تطبيقات التَفاضُل

حلول أسئلة الكتاب

أسئلة أضافية

أسئلة مقترحة

الفرع الأدبي

للأستاذ : محمد صلاح

0787412853

أنت

تطبيقات التفاضل

التفسير الهندسي للمشتقة

● معادلة المماس :

$(ص - ص_1) = ق(س_1)(س - س_1)$

يمكن تسمية هذة المعادلة بمعادلة المنحنى

● ميل المماس :

$ق(س_1)$

وهي جزء من معادلة المماس

يمكن تسمية هذا الميل بميل المنحنى

● ملاحظة مهمة : آنتبه على المطلوب في السؤال

← آذا طلب السؤال ميل مماس ← فقط نشتق و نعوض

نجد $ق(س_1)$

← آذا طلب السؤال المعادلة

نعوض في المعادلة

س١: إذا كان ق(س) = ٦س٢ + ١ ، جد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ٢

الحل: السؤال طلب ميل المماس، فقط نشتق ونعوض النقطة المعطاة

ق'(س) = ١٢س

ق'(٢) = ١٢ × ٢ = ٢٤ ← ميل المماس = ٢٤

س٢: إذا كان ص = ٤س + ٥ ، جد ميل المماس لمنحنى الاقتران ص عندما س = ١٠

الحل: السؤال طلب ميل المماس، فقط نشتق ونعوض النقطة المعطاة

ص' = ٤

ص'١ = ٤ ← ميل المماس = ٤

س = ١٠

س٣ : إذا كان ص = ق(س) = س٣ − ٦س + ٥ فجد ميل المماس لمنحنى ق عندما س = ٢ ؟

الحل : ق'(س) = ٣س٢ − ٦

ق'(٢) = ٣(٢)٢ − ٦

= ٣ × ٤ − ٦ = ١٢ − ٦ = ٦

ميل المماس = ٦

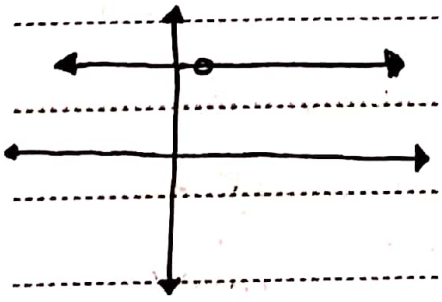
س٤ : إذا كان ق(س) = ٧ فجد ميل المنحنى ١ لمنحنى ق ؟

ق تقبل ١ عند س = ٥ ؟

الحل : ميل المنحنى = ميل المماس

ق'(س) = صفر

ق'(٥) = صفر ← ميل المنحنى = صفر



توضيح : عند س = ٥ ق على المستوى الديكارتي لا يوجد ميل

آذن الميل = صفر

س٥: إذا كان ق(س) = س٢ + ٤ب س + ٥، حيث ب عدد ثابت، وكان ميل المماس عند س = ١ يساوي ٤، جد قيمة الثابت ب؟

الحل: ميل المماس = ق'(س) = ق'(١)

ق'(س) = ٢س + ٤ب

ق'(١) = ٤

٢ × ١ + ٤ب = ٤ ← ٢ + ٤ب = ٤

← ٤ب = ٤ − ٢

← ٤ب = ٢ ← ب = ١/٢

س٦: إذا كان ق(س) = (٤س٢ + ٢ب)٢، حيث ب عدد ثابت، وكان ميل المنحنى عند س = −٣ يساوي ٢، جد قيمة الثابت ب؟

الحل: ق'(س) = ٢(٤س٢ + ٢ب) × ٨س

ق'(−٣) = ٢ ← ٢(٤ × ٩ + ٢ب) × −٢٤ = ٢

← ب/٨ ١٦ + ٣٦ + ٢ب × −٢٤ = ١/٨

← −٣٨٤ + ٣٦ + ٢ب × −٢٤ = ٠

← ١٥١٢ - ٩٤٨ = ١

← ٩٤٨ = ١ + ١٥١٢

← ٩٤٨ = ١٥١٢ ← ٩ = $\frac{١٥١٢}{٤٨}$ = ٣١

س٧ : آذا كان ق(س) = س^{٢} - ٣س ، فجد ميل المماس لمنحنى الـ ق عند النقطة (٢ ، -٢) ؟

الحل : (٢ ، -٢)

س$_{١}$ = ٢ ← ص$_{١}$ = -٢

لا تستخدم فقط آذا طلب المعادلة

ق$'$(س) = ٢س - ٣

ق$'$(٢) = ٢×٢ - ٣ = ٤ - ٣ = ١

ميل المماس = ١

س ← ∞ ، إذا كان ق(س) = أ س^{٢} + ٣س + ٥ ، حيث أ عدد ثابت ، وكان ميل المماس عندما س = ٢ يساوي ١٨ ، فما قيمة الثابت أ ؟

الحل : ق′(س) = ٢أ س + ٣

ق′(٢) = ١٨

٤أ + ٣ = ١٨ ← ٤أ + ٦ = ١٨

٤أ = ١٨ − ٦ ← ٤أ = ١٢

أ = ٣ ←

س ← ٩ ، إذا كان ق(س) = $\frac{-١}{س}$ ، س ≠ ٠ ، وكان ميل المماس عند س = أ يساوي $\frac{١}{٩}$ جد قيمة الثابت أ ؟

الحل : ق′(س) = $\frac{-(-١)}{س^{٢}}$ = $\frac{١}{س^{٢}}$ ، ق′(أ) = $\frac{١}{٩}$

$\frac{١}{أ^{٢}}$ = $\frac{١}{٩}$ ← $أ^{٢}$ = ٩ ← أ = ٣ ، −٣

معادلة المماس ← $(ص - ص_1) = ق'(س_1)(س - س_1)$

← كيفية الحل عندما يطلب معادلة المماس :

١. نخرج من س_1 المعطاة في السؤال في الاقتران الأصلي لنحصل على ص_1

٢. نجد ميل المماس عند س_1 بأشتقاق الاقتران الأصلي .

٣. نعوض كل القيم في خطوة ١ و ٢ بمعادلة $(ص - ص_1) = ق'(س_1)(س - س_1)$

س ∈ ح ، إذا كان $ق(س) = س^3 + ١$ ، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند س = ١ ؟

الحل : معادلة مماس ← $(ص - ص_1) = ق'(س_1)(س - س_1)$

١. $ص_1 = ق(١) = (١)^3 + ١ = ٢$

٢. $س_1 = ١$

٣. ميل المماس ← $ق'(س) = ٣س^2$ ، $س_1 = ١$

← $ق'(١) = ٣$

٤. $(ص - ٢) = ٣(س - ١)$

س١١: إذا كان ق(س) = (٢س+١)(٣س-٤)

أوجد معادلة المماس عند ما س = ٢

الحل:

معادلة المماس ← (ص - ص١) = ق'(س١)(س - س١)

ص١ = ق(٢) = (٢×٢+١)(٣×٢-٤)

= ٥ × ٢ = ١٠

س١ = ٢

ميل المماس ← ق'(س) = (٢س+١)×٣ + (٣س-٤)×٢

عند س = ٢

ق'(٢) = (٢×٢+١)×٣ + (٣×٢-٤)×٢

= ١٥ + ٤ = ١٩

(ص - ص١) = ق'(س١)(س - س١)

(ص - ١٠) = ١٩(س - ٢)

س١٢: إذا علمت أن ق(٥) = ٣ ، ق'(٥) = ٦ فجد

معادلة المماس عند س = ٥

الحل: معادلة المماس ← (ص - ص١) = ق'(س١)(س - س١)

(ص - ٣) = ٦(س - ٥)

س١٣: إذا كان ق(س) = ٨س + س٢ ، فجد معادلة المماس لـ ق(س) عند النقطة (٢، ٢٠)

الحل: عند طلب المعادلة عند نقطة (س١، ص١)

يكون فقط باقي الأمام المعادلة

ميل المماس

(ص - ص١) = ق'(س١)(س - س١)

(ص - ٢٠) = ق'(٢)(س - ٢)

← ميل المماس = ق'(س١) ، س١ = ٢

= ٨ + ٢س

ق'(٢) = ٨ + ٢×٢ = ٨ + ٤ = ١٢

← معادلة المماس (ص - ٢٠) = ١٢(س - ٢)

س١٤: إذا كان ق(س) = (س٢ + ١)٢ ، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند س = ١ ؟

الحل: معادلة المماس ← (ص - ص١) = ق'(س١)(س - س١)

ص١ = ق(١) = (١ + ١)٢ = ٤

س١ = ١

ق'(س) = ٢(س٢ + ١) × ٢س ← ق'(١) = ٢×٢×٢ = ٨

المعادلة ← (ص - ٤) = ٨(س - ١)

س١٥: إذا كان ص = ٦ع^٢ + ١ ، ع = ٢س ، جد معادلة المماس للاقتران ق(س) عند س = ١؟

الحل:

معادلة المماس ← (ص − ص١) = ق'(س١)(س − س١)

ص = ٦(٢س)^٢ + ١

ص١ = ق(١) = ٦(٢×١)^٢ + ١ = ٦×٤ + ١

= ٢٤ + ١ = ٢٥

س١ = ١

ميل المماس ← ص'|_{س=١}

ص' = ٢×١٢ع س ← ص' = ٤٨س

ص'|_{س=١} = ٤٨

المعادلة ← (ص − ٢٥) = ٤٨(س − ١)

س٦: إذا كانت $\lim_{h \to 0} \frac{ق(1+h) - ق(1)}{h} = 2$

فجد معادلة المماس لـ ق(س) عند (1، ع)؟

الحل: $\lim_{h \to 0} \frac{ق(1+h) - ق(1)}{h} = ق'(1) = 2$

$ق'(1) = 2$

← معادلة المماس ← $(ص - ص_1) = ق'(س_1)(س - س_1)$

← $(ص - ع) = 2(س - 1)$

س١٧: جد معادلة المماس لمنحنى ا لـ ق حيث

$ق(س) = س + \sqrt{س}$ عند $س = 1$؟

الحل: معادلة المماس ← $(ص - ص_1) = ق'(س_1)(س - س_1)$

$ص_1 = ق(1) = 1 + \sqrt{1} = 2$

$س_1 = 1$

ميل المماس $= ق'(س) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{س}}$ ← $ق'(1) = 1 + \frac{1}{2}$

← $ق'(1) = \frac{3}{2}$

∴ معادلة المماس $(ص - 2) = \frac{3}{2}(س - 1)$

س١٨: جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{٣س-١}$ عند س = ٥ ؟

الحل: معادلة المماس ← (ص - ص١) = ق'(س١)(س - س١)

ص١ = ق(٥) = $\sqrt{٣\times٥-١}$ = $\sqrt{١٥-١}$ = $\sqrt{٩}$ = ٣

∴ س١ = ٥

∴ ميل المماس = ق'(س١) = $\frac{٣}{\sqrt{٣س-١}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣س-١}}$

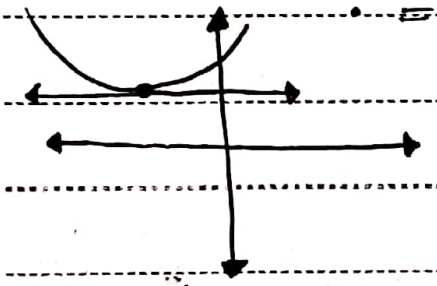
ق'(٥) = $\frac{١}{\sqrt{٣\times٥-١}}$ = $\frac{١}{٣}$

∴ معادلة المماس ← (ص - ٣) = $\frac{١}{٣}$ (س - ٥)

ملاحظة: تسمى النقطة (س١، ص١) نقطة التماس

س١٩: جد قيم س التي يكون عندها المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = ٦س^٣ − ١٨س موازياً لمحور السينات ؟

الحل: موازياً لمحور السينات يعني لا يوجد ميل ، أذن ميل المماس = ٠



ق′(س) = ١٨س^٢ − ١٨ = ٠

١٨س^٢/١٨ = ١٨/١٨

س^٢ = ١ ← س = ±١

س٢٠: أذا علمت أن ميل المماس لـ ق(س) عند النقطة (١، ٢) يساوي ٤ ، جد قيمة ق′(١) ؟

الحل:

ميل المماس عند النقطة (١، ٢)

= ق′(١) = ٤

س٢١ : إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٢س ، فجد نقطة التماس عند س = ٤

الحل : نقطة التماس ← (س$_{١}$ ، ص$_{١}$)

س$_{١}$ = ٤ ، ص$_{١}$ = ق(٤) = ٤^{٢} + ٢ × ٤

= ١٦ + ٨ = ٢٤

نقطة التماس ← (٤ ، ٢٤)

س٢٢ : إذا كانت معادلة المماس لعلاقة ما تساوي (ص − ٥) = ٨ (س + ٤) فما هي قيمة ميل المماس ؟

الحل : ميل المماس ← ق$'$(−٤) = ٨

س٢٣ : إذا كانت ق(س) = ٦س + ٤ ، فجد ميل المماس ؟

الحل : ميل المماس = ق$'$(س) = ٦

" حلول أسئلة الدرس "

س١: جد معادلة المماس لكل من المنحنيات الآتية عند قيمه س المبينة أمام كل منها:

أ) ق(س) = ٣س + ٥ ، س = ٢ ؟

الحل: معادلة المماس ← (ص − ص١) = ق'(س١)(س − س١)

١) ص١ = ق(٢) = ٣ × ٢ + ٥ = ٦ + ٥ = ١١

٢) س١ = ٢

٣) ميل المماس = ق'(س) ، س = ٢

ق'(٢) = ٣

∴ المعادلة (ص − ١١) = ٣ (س − ٢)

ب) ق(س) = س^{٢} + ٣س − ١ ، س = ١ ؟

الحل: معادلة المماس ← (ص − ص١) = ق'(س١)(س − س١)

١) ص١ = ق(١) = (١)^{٢} + ٣ × ١ − ١ = ١ + ٣ − ١ = ٣

٢) س١ = ١

٣) ميل المماس = ق'(س) = ٢س + ٣ ، س = ١

ق'(١) = ٢ + ٣ = ٥

ب: معادلة المماس

(ص - ٣) = ٥ (س - ١)

ب: ق(س) = (٢س - ٤)(س٢ + ١) ، س = صفر ؟

الحل: معادلة المماس ← (ص - ص١) = ق'(س١)(س - س١)

∴ ص١ = ق(٠) = (٢ × ٠ - ٤)(٠٢ + ١)

= -٤ × ١ = -٤

∴ س١ = صفر

ميل المماس ← ق'(س) ، س = صفر ؟

ق'(س) = (٢س - ٤) × ٢س + (س٢ + ١) × ٢

ق'(صفر) = ٠ + ٢ = ٢

معادلة المماس ← (ص + ٤) = ٢(س - ٠)

ص + ٤ = ٢س

س١ : إذا كان ق(س) = $\frac{٢س+٢}{س^٢+١}$ ، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ١ ؟

الحل : معادلة المماس ← (ص − ص١) = ق′(س١)(س − س١)

ص١ = ق(١) = $\frac{٢×١+٢}{(١)^٢+١}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

س١ = ١

ميل المماس ← ق′(س) ، س = ١

ق′(س) = $\frac{(س^٢+١)(٢) - (٢س+٢)×٢س}{(س^٢+١)^٢}$

= $\frac{(١+١)×٢ - (٢×١+٢)×٢}{(١+١)^٢}$ = $\frac{-٤}{٤}$ = −١

∴ معادلة المماس ← (ص − ٢) = −١(س − ١)

س٢ : ٢ ، ١ كان ق(س) = ٩ س٢ + ٤ س − ٣ ، حيث ٩ عدد
ثابت ، وكان ميل المنحنى عندما س = ٣
يساوي ٢٢ ، فجد قيمة الثابت ٩ ؟

الحل : ميل المنحنى = ق′(٣) = ٢٢

ق′(س) = ٣ ٩ س + ٤

ق′(٣) = ٢٢

٦ ٩ + ٤ = ٢٢ ← ٦ ٩ = ٢٢ − ٤

٩ = ١٨ ← ٦ ٩ = ١٨

٩ = ٣

س٤ : إذا كان ق(س) = س٥ + ٤ س٢ ، فجد ميل المنحنى
لـ ق عندما س = ١ ؟

الحل : ميل المنحنى = ق′(س) ، س = ١

ق′(س) = ٥ س٤ + ٨ س

ق′(١) = ٥ × (١)٤ + ٨ × ١ = ٥ + ٨ = ١٣

س٥ : إذا كان ق(س) = (٣س٢ − ٢)٤ ، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (س١ ، ق(س١)) ؟

الحل : معادلة المماس ← (ص − ص١) = ق′(س١)(س − س١)

١. ص١ = ق(−١) = (٣ × (−١)٢ − ٢)٤

= (٣ − ٢)٤ = (١)٤ = ١

٢. س١ = −١

٣. ميل المماس ← ق′(س) ، س = −١

ق′(س) = ٤(٣س٢ − ٢)٣ × ٦س

ق′(−١) = ٤ × (٣ × (−١)٢ − ٢)٣ × ٦ × −١

= ٤ × ١ × −٦ = −٢٤

٤. معادلة المماس

(ص − ١) = −٢٤(س + ١)

" أسئلة أضافية "

س١: جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = ٣س٢ + ٢س − ٣ عند س = ١ ؟

الجواب: (ص − ٢) = ٨(س − ١)

س٢: إذا علمت أن ق(س) = ٢س فأوجد ميل المماس لمنحنى ق(س) عند س = ٦ ؟

الجواب: ق′(٦) = ٢

س٣: إذا كان ق(س) = $\frac{٣}{س}$ فأوجد ميل المماس لمنحنى ق(س) عند س = ٣ ؟

الجواب: ق′(٣) = $\frac{-١}{٣}$

س٤ : جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{1}{2س - 1}$ عندما س = صفر ؟

الجواب : ص + ١ = -٢س

س٥ : إذا كان ق(س) = (٢س + ١)^{٢} ، فجد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند س = ٢ ؟

الجواب : ق$'$(٢) = ٢٠

س٦ : إذا كان ص = ق(س) = (٣س^{٢} - ٢)^{٤} ، فجد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند س = ١ ؟

الجواب : ق$'$(١) = ٤٢

س٧ : جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{٣س^{٢} + ٦}$ عند (١ ، ٣) ؟

الجواب : ص - ٣ = ١(س - ١)

س٧: إذا كان ق(س) = $\frac{٢س}{٣س+٤}$ ، جد ميل المماس

ق(س) عند س = -١ ؟

الجواب: ق`(-١) = ٨

س٨: جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

ق(س) = $\frac{٢}{٣س-١}$ ، عند (٠ ، -٢) ؟

الجواب: ص + ٢ = -٦س

س٩: جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

ق(س) = (س - ١)(٣س + ١)^{٢} عندما س = ١

الجواب: ص - ٤ = ١٦(س - ١)

س١٠: جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{١}{٢س}$

عند س = -١

الجواب: ص - ١ = ٢(س + ١)

التفسير الفيزيائي للمشتقة

⊛ إذا تحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن)

حيث ف : المسافة بالأمتار

ن : الزمن بالثواني ∈ ح

← السرعة اللحظية ع(ن) = ف'(ن)

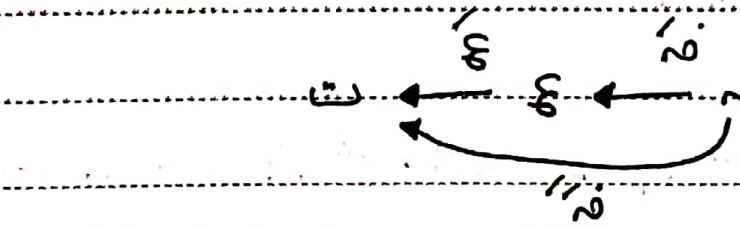
أي أن السرعة مشتقة المسافة

← التسارع اللحظي ت(ن) = ع'(ن)

أو ت(ن) = ف''(ن)

أي أن التسارع المشتقة الأولى للسرعة

أو التسارع هو المشتقة الثانية للمسافة



ⓐ هناك ثلاث حالات لحل مثل هذا النوع من

الاسئلة:

← الحالة الأولى:

الزمن معطى في السؤال ويطلب السرعة أو التسارع

س: إذا تحرك جسيم بحيث كان بعده عن

نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية من

بدء حركته معطى بالعلاقة ف(ن) = $ن^3 + 3ن^2 + 5$

فأحسب سرعة الجسيم بعد مرور ٣ ثوان

الحل: ع(ن) = ف'(ن)

$= 3ن^2 + 6ن$

بعد ٣ ثواني ← ع(٣) = $3(3)^2 + 6 \times 3$

$= 9 \times 3 + 18$

$= 27 + 18 = 45$ م/ث

ملاحظة: السرعة م/ث، التسارع م/ث^2

س٢: إذا تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطه الأصل بالأمتار بعد ن ثانيه معطى بالعلاقه ف(ن) = ٣ن^٢ − ٣ن + ٢ ، فأحسب سرعة الجسيم بعد مرور ثانيتين من حركته ؟

الحل: ع(ن) = ف'(ن)

= ٦ن − ٣

ع(٢) = ٦×٢ − ٣ = ١٢ − ٣ = ٩ م/ث

س٣: يتحرك جسم على خط مستقيم حيث كان بعده عن نقطه الأصل معطى بالعلاقه ف(ن) = √ن + ١ ، فأحسب سرعة الجسيم بعد مرور ١٦ ثانيه من حركته ؟

الحل: ع(ن) = ف'(ن)

= $\frac{١}{٢\sqrt{ن}}$ ← ع(١٦) = $\frac{١}{٢\sqrt{١٦}}$

= $\frac{١}{٤×٢}$ = $\frac{١}{٨}$

س٤ / يتحرك جسيم وفق العلاقه ف(ن) = (٢ن + ١)^٢ حيث ف المسافه التي يقطعها الجسيم بالأمتار ن الزمن بالثواني , جد تسارع الجسيم بعد مرور ثانيه واحده من بدء الحركه ؟

الحل / يريد التسارع ت(ن) عند ن = ١

أ) ع(ن) = ف'(ن) = ٢ (٢ن + ١) × ٢ × ع ن

ب) ت(ن) = ع'(ن) = ٢(٢ن + ١) × ٤ + ٤ × ٨ ن

ت(١) = ٢(٢ + ١) × ٤ + ٤ × ٨ × ١ = ٣٦ + ٣٢ = ٦٨ م/ث^٢

ع = ٢٤

س٥ / يتحرك جسيم حسب العلاقه ف(ن) = ن^٢ / (ن + ١) جد السرعه والتسارع لهذا الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركه ؟

الحل:

١- $ع(ن) = ف'(ن)$

$$= \frac{(ن+1)^2 \times 2ن - ن^2 \times 1}{(ن+1)^2} = \frac{ن^2 + 2ن}{(ن+1)^2}$$

$$ع(2) = \frac{(2+1)^2 \times 2 \times 2 - (2)^2 \times 3}{(2+1)^2} = \frac{24 - 12}{9}$$

$$= \frac{12-4}{9} = \frac{8}{9} \text{ م/ث}$$

٢- $ت(ن) = ع'(ن)$

$$= \frac{(ن+1)^2 \times (2ن+2) - (ن^2+2ن) \times 2(ن+1)}{(ن+1)^4}$$

$$ت(2) = \frac{9 \times 6 - 8 \times 6}{81} = \frac{54 - 48}{81} = \frac{6}{81} \text{ م/ث}^2$$

س٦: يتحرك جسم وفق العلاقة ف(ن) = ن^{٢} حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني

أحسب كل مما يلي:

١. السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [١، ٤]

٢. السرعة اللحظية للجسيم بعد مرور ٢ من الثواني

الحل:

١. السرعة المتوسطة = ع̄ = $\frac{\Delta ل}{\Delta ن}$ = $\frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١}$

= $\frac{ف(٤) - ف(١)}{٤ - ١}$ = $\frac{١٦ - ١}{٣}$

= $\frac{١٥}{٣}$ = ٥ م/ث

٢. السرعة اللحظية = ع(ن) = ف′(ن)

= ٢ن

ع(٢) = ٢ × ٢ = ٤ م/ث

س٧: يتحرك جسيم وفق العلاقة: ف(ن) = ٢ن^٣ + ٤ن^٢ + ٦
حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني
جد تسارع هذا الجسيم بعد مرور ثانيتين من
بدء حركته؟

الحل: التسارع ت(ن) = ع'(ن) = ف''(ن)

ع(ن) = ف'(ن)

= ٦ن^٢ + ٨ن

ت(ن) = ع'(ن) = ١٢ن + ٨

ت(ن) = ١٢ن + ٨

ت(٢) = ١٢ × ٢ + ٨ = ٣٢ = ٨ + ٢٤ م/ث^٢

⑤ الحالة الثانية :

الزمن مجهول و يطلب السرعة أو التسارع

لكن سيكون هناك معطى في السؤال لإيجاد الزمن

⑥ ملاحظات :

١. تنعدم سرعته ع (ن) = ٠

٢. ينعدم تسارعه ت (ن) = ٠

٣. التسارع عندما تكون سرعته ٩ م/ث ← ع(ن) = ٩

٤. السرعة عندما يكون التسارع ٩ م/ث^{٢} ← ت(ن) = ٩

"من خلال المعطى في السؤال نخرج الزمن"

٥. لا يوجد زمن سالب : مثلاً "ن = -٤ ✗

٦. سرعته المتوسطة تساوي سرعته اللحظية

$\overline{ع}$ = ع (ن)

س١: إذا كانت ف(ن) = ن^{٣} − ٩ن^{٢} + ١٥ن ..... هي المسافة التي يقطعها جسيم حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني، فأحسب تسارع الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها سرعته؟

الحل: أولاً: الزمن مجهول لكن هنا معلومة أن مقدار السرعة ← ع(ن) = ٠ ← تنعدم سرعته

ع(ن) = ف′(ن) = ٣ن^{٢} − ١٨ن + ١٥

← ع(ن) = ٠ ← ٣ن^{٢} − ١٨ن + ١٥ = ٠

بالقسمة على ٣ ← ن^{٢} − ٦ن + ٥ = ٠

← (ن − ٥)(ن − ١) = ٠

ن = ٥ ، ن = ١

ثانياً: نطلب التسارع ت(ن) = ع′(ن)

= ٦ن − ١٨

نعوض الزمن:

ن = ١ ← ت(١) = ٦ × ١ − ١٨ = −١٢ م/ث^{٢}

ن = ٥ ← ت(٥) = ٦ × ٥ − ١٨ = ٣٠ − ١٨ = ١٢ م/ث^{٢}

س٢ : يتحرك جسيم وفق العلاقة : ف(ن) = ٢ن^٣ − ١٢ن^٢ + ٢

٢) حسب سرعة الجسيم عندما ينعدم تسارعه ؟

الحل : ينعدم تسارعه ؟؟ ت(ن) = ٠

ع(ن) = ف'(ن) = ٦ن^٢ − ٢٤ن

ت(ن) = ع'(ن) = ١٢ن − ٢٤

ت(ن) = ٠ ← ١٢ن − ٢٤ = ٠ ← ١٢ن = ٢٤

ن = ٢ ←

مطلوب السرعة عند ن = ١/٢

ع(ن) = ٦ن^٢ − ٢٤ن ← ع(١/٢) = ٦ × ١/٤ − ٢٤ × ١/٢ = ٦/٤ − ٢٤/٢

= ٣/٢ − ١٢ = ٦/٢ − ٢٤/٢ = −٣٠/٢ م/ث

س٣: يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = ن^٣ − ن^٢ + ٤

أوجد سرعة الجسيم عندما يكون تسارعه ١٠ م/ث^٢ ؟

الحل: الزمن غير معلوم لكن ت(ن) = ١٠

ع(ن) = ف'(ن) = ٣ن^٢ − ٢ن

ت(ن) = ع'(ن) = ٦ن − ٢

ت(ن) = ١٠ ← ٦ن − ٢ = ١٠

٦ن = ١٢ ← ن = ٢

المطلوب السرعة ع(ن) = ٣ن^٢ − ٢ن

ع(٢) = ٣(٢)^٢ − ٢×٢ = ٤×٣ − ٤ = ٨ م/ث

س٤ : يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = ٢ن^{٣} − ٦ن − ٧

أوجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته ١٨ م/ث .

الحل : المتغير معلوم لكن ع(ن) = ١٨

ع(ن) = ف′(ن) = ٦ن^{٢} − ٦

ع(ن) = ٦ن^{٢} − ٦

ع(ن) = ١٨ ← ٦ن^{٢} − ٦ = ١٨

ن^{٢} − ١ = ٣ ←

ن^{٢} − ٤ = ٠ ← (ن − ٢)(ن + ٢) ←

ن = ٢ ، ن = −٢

∴ مطلوب ت(ن) عند ن = ٢ ... زمن سالب ✗

ت(ن) = ١٢ن ← ت(٢) = ٢٤ م/ث^{٢}

س٥: تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطه الأصل بالأمتار بعد ن ثانيه من بدء الحركه معطى بالعلاقه ف(ن) = ع ن^{٣} إذا كانت سرعته المتوسطه في الفترة الزمنيه [٠ ، ٤ ρ] تساوي سرعته اللحظيه بعد مرور ٣ ثوان فجد قيمة الثابت ρ ؟

الحل : سرعته المتوسطه = سرعته اللحظيه ← $\bar{ع}$ = ع(ن)

أولاً : نجد السرعه المتوسطه

$$\bar{ع} = \frac{\Delta ل}{\Delta ن} = \frac{ف(٤ρ) - ف(٠)}{٤ρ - ٠} = \frac{٦٤ ρ^{٣}}{٤ρ}$$

$$= ١٦ ρ^{٢}$$

ثانياً : نجد السرعه اللحظيه ← ع(ن) = ف'(ن) = ٨ن

ن = ٣ ← ع(٣) = ٢٤

∴ المعادله $\bar{ع}$ = ع(ن) ← ١٦ ρ^{٢} = ٢٤

$$ρ^{٢} = \frac{٢٤}{١٦} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$$

$$ρ = \frac{٣}{٢}$$

س٦: يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = م(ن-١)^{٢} حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني، م، ن كانت سرعة الجسيم المقطوعة بعد ٤ ثواني تساوي ١٢ م/ث فجد قيمة الثابت م ؟

الحل: ع(٤) = ١٢

ع(ن) = ٢م(ن-١) ←

ع(٤) = ١٢

٢م(٤-١) = ١٢ ← ٢م×٣ = ١٢

٦م = ١٢ ← م = ٢

س٧: يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = ن^{٢} + ١ جد المسافة التي يقطعها الجسم عندما تكون سرعته ٢ م/ث ؟

الحل: سرعته ٢ م/ث ← ع(ن) = ٢

ع(ن) = ٢ن ← ٢ = ٢ن ← ن = ١

∴ المطلوب المسافة عند ن = ١ ، ف(١) = ١^{٢} + ١ = ٢ م

" حلول أسئلة الكتاب "

س١: إذا كانت ف(ن) = ن^{٣} + ٣ن^{٢} هي المسافة التي يقطعها الجسم بالأمتار بعد ن ثانية فجد:

أ. السرعة بعد مرور ثانيتين على بدء الحركة؟

الحل:

ع(ن) = ٣ن^{٢} + ٦ن

ع(٢) = ٣×٤ + ٦×٢ = ١٢ + ١٢ = ٢٤ م/ث

ب. التسارع عندما تكون السرعة ٩ م/ث؟

الحل: ت(ن) = ع'(ن) = ف''(ن)

ت(ن) = ٦ن + ٦

التسارع عندما تكون ع(ن) = ٩

٣ن^{٢} + ٦ن = ٩

٣ن^{٢} + ٦ن − ٩ = ٠

ن^{٢} + ٢ن − ٣ = ٠ ← (ن + ٣)(ن − ١)

ن = −٣ (×) ، ن = ١

∴ ت(ن) = ٦ن + ٦

ت(١) = ٦×١ + ٦ = ١٢ م/ث^{٢}

س٢: تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة ف(ن) = ٢ن٢ + أ ن + ٥ إذا كانت سرعته المتوسطة في الفترة الزمنية [٠، ٢] تساوي سرعته اللحظية بعد مرور ٣ ثوان من بدء، فجد قيمة أ ؟

الحل: السرعة المتوسطة = السرعة اللحظية

$\bar{ع} = ع(ن)$

$\bar{ع} = \frac{ف(٢) - ف(٠)}{٢ - ٠} = \frac{٢أ}{٢} = أ + ٢$

$ع(ن) = ف'(ن) = ٤ن + أ$

$ع(٣) = ٤ \times ٣ + أ = ١٢ + أ$ م/ث

$\bar{ع} = ع(ن)$

$٢أ = ١٢ + أ \leftarrow \boxed{أ = ٦}$

س٣: إذا كان ف(ن) = (٢ن - ٢)^{٣} + ع يمثل المسافه التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد ن ثانية فجد السرعة المقطوعه بعد ٤ ثواني من بدء الحركة؟

الحل: ع(ن) = ف'(ن) = ٣(٢ن - ٢)^{٢} × ٢

= ٦(٢ن - ٢)^{٢}

ع(٤) = ٦(٢×٤ - ٢)^{٢} = ٦(٦)^{٢}

= ٦ × ٣٦ = ٢١٦ م/ث

س٤: إذا مثل الاقتران ف(ن) المسافه التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد ن ثانيه من بدء حركته، وكان ف(ن) = ن^{٣} - ن^{٢} + ٥ فما سرعة هذا الجسيم عندما يكون تسارعه ٤ م/ث^{٢}؟

الحل: الزمن مجهول ولكن ت(ن) = ع

ع(ن) = ٣ن^{٢} - ٢ن

ت(ن) = ٦ن - ٢ ← ت(ن) = ع

← ٦ن - ٢ = ع

← ٦ن = ٦ ← ن = ١

نطلب السرعه ع(ن) = ٣ن^{٢} − ٢ن

ع(١) = ٣ − ٢ = ١ م/ث

س٥: حل السؤال الوارد في بدايه الدرس:

إذا تحركت سيارة وكان موقعها في اللحظه ن

معرفاً بالاقتران ف(ن) = ٣ن^{٢} − ٤ن + ٦

حيث ف المسافه التي تقطعها السيارة بالأمتار

ن الزمن بالثواني فجد سرعة السيارة بعد مرور

٤ ثوان من بدء الحركة؟

الحل: ع(ن) = ف'(ن) = ٦ن − ٤

ع(٤) = ٦ × ٤ − ٤ = ٢٠ م/ث

" أسئلة أضافية "

س١: يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = ن^{٣} + ٩ن + ١
حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم عندما
سرعته ١٢ م/ث جد تسارعه ؟

الحل: الجواب: ن = ١
ت(١) = ٦ م/ث^{٢}

س٢: يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = ٢ن^{٣} − ٦ن + ٣
حيث ف المسافة المقطوعة بالأمتار ن الزمن
بالثواني ما تسارع الجسيم بالدقيقة ن ؟

الجواب: ت(ن) = ١٢ن

س٣: يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة
ف(ن) = ن^{٣} − ٣ن^{٢} + ٤ حيث ف المسافة بالأمتار
ن الزمن بالثواني جد سرعة الجسم بعد مرور ٤
ثواني من بدء الحركة ؟

الجواب: ع(٤) = ٢٤ م/ث

س٤: يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة
ف(ن) = ن³ − ٤ن² + ٨ن حيث ن الزمن
التي يقطعها الجسيم بالأمتار، ن الزمن
بالثواني، جد المسافة التي يقطعها الجسيم
عندما يكون تسارعه ٤ م/ث²

الجواب: ن = ٢

ف(٢) = ٨ م

س٥: يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للاقتران
ف(ن) = ٢ن³ − ن² + ٨ جد سرعة الجسم عندما
يكون تسارعه ٤ م/ث²؟

الجواب: ن = ½

ع(½) = ٢½ م/ث

س٦: يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للاقتران
ف(ن) = ن^٣ − ١٢ن^٢ + ٩٠ن + ٦ ، ن ≥ ١
جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته ١ م/ث ؟

الجواب: ن = ٤ ، ن = ٢/٣
نهمل ن = ٢/٣
ت(٤) = ١٠ م/ث^٢

س٧: يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = ٢ن^٣ − ٣ن^٢
ن ≥ ٠ جد المسافة التي يقطعها الجسم عندما
يكون تسارعه ٣٠ م/ث^٢ ؟

الجواب: ن = ٣
ف(٣) = ٢٧ م

تطبيقات الاشتقاق

● القيم أو الأعداد الحرجة : هي قيم س التي يكون عندها المشتقة الأولى تساوي صفر "أصفار المشتقة الأولى"

● النقاط الحرجة : هي ناتج تعويض أصفار المشتقة الأولى في الاقتران الأصلي وتكون عبارة عن أزواج مرتبة (س ، ق(س))

س١: إذا كان ق(س) = س٢ - س جد القيم الحرجة ؟

الحل:

ق'(س) = ٢س - ١

ق'(س) = ٠ ← ٢س - ١ = ٠

← ٢س = ١ ← س = $\frac{١}{٢}$

∴ س = { $\frac{١}{٢}$ }

س٢: آذا كان ق(س) = ٢س٣ − ٨س + ٤ جد الأعداد الحرجه ؟

الحل: ق'(س) = ٤س − ٨

ق'(س) = ٠ ← ٤س − ٨ = ٠

← ٤س = ٨ ← س = ٢

∴ س = {٢} عدد حرج

س٣: آذا كان ق(س) = س٣ − ١٢س + ٣ جد النقاط الحرجه ؟

الحل: نقاط حرجه ← آزواج مرتبه

آولاً: نشتق لآيجاد القيم الحرجه

ق'(س) = ٣س٢ − ١٢

ق'(س) = ٠ ← ٣س٢ − ١٢ = ٠ ← س٢ − ٤ = ٠

← (س − ٢)(س + ٢)

← س = ٢ ، س = −٢

ثانياً: نعوض القيم الحرجة في ق(س) لإيجاد ق(٢)، ق(-٢) النقاط الحرجة

← ق(٢) = (٢)^{٣} - ١٢(٢) + ٣ = ٨ - ٢٤ + ٣

= -١٦ + ٣ = -١٣

← ق(-٢) = (-٢)^{٣} - ١٢(-٢) + ٣ = -٨ + ٢٤ + ٣

= ١٦ + ٣ = ١٩

∴ النقاط الحرجة (٢، -١٣)، (-٢، ١٩)

س٥: إذا كان ق(س) = س^{٣} + س^{٢} جد القيم الحرجة؟

الحل:

ق'(س) = ٣س^{٢} + ٢س

ق'(س) = ٠ ← ٣س^{٢} + ٢س = ٠

← س(٣س + ٢) = ٠

← س = ٠ ، ٣س + ٢ = ٠

٣س = -٢ ← س = $\frac{-٢}{٣}$

∴ القيم الحرجة س = {٠، $\frac{-٢}{٣}$}

● عندما يطلب السؤال قيمة مجهول ، ويكون مكتوب في السؤال أحد هذه الكلمات : قيم حرجه ، عدد حرج ، نقطه حرجه نشتق ونساوي بالصفر لإيجاد قيمة المجهول .

س٦ : آذا كان ق(س) = $أ س^{٢} - ٣س$ وكان لها قترات نقطه حرجه عند س = ١ جد قيمة الثابت أ ؟

الحل : نقطه حرجه عند س = ١ ← ق'(١) = صفر

ق'(س) = ٢أ س − ٣

ق'(١) = صفر ← ٢أ × ١ − ٣ = صفر

٢أ = ٣ ← $\boxed{أ = \frac{٣}{٢}}$

س٧: إذا كان ق(س) = (٥س + ٩)^{٢}، وكان للاقتران ق(س) قيمة حرجة عند س = ٣ جد قيمة الثابت ٩ ؟

الحل: قيمة حرجة ← ق'(٣) = صفر

ق'(س) = ٢(٥س + ٩) × ٥

← ق'(٣) = صفر

← ٢(٥ × ٣ + ٩) × ٥ = صفر

← ١٠(١٥ + ٩) = صفر ← ١٥ + ٩ = صفر

← $\boxed{٩ = -١٥}$

فترات التزايد و التناقص :

← طريقة لإيجاد فترات التزايد و التناقص :

١- نجد القيم الحرجة و نعينها على خط الأعداد

٢- نأخذ قيمة أقل من القيمة الحرجة و نعوض

في الاقتران المشتق فإذا كانت القيمة الناتجة

موجبة يكون الاقتران متزايد , سالبة يكون متناقص

٣- تأخذ قيمة أكبر من القيمة الحرجة و نعوض

في الاقتران المشتق فإذا كانت القيمة الناتجة

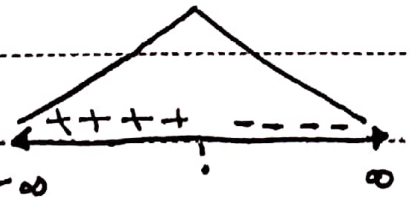
موجبة يكون الاقتران متزايد , سالبة يكون متناقص

س١ : جد فترات التزايد و التناقص إذا كان ق(س) = ٣ - ٤س٢ ؟

الحل :

١- ق'(س) = -٨س ← -٨س = ٠ ← س = ٠

٢- نعين على خط الاعداد



٣- ١ < ٠ ← ق'(١) = -٨ / -١ < ٠ ← ق'(-١) = ٨

ج: فترات التزايد من $(-\infty, 0]$

فترات التناقص من $[0, \infty)$

س٢: إذا كان $ق(س) = ٤س^{٣} - ٦س^{٢} + ٢$

جد فترات التزايد والتناقص؟

الحل:

١. $ق'(س) = ١٢س^{٢} - ١٢س$

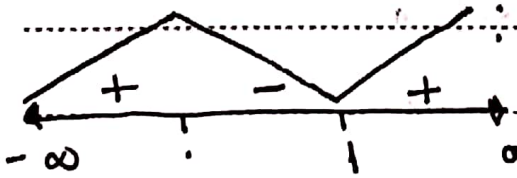
$ق'(س) = ٠ \leftarrow ١٢س^{٢} - ١٢س = ٠$

$\leftarrow س(١٢س - ١٢) = ٠$

$س = ٠ \ ، \ ١٢س - ١٢ = ٠$

$س = ١$

٢. نبين على خط الأعداد:



٣. $٢ > ١ \leftarrow ق'(٢) = ١٢ \times ٤ - ١٢ \times ٢ = ٤٨ - ٢٤ = ٢٤$

$\therefore \frac{١}{٢} < ١ \leftarrow ق'(\frac{١}{٢}) = ١٢ \times \frac{١}{٤} - ١٢ \times \frac{١}{٢} = ٣ - ٦ = -٣$

$-١ < ٠ \leftarrow ق'(-١) = ١٢ - ١٢ \times -١ = ١٢ + ١٢ = ٢٤$

ع. فترات التزايد: $(-\infty, 0]$

$[1, \infty)$

أو $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$

فترات التناقص: $[0, 1]$

س٣: إذا كان ق(س) = $س^3 - 3س^2 - 9س$ ، جد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة؟

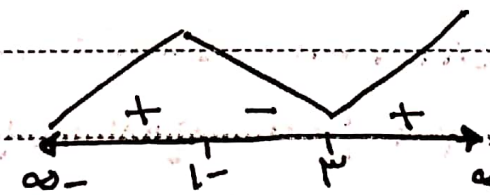
١- القيم الحرجة ← ق'(س) = $3س^2 - 6س - 9$

ق'(س) = ٠ ← $3س^2 - 6س - 9 = ٠$

← $س^2 - 2س - 3 = ٠$

← $(س - 3)(س + 1) = ٠$

← س = {٣، -١} القيم الحرجة

٢. 

تزايد $(-\infty, -1]$

$[3, \infty)$

تناقص $[-1, 3]$

س٤ : إذا كان ق(س) = س^{٣} − ٦س ، جد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة ؟

الحل :

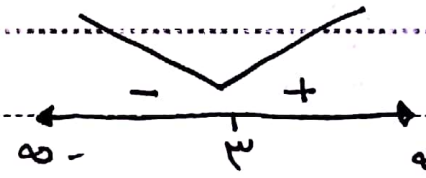
١. قيم حرجة ← ق′(س) = ٣س^{٢} − ٦

ق′(س) = ٠ ← ٣س^{٢} − ٦ = ٠

٣س^{٢} = ٦ ← س = ٣ قيمة حرجة

٢. متناقص على [−∞ ، ٣]

متزايد على [٣ ، ∞)



س٥ : إذا كان ق(س) = ١ − ٣س ، جد القيم الحرجة وفترات التزايد والتناقص ؟

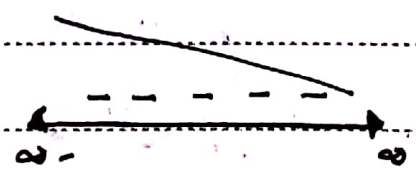
الحل :

١. قيم حرجة ← ق′(س) = −٣

ق′(س) = ٠ ← −٣ = ٠ ؟؟ لا يوجد قيم حرجة

٢. تزايد لا يوجد

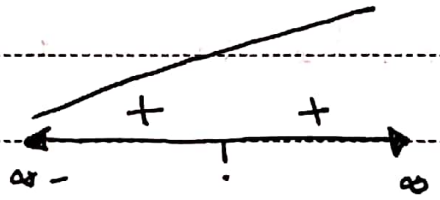
تناقص على (−∞ ، ∞)



س٦: إذا كان ق(س) = س^{٣} + ٢ جد فترات الإتزايد والإقعار وأقيم الحرجة ؟

الحل: أقيم حرجة ← ق'(س) = ٣ س^{٢}

ق'(س) = ٠ ← ٣ س^{٢} = ٠ ← س = ٠ قيمة حرجة



تزايد: (-∞، ∞)

تناقص لا يوجد

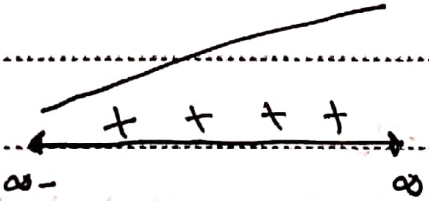
س٧: بين أن الدالة ق(س) = س^{٣} + ٣س متزايدة على مجموعة الأعداد الحقيقية ؟

الحل: ق'(س) = ٣ س^{٢} + ٣

ق'(س) = ٠ ← ٣ س^{٢} + ٣ = ٠ ← س^{٢} + ١ = ٠

س^{٢} = -١ معقول ؟؟

مستحيل قيمة تربيعية



تعاريف سالبة

∴ ق(س) ← متزايدة على ح ← لا يوجد قيم حرجة

س٨ : آذا كان ق(س) = أ س٢ + ب س وكان ق(١) = ٢

وكان لـ ق(س) نقطة حرجة عند س = ١ , جد قيمة كل

من الثابتين أ , ب ؟

الحل : ← ق(١) = ٢

← أ + ب = ٢ ـــ ①

ق(س) نقطة حرجة عند س = ١ ← ق'(١) = ٠

ق'(س) = ٢ أ س + ب

ق'(١) = ٠ ← ٢ أ + ب = ٠ ـــ ②

← -١ × (أ + ب = ٢) = ـ أ ـ ب = -٢ ـــ ①

= أ ـ ب = -٢ ـــ ③

٢ أ + ب = ٠ ـــ ②

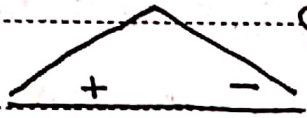
① + ② ـــــــــــــــــــــــــــ

أ = -٢ وبتعويض بالمعادلة ②

← ٢ × -٢ + ب = ٠ ← ب = ٤

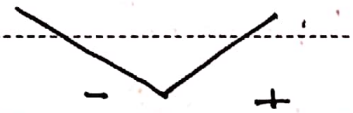
⑭ القيم القصوى نوعين :

١. عظمى ← تنتج من تغويض صفر المشتقه في الاقتران الداخلي



يكون شكل العظمى ← رأس مدبب للأعلى

٢. صغرى ← تنتج من تغويض صفر المشتقه في الاقتران الداخلي



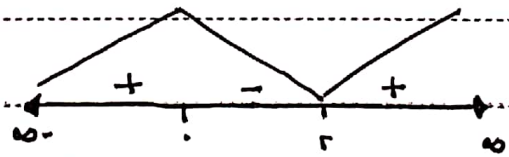
يكون شكل الصغرى ← رأس مدبب للأسفل

س١ : إذا كان ق(س) = $\frac{1}{3}$ س^{3} − س^{2} جد القيم القصوى ؟

الحل :

ق′(س) = $\frac{1}{3}$ × ٣ س^{2} − ٢ س = س^{2} − ٢ س

← س^{2} − ٢ س = ٠ ← س (س − ٢) = ٠ ← س = ٠ ، س = ٢



∴ قيمة عظمى عند س = ٠ ← (٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ٠)

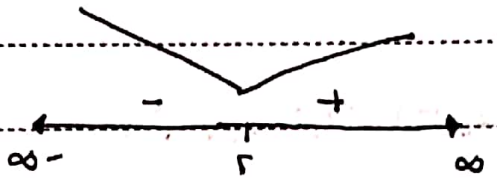
∴ قيمة صغرى عند س = ٢ ← (٢ ، ق(٢)) = (٢ ، $\frac{-٤}{٣}$)

س٢ : إذا كان ق(س) = س٢ − ٤س + ١ ، جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى والقيم الحرجة ؟

الحل : ق'(س) = ٢س − ٤

ق'(س) = ٠ ← ٢س − ٤ = ٠ ← ٢س = ٤ ← س = ٢

قيمة حرجة



∴ فترات التزايد]٢ ، ∞[/ ∴ عظمى لا يوجد

فترات التناقص]−∞ ، ٢[/ ∴ صفر ق عند س = ٢

← (٢ ، ق(٢)) = (٢ ، −٣)

س٣ : إذا كان ق(س) = س٣ − ٦س٢ + ٥س − ٦ ، جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى والقيم الحرجة ؟

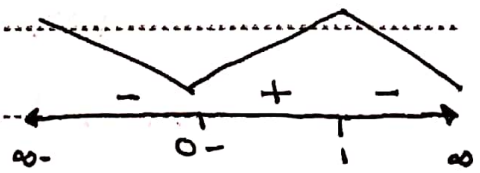
الحل : ق'(س) = ٣س٢ − ١٢س + ٥

ق'(س) = ٠ ← ٣س٢ − ١٢س + ٥ = ٠ ← ∴ ـ = ٣

← س٢ − ٤س + ٥ = ٠ ← (س − ٥)(س − ١)

← س = ٥ ، س = ١

القيم الحرجة



.....

.....

∴ فترات التزايد : $[-\infty, -0.5]$ .....

∴ فترات التناقص : $(-\infty, -0.5] , [0.5, \infty)$ .....

∴ عظمى عند $س = 1 \leftarrow (1, ق(1)) = (1, 2)$ .....

∴ صغرى عند $س = -0.5 \leftarrow (-0.5, ق(-0.5)) = (-0.5, -3.5)$ .....

.....

٣) إذا كان $ق(س) = س^3 (2.4 - 3س^2)$ ، جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى والقيم الحرجة ؟

الحل : $ق'(س) = س^3 (-3س) + (2.4 - 3س^2)$ .....

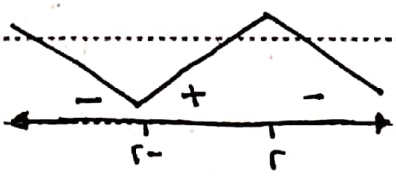
$= -3س^4 + 2.4 - 3س^2 = 2.4 - 6س^2$ .....

$ق'(س) = صفر \leftarrow 2.4 - 6س^2 = 0 \div -6 \leftarrow -4 + س^2 = 0$ .....

$\leftarrow (س - 2)(س + 2)$ .....

$\leftarrow س = 2 , س = -2$ .....

قيم حرجة .....



.....

∴ فترات التزايد : $[-2, 2]$ .....

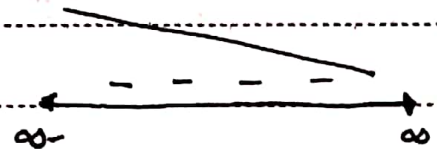
∴ فترات التناقص : $(-\infty, -2] , [2, \infty)$ .....

∴ عظمى عند $س = -2 \leftarrow (-2, ق(-2)) = (-2, 3.2)$ .....

∴ صغرى عند $س = 2 \leftarrow (2, ق(2)) = (2, -3.2)$ .....

س٤ : إذا كان ق(س) = ١ - ٢س ، جد فترات التزايد و التناقص و القيم القصوى و القيم الحرجة ؟

الحل : ق'(س) = -٢ ← -٢ ≠ ٠ ، لا يوجد قيم حرجة



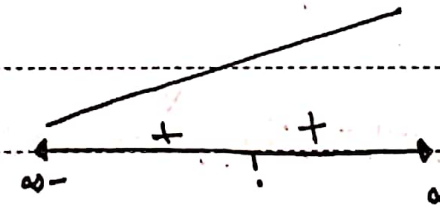
∴ فترات التزايد لا يوجد متناقص دائماً

∴ فترات التناقص (-∞ ، ∞)

∴ عظمى لا يوجد ، صغرى لا يوجد

س٥ : إذا كان ق(س) = س^{٣} + ٢ ، جد فترات التزايد و التناقص و القيم القصوى و القيم الحرجة ؟

الحل : ق'(س) = ٣س^{٢} ← ٣س^{٢} = ٠ ← س = ٠ قيمة حرجة



∴ فترات التزايد : (-∞ ، ∞)

∴ فترات التناقص : لا يوجد متناقص دائماً

∴ عظمى لا يوجد ، صغرى لا يوجد

س٦ : إذا كان ق(س) = ٦س - ٣س٢ ، جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى والقيم الحرجة ؟

الحل : لا تنسى ان مشتقتو جاهزة

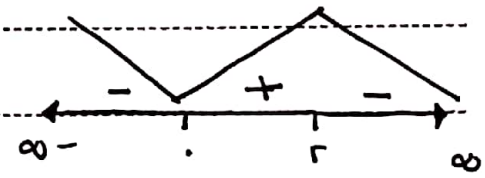
ق'(س) = ٦س - ٣س٢ ← ق'(س) = ٠

٦س - ٣س٢ = ٠ ← ب = -٣

-٣س٢ + ٦س = ٠

-٣س(س - ٢) = ٠

س = ٠ ، س = ٢



∴ فترات تزايد : [٠ ، ٢]

∴ فترات تناقص : (-∞ ، ٠] ، [٢ ، ∞)

∴ عظمى عند س = ٢ ← (٢ ، ق(٢)) لا يوجد ق(س) عشان يخوض

∴ صغرى عند س = ٠ ← (٠ ، ق(٠))

س٣ + ٥ : إذا كان ق(س) = (٥ - س)^٣ ، جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى والقيم الحرجة ؟

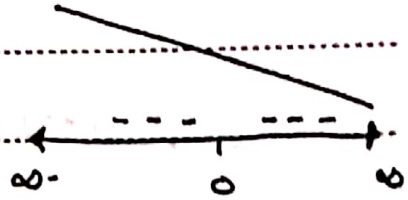
الحل : ق'(س) = ٣(٥ - س)^٢ ← ق'(س) = ٠

٣(٥ - س)^٢ = ٠ ← ب = ٣

(٥ - س)^٢ = ٠ ← س = ٥ ← قيمة حرجة

فترات التزايد: لا يوجد

فترات التناقص: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



قيمة عظمى: لا يوجد

قيمة صغرى: لا يوجد

في إيجاد المجاميل عندما يقول السؤال أوجد كل

١. قيمة قصوى ← نشتق ونساوي بالصفر

٢. قيمة عظمى ← نشتق ونساوي بالصفر

٣. قيمة صغرى ← نشتق ونساوي بالصفر

٤. قيمة حرجة أو نقطة حرجة أو عدد حرج ← نشتق ونساوي بالصفر "مشروحة سابقاً"

سابع: إذا كان $ق(س) = -س^3 + ٦س^2 + ٩س$ وكان للاقتران $ق(س)$ قيمة عظمى عند $س = ١$ جد قيمة الثابت $ج$؟

الحل: قيمة عظمى ← $ق'(١) = صفر$

$ق'(س) = -٣س^2 + ١٢س + ج$

$ق'(١) = صفر \leftarrow -٣ + ١٢ + ج = ٠$

$ج = -٩$

س٢ : إذا كان ق(س) = س٢ + ٤ ب س وكان للاقتران ق(س) قيمة قصوى عند س = ٣ جد قيمة الثابت ب ؟

الحل : قيمة قصوى ← ق'(٣) = ٠

ق'(س) = ٢س + ٤ ب ← ق'(٣) = صفر

← ٢ × ٣ + ٤ ب = صفر

← ٦ + ٤ ب = صفر

← ٤ ب = - ٦ ← ب = $\frac{-٦}{٤}$

← $\boxed{ب = \frac{-٣}{٢}}$

س٣ : إذا كان ق(س) = (س + ب)٤ وكان للاقتران ق(س) قيمة صغرى عند س = ١ جد قيمة الثابت ب ؟

الحل : قيمة صغرى ← ق'(١) = ٠

ق'(س) = ٤ (س + ب)٣ ← ق'(١) = صفر

← ٤ (١ + ب)٣ = صفر ÷ ٤

← (١ + ب)٣ = صفر ∛ للطرفين

← ١ + ب = صفر

← $\boxed{ب = -١}$

س٤: إذا كانت ق(١) = -٢ ، ق َ(١) = ٠ ، ق(٣) = ٢
ق َ(٣) = ٠ ، ق(٢) = ٠ ، ق َ(٢) = ٥ ؟

١- جد القيم الحرجة ؟

الحل: القيم الحرجة هي أصفار المشتقة الأولى
← س = {١، ٣}

٢- جد القيم القصوى ؟

الحل: عظمى عند س = ٣ لأن ق(٣) > ق(١)
← (٣، ق(٣)) = (٣، ٢)

صغرى عند س = ١ لأن ق(١) < ق(٣)
← (١، ق(١)) = (١، -٢)

س٥: إذا كانت ق َ(٤) = ٣ ، ق َ(٠) = ٠ ، ق َ(٢) = ٥

جد القيم الحرجة ؟

الحل: القيم الحرجة هي أصفار المشتقة الأولى
← س = {٠}

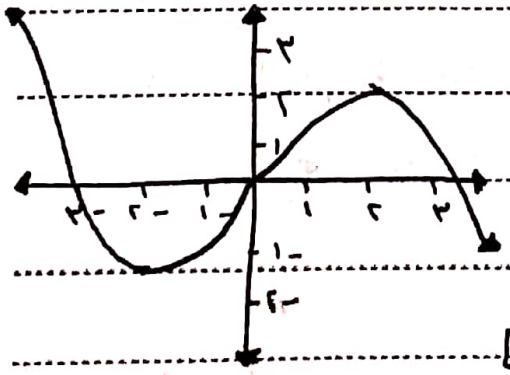
⑤ إيجاد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة من الرسم:

ورسمته قد اسد:

ملاحظات: ↗ متزايد، ↘ متناقص، → ثابت

ملاحظة مهمة: القيم الحرجة في الرسم هي القيم التي يتغير فيها الاقتران من تزايد إلى تناقص أو من تناقص إلى تزايد

س: بالاعتماد على الرسم المجاور الذي يمثل منحنى قد اسد جد:



١. جد فترات التزايد والتناقص؟

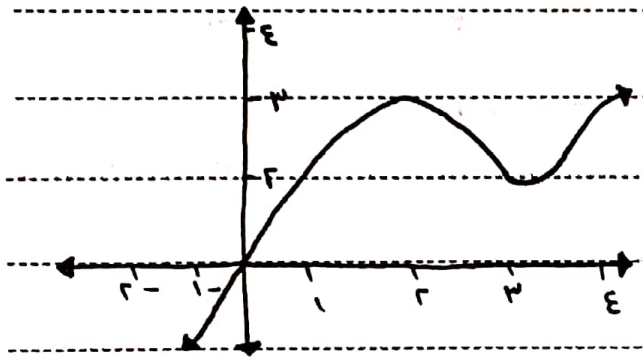
∴ فترات التناقص: $(-\infty, -2]$

$[2, \infty)$

∴ فترات التزايد: $[-2, 2]$

٢. جد القيم الحرجة ؟ س = $\{-2, 2\}$

س٢: جا بالاعتماد على الرسم المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) جد؟



١- أ) جد القيم الحرجة؟

س = {٠, ٢, ٣}

٢- أ) جد فترات التزايد والتناقص؟

∴ فترات التزايد: (-∞, ٢] ، [٣, ∞)

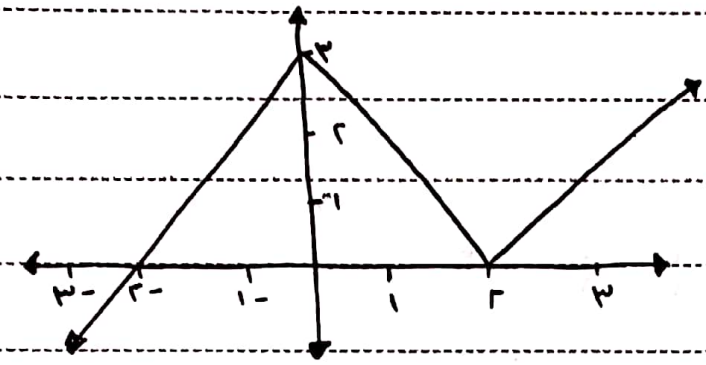
∴ فترات التناقص: [٢, ٣]

ب) جد القيم القصوى؟

← عظمى عند س = ٢ ← (٢, ق(٢)) = (٢, ٣)

← صغرى عند س = ٣ ← (٣, ق(٣)) = (٣, ٢)

س٣ : باعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ف(س) ؟



١) جد فترات التزايد والتناقص ؟

∴ فترات التزايد :]-∞ ، ٠[،]٢ ، ∞[

∴ فترات التناقص :]٠ ، ٢[

٢) جد القيم الحرجة ؟

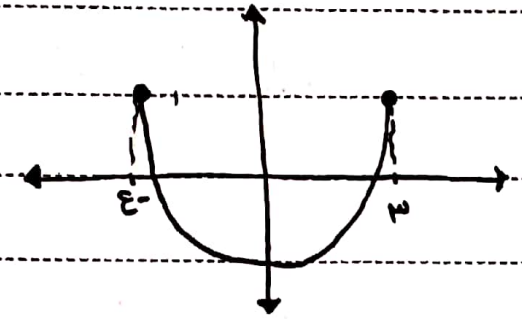
س = {٠ ، ٢}

٣) جد القيم القصوى ؟

∴ عظمى عند س = ٠ ← ق(٠) = (٠ ، ٣)

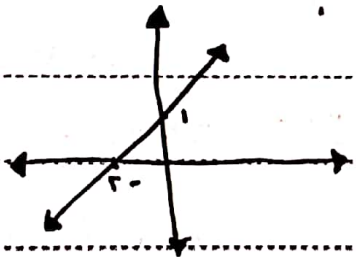
∴ صغرى عند س = ٢ ← ق(٢) = (٢ ، ٠)

س٤ : معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الدقتران
ق(س) جد الفترات التي يكون فيها الدقتران متناقصاً ؟



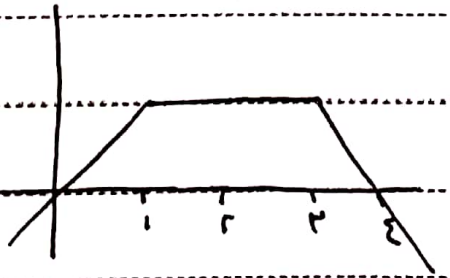
الحل :
∴ فترات التناقص
[-٤ ، ∞-]

س٥ : معتمداً على الشكل الذي يمثل منحنى ق(س) فأين
ق(س) يكون متزايداً على الفترة ؟



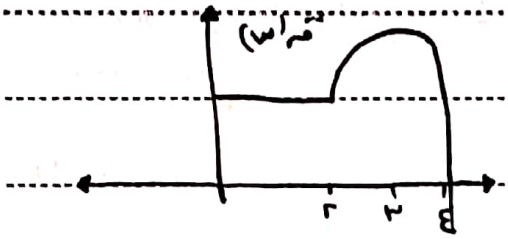
أ) [-٢ ، ∞-] ب) [١ ، ∞-)
ج) (-∞ ، ∞) د) (-∞ ، -٢]

س٦ : جد فترات التزايد والتناقص حسب الشكل الآتي الذي
يمثل منحنى ق(س) ؟



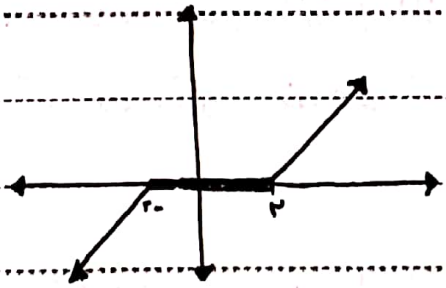
الحل : فترات التزايد (-∞ ، ١]
فترات التناقص [٣ ، ∞)
يكون ثابت [١ ، ٣]

س٧: إذا كان ق'(س) يمثل منحنى الاقتران المرسوم
جد فترات التزايد؟



الحل:
∴ فترات التزايد
]٢,٣[∪

س٨: بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران
ق(س) جد؟



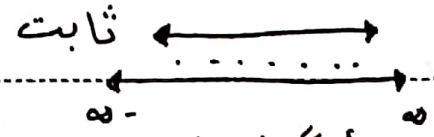
١) ما هي فترات التزايد؟
]-٢, ∞[

٢) ما هي فترات التقاعر؟
]-∞, -٢[∪]-٢, ٢[

٣) متى يكون ق'(س) = صفر؟
س = -٢, ٢ أي في هذه الفترة يكون الاقتران ثابت
ومشتقة الثابت صفر

س٩: بين أن الاقتران ق(س) = ٧ ثابت لجميع قيم س؟

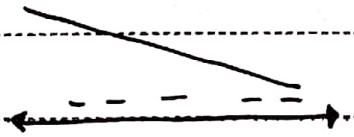
الحل: ق(س) = ٠



ق(س) ثابت لجميع قيم س دائماً عند التعويض في المشتقه يكون الناتج صفر

س١٠: بين أن الاقتران ق(س) = -١ متناقص على مجموعة الاعداد الحقيقيه؟

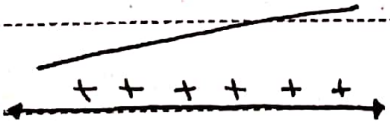
الحل: ق(س) = -١



متناقص على ح

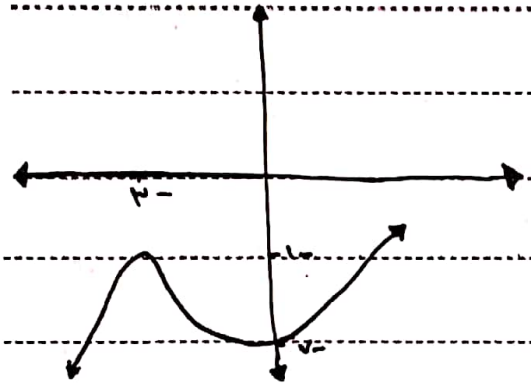
س١١: بين أن الاقتران ق(س) = ٣ متزايد على مجموعة الاعداد الحقيقيه؟

الحل: ق(س) = ٣



متزايد على ح

س١٢: باعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) جد؟



١. النقط الحرجة ؟

∴ النقاط الحرجة

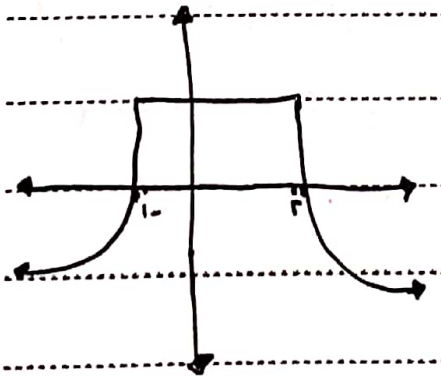
حيث تتغير قيم الحرجة

في الاقتران الأصلي ← (-٣، -١)، (٠، -٧)

٢. القيم القصوى ؟ عظمى عند س = -٣ ← (-٣، ق(-٣)) = (-٣، -١)

صغرى عند س = ٠ ← (٠، ق(٠)) = (٠، -٧)

س١٣: باعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) جد



١. فترات التزايد والتناقص ؟

∴ فترات التزايد [-١، ٢]

∴ فترات التناقص]-∞، -١[∪]٢، ∞[

∴ ثابت]-∞، -١[∪]٢، ∞[

٢. يتغير تكون ق(س) = صفر

⊜ إيجاد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة من الرسم:

▣ رسمة ق'(س):

← ملاحظات مهمة:

١. في رسمة ق'(س) نقاط التقاطع مع محور السينات هي القيم الحرجة

٢. في رسمة ق'(س) يكون الرسم فوق محور السينات "متزايد"

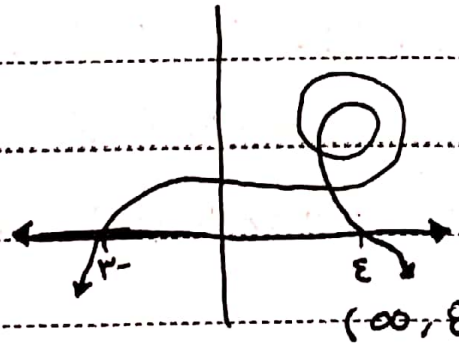
٣. في رسمة ق'(س) يكون الرسم تحت محور السينات "متناقص"

س١: إعتماداً على الرسم المجاور الذي يمثل منحنى الدالة ق'(س) جد:

١. فترات التزايد والتناقص؟

∴ فترات التزايد: $[-6, -3] \cup [4, \infty)$

∴ فترات التناقص: $(-\infty, -3] \cup [3, 4]$



ج: القيم الحرجة ؟

س = {-٣، ٤}

ملاحظة مهمة جداً:

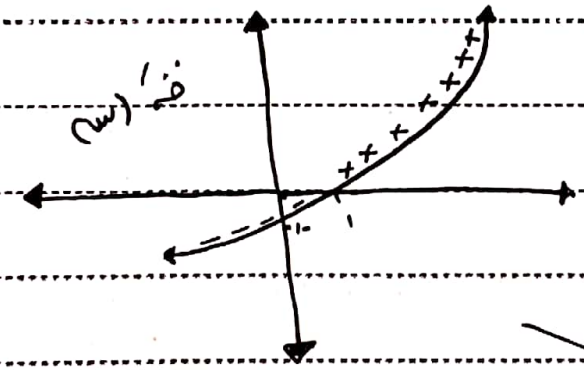
سهل على حالك بس تشوف ق'(س)

ترجم على خط الإشارات.

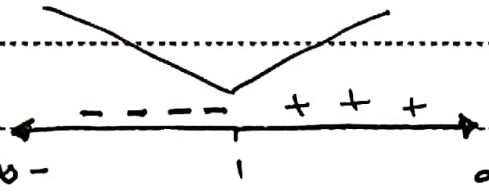
س٢: اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل ق'(س)

جد:

١. فترات التزايد والتناقص ؟



نترجم ق'(س)

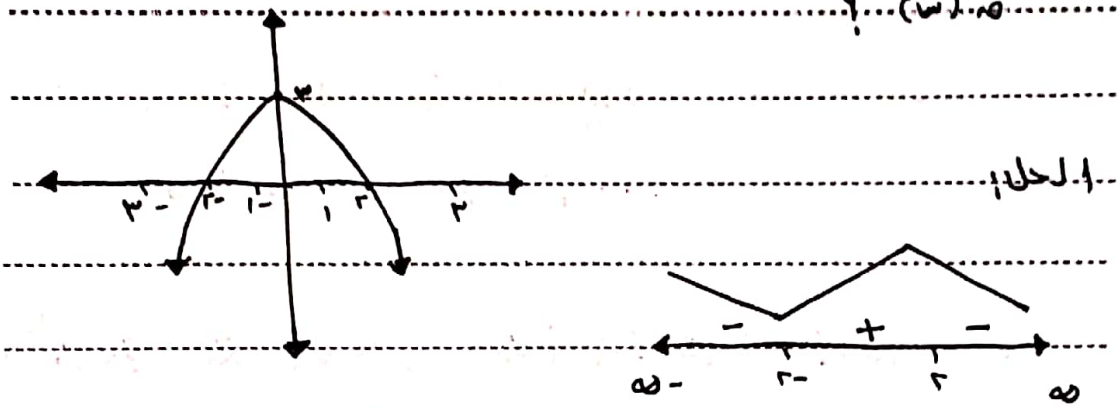


∴ فترات التزايد: [١، ∞)

∴ فترات التناقص: (-∞، ١]

٢. القيم الحرجة ؟ س = {١}

س٣: إذا اعتمادًا على الشكل المجاور الذي يمثل الاقتران ق(س) ؟



الحل:

١. جد القيم الحرجة ؟ س = {٢-، ٢}

٢. فترات التزايد والتناقص ؟

∴ متزايد :]-∞، ٢-[

∴ متناقص :]٢-، هـ[،]هـ، ٢[

٣: القيم القصوى ؟ القيم القصوى في ق(س) هي ناتج

نقاط التقاطع مع محور السينات

∴ عظمى عند س = ٢- ← (٢-، ق(٢-))

← ما عندي ق(س) عشان

التعويض بنفس مثل ما هي

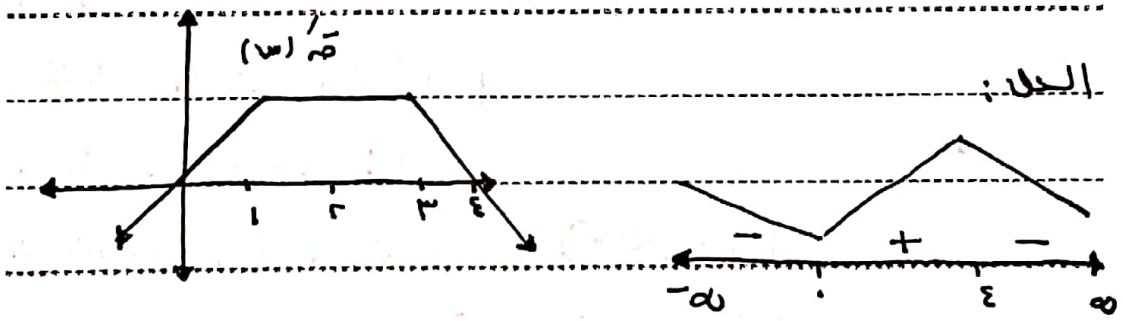
∴ صغرى عند س = ٢ ← (٢، ق(٢))

ع: جد $\lim_{ه \to 0} \frac{ق(٠ + ه) - ق(٠)}{ه}$ ؟

الحل: لا نخليه يضحك عليك نفس ق'(٠)

ومن خلال الرسم ق'(٠) = ٣

س٤: يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ق'(س) أوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س):



الحل:

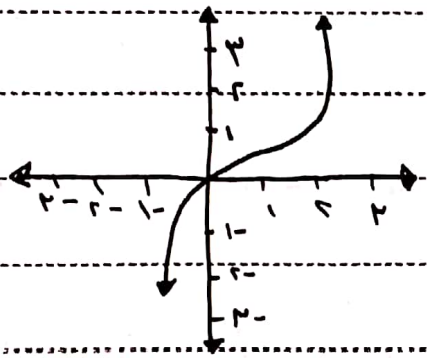
∴ فترات التزايد: [٠، ٤]

∴ متناقص: $(-\infty, 0] \cup [4, \infty)$

س٥ : بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س)

جد : فترات التزايد والتناقص ؟

الحل :



فترات التزايد :]-∞ ، ٥[

فترات التناقص :]٥ ، +∞[

٢. القيم الحرجة ؟

الحل : س = ٥

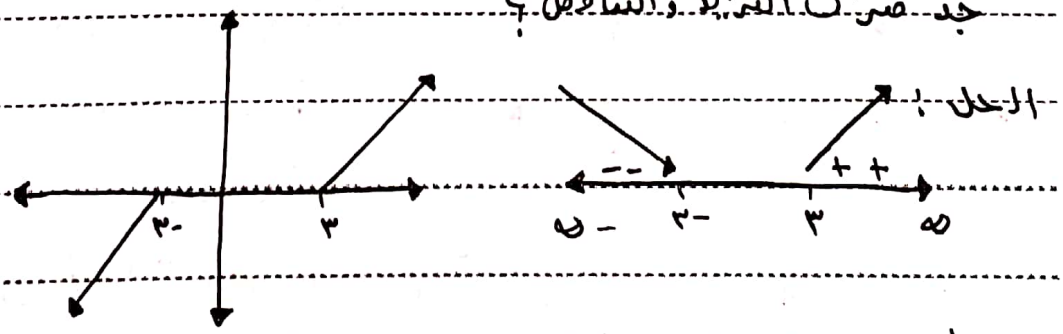
٣. $\lim_{ه \to ٠} \frac{ق(٥+ه) - ق(٥)}{ه}$ ؟

الحل : ق'(٥) = ١

س٦ : بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق'(س)

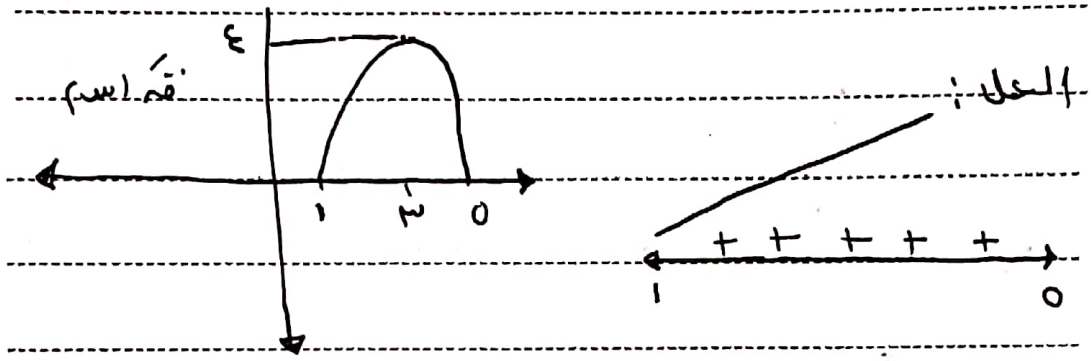
جد فترات التزايد والتناقص ؟

الحل :



∴ متزايد :]-٣ ، ٣[∪]٥ ، +∞[، متناقص :]-∞ ، -٣[∪]٣ ، ٥[، ثابت :]-٣ ، ٣[

س٧: إعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق' اوجد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى



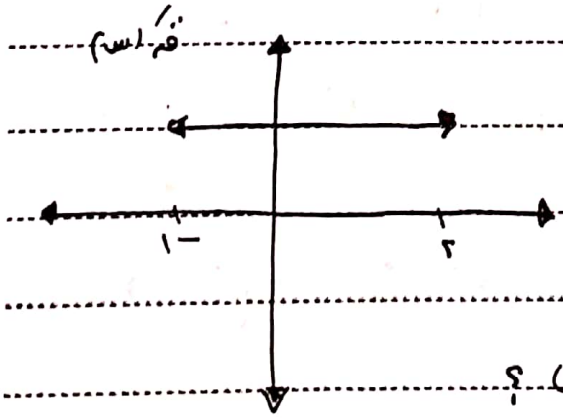
الحل:

∴ فترات التزايد: [١، ٥]

∴ عظمى عند س = ٥ ← (٥، ق(٥))

∴ صغرى عند س = ١ ← (١، ق(١))

س٨: باعتماد على الشكل المجاور جد:



١. القيم القصوى؟

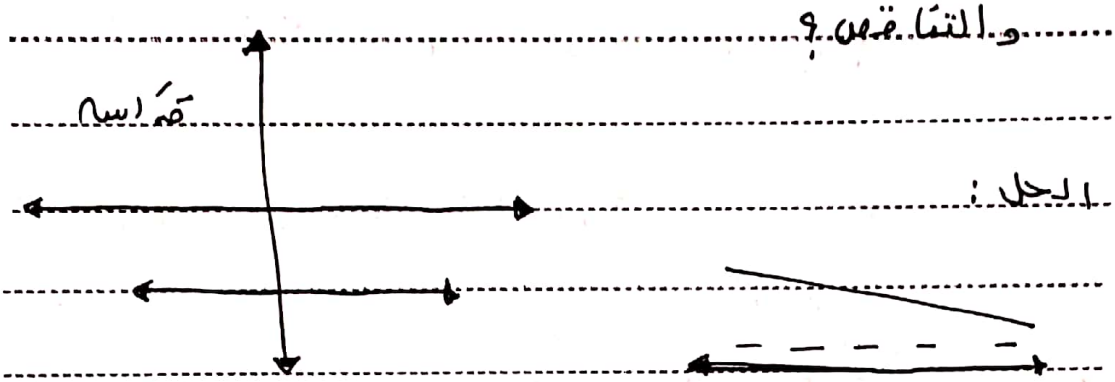
الحل: لا يوجد تقاطع مع محور السينات

∴ لا يوجد قصوى

٢. فترات التزايد والتناقص؟

متزايد على ح = (-∞، ∞)

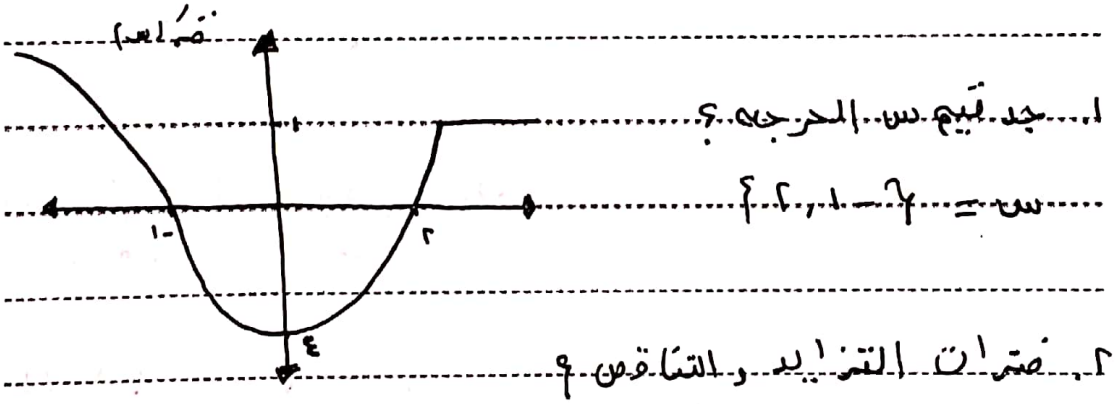
س٩: باالاعتماد على الشكل المجاور جد فترات التزايد والتناقص ؟



الحل:

متناقص على ح

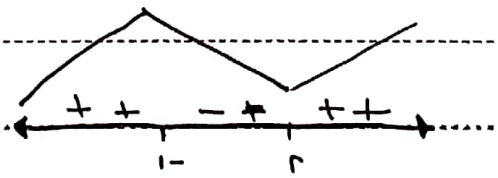
س١٠: باالاعتماد على الشكل المجاور جد:



١. جد قيم س الحرجة ؟

س = {-١، ٢} ؟

٢. فترات التزايد والتناقص ؟



∴ متزايد:]-∞، -١[

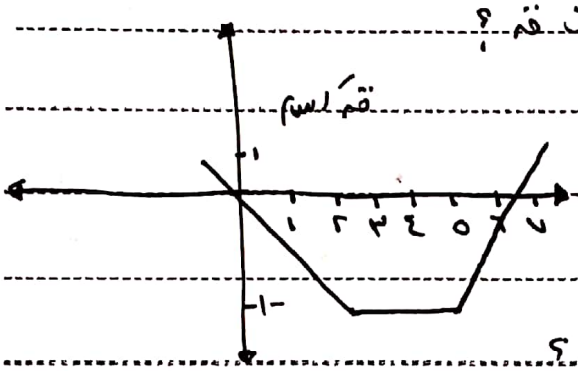
(٢، ∞[

∴ متناقص:]-١، ٢[

٣. جد ميل المماس المرسوم لمنحنى الاقتران عندما س = ٠ ؟ ق(٠) = ٤

س١١: يعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق(س) جد كلاً مما يلي:

١. قيم س الحرجة للاقتران ق ؟



الحل: س = {٠، ٥، ٦}

٢. $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(هـ + ٠) - ق(٠)}{هـ}$ ؟

الحل: ق'(٠) = ٠

٣. $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(٢ + هـ) - ق(٢)}{هـ}$ ؟

الحل: ق'(٢) = -١

٤. ميل المماس المرسوم عند س = ٧ ؟

الحل: ميل مماس ؟؟ ← ق'(٧) = ١

" أسئلة الدرس "

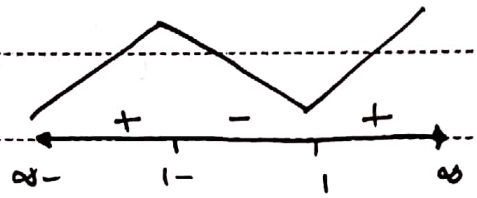
س١: جد القيم القصوى "العظمى والصغرى" المحلية (إن وجدت):

أ) ق(س) = $س^3$ − ٣س + ١ ؟

الحل: ق'(س) = ٣$س^2$ − ٣ ← ٣س^2 − ٣ = ٠ ÷ ٣

← $س^2$ − ١ = ٠

← (س − ١)(س + ١) = ٠



← س = ١ ، −١

∴ عظمى عند س = −١ ← (−١ ، ق(−١)) = (−١ ، ٣)

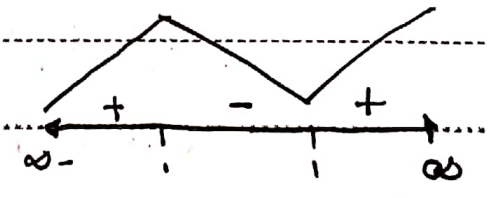
∴ صغرى عند س = ١ ← (١ ، ق(١)) = (١ ، −١)

ب) ق(س) = ٤س^3 − ٦س^2 + ١ ؟

الحل: ق'(س) = ١٢س^3 − ١٢س^2 ← ١٢س^2 − ١٢س = ٠ ÷ ١٢

← $س^2$ − س = ٠

← س(س − ١) = ٠



← س = ٠ ، ١

∴ عظمى عند س = ٠ ← (٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ١) / ∴ صغرى عند س = ١ ← (١ ، ق(١))

← (١ ، ٠)

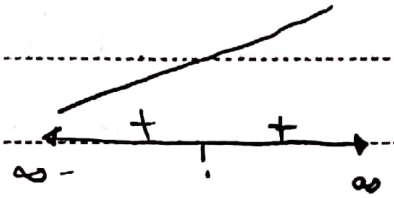
جـ: $م(س) = س^3 + ع$ ؟

الحل:

$م'(س) = 3س^2$ ← $3س^2 = 0$ ÷ 2

$س^2 = 0$ ← $س = 0$

∴ لا يوجد قيم قصوى



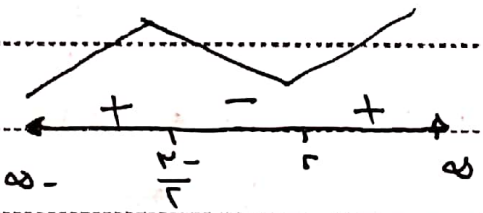
د: $ق(س) = س^3 - 3س^2 - 9س + 8$ ؟

الحل:

$ق'(س) = 3س^2 - 6س - 9$ ← $3س^2 - 6س - 9 = 0$

$(3س + 3)(س - 3) = 0$

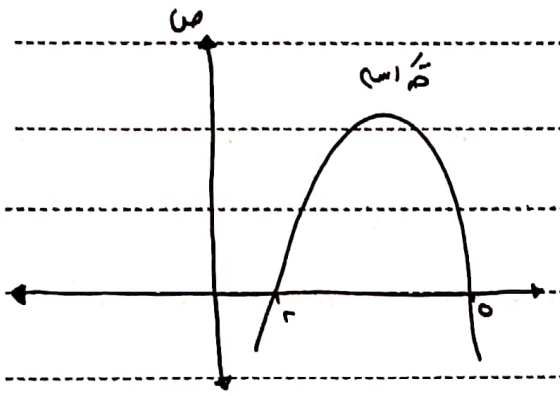
$س = -1$ ، $س = 3$



∴ عظمى عند $س = -1$ ← $(-1, ق(-1))$ = ...

∴ صغرى عند $س = 3$ ← $(3, ق(3))$ = ...

س٣ : أعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى لـ ق(س) حيث ق'(١) = ق'(٥) = ٠

جـ / 

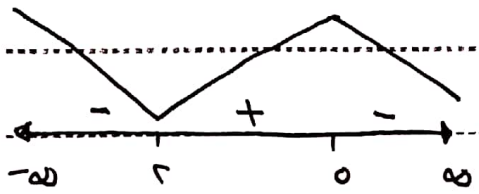
أ) قيم س الحرجة ؟

الحل :

س = ٢ ، ٥ ؟

ب) فترات التزايد والتناقص ؟

الحل :



∴ فترات التزايد : [٢ ، ٥]

∴ فترات التناقص : (-∞ ، ٢] ، [٥ ، ∞)

جـ) نقط القيم القصوى محددًا (نوعها) ؟

الحل :

∴ عظمى عند س = ٥ ← (٥ ، ق(٥))

∴ صغرى عند س = ٢ ← (٢ ، ق(٢))

س٤ + ٢أ ، أ كل ∈ ح فإن ق(س) = س٣ − ٩س٢ + ٤

قيمة حرجة عند س = ٢ ، جـ قيمة الثابت ٩ ؟

الحل : قيمة حرجة عند س = ٢ ⟵ ق'(٢) = ٠

ق'(س) = ٣س٢ − ٩

ق'(٢) = ٠ ⟵ ٣ × ٤ − ٩ = ٠ ⟵ ١٢ − ٩ = ٠

−١ ÷ −١٢ = ٩ ⟵

٩ = ١٢ ⟵

تطبيقات أقتصادية

- قوانين و قواعد مهمة :

أ-

١- التكلفة الكلية ← ك (س)

٢- التكلفة الحدية ← كَ (س)

ب-

١- الإيراد الكلي ← د (س)

٢- الإيراد الحدي ← دَ (س)

جـ-

١- الربح الكلي ← ر (س)

٢- الربح الحدي ← رَ (س)

- الربط بين التكلفة الكلية و الإيراد الكلي و الربح الكلي

← ر (س) = د (س) - ك (س) مهم جداً

- الربط بين التكلفة الحدية و الإيراد الحدي و الربح الحدي

← رَ (س) = دَ (س) - كَ (س)

مهم جداً "ممكن سؤال في دائرة"

← إذا كان الربح الكلي ← ر(س) = د(س) − ك(س)

← الربح الحدي ← ر'(س) = د'(س) − ك'(س)

فإن:

① ← التكلفة الكلية ← ك(س) = د(س) − ر(س)

← التكلفة الحدية ← ك'(س) = د'(س) − ر'(س)

② ← الإيراد الكلي ← د(س) = ر(س) + ك(س)

← الإيراد الحدي ← د'(س) = ر'(س) + ك'(س)

③ إذا كانت كل معطيات السؤال مجهولة

وطلب إيراد وكان يوجد في السؤال فقط سعر وساعة فإن:

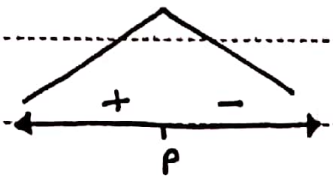
← الإيراد ← د(س) = س × سعر الساعة

ملاحظة: عندما يكون المدير مجهول في السؤال

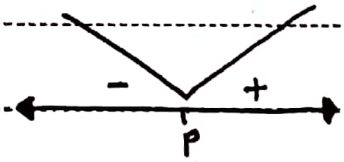
ر(س) = س × سعر السلعة ←

عندما يذكر السؤال:

١. أكبر ما يمكن ←



٢. أقل ما يمكن ←



س١: إذا كان أقتراب المدير الكلي للمبيعات هو ر(س) = ٦٠س − س² وأقتراب التكلفة الكلية ك(س) = ٢ + ٨س جد:

١. المدير الحدي؟

الحل: المدير الحدي ← ر'(س) = ٦٠ − ٢س

٢. التكلفة الحدية؟

الحل: التكلفة الحدية ← ك'(س) = ٨

س: أوجد الربح الكلي؟

الحل: الربح الكلي = الإيراد الكلي - التكلفة الكلية

ر(س) = ح(س) - ك(س)

= ٢٠ س - ٨ س - (٢ س + ٦)

= ٢٠ س - ٨ س - ٢ س - ٦

= ١٠ س - ٢ س - ٦

٤- الربح الحدي؟

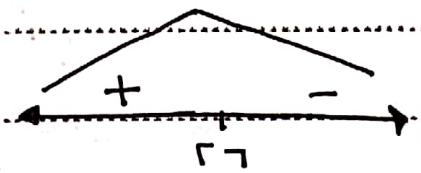
الحل: الربح الحدي ← ر'(س) = ١٠ - ٤ س

٥- ما قيمة س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن؟

الحل: ر'(س) = ٠

١٠ - ٤ س = ٠ ← ١٠ = ٤ س ÷ ٤

← س = ٢,٦



← الربح أكبر ما يمكن

س٢: لاحظت إحدى الشركات التي تصنع ألعاب الأطفال أن التكلفة الكلية لإنتاج س لعبة هي ك(س) = ٠,٠٠٣ س٢ + ٠,٠٢ س + ١٠٠ دينار، وأن الربح الناتج من بيع س لعبة هو ر(س) = ٤ س. جد كل مما يأتي:

١. أ) قدر ان التكلفة الحدية؟

الحل: التكلفة الحدية = ك'(س) = ٠,٠٠٦ س + ٠,٠٢

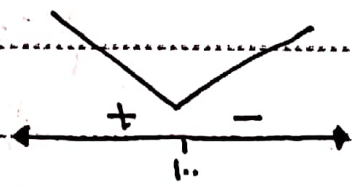
٢. عدد اللعب اللازم إنتاجها حتى تكون التكلفة أقل ما يمكن؟

الحل: ك'(س) = ٠ ← ٠,٠٠٦ س + ٠,٠٢ = ٠

← ٠,٠٠٦ س = -٠,٠٢

$$س = \frac{-٠,٠٢}{٠,٠٠٦}$$

$$س = \frac{\frac{٢}{١٠}}{\frac{٦}{١٠٠٠}} = \frac{٢}{١٠} \times \frac{١٠٠٠}{٦} = ١٠٠$$



لأن ك' تغير إشارتها من (-) إلى (+) عند س = ١٠٠ لذا فإن التكلفة أقل

ما يمكن عندما س = ١٠٠ لعبه

س/ إذا يراد الحدي الناتج من بيع ١٠٠ لعبه ؟

الحل:

لإيجاد الإيراد الحدي يجب أن يكون لدينا الإيراد الكلي

← الإيراد الكلي = التكلفه الكليه + الربح الكلي

← ك(س) = ت(س) + ر(س)

= ٣٠٠ + ٢٠س + ٠,١ س٢ + ٤٠س

= ٣٠٠ + ٢٠س + ٠,١ س٢

∴ الإيراد الحدي = ك'(س) = ٢٠ + ٠,٢ س

ك'(١٠٠) = ٢٠ + ٠,٢ × ١٠٠ = ٢٠ + ٢٠ = ٤٠ دينار

س٣ : إذا كان إقتران الإيراد الكلي لأحد المبيعات هو ر(س) = ٥٠س + ٢س٢ دينار ، و إقتران التكلفة الكلية ك(س) = ٣س + ٤س٢ + ٢٠ دينار ، حيث س عدد الوحدات المباعة ، فجد قيمة س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن ؟

الحل : نكتب أولاً إقتران الربح الكلي :

ر(س) = ر(س) − ك(س)

= ٥٠س + ٢س٢ − (٣س + ٤س٢ + ٢٠)

= ٥٠س + ٢س٢ − ٣س − ٤س٢ − ٢٠

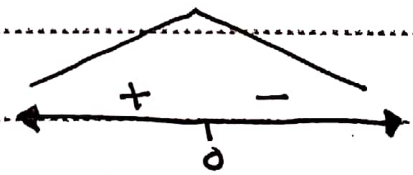
= ٤٧س − ٢س٢ − ٢٠

ر(س) = ٤٧ − ٤س ← ر(س) = ٠

← ٤٧ − ٤س = ٠

← ٤س = ٤٧ ، ÷ ٤

← س = ٤٧/٤ ← س = ٥



← الربح أكبر ما يمكن

س٤: حدد معنى لإنتاج الأجهزة الإلكترونية
إن التكلفة الكلية بالدينار لإنتاج س
من الأجهزة أسبوعياً تعطى بالقانون
ك(س) = ٠٫٠٠٢ س٢ + ٠٫٠٦ س + ٥٠٠٠ أنابيع
الجهاز الواحد بمبلغ ٨٠ ديناراً، فما عدد
الوحدات التي يجب إنتاجها وبيعها أسبوعياً
ليكون الربح أكبر ما يمكن؟

الحل: الإيراد الكلي ← د(س) = س × ٨٠ = ٨٠ س

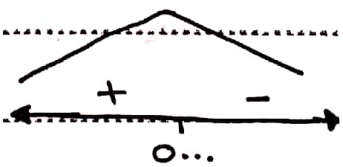
الربح الكلي = ر(س) = د(س) − ك(س)

= ٨٠ س − (٠٫٠٠٢ س٢ + ٠٫٠٦ س + ٥٠٠٠)

= ٨٠ س − ٠٫٠٠٢ س٢ − ٠٫٠٦ س − ٥٠٠٠

= −٠٫٠٠٢ س٢ + ٧٩٫٩٤ س − ٥٠٠٠

ر′(س) = −٠٫٠٠٤ س + ٧٩٫٩٤ ← −٤س/١٠٠٠ = −٧٩٫٩٤



ر′(س) = ٠ ← س = ٥٠٠٠

الربح أكبر ما يمكن

س٥: وجد مصنع لانتاج أجهزة إلكترونية أن التكلفه الكليه بالدينار لانتاج س من الاجهزه أسبوعياً تعطى بالاقتران ك(س) = ٥س + ٣ أذا بيع الجهاز الواحد بمبلغ (٢٠٠ - س) دينار فجد قيمة س التي تجعل الربح الاسبوعي أكبر ما يمكن ؟

الحل: أقتران الربح الكلي ← ر(س) = د(س) - ك(س)

لكن د يوجد أيضاً ← د(س) = س × (٢٠٠ - س)

= ٢٠٠س - س٢

← ر(س) = ٢٠٠س - س٢ - (٥س + ٣)

= ٢٠٠س - س٢ - ٥س - ٣

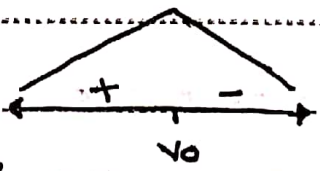
= ١٩٥س - س٢ - ٣

← ر'(س) = ١٩٥ - ٢س ← ر'(س) = ٠

← ١٩٥ - ٢س = ٠

← ٢س = -١٩٥

← س = ٩٧.٥



← الربح أكبر ما يمكن

س٦: ينتج مصنع س من أجهزة الحاسوب في الشهر ويبيع الجهاز الواحد بمبلغ (٢٦٠ - س) دينار، إذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج س من الأجهزة تعطى بالعلاقة ك(س) = ٤٠٠ + ٦٠س + س٢ دينار، فما عدد الأجهزة التي يجب أن ينتجها ويبيعها المصنع شهرياً حتى يكون ربحه أكبر ما يمكن؟

الحل: أ فترض أن الربح الكلي ← ر(س) = د(س) - ك(س)

لكن لا يوجد أبراد ← د(س) = س × (٢٦٠ - س)

= ٢٦٠س - س٢

← ر(س) = ٢٦٠س - س٢ - (٤٠٠ + ٦٠س + س٢)

= ٢٦٠س - س٢ - ٤٠٠ - ٦٠س - س٢

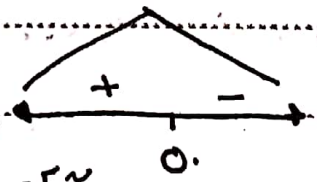
= ٢٠٠س - ٢س٢ - ٤٠٠

← ر'(س) = ٢٠٠ - ٤س ← ر'(س) = ٠

← ٢٠٠ - ٤س = ٠

← - ٤س = - ٢٠٠

← س = ٥٠



← أكبر ربح ممكن

س٧: ينتج مصنع ثلاجات س ثلاجة أسبوعياً فإذا كانت تكلفة إنتاج المكلي الـ٢ سبعين بالدينار تعطى بالعلاقة ك(س) = س٢ - ٤٠س + ٣٥٠ وكان سعر الثلاجة ٤٠ ديناراً فما عدد الثلاجات التي يجب إنتاجها أسبوعياً لتحقيق أكبر ربح ممكن ؟

الحل: بما أن الربح المكلي ← ر(س) = ك(س) - ك(س)

لكن لا يوجد أي بيان ← ك(س) = س × ع

← ك(س) = ٤٠ س

← ر(س) = ٤٠ س - (س٢ - ٤٠س + ٣٥٠)

= ٤٠ س - س٢ + ٤٠س - ٣٥٠

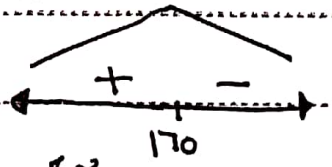
= ٨٠ س - س٢ - ٣٥٠

← ر'(س) = ٨٠ - ٢س ← ر'(س) = ٠

← ٨٠ - ٢س = ٠

← ٢س = ٨٠ ← س = ٨٠ ÷ ٢

س = ٤٠



← أكبر ربح ممكن

" أسئلة الكتاب "

س١: إذا كان إقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو ر(س) = ٨٠ س + س٢ دينار، وإقتران التكلفه الكليه هو ك(س) = ٤ + ١٦ س دينار، حيث س عدد الوحدات المنتجه من سلعة ما فجد الربح الحدي ؟

الحل: إقتران الربح الكلي ← ر(س) = ا(س) - ك(س)

← ر(س) = ٨٠ س + س٢ - (٤ + ١٦ س)

= ٨٠ س + س٢ - ٤ - ١٦ س

= - ٨٠ س + س٢ - ٤

الربح الحدي ← ر'(س) = - ٨٠ + ٢ س

س٢: ينتج مصنع الحواسيب س جهاز إسبوعياً، فإذا كانت تكلفه الإنتاج الكلي الإسبوعي بالدينار تعطى بالعلاقه ك(س) = ٣٠٠ + ٥٠ س + س٢ وكان سعر الجهاز الواحد ٢٥٠ ديناراً، فما عدد الأجهزة التي يجب أن يبيعها المصنع إسبوعياً لتحقيق أكبر ربح ممكن ؟

الحل: نفترض ان الربح الكلي ← ر(س) = ك(س) − ت(س)

← ك(س) = ٥٠ س ← الايراد الكلي

← ر(س) = ٥٠ س − (٣٠٠ + ٥ س + س٢)

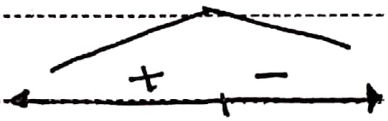
= ٥٠ س − ٣٠٠ − ٥ س − س٢

= ٤٥ س − ٣٠٠ − س٢

← ر´(س) = ٤٥ − ٢ س ← ر´(س) = ٠

← ٤٥ − ٢ س = ٠ ← − ٢ س = − ٤٥ ÷ − ٢

← س = ٢٢,٥



← نأخذ أكبر ربح ممكن

س٣: إذا كان نفترض ان الإيراد الكلي للمبيعات هو

ك(س) = ٦٠ س − س٢ و نفترض ان التكلفه الكلية

هو ت(س) = ٢٠٠ + ٨ س دينار، حيث س عدد الوحدات

المنتجه من سلعة ما، فجد الربح الحدي؟

الحل: ر(س) = ك(س) − ت(س) = ٦٠ س − س٢ − ٢٠٠ − ٨ س

ر´(س) = ٥٢ − ٢ س #

س٤ ؛ إذا كان ك(س) = ٦ا(س) − س٢ + ٢ حيث أ ثابت

ك(س) = ٢س٣ − ٨س٢ + ١٥ + ٣٠ ا(س) حيث س هي

عدد ساعات معينة و تكلفتها ، فجد س التي تجعل

الربح ٢ كبر ما يمكن ؟

الحل : ر(س) = ا(س) − ك(س)

= ٦ا(س) − س٢ + ٢ − (٢س٣ − ٨س٢ + ١٥)

= ٦ا(س) − س٢ + ٢ − ٢س٣ + ٨س٢ − ١٥

= ٦ا(س) − ٢س٣ + ٧س٢ − ١٣

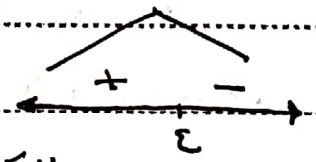
ر(س) = ٦ − ٦س٢ + ١٤س ← ر(س) = ٠

٦ − ٦س٢ + ١٤س = ٠ ←

١٤س − ٦س٢ = ٠ ←

س(١٤ − ٦س) = ٠ ←

س = ٠ ← س = ٤



∴ الربح ٢ كبر ما يمكن

س٥: ينتج مصنع الثلاجات س ثلاجة شهرياً، فإذا كانت تكلفة انتاجها تعطى بالعلاقة
ك(س) = ٣٦٠٠ + ٤س + س٢ وكان سعر الثلاجة الواحدة ٥٠٠ دينار، فجد عدد الثلاجات التي يجب أن ينتجها المصنع لتحقيق أكبر ربح ممكن؟

الحل:

أ- قانون الربح الكلي ← ر(س) = ك(س) - ك'(س)

ك'(س) ← ك(س) = ٥٠٠ س

ر(س) = ٥٠٠ س - (٣٦٠٠ + ٤س + س٢)

= ٥٠٠ س - ٣٦٠٠ - ٤س - س٢

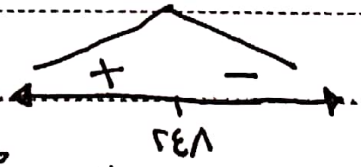
= ٤٩٦ س - ٣٦٠٠ - س٢

ر'(س) = ٤٩٦ - ٢س ← ر'(س) = ٠

٤٩٦ - ٢س = ٠

٢س = ٤٩٦ ÷ ٢

س = ٢٤٨



← الربح أكبر ما يمكن

س٦: يبيع أحد المصانع الوحدة الواحدة من سلعة معينه بمبلغ ٩٠ دينارًا فاذا كانت التكلفه الكليه لانتاج س وحده من هذه السلعة آسبوعيًا تعطى بالعلاقه:

ك(س) = ٠,٢ س^{٢} + ٤ س + ١٠٠ فجد الربح الحدي؟

الحل: ← الربح الكلي ← ر(س) = ك(س) − ك(س)

← الايراد ← ر(س) = ٩٠ س

← ر(س) = ٩٠ س − (٠,٢ س^{٢} + ٤ س + ١٠٠)

= ٩٠ س − ٠,٢ س^{٢} − ٤ س − ١٠٠

= − ٠,٢ س^{٢} + ٨٦ س − ١٠٠

← الربح الحدي ← ر′(س) = − ٠,٤ س + ٨٦ #

" أسئلة أضافية "

س١: إذا كان ك قيراط التكلفه الكليه لإنتاج س .....

متعهد ما منتج معين يعطي بالعبارة ك(س) = ٣س٢ + ٣٥س

فأن التكلفه الحديه عندما س = ١٠ تساوي ؟

.....

الجواب : ك'(١٠) = ١٥

.....

س٢: يدنج مصنع الحواسيب س جهاز أسبوعياً فإذا كانت

تكلفه الإنتاج الكلي الأسبوعي ك(س) = ٠٠٠٣ + ٥٠س + س٢

وكان المصنع يبيع الجهاز الواحد بمبلغ ٥٢٠ دينار

فجد :

١. ق ق ان الايراد الكلي ؟ الجواب : ر(س) = ٥٢٠س

٢. ق ق ان الربح الكلي ؟ الجواب : ر(س) = ٠٠٠٣ + ٥٠س + س٢

٣. عدد الأجهزه التي يجب أن

يبيعها المصنع أسبوعياً لتحقيق

أكبر ربح ممكن ؟ الجواب : س = ١٠٠ جهاز

.....

س٣: إذا كان الإيراد الكلي لبيع س وحدة من منتج ما يعطى بالعلاقة ر(س) = ٦س - ٣س٢ فأوجد الإيراد الحدي عندما س = ١ يساوي؟

الجواب: ر'(١) = ٠

س٤: إذا كان ر(س) هو إقتران الربح الكلي لـ(س) هو إقتران الإيراد الكلي ض هو إقتران التكلفة الحدية؟

الجواب: ل'(س) = ر'(س) - ض'(س)

س٥: إذا كان ل'(س) إقتران التكلفة الكلية لـ(س) إقتران الإيراد الكلي لمصنع حيث س عدد الوحدات المنتجة أسبوعياً يكون الربح الأسبوعي أكبر ما يمكن عندما؟

الجواب: ر'(س) = ل'(س)

" أسئلة الوحدة "

س١: يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = ٢ن^{٣} − ١٢ن + ٣ حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ن الزمن بالثواني جد تسارع الجسيم عندما تساوي سرعته ٤٢ م/ث؟

الحل: الزمن مجهول ولكن ع(ن) = ٤٢

ع(ن) = ف′(ن)

= ٦ن^{٢} − ١٢

ع(ن) = ٤٢ ← ٦ن^{٢} − ١٢ = ٤٢ ÷ ٦

ن^{٢} − ٢ = ٧

ن^{٢} = ٧ + ٢ = ٩ ← ن^{٢} = ٩

ن = ٣ ، ن = −٣

تهمل ✗

∴ المطلوب التسارع ت(ن) = ع′(ن)

= ١٢ن

عندما ن = ٣ ← ت(٣) = ١٢ × ٣ = ٣٦ م/ث^{٢}

س٢: يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = م(ن-١)٢ حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ن الزمن بالثواني إذا كانت سرعة الجسيم المقطوعة بعد ٤ ثواني تساوي ١٢ م/ث فجد قيمة الثابت م ؟

الحل: ع(ن) = ف'(ن)

= ٢م(ن-١)

ع(٤) = ١٢ ← ٢م(٤-١) = ١٢

← ٢م × ٣ = ١٢ ← ٦م = ١٢ ÷ ٦

← م = ٢

ع س: إذا كان ق(س) = س٢(٦-س) فجد:

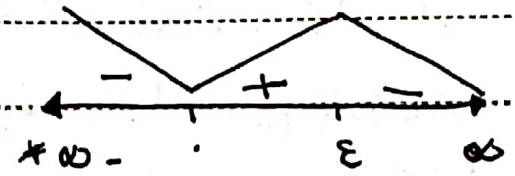
١) فترات التزايد والتناقص ؟

الحل: ق'(س) = س٢ × -١ + (٦-س) × ٢س

= -س٢ + ١٢س - ٣س٢

= -٣س٢ + ١٢س = -٣س(س-٤)

∴ ق'(س) = ٠ ← -٣س(س-٤) = ٠ ← س = ٠ ، س = ٤



∴ متزايد على [٠ ، ٤]

∴ متناقص على (-∞ ، ٠] ، [٤ ، ∞)

∴ عند س = ٠ قيمة صغرى محلية ← ق(٠) = ٠ ← (٠ ، ٠)

∴ عند س = ٤ قيمة عظمى محلية ← ق(٤) = ٣٢ ← (٤ ، ٣٢)

س٩ : يبيع أحد المصانع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بمبلغ ١٠٠ دينار، فإذا كانت التكلفة الكلية بالدينار ك(س) = ٣س - س٢ + ٤س + ١٠٠ دينار، جد الربح الحدي ؟

الحل : ∵ ق(س) الربح ← ر(س) = ح(س) - ك(س)

∵ الإيراد ← ح(س) = ١٠٠ س

ر(س) = ١٠٠ س - (٣س - س٢ + ٤س + ١٠٠)

= ١٠٠ س - ٣س + س٢ - ٤س - ١٠٠

الربح الحدي

ر'(س) = ١ - ٦ + ٢س - ٤

= ٢س - ٦ = ٢(س - ٣) #

س٧: إذا كان ف(س) = س(٣س-١)^{٢} فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ف عندما س = ١ ؟

الحل:

معادلة المماس

(ص - ص١) = ف'(س١)(س - س١)

أ) س١ = ١

ب) ص١ = ١(٣×١-١)^{٢} = ٢^{٢} = ٤

ج) ميل المماس ← ف'(س) = س×٢(٣س-١)×٣ + (٣س-١)^{٢}

ف'(١) = ١×٢(٣×١-١)×٣ + (٣×١-١)^{٢}

= ٢(٢)×٣ + (٢)^{٢} = ٣×٤ + ٤ = ١٢ + ٤ = ١٦

∴ معادلة المماس

(ص - ٤) = ١٦(س - ١)

س٩: إذا كان ك(س) = ٤ + ٣س٢ يمثل اقتران التكلفة الحدية لإنتاج س قطعة من سلعة ما، جد التكلفة الحدية لإنتاج ٢ قطعة من هذه السلعة؟

الحل: ك'(س) = ٦س

ك'(٢) = ٦ × ٢ = ١٢

س١٠: إذا كان ق(س) = (٣س − ٤)^٣ فجد قيمة س التي تجعل ق'(س) = ٣٦؟

الحل: ق'(س) = ٣(٣س − ٤)^٢ × ٣

ق'(س) = ٣٦

٩(٣س − ٤)^٢ = ٣٦ ← ÷٩ ← (٣س − ٤)^٢ = ٤

بالتربيع ← ٣س − ٤ = ± ٢

٣س − ٤ = ٢	٣س − ٤ = −٢
٣س = ٦ ÷ ٣	٣س = −٢ + ٤ = ٢ ÷ ٣
س = ٢	س = ٢/٣

س١١: يتكون هذا السؤال من ست فقرات من نوع الاختيار من متعدد لكل فقرة أربعة بدائل واحد فقط منها صحيح ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة:

١. إذا كان للاقتران ق(س) = ٢س^٢ − ١٢س + ٤ قيمة حرجة عند س = ٣ جد قيمة ٢:

(أ) ٢ ب) ٦ ج) ١٢ د) ٢٤

٢. إذا كان ميل المماس للاقتران ص = (٢ − س)^٤ عند النقطة (س، ص) يساوي ٤ فإن قيمة س تساوي:

أ) −٣ ب) −٢ ج) ٢ (د) ٣

٣. إذا كان ق(س) = س^٢ − ٤س + ١ فإن للاقتران قيمة حرجة عندما س تساوي:

أ) صفر ب) ١ ج) ٢ د) ٤

٤ فترة التزايد لـ ق : ن فـ(س) = س٣ − ٣س٢ − ٢ هي :

أ) [٢,٣] ب) [٠,١] ج) [١,٥] د) [١,٥]

٥ يتحرك جسيم وفق العلاقة : ف(ن) = ٦ن٢ − ن٣ حيث ف المسافة بالأمتار التي يقطعها الجسيم ، ن ثانية المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار حتى يصبح تسارعه صفراً هي :

أ) ١٢ ب) ١٦ ج) ٢٤ د) ٣٢

٦ إذا كان ق : ن فـ(س) = أ س٣ − ٣س٢ قيمة صغرى محلية عند س = ١ فإن قيمة الثابت أ تساوي :

أ) ٢ ب) −٢ ج) ٣ د) −٣

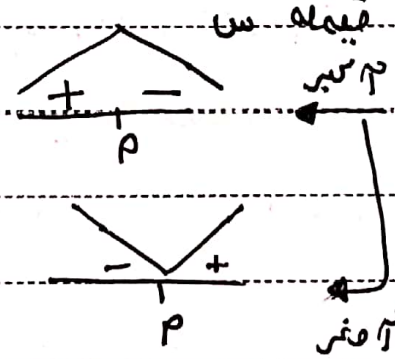
٧ إذا كان ق(س) = س٢ + ١ فإن آلة قيمة المقدار عند س = :

أ) ٠ ب) ١ ج) ٢ د) ٤

مثال: مثل شرط تكون أ أكبر ما يمكن
أ و أ أقل ما يمكن متعلقة فقط بالربح و التكلفة
و الإيراد ممكن يجيبلك أي أ قتران:

خطوات الحل:

1. أشتق الاقتران
2. ساوي بالصفر
3. لحلي قيمة س
4. أرسم



قواعد وقوانين الوحدة

الدرس الأول: التفسير الهندسي للمشتقة

- معادلة المماس ← $(ص - ص_1) = ق'(س_1)(س - س_1)$
- ميل المماس ← $ق'(س_1)$
- نقطة التماس ← $(س_1 ، ص_1)$

الدرس الثاني: التفسير الفيزيائي للمشتقة

- $ف(ن)$ ← المسافة ← تقاس بوحدة م
- $ع(ن)$ ← السرعة ← تقاس بوحدة م/ث
- $ت(ن)$ ← التسارع ← يقاس بوحدة م/ث^2

$ع(ن) = ف'(ن)$ ، $ت(ن) = ع'(ن)$

$ت(ن) = ف''(ن)$

الدرس الثالث: تطبيقات الاشتقاق

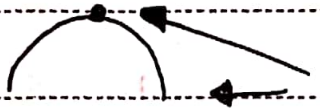
- قيمة مرجعة ← نشتق ونساوي بالصفر
- نقطة مرجعة ← هي ناتج تعويض صفر المشتقة بالاقتران الأصلي
- تزايد ← +
- تناقص ← −
- قيمة عظمى ← هي ناتج تعويض صفر المشتقة في الاقتران الأصلي

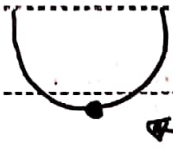
شكل: + | − عند P ← (P, ق(P))

- قيمة صغرى ← هي ناتج تعويض صفر المشتقة في الاقتران الأصلي

شكل: − | + عند P ← (P, ق(P))

- الرسم: ق(س): ← متناقص
  ← متزايد
- ق(س): فترة محور السينات متزايد، تحت متناقص

② الرسم : عظمى ←  ق'(س)

صغرى ← 

③ الرسم : عظمى ، صغرى هي نقاط التقاطع مع محور السينات وناتجها المقابل على محور الصادات في رسمة ق'(س)

④ د(ثمّ) من حل السؤال من الرسم تترجم السؤال عن خط آختبار المشتقة

المدرس الرابع : تطبيقات آقتصادية :

← آذا كان الدين د مجهول ← ك(س) = س × سعر السلعة

← الربح ر(س) = د(س) − ك(س)

← تكلفة ك'(س) = ك(س) − ر(س)

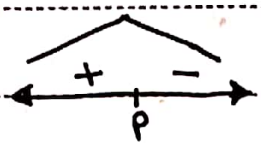
← آيراد د(س) = ر(س) + ك'(س)

← ربح حدي ر'(س) = ك'(س) − ك''(س)

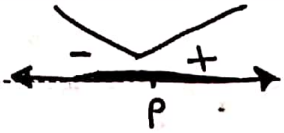
← تكلفة حدية ك''(س) = د'(س) − ر'(س)

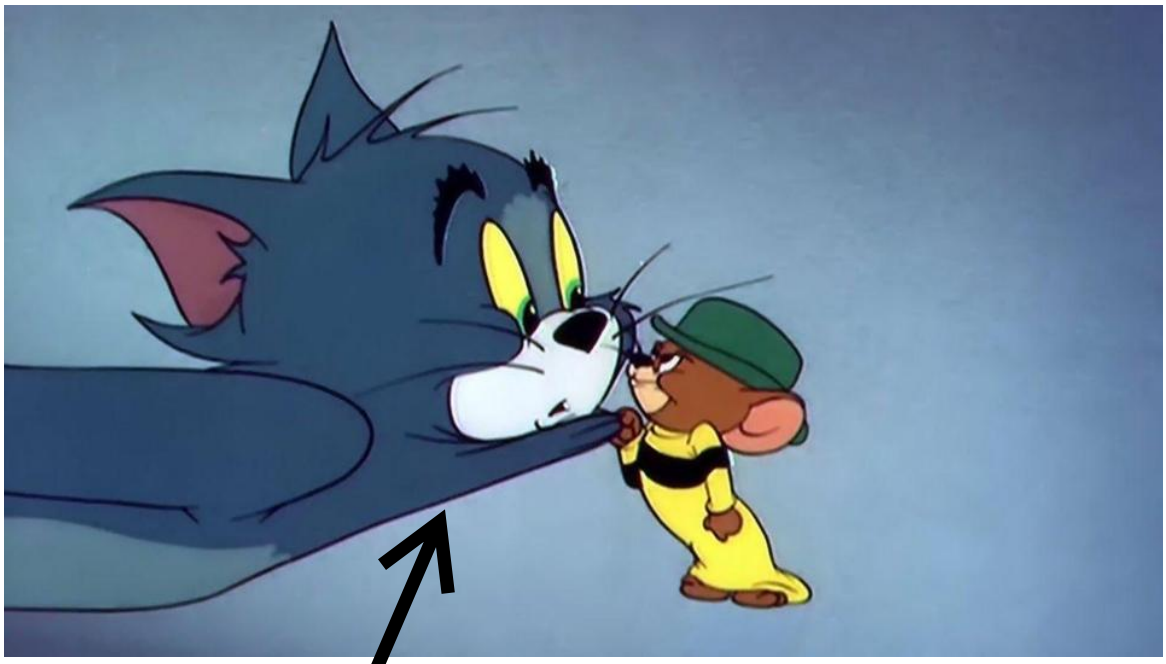
← آيراد حدي د'(س) = ر'(س) + ك''(س)

٢) كبر ما يمكن ←



٣) أقل ما يمكن ←





تطبيقات التفاضل