إجابات تمارين ومسائل الدرس

التزايد والتناقص

١) حدِّد فترات التزايد وفترات التناقص لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = ٤س − س^{٢} ، س ∈ ح.

ب) ق(س) = |س^{٢}−٩| ، س ∈[−٥ ، ٥]

جـ) ق(س) = جتا^{٢}س ، س ∈[٠ ، ٢ π]

د) ق(س) = (١ − س)^{٣} ، س ∈ ح.

هـ) ق(س) = (٢ − س)^{٤} ، س ∈ ح.

و) ق(س) = $\sqrt{\text{٢٥} - \text{س}^{٢}}$ ، س ∈[−٥ ، ٥]

ز) ق(س) = $\sqrt[٣]{(\text{س}-\text{٤})^{٢}}$ ، س ∈ ح.

ح) ق(س) = جتا س − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س ، س ∈ [٠ ، ٢ π]

ط) ق(س) = $\begin{cases} \text{٣} - \text{س}^{٢} & \text{، س} \leq \text{١} \\ \frac{\text{٢}}{\text{س}} & \text{، س} > \text{١} \end{cases}$

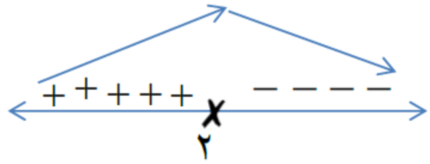
ي) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٤ - \text{س}^{٣} ، & \text{س} < ١ \\ \frac{٣}{\text{س}} ، & \text{س} \geq ١ \end{cases}$

الحل

أ) $\text{ه}(\text{س}) = ٤\text{س} - \text{س}^{٢} ، \text{س} \in \text{ح}$

$\text{ه}'(\text{س}) = ٤ - ٢\text{س}$

$\text{ه}'(\text{س}) = ٠ \leftarrow ٤ - ٢\text{س} = ٠ \leftarrow \text{س} = ٢$



فترات التزايد $(-\infty ، ٢]$

فترات التناقص $[٢ ، \infty)$

ب) $\text{ه}(\text{س}) = |\text{س}^{٢} - ٩| ، \text{س} \in [-٥ ، ٥]$

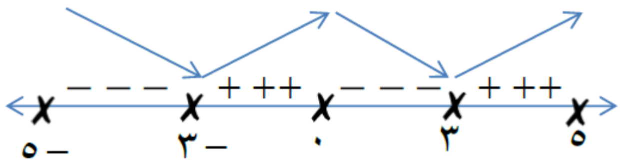
$\text{س}^{٢} - ٩ = ٠ \leftarrow \text{س} = \pm ٣$

$$\text{ه}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ٩ ، & -٥ \leq \text{س} < -٣ \\ ٩ - \text{س}^{٢} ، & -٣ \leq \text{س} < ٣ \\ \text{س}^{٢} - ٩ ، & ٣ < \text{س} \leq ٥ \end{cases}$$

$$\text{ه}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} ، & -٥ < \text{س} < -٣ \\ -٢\text{س} ، & -٣ < \text{س} < ٣ \\ ٢\text{س} ، & ٣ < \text{س} < ٥ \end{cases}$$

$\text{ه}'(\text{س}) = ٠ \leftarrow \text{س} = ٠$

$\text{ه}'(\text{س})$ غير موجودة عند $\text{س} = \pm ٣$



فترات التزايد : $[-٣ ، ٠] \cup [٣ ، ٥]$

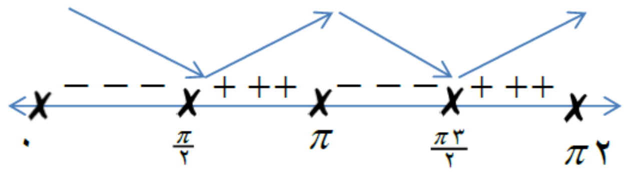
فترات التناقص : $[-٥ ، -٣] \cup [٠ ، ٣]$

جـ) $\text{ه}(\text{س}) = \text{جتا}^{٢}\text{س} ، \text{س} \in [٠ ، ٢\pi]$

$\text{ه}'(\text{س}) = -٢\text{جتاس جاس}$

$\text{ه}'(\text{س}) = ٠ \leftarrow -٢\text{جتاس جاس} = ٠$

$\text{س} = \frac{\pi}{٢} ، \pi ، \frac{٣\pi}{٢}$ و غير موجودة عند $\text{س} = ٠ ، ٢\pi$



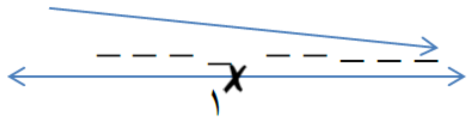
فترات التزايد : $[\frac{\pi}{٢}،\pi]\cup[\frac{٣\pi}{٢}،٢\pi]$

فترات التناقص : $[٠،\frac{\pi}{٢}]\cup[\pi،\frac{٣\pi}{٢}]$

د) $\text{ق}(\text{س}) = (١-\text{س})^{٣}$ ، $\text{س}\in\text{ح}$

$\text{ق}'(\text{س}) = -٣(١-\text{س})^{٢}$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٠ \leftarrow \text{س} = ١$

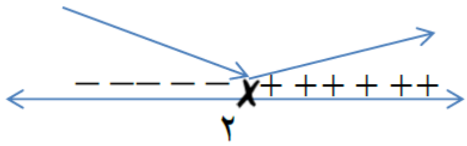


$\text{ق}(\text{س})$ متزايد لكل $\text{س}\in\text{ح}$

هـ) $\text{ق}(\text{س}) = (٢-\text{س})^{٤}$ ، $\text{س}\in\text{ح}$

$\text{ق}'(\text{س}) = -٤(٢-\text{س})^{٣}$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٠ \leftarrow \text{س} = ٢$

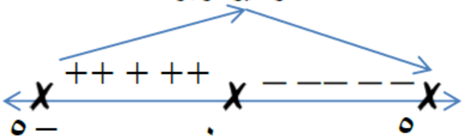


متزايد على الفترة $[٢،\infty)$ ، متناقص على الفترة $(-\infty،٢]$

و) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{٢٥-\text{س}^{٢}}$ ، $\text{س}\in[-٥،٥]$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-٢\text{س}}{٢\sqrt{٢٥-\text{س}^{٢}}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٠ \leftarrow \text{س} = ٠$ و غير موجودة عند $\text{س} = \pm ٥$

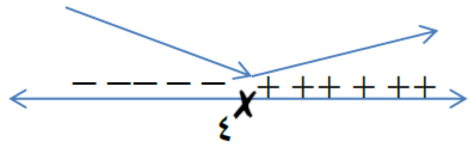


متزايد على الفترة $[-٥،٠]$ متناقص على الفترة $[٠،٥]$

ز) $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}-٤)^{\frac{٢}{٣}}$ ، $\text{س}\in\text{ح}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٢}{٣(\text{س}-٤)^{\frac{١}{٣}}}$

$\text{ق}'(\text{س}) \neq ٠$ ولاكن $\text{ق}'(\text{س})$ غير موجودة عند $\text{س} = ٤$



متزايد على الفترة $(-\infty ،٤]$ ، متناقص على الفترة $[٤، \infty)$

ح) $ق(س) = جتاس - \frac{١}{٢} جتا٢س ، س \in [٠ ، ٢\pi]$

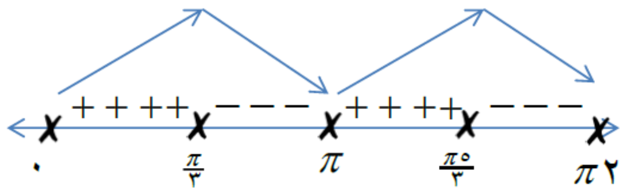
$قَ(س) = -جاس + جا٢س$

$قَ(س) = ٠ \leftarrow -جاس + جا٢س = ٠$

$٢جاس جتاس - جاس = ٠ \leftarrow جاس(٢جتاس - ١) = ٠$

$جاس = ٠ \leftarrow س = ٠ ، \pi$

$٢جتاس - ١ = ٠ \leftarrow جتاس = \frac{١}{٢} \leftarrow س = \frac{\pi}{٣} ، \frac{٥\pi}{٣}$



متزايد على الفترة $[٠ ، \frac{\pi}{٣}] \cup [\pi ، \frac{٥\pi}{٣}]$

متناقص على الفترة $[\frac{\pi}{٣} ، \pi] \cup [\frac{٥\pi}{٣} ، ٢\pi]$

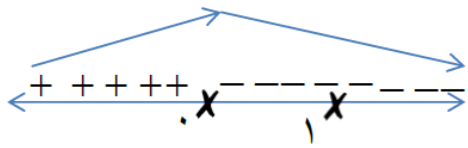
ط)

$$ق(س) = \begin{cases} ٣ - س^{٢} ، & س \le ١ \\ \frac{٢}{س} ، & س > ١ \end{cases}$$

$$قَ(س) = \begin{cases} -٢س ، & س < ١ \\ \frac{-٢}{س^{٢}} ، & س > ١ \end{cases}$$

ق(س) متصل عند س = ١ و قابل للأشتقاق

$قَ(س) = ٠ \leftarrow س = ٠$



متزايد على الفترة : $(-\infty ، ٠]$

متناقص على الفترة : $[١ ، \infty)$

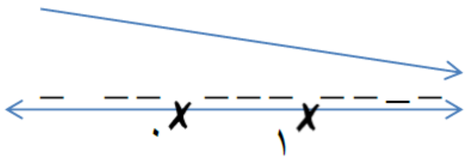
ي)

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٤ - \text{س}^{٣} &، \text{س} \leq ١ \\ \dfrac{٣}{\text{س}} &، \text{س} > ١ \end{cases}$$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \begin{cases} -٣\text{س}^{٢} &، \text{س} < ١ \\ \dfrac{-٣}{\text{س}^{٢}} &، \text{س} > ١ \end{cases}$$

ق(س) متصل عند س = ١ و قابل للأشتقاق

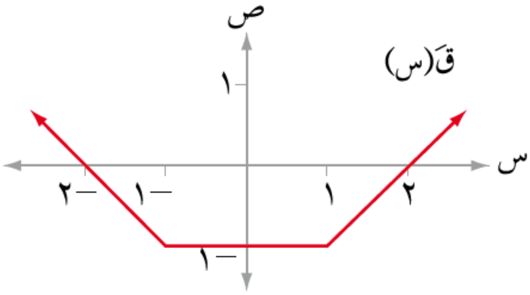
قَ(س) = ٠ ← س = ٠



الأقتران متناقص لكل س∈ع

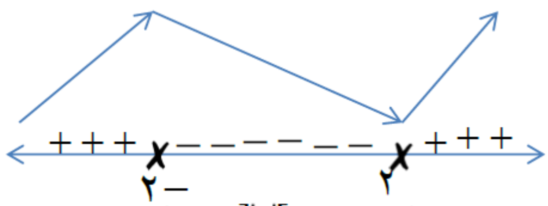
---

٢) يمثل الشكل (٣-١٢) منحنى اقتران المشتقة الأولى للاقتران ق، حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق.



الشكل (٣-١٢)

الحل



متزايد على الفترة: (−∞، −٢]∪[٢، ∞)

متناقص على الفترة : [−٢، ٢]

٣) إذا كان ق(س) اقترانًا متصلًا على الفترة [أ ، ب] وقابلًا للاشتقاق على الفترة (أ ، ب) وكان قَ(س) > ٠ ، لكلِّ س ∈ (أ ، ب)، وكان هـ (س) = ق(س) + س^{٣}، فأثبت أنَّ هـ (س) متزايد على الفترة [أ ، ب].

الحل

هَ(س) = قَ(س) + ٣س^{٢}

ولا كن قَ(س) > ٠ على الفترة (أ ، ب)

و ٣س^{٢} > ٠ على الفترة (أ ، ب)

فيكون ← هَ(س) > ٠ على الفترة

∴ هـ(س) متزايد على الفترة [أ ، ب]