

إجابات تمارين ومسائل الدرس

نظريات النهايات

(١) إذا كان $ق(س) = س^2 - س - ٦$ ، $ل(س) = س^2 - ٢س - ٣$ ، فجد كلاً مما يأتي:

أ) $\lim_{س \rightarrow ١} (ق(س) + ل(س))$ ب) $\lim_{س \rightarrow ١} ق(س) \times ل(س)$

ج) $\lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)}$ د) $\lim_{س \rightarrow ٢} (ل(س))^٤$

هـ) $\lim_{س \rightarrow ٢} \sqrt[٢]{١٢ - ل(س)}$ و) $\lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)}$

الحل:

$$أ) \lim_{س \rightarrow ١} (ق(س) + ل(س)) = (٦ - ١ - ١) + (٣ - ٢ - ١) = ١٠ -$$

$$ب) \lim_{س \rightarrow ١} ق(س) \times ل(س) = ٦ - \times ٤ - = ٢٤$$

$$ج) \lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)} = \frac{٤ -}{٦ -} = \frac{٢}{٣}$$

$$د) \lim_{س \rightarrow ٢} (ل(س))^٤ = (٢^٢ - ٢ \times ٢ - ٣) = ٤(٣ -) = ٨١$$

$$هـ) \lim_{س \rightarrow ٢} \sqrt[٢]{١٢ - ل(س)} = \sqrt[٢]{٣ - - ١٢} = \sqrt[٢]{٤}$$

$$و) \lim_{س \rightarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)} = \frac{٣ - ٢ + ١}{٦ - + ١ + ١} = \frac{صفر}{٤ -} = صفر$$

(٢) إذا كانت $ق(س) = ٢س + ١٠$ ، $ل(س) = ٣س + ١ = ٧$ ، فجد كلاً مما يأتي:

أ) $\lim_{س \rightarrow ٢} (ق(س) + ل(س))$ ب) $\lim_{س \rightarrow ٢} (ق(س) - ل(س))$

ج) $\lim_{س \rightarrow ٢} \sqrt[٢]{ل(س)}$ د) $\lim_{س \rightarrow ٢} (ق(س) - ل(س))$

الحل:

$$\text{نهاية } 3 \text{ ل (س)} = 1 + 7 = 8 \leftarrow \text{س}$$

$$\text{نهاية } 3 \text{ ل (س)} = 1 + 7 = 8 \leftarrow \text{س}$$

$$\text{نهاية } 3 \text{ ل (س)} = 6 \leftarrow \text{س}$$

$$\text{نهاية } 3 \text{ ل (س)} = 2 \leftarrow \text{س}$$

$$\text{نهاية } 2 \text{ ع (س)} = 10 \leftarrow \text{س}$$

$$\frac{1}{2} = \text{نهاية } 2 \text{ ع (س)} \leftarrow \text{س}$$

$$\text{نهاية } 2 \text{ ع (س)} = 5 \leftarrow \text{س}$$

$$\text{أ) نهاية } (2 \text{ ع (س)} + 3 \text{ ل (س)}) = 2 + 5 \times 2 = 12 \leftarrow \text{س}$$

$$\text{ب) نهاية } (3 \text{ ع (س)} - 2 \text{ ل (س)}) = 3 \times 5 - 2 \times 2 = 15 - 4 = 11 \leftarrow \text{س}$$

$$\text{ج) نهاية } \frac{\sqrt{2}}{5} = \frac{\sqrt{2} \text{ ل (س)}}{5 \text{ ع (س)}} \leftarrow \text{س}$$

$$\text{د) نهاية } (3 \text{ ع (س)} - 2 \text{ ل (س)}) = 3 \times 5 - 2 \times 2 = 15 - 4 = 11 \leftarrow \text{س}$$

٣) جد كلاً مما يأتي:

$$\text{ب) نهاية } |25 - 2 \text{ س}| \leftarrow \text{س}$$

$$\text{أ) نهاية } |25 - 2 \text{ س}| \leftarrow \text{س}$$

$$\text{د) نهاية } |64 - 2 \text{ س}| \leftarrow \text{س}$$

$$\text{ج) نهاية } |2 - 2 \text{ س}| \leftarrow \text{س}$$

$$\text{و) نهاية } (س [س] + |س|) \leftarrow \text{س}$$

$$\text{هـ) نهاية } [2 - 2 \text{ س}] \leftarrow \text{س}$$

$$\text{ح) نهاية } \sqrt{2 \text{ س} - 1} \leftarrow \text{س}$$

$$\text{ز) نهاية } \sqrt{5 - 2 \text{ س}} \leftarrow \text{س}$$

$$\text{ط) نهاية } \sqrt{4 + 2 \text{ س} + 4 \text{ س} + 4} \leftarrow \text{س}$$

الحل:

أ) نهيا $|س - ٢٥|$ $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$ ٥ ← صفر = $٢٥ - ٢$ ← صفر = $٥ \pm$

نهيا $|س - ٢٥|$ $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$ = نهيا $(س - ٢٥)$ صفر = صفر

ب) نهيا $|س - ٢٥|$ $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix}$ = نهيا $(٢٥ - س)$ صفر = صفر

ج) نهيا $|س - ٢|$ $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix}$ = نهيا $(٢ - س)$ صفر = صفر

د) نهيا $|س - ٦٤|$ $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$ ٨

نهيا $|س - ٦٤|$ $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$ ٨ صفر = صفر

نهيا $|س - ٦٤|$ $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix}$ ٨ صفر = صفر

نهيا $|س - ٦٤|$ $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$ ٨ صفر = صفر

هـ) نهيا $[س - ٢]$ $\begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix}$ ٤ = ١

$\left. \begin{matrix} ٥- \geq س > ٤- \\ ٦- \geq س > ٣- \end{matrix} \right\} = [س - ٢]$

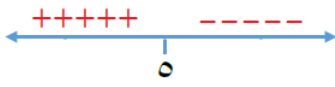
نهيا $[س - ٢]$ $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$ ٤ غير موجودة $\left\{ \begin{matrix} ٦- = [س - ٢] \begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix} ٤ \\ ٧- = [س - ٢] \begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix} ٤ \end{matrix} \right.$

و) نهيا $(س [س] + |س|)$ $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$ ١

$\left. \begin{matrix} ١ > س \geq ٠ \\ ٢ > س \geq ١ \end{matrix} \right\} = [س]$ صفر

نهيا $(س [س] + |س|)$ $\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix}$ ١ غير موجودة $\left\{ \begin{matrix} ١ = ١ + ٠ = (س + ٠ \times س) \begin{matrix} - \\ \leftarrow \end{matrix} ١ \\ ٢ = ١ + ١ = (س + ١ \times س) \begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix} ١ \end{matrix} \right.$

$$\begin{aligned} 5 - s &= \text{صفر} \\ s &= 5 \end{aligned}$$

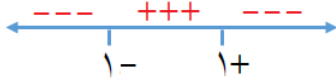


$$\text{ز) نهايا } \sqrt{s-5} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=5$$

$$\text{نهايا } \sqrt{s-5} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{صفر} =$$

$$1 \pm = s^2 \iff \text{صفر} = s^2 - 1$$

$$\text{ح) نهايا } \sqrt{s^2 - 1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=1$$



$$\text{نهايا } \sqrt{s^2 - 1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=1 \text{ غير موجودة} =$$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{نهايا } \sqrt{s^2 - 1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=1 & \text{ غير موجودة} \\ \text{نهايا } \sqrt{s^2 - 1} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{صفر} & = \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} s + 2 &= \text{صفر} \\ s &= -2 \end{aligned}$$



$$\text{ط) نهايا } \sqrt{s^2 + 4s + 4} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2$$

$$\text{نهايا } \sqrt{(s+2)^2} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2 = |s+2| \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2$$

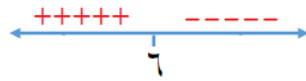
$$\left\{ \begin{aligned} \text{نهايا } |s+2| \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2 & \text{ صفر} \\ \text{نهايا } |s+2| \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=-2 & \text{ صفر} \end{aligned} \right.$$

٤) جد قيم جـ التي تجعل نهايا $\sqrt{s-6}$ غير موجودة.

الحل:

$$6 = s \iff \text{صفر} = s - 6$$

$$\text{نهايا } \sqrt{s-6} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} s=6$$

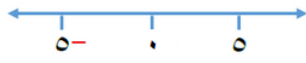


$$\text{نهايا } \sqrt{s-6} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{غير موجودة على }]6, \infty[$$

٥) إذا كان ق(س) = [٢, ٠[س]، فجد قيم جـ التي تجعل نهايا [٢, ٠[س] = ١-

الحل:

$$[س] = [س, ٢] = [س, \frac{٢}{١٠}]$$

$$٥ = \frac{١٠}{٢} = \frac{١}{\frac{٢}{١٠}} = ل$$


$$٥ - \leq س < ١ - \} = (س)$$

نهيا $[س, ٢] = ١ -$ قيم ج هي $(٥-, ٠)$

$$\left. \begin{array}{l} ٣ \leq س \quad , \quad س - ٢ \leq ٤ - أ \\ ٣ > س \quad , \quad [س - ٦] \end{array} \right\} = (س) \text{ إذا كان ق}$$

وكانت نهيا ق (س) موجودة ، فجد قيمة الثابت أ.

الحل:

$$٣ \geq س > ٢ \quad , \quad ٣ = [س - ٦]$$

$$\begin{array}{l} \text{نهيا } س - ٢ \leq ٤ - أ \\ \text{نهيا } ٣ \end{array}$$

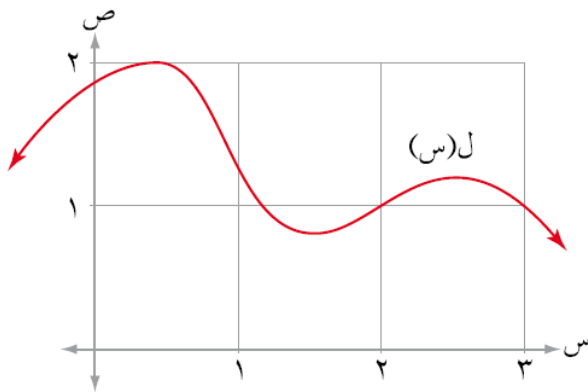
$$\frac{٦}{٤} = \frac{٤ - أ}{٤} \iff ٣ = ٤ - أ$$

$$\frac{٣}{٢} = \frac{٦}{٤} = أ \iff$$

(٧) معتمداً الشكل (١-١٥) الذي يمثل منحنى الاقتران ل، جد كلاً مما يأتي:

أ) نهيا ل $(٣ - س)$

ب) نهيا $(س + ل)$



الشكل (١-١٥)

الحل:

أ) نهيا ل (٣ - س) $\xrightarrow{س \rightarrow ٣}$

$$ص = ٣ - س$$

$$س \leftarrow ٢ \quad \longleftrightarrow \quad ص \leftarrow ٣$$

نهيا ل (٣ - س) $\xrightarrow{س \rightarrow ٣}$ = نهيا ل (ص) $\xrightarrow{ص \rightarrow ٣}$

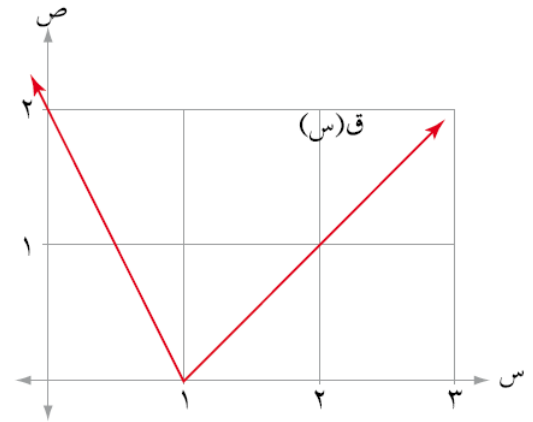
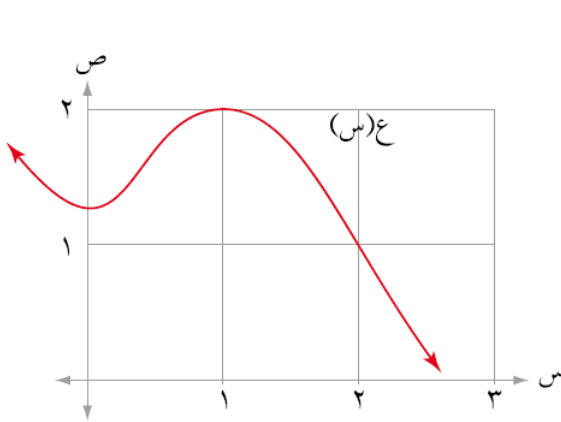
$$١ =$$

ب) نهيا ل (س + ل (س)) $\xrightarrow{س \rightarrow ٣}$

نهيا ل (س) $\xrightarrow{س \rightarrow ٣}$ + نهيا ل (س) $\xrightarrow{س \rightarrow ٣}$

$$٣ = ١ + ٢$$

٨) معتمداً الشكل (١-٦)، الذي يمثل منحنبي الاقترانين ق، ع، جد كلاً مما يأتي:



الشكل (١-٦)

ب) نهيا ل (ق(س) × ع(س)) $\xrightarrow{س \rightarrow ٢}$

أ) نهيا ل (ق(س) + ع(س)) $\xrightarrow{س \rightarrow ١}$

ج) نهيا ل (٢ ق(س) + (١ - س) ع(س)) $\xrightarrow{س \rightarrow ١}$

الحل:

$$\text{أ) } \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نها}} (\text{ق} \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{س}} + \text{ع} \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{س}})$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نها}} \text{ق} \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{س}} + \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نها}} \text{ع} \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{س}}$$

$$2 = 2 + \text{صفر}$$

$$\text{ب) } \underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نها}} (\text{ق} \underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{س}} \times \text{ع} \underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{س}})$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نها}} \text{ق} \underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{س}} \times \underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نها}} \text{ع} \underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{س}}$$

$$1 = 1 \times 1$$

$$\text{ج) } \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نها}} (2 \text{ ق} \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{س}} - 1) + \text{ع} \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{س}}$$

$$2 \underset{\text{ص} \leftarrow 0}{\text{نها}} \text{ق} \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{ص}} + \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نها}} \text{ع} \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{س}}$$

$$6 = 2 + 2 \times 2$$

$$\begin{aligned} \text{ص} = \text{س} - 1 \\ \text{س} \leftarrow 1 \\ \text{ص} \leftarrow \text{صفر} \end{aligned}$$

٩) إذا كان ق كثير حدود يمر بالنقطة $(-3, 4)$ ، وكانت $\underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نها}} (\text{س} - \text{ل} \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{س}}) = 10$

$$\text{فجد } \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نها}} (\text{ق}^2 \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{س}} - 2 \text{ ل} \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{س}})$$

الحل:

ق كثير حدود يمر بالنقطة $(-3, 4)$ ، فيكون $\text{ق} \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{س}} = 4$ ومنه: $\underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نها}} \text{ق} \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{س}} = 4$

$$\underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نها}} (\text{س} - \text{ل} \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{س}}) = 10$$

$$10 = \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نها}} \text{ل} \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{س}} - 3$$

$$\underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نها}} \text{ل} \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{س}} = 13$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نها}} \text{ق}^2 \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{س}} - \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نها}} 2 \text{ ل} \underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{س}}$$

$$24 = 16 - 14 = 2 \times 7 - 2$$

١٠) إذا كان ع كثير حدود باقي قسمته على $(\text{س} - 2)$ يساوي ٥، فجد $\underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نها}} (3 \text{ ع} \underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{س}} + 4 \text{ س}^2)$

الحل:

لأن ϵ كثير حدود وباقي قسمته على $(s-2)$ يساوي 5 ، فيكون $\epsilon(2) = 5$ ، ومنها:

$$5 = \underset{s \leftarrow 2}{\text{نهاي } \epsilon(s)}$$

إذاً:

$$\underset{s \leftarrow 2}{\text{نهاي } \epsilon(s)} = (4s + 3)\epsilon(s)$$

$$31 = 16 + 15 = (2)4 + 5 \times 3$$