

إجابات أسئلة الدرس

التكامل بالتعويض

(١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

(أ) $\int (1-x^2)(x^2-x+1) dx$ (ب) $\int \sqrt{x^2-2} dx$ (ج) $\int (x^2-x+1) dx$ (د) $\int \frac{9-x^3}{(x^2-2)^2} dx$

الحل

(أ) $\int (1-x^2)(x^2-x+1) dx$

من $x = 1-x^2 \Rightarrow \frac{dx}{dx} = -2x \Rightarrow dx = \frac{dx}{-2x}$

$\int (1-x^2)(x^2-x+1) dx = \int \frac{(1-x^2)(x^2-x+1)}{-2x} dx$

$= \int \frac{(1-x^2)(x^2-x+1)}{-2x} dx = \int \frac{(1-x^2)(x^2-x+1)}{-2x} dx$

(ب) $\int \sqrt{x^2-2} dx$

من $x^2-2 = u \Rightarrow \frac{dx}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dx}{2x}$

$\int \sqrt{x^2-2} dx = \int \frac{\sqrt{u} du}{2x}$

$$D_1 + \frac{V_1}{(57-5) \times 5} = D_1 + \frac{V_1}{40 \times 5}$$

(٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(أ) $\int \sqrt[3]{(2-s)(3-s)} ds$ (ب) $\int (s-1)(2s^2-s^4+1) ds$
(ج) $\int 2 \sqrt[3]{(s-2)(s)} ds$ (د) $\int 2s^2 \sqrt[3]{(s+1)} ds$

الحل

(أ) $\int \sqrt[3]{(2-s)(3-s)} ds = \int \sqrt[3]{(2-s)(3-s)} ds = \int \sqrt[3]{(2-s)(3-s)} ds$

$\int \sqrt[3]{(2-s)(3-s)} ds = \int \sqrt[3]{(2-s)(3-s)} ds = \int \sqrt[3]{(2-s)(3-s)} ds$

(ب) $\int (s-1)(2s^2-s^4+1) ds$
 $ص = 2s^2 - s^4 + 1 \Rightarrow \frac{ص}{ds} = 4s - 4s^3 = 4(s - s^3)$
 $ص = \frac{4s}{4(s - s^3)} \Rightarrow ds = \frac{ص}{4(s - s^3)}$

$\int \sqrt[3]{(2-s)(3-s)} ds = \int \sqrt[3]{(2-s)(3-s)} ds = \int \sqrt[3]{(2-s)(3-s)} ds$

(ج) $\int 2 \sqrt[3]{(s-2)(s)} ds$
 $\int 2 \sqrt[3]{(s-2)(s)} ds = \int 2 \sqrt[3]{(s-2)(s)} ds$

(د) $\int 2s^2 \sqrt[3]{(s+1)} ds$
 $ص = 1 + s \Rightarrow \frac{ص}{ds} = 1 \Rightarrow ds = \frac{ص}{1}$

$\int 2s^2 \sqrt[3]{(s+1)} ds = \int 2s^2 \sqrt[3]{(s+1)} ds = \int 2s^2 \sqrt[3]{(s+1)} ds$

$\int 2s^2 \sqrt[3]{(s+1)} ds = \int 2s^2 \sqrt[3]{(s+1)} ds = \int 2s^2 \sqrt[3]{(s+1)} ds$

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int \sqrt{4s+1} \, ds$

ب) $\int_1^{-1} s^3(s^2-1)^2 \, ds$

ج) $\int s^2 \sqrt{s^2-1} \, ds$

د) $\int \frac{s^2-3}{s^2(s^3-2)} \, ds$

الحل

٢) $\int \sqrt{4s+1} \, ds = \int (1+4s)^{\frac{1}{2}} \, ds$

$$= \int \frac{(1+4s)^{1+\frac{1}{2}}}{4 \times (1+\frac{1}{2})} \, ds = \int \frac{(1+4s)^{\frac{3}{2}}}{4 \times \frac{3}{2}} \, ds$$

$$= \int \frac{(1+4s)^{\frac{3}{2}}}{6} \, ds$$

$$= \frac{1}{6} \left[\frac{2}{3} (1+4s)^{\frac{3}{2}+1} \right] = \frac{1}{6} \left[\frac{2}{3} (1+4s)^{\frac{5}{2}} \right]$$

$$\frac{1}{x} (1 - x^2) = \frac{1}{x} \times 2x = 2$$

$$(ب) \int_{-1}^1 x^2 (1 - x^2) dx = \text{مطلوب}$$

$$(ج) \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx =$$

$$\int_{-1}^1 x^2 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\text{هنا } 1 - x^2 = \frac{dx}{dx} \Leftrightarrow x^2 = \frac{dx}{dx} \Leftrightarrow x = \frac{dx}{dx}$$

$$\int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\left[\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right]_{-1}^1 = \left[\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right]_{-1}^1$$

$$\left[\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{1 - 1}} - \frac{-1}{\sqrt{1 - 1}} = \frac{1}{0} + \frac{1}{0} = \infty$$

$$\frac{3}{2} (1 - \sqrt{x})$$

$$\frac{3}{2} (1 - 0)$$

$$\frac{3}{2} = 1 \times \frac{3}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{x^2 - 2x + 1}{(x^2 - 1)^2} dx = \int_1^2 \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2(x+1)^2} dx$$

$$u = x - 1 \Rightarrow x = u + 1 \Rightarrow dx = du$$

$$\int_1^2 \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2(x+1)^2} dx = \int_0^1 \frac{(u+1)^2 - 2(u+1) + 1}{u^2(u+2)^2} du$$

$$\int_0^1 \frac{1}{u^2(u+2)^2} du = \int_0^1 \frac{1}{u^2} du - \int_0^1 \frac{1}{u(u+2)} du$$

$$\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u(u+2)} = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{2u} + \frac{1}{2(u+2)}$$



٤) إذا علمت أن ق(٨) = ٥، ق(٢٧) = ٦، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-2}^3 x^2 Q(x) dx$

الحل

$$u = x - 8 \Rightarrow x = u + 8 \Rightarrow dx = du$$

$$\int_{-2}^3 x^2 Q(x) dx = \int_{-10}^{-5} (u+8)^2 Q(u+8) du$$

$$\int_{-10}^{-5} (u+8)^2 Q(u+8) du = \int_{-10}^{-5} (u+8)^2 Q(u) du$$

$$0 - 6 = (8-10)^2 Q(8-10) - (8-5)^2 Q(8-5) = 4Q(-2) - 9Q(3)$$

(٥) إذا علمت أن $\int_0^2 (س) دس = ٣$ ، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-1}^2 ٨س ق (س + ١) دس$

الحل

$$ص = س + ١ \Rightarrow دس = د(س - ١) \Rightarrow دس = دس - د١ \Rightarrow دس = دس - ١$$

$$\int_{-1}^2 ٨س ق (س + ١) دس = \int_{-1}^2 ٨س ق (ص - ١) دص = \int_{-1}^2 ٨س ق ص دص - \int_{-1}^2 ٨س ق دص$$

$$\text{عند } ص = ١ \Rightarrow س = ٠ \Rightarrow \int_{-1}^2 ٨س ق ص دص = \int_0^2 ٨(ص - ١) دص$$

$$\text{عند } ص = ٣ \Rightarrow س = ٢ \Rightarrow \int_{-1}^2 ٨س ق ص دص = \int_0^2 ٨(ص - ١) دص$$

$$\int_{-1}^2 ٨س ق (س + ١) دس = \int_0^2 ٨(ص - ١) دص - \int_{-1}^2 ٨س ق دص = ١٢ - ٣ = ٩$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

(٦) حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

جد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_0^2 ٢س ق ٩ + س دس$$

الحل

$$\int_0^2 ٢س ق (٩ + س) دس = \int_0^2 ٢س ق ٩ دس + \int_0^2 ٢س ق س دس$$

$$ص = ٩ + س \Rightarrow دس = دص \Rightarrow \int_0^2 ٢س ق ٩ دس = \int_9^{11} ٢(ص - ٩) دص$$

$$\int_0^2 ٢س ق س دس = \int_9^{11} ٢(ص - ٩) دص$$

$$\int_0^2 ٢س ق (٩ + س) دس = \int_9^{11} ٢(ص - ٩) دص + \int_9^{11} ٢(ص - ٩) دص = \int_9^{11} ٤(ص - ٩) دص$$

$$= \int_9^{11} ٤(ص - ٩) دص = \int_9^{11} ٤ص دص - \int_9^{11} ٣٦ دص$$

$$= \left(\frac{٤}{٢} ص^٢ - ٣٦ص \right) \Big|_9^{11} = (٢ ص^٢ - ٣٦ص) \Big|_9^{11}$$

$$= (٢(١٢١) - ٣٩٦) - (٢(٨١) - ٣٢٤) = (٢٤٢ - ٣٩٦) - (١٦٢ - ٣٢٤) = -١٥٤ + ١٦٢ = ٨$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف