إجابات تدريبات الدرس

التكامل بالتعويض

تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي: $\int_{1}^{2} (٣س^{٢} + ٤س)(س^{٣} + ٢س^{٢})^{٧}\, دس$

الحل

نفرض أن $ص = س^{٣} + ٢س^{٢}$

$\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} + ٤س$

$دص = (٣س^{٢} + ٤س)\, دس$

$\int_{1}^{2} (٣س^{٢} + ٤س)(س^{٣} + ٢س^{٢})^{٧}\, دس = \int_{1}^{2} ص^{٧}\, دص$

$= \left[\frac{ص^{٨}}{٨}\right]_{1}^{2} + ج$

$= \left[\frac{(س^{٣} + ٢س^{٢})^{٨}}{٨}\right]_{1}^{2} + ج$

تدريب ٢

حُلَّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.

جد قيمة التكامل الآتي:

٤) $\int_{٣}^{٨} \frac{١}{\sqrt{٥س + ١}}$ دس

الحل

ص = ٥س + ١ ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = ٥

⇐ $\frac{دص}{٥}$ = دس

عندما س = ٣ ← ص = ٥ × ٣ + ١ = ١٦

عندما س = ٠ ← ص = ٥ × ٠ + ١ = ١

$\int_{١٦}^{١} \frac{١}{\sqrt{ص}} \cdot \frac{دص}{٥} = \int_{١٦}^{١} \frac{١}{٥} ص^{-\frac{١}{٢}}$ دص

$\frac{١}{٥} \left[\frac{ص^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} \right]_{١٦}^{١} = \frac{٢}{٥} \left[\sqrt{ص} \right]_{١٦}^{١}$

$\frac{٢}{٥}$ (١ − ٤) = $\frac{٢}{٥}$ × −٣ = $\frac{-٦}{٥}$

تدريب ٣

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

١) $\int_{0}^{1} ٣س(س^{٢}+١)^{-٥}\,ds$

٢) $\int_{0}^{\frac{\pi}{٢}} ٢س\,ق^{٢}(١-س^{٢})\,ds$

٣) $\int_{١}^{-١} (٤س-١)\sqrt[٣]{س-٢س^{٢}-١}\,ds$

٤) $\int_{0}^{٣} \frac{١}{\sqrt[٥]{س+١}}\,ds$

الحل

١) $\int ٣ك(س^{٤}+١)^{-٥}\,ك$

$ص = س^{٤}+١$

$\frac{ك ص}{ك ك} = ك$

$ك = \frac{ك ص}{ك}$

$\int ٣ك\,ص^{-٥}\cdot\frac{ك ص}{ك}$

$= \int \frac{٣}{ك}\,ص^{-٥}\,ك ص$

$= \frac{٣}{ك}\times\frac{ص^{-٥+١}}{-٥+١} + ج = \frac{٣}{ك}\times\frac{ص^{-٤}}{-٤} + ج$

$= -\frac{٣}{٨}\times\frac{١}{ص^{٤}} + ج = \frac{-٣}{٨(س^{٤}+١)^{٤}} + ج$

٢) $\int_{0}^{2} س\, قا^{2}(1-س^{2})\, د س$

$\int قا^{2} ص \cdot \frac{د ص}{-2س}$

$ص = 1-س^{2}$

$\frac{د ص}{د س} = -2س$

$د س = \frac{د ص}{-2س}$

$-\int قا^{2} ص \cdot د ص$

$-ظا ص + ج$

$-ظا(1-س^{2}) + ج$

٣) $\int_{1}^{2} (4س-1)\sqrt{س-2س^{2}-1}\, د س$

$ص = س-2س^{2}-1$

$\frac{د ص}{د س} = 1-4س$

$د س = \frac{د ص}{1-4س}$

$\int_{1}^{2} (4س-1)\sqrt{س-2س^{2}-1}\, د س = \int_{1}^{2} (4س-1)\sqrt{س-2س^{2}-1}\, د س$

$\int_{1}^{2} (4س-1)\, ص^{\frac{1}{3}} \frac{د ص}{1-4س} = \int_{1}^{2} -ص^{\frac{1}{3}}\, د ص = -\left[\frac{ص^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_{1}^{2}$

$= -\frac{3}{4}\left[\sqrt[3]{(س-2س^{2}-1)^{4}}\right]_{1}^{2} = -\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{(-1-2-1)^{4}} - \sqrt[3]{(1-2-1)^{4}}\right)$

$= -\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{256} - \sqrt[3]{16}\right)$

٤) $\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt[5]{س+1}}\, د س =$

$\int_{0}^{3} \frac{1}{(س+1)^{\frac{1}{5}}} \cdot د س = \int_{0}^{3} (س+1)^{-\frac{1}{5}} \cdot د س$

$= \left[\frac{(س+1)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}}\right]_{0}^{3}$

$= \frac{5}{4}\left[\sqrt[5]{(س+1)^{4}}\right]_{0}^{3}$

$= \frac{5}{4}\left(\sqrt[5]{256} - \sqrt[5]{1}\right) = \frac{5}{4}\left(\sqrt[5]{2^{8}} - 1\right)$

تدريب ٤

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

١) $\int (أس + ب)^{ن} وس$ ، حيث أ، ب ثابتان، $أ \neq ٠$ ، $ن \neq -١$

٢) $\int جتا(أس + ب) وس$ ، حيث أ، ب ثابتان، $أ \neq ٠$

الحل

١) $\int (م س + ب)^{ن} وس = \frac{(م س + ب)^{ن+١}}{م \times (ن+١)} + ج$

٢) $\int جتا(م س + ب) وس = \frac{جا(م س + ب)}{م} + ج$

تدريب ٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

١) $\int_{-١}^{٢} ٦(١ - ٢س)^{٥} وس$

٢) $\int ١٢ جا(١ - ٤س) وس$

الحل

١) $\int_{-١}^{٢} ٦(١ - ٢س)^{٥} وس = \left[\frac{٦(١ - ٢س)^{٦}}{-٢ \times ٦} \right]_{-١}^{٢} = \frac{(-٣)^{٦}}{-٢} - \frac{(-١)^{٦}}{-٢} = -\frac{٦(٣)}{٢} + \frac{(-١)^{٦}}{-٢}$

٢) $\int ١٢ جا(١ - ٤س) وس = \frac{-١٢}{-٤} جتا(١ - ٤س) + ج$

$= ٣ جتا(١ - ٤س) + ج$