتك في الحل.

b) كم يستغرق الصاروخ بعد إطلاقه ليصل إلى أقصى ارتفاع؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

17) أوجد مجموعة حّل كل متباينة مما يأتي، ثم مثلها على خط الأعداد

a) $-15 < 2x + 1 < 31$

b) $\frac{2}{3}y + 14 \leq 8$ أو $\frac{y + 5}{3} > 2$

c) $|x + 1| < 7$

d) $|8k + 2| \geq 12$

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟																		
إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
فاذهب للدرس ...	3-2	3-5	3-5	1-1	3-2	3-4	2-3	1-2	2-5	3-5	3-5	2-2	3-5	1-3	3-1	3-5	1-4

الصيـغ

المحيـط

المربع	$P = 4s$	المستطيل	$P = 2\ell + 2w$	الدائرة	$C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$

المساحـة

المربع	$A = s^2$	المُعيّن	$A = \frac{1}{2}d_1 d_2$ أو $A = bh$
المستطيل	$A = \ell w$ أو $A = bh$	المثلث	$A = \frac{1}{2}bh$
متوازي الأضلاع	$A = bh$	المضلع المنتظم	$A = \frac{1}{2}Pa$
شبه المنحرف	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$	الدائرة	$A = \pi r^2$

المساحة الجانبية

المنشور	$L = Ph$	الهرم	$L = \frac{1}{2}P\ell$
الأسطوانة	$L = 2\pi rh$	المخروط	$L = \pi r\ell$

المساحة السطحية

المنشور	$T = Ph + 2B$	المخروط	$T = \pi r\ell + \pi r^2$
الأسطوانة	$T = 2\pi rh + 2\pi r^2$	الكرة	$T = 4\pi r^2$
الهرم	$T = \frac{1}{2}P\ell + B$		

الحجـم

المكعب	$V = s^3$	الهرم	$V = \frac{1}{3}Bh$
متوازي المستطيلات	$V = \ell wh$	المخروط	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
المنشور	$V = Bh$	الكرة	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
الأسطوانة	$V = \pi r^2 h$	المخروط	$L = \pi r\ell$
الأسطوانة	$L = 2\pi rh$		

المعادلات في المستوى الإحداثي

معادلة المستقيم في المستوى (ميل - مقطع)	$y = mx + b$	معادلة القطع المكافئ	$y = a(x - h)^2 + k$

صيـغ جبرية

الفرق بين مربعين	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$	المربع الكامل	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$		$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

الخصائص الجبرية

العنصر المحايد الجمعي	لأي عدد a، $a + 0 = 0 + a = a$	النظير الجمعي	لأي عدد a، يوجد عدد واحد فقط $-a$ بحيث يكون $a + (-a) = 0$
العنصر المحايد الضربي	لأي عدد a، $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	النظير الضربي	لأي عدد $\frac{a}{b}$ حيث $b \neq 0$، فإنه يوجد عدد وحيد $\frac{b}{a}$ بحيث يكون $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$
التعويض (=)	إذا كان $a = b$، فإنه يمكن التعويض عن a بـ b	الضرب في 0	لأي عدد a، $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

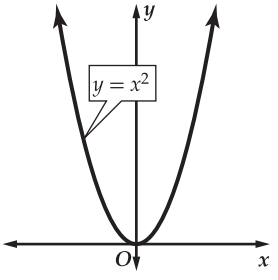
الصيغ

الخصائص الجبرية

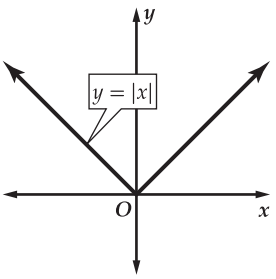
الانعكاس (=)	$a = a$
التماثل (=)	إذا كان $a = b$ ، فإن $b = a$
التعدي (=)	إذا كان $a = b$ و $b = c$ ، فإن $a = c$
الإبدال (+)	لأي عددين a, b ، فإن $a + b = b + a$
الإبدال (×)	لأي عددين a, b ، فإن $a \cdot b = b \cdot a$
التجميع (+)	لأي أعداد a, b, c ، فإن $(a + b) + c = a + (b + c)$
التجميع (×)	لأي أعداد a, b, c ، فإن $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
التوزيع	لأي أعداد a, b, c ، فإن $a(b + c) = ab + ac$ و $a(b - c) = ab - ac$
الجمع (=)	لأي أعداد a, b, c ، إذا كان $a = b$ ، فإن $a + c = b + c$
الطرح (=)	لأي أعداد a, b, c ، إذا كان $a = b$ ، فإن $a - c = b - c$
الضرب والقسمة (=)	لأي أعداد a, b, c ، بحيث $c \neq 0$ ، إذا كان $a = b$ ، فإن $ac = bc$ ، $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$
الجمع *(>)	لأي أعداد a, b, c ، إذا كان $a > b$ ، فإن $a + c > b + c$
الطرح *(>)	لأي أعداد a, b, c ، إذا كان $a > b$ ، فإن $a - c > b - c$
الضرب والقسمة *(>)	لأي أعداد: a, b, c 1) إذا كان $a > b, c > 0$ ، فإن $ac > bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ 2) إذا كان $a > b, c < 0$ ، فإن $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
الصفر في الضرب	لأي عددين حقيقيين a, b ، إذا كان $ab = 0$ ، فإن $a = 0$ أو $b = 0$ أو كليهما يساوي صفرًا.

الدوال الأم

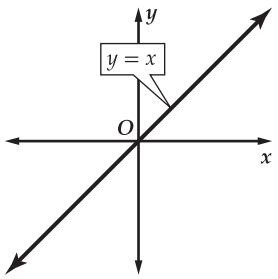
الدوال التربيعية



دوال القيمة المطلقة



الدوال الخطية



* هذه الخصائص صحيحة أيضًا لكل من : $\geq, \leq, <$

الرمـوز

مساوٍ تقريبًا لـ	$\approx$	مجموعة الأعداد الحقيقية	R		
يساوي	$=$	مجموعة الأعداد النسبية	Q		
لا يساوي	$\neq$	مجموعة الأعداد غير النسبية	I		
أكبر من	$<$	مجموعة الأعداد الصحيحة	Z		
أكبر من أو يساوي	$\leq$	مجموعة الأعداد الكلية	W		
أصغر من	$>$	مجموعة الأعداد الطبيعية	N		
أصغر من أو يساوي	$\geq$	دالة f في متغير x	$f(x)$		
الجذر التربيعي الموجب	$\sqrt{\ }$	الدالة متعددة التعريف	$f(x) = \begin{cases} \end{cases}$		
الزوج المرتب	(x, y)	دالة القيمة المطلقة	$f(x) = \lvert x \rvert$		
الثلاثي المرتب	(x, y, z)	دالة أكبر عدد صحيح	$f(x) = [\![x]\!]$		
موازٍ لـ	$/\!/$	دالة في متغيرين	$f(x, y)$		
ليس موازيًا لـ	$/\!\!/\!\!/$	الوحدة التخيلية	i		
عمودي على	$\perp$	كيلو متر	km		
باي النسبة التقريبية	π	متر	m		
مشابه	$\sim$	سنتمتر	cm		
مساحة السطح الكلية	T	ملمتر	mm		
المثلث	$\triangle$	ميل	mi		
الحجم	V	ياردة	yd		
عرض المستطيل	w	قدم	ft		
موجب أو سالب	$\pm$	بوصة	in		
المعكوس الجمعي لِـ a أو	$-a$	كيلوجرام	kg		
النظير الجمعي لِـ a		جرام	g		
القيمة المطلقة لعدد a	$\lvert a \rvert$	الرطل	lb		
		الجول	J		

الرياضيات ١

للمرحلة الثانوية

المحتويات

الفصل الأول:
المعادلات والمتباينات

الفصل الثاني:
الدوال والمتباينات

الفصل الثالث:
الدوال التربيعية

طبعت بمطبعة أوال لصالح وزارة التربية والتعليم بمملكة البحرين

التعليم محتقبل البحرين