إجابات أسئلة الدرس

نظريات النهايات

١) إذا علمت أن $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٨$، $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = -٢$، فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) $\lim_{س \to ٣} (٤ق(س) + ٢هـ(س))$

ب) $\lim_{س \to ٣} (ق(س) - ٢هـ(س))$

جـ) $\lim_{س \to ٣} (ق(س) \times هـ(س))$

د) $\lim_{س \to ٣} ٥ق(س)$

هـ) $\lim_{س \to ٣} (٢ق(س) + ١)$

و) $\lim_{س \to ٣} ((هـ(س))^{٣} + ٣س - ٧)$

ز) $\lim_{س \to ٣} (٢ق(س) + ٣هـ(س) + ٢س + ٤)$

الحل:

أ) $\lim_{س \to ٣} (٤ق(س) + ٢هـ(س)) = ٤ \lim_{س \to ٣} ق(س) + ٢ \lim_{س \to ٣} هـ(س)$

$= ٤ \times ٨ + ٢ \times -٢ = ٣٢ - ٤ = ٢٨$

ب) $\lim_{س \to ٣} (ق(س) - ٢هـ(س)) = \lim_{س \to ٣} ق(س) - ٢ \lim_{س \to ٣} هـ(س)$

$= ٨ - ٢ \times -٢ = ٨ + ٤ = ١٢$

جـ) $\lim_{س \to ٣} (ق(س) \times هـ(س)) = \lim_{س \to ٣} ق(س) \times \lim_{س \to ٣} هـ(س)$

$= ٨ \times -٢ = -١٦$

د) $\lim_{س \to ٣} ٥ق(س) = ٥ \lim_{س \to ٣} ق(س) = ٥ \times ٨ = ٤٠$

هـ) $\lim_{س \to ٣} (٢ق(س) + ١) = ٢ \lim_{س \to ٣} ق(س) + ١ = ٢ \times ٨ + ١ = ١٧$

و) $\lim_{س \to ٣}$ ((هـ (س))^{٣} + ٣س − ٧) = ($\lim_{س \to ٣}$ هـ (س))^{٣} + $\lim_{س \to ٣}$ (٣س − ٧)

= (−٢)^{٣} + ٣ × ٣ − ٧ = −٨ + ٩ − ٧ = −٦

ز) $\lim_{س \to ٣}$ (٢ق(س) + ٣هـ (س) + ٢س + ٤) =

٢ $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) + ٣ $\lim_{س \to ٣}$ هـ (س) + $\lim_{س \to ٣}$ (٢س + ٤) =

٢ × ٨ + ٣ × −٢ + ٢ × ٣ + ٤ = ١٦ − ٦ + ٦ + ٤ = ٢٠

---

٢) جد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\lim_{س \to -٢}$ (٣س^{٤} − ٥س^{٣} + ٦س − ٧)

ب) $\lim_{س \to ١}$ (س^{٢} + ١) (س^{٣} + ٥س − ٢)

جـ) $\lim_{س \to -١}$ (س^{٣} + ٢)^{٥}

الحل:

أ) $\lim_{س \to -٢}$ (٣س^{٤} − ٥س^{٣} + ٦س − ٧)

= ٣(−٢)^{٤} − ٥(−٢)^{٣} + ٦(−٢) − ٧

= ٣ × ١٦ − ٥ × −٨ − ١٢ − ٧ = ٤٨ + ٤٠ − ١٩ = ٦٩

ب) $\lim_{س \to ١}$ (س^{٢} + ١) (س^{٣} + ٥س − ٢)

= (١ + ١) (١ + ٥ − ٢) = ٢ × ٤ = ٨

جـ) $\lim_{س \to -١}$ (س^{٣} + ٢)^{٥} = ((−١)^{٣} + ٢)^{٥} = (−١ + ٢)^{٥} = (١)^{٥} = ١

---

٣) إذا كانت $\lim_{س \to -٢} (٣ق(س) + ٢س + ١) = ٢٧$، فجد $\lim_{س \to -٢} (ق(س))^{٣}$

الحل:

$$\lim_{س \to -٢} ٣ق(س) + \lim_{س \to -٢} (٢س + ١) = ٢٧$$

$$= ٣\lim_{س \to -٢} ق(س) + (٢ \times -٢ + ١) = ٢٧$$

$$= ٣\lim_{س \to -٢} ق(س) - ٣ = ٢٧$$

$$= ٣\lim_{س \to -٢} ق(س) = ٣٠$$

$$= \lim_{س \to -٢} ق(س) = ١٠$$

$$\lim_{س \to -٢} (ق(س))^{٣} = \lim_{س \to -٢} (ق(س))^{٣}$$

$$= ١٠^{٣} = ١٠٠٠$$

---

٤) إذا كانت $\lim_{س \to ٣} (م س^{٢} + ٥س + ١) = ٢٥$، فما قيمة الثابت م؟

الحل:

$$\lim_{س \to ٣} (م س^{٢} + ٥س + ١) = ٢٥$$

$$\lim_{س \to ٣} م س^{٢} + ٥ \times ٣ + ١ = ٢٥$$

$$م (٣)^{٢} + ١٦ = ٢٥$$

$$٩م = ٢٥ - ١٦$$

$$٩م = ٩$$

$$م = ١$$

٥) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٤س + ١ & ، س > ٠ \\ ٥ - س^{٢} & ، س \leq ٠ \end{cases}$ ، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\lim_{س \to ١}$ ق(س)　　ب) $\lim_{س \to -٢}$ ق(س)　　جـ) $\lim_{س \to ٠}$ ق(س)

الحل:

أ) $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ٥ − $١^{٢}$ = ٤

ب) $\lim_{س \to -٢}$ ق(س) = ٤ × −٢ + ١ = −٨ + ١ = −٧

جـ) $\lim_{س \to ٠^{+}}$ ق(س) = ٥ − ٠ = ٥

$\lim_{س \to ٠^{-}}$ ق(س) = ٤ × ٠ + ١ = ١

$\lim_{س \to ٠}$ ق(س) غير موجودة.

٦) إذا كان هـ (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س \neq ٣ \\ ٨ & ، س = ٣ \end{cases}$

فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\lim_{س \to ٥}$ هـ (س)　　ب) $\lim_{س \to ٣}$ هـ (س)　　جـ) هـ (٣)

الحل:

أ) $\lim_{س \to ٥} هـ(س) = ٥^{٢} + ١ = ٢٦$

ب) $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٣^{٢} + ١ = ١٠$

جـ) $هـ(٣) = ٨$

---

٧) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} أ س + ٤ & ، \ س > ٢ \\ ٥س^{٢} + أ & ، \ س \leq ٢ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة، فما قيمة الثابت أ ؟

الحل:

$\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة،

$\lim_{س \to ٢^{+}} ٥س^{٢} + أ = \lim_{س \to ٢^{-}} أ س + ٤$

$٢٠ + أ = ٢أ + ٤$

$٢٠ - ٤ = ٢أ - أ$

$أ = ١٦$

---

٨) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ & ، \ س < ٢ \\ ٥س & ، \ ٢ \leq س \leq ٦ \\ س^{٢} - ٦ & ، \ س > ٦ \end{cases}$

فجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن وجدت):

أ) $\lim_{س \to ٠}$ ق(س)　　ب) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

جـ) $\lim_{س \to ٤}$ ق(س)　　د) $\lim_{س \to ٦}$ ق(س)

الحل:

أ) $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = $٠^{٢} + ١ = ١$

ب) $\lim_{س \to ٢^{+}}$ ق(س) = ٥ × ٢ = ١٠

$\lim_{س \to ٢^{-}}$ ق(س) = $٢^{٢} + ١ = ٥$

$\Leftarrow$ $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = غير موجودة.

جـ) $\lim_{س \to ٤}$ ق(س) = ٥ × ٤ = ٢٠

د) $\lim_{س \to ٦^{+}}$ ق(س) = $-٦^{٢}$ = ٦ − ٣٦ = ٣٠

$\lim_{س \to ٦^{-}}$ ق(س) = ٥ × ٦ = ٣٠

$\lim_{س \to ٦}$ ق(س) = ٣٠

---

٩) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣س - أ & ، \ س > ٢ \\ ١٠ & ، \ س < ٢ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) موجودة، فجد قيمة الثابت أ ؟

الحل:

نهـــا ق(س) موجودة ⟸
س←٢

نهـــا ق(س) = نهـــا ق(س)
س←٢+ س←٢−

١٠ = نهـــا (٣س − أ)
س←٢−

١٠ = ٣ × ٢ − أ

١٠ = ٦ − أ

أ = −٤