أتدرب وأحل المسائل

الاشتقاق الضمني

أجد dydx لكل ممّا يأتي:

(1) $x^2 - 2y^2 = 4$

$2x - 4y$ dydx = 0

dydx = x2y

(2) 1x2 + 1y2 = 110

1x2 + 1y2 = 110

-2xx4 + -2ydydxy4 = 0

dydx = 2xx4 x y4-2y = - y3x3

(3) $(x^2 + y^2)^2 = 50(x^2 - y^2)$

$2(x^2 + y^2)(2x + 2y$dydx$) = 50(2x - 2y$dydx$)$

dydx $(yx^2 + y^3 + 25y) = 25x - x^3 - xy^2$

dydx = 25x - x3 - xy2yx2 +y3 + 25y

(4) $e^x y = xe^y$

(e^x) (dydx) + $(y)(e^x) = (x)(e^y$dydx$) + (e^y)(1)$

dydx $(e^x - xe^y) = e^y - ye^x$

dydx = ey - yexex - xey

(5) $3^x = y - 2xy$

$3^x \ln 3$ = dydx - $2x$ dydx - $2y$

dydx $(1 - 2x) = 2y + 3^x \ln 3$

dydx = 2y + 3x ln 31 - 2x

(6) x + y = 5

12 x + dydx2 y = 0

dydx = -2 y2 x = -yx

(7) x = sec 1y

1 = - 1y2dydx sec 1y tan 1y

dydx = -y2sec1y tan 1y = $-y^2$ cos 1y cot 1y

(8) (sin πx + cos πy)^2 = 2

2(sin πx + cos πy)^1 (π cos πx - π sin π$y$dydx) = 0

dydx(π sin πy) (sin πx + cos πy) = (π cos πx) (sin πx + cos πy)

dydx= (π cos πx) (sin πx + cos πy)(π sin πy) (sin πx + cos πy) = cos πxsin πy

(9) xy2 + y2x = 5

xy2 + y2x = 5 → $x^2 + y^4 = 5xy^2$

→ $2x + 4y^3$ dydx = $10xy$ dydx + $5y^2$

→ dydx ($4y^3 – 10xy$) = $5y^2 – 2x$

→ dydx = 5y2 - 2x4y3 -10xy =

(10) $x + y = \cos(xy)$

1 + dydx = - (x dydx + y) sin xy

dydx(-x sin xy – 1) = 1 + y sin xy

dydx = -1 + y sin xyx sin xy + 1

(11) $x^2 + y^2 = \ln (x + y)^2$

2x + 2y dydx = 2(x + y) (1 + dydx)(x + y)2

x + y dydx = 1 + dydxx + y

dydx (xy + y^2 – 1) = 1 – x^2 – xy

dydx = 1 - x2 - xyxy + y2 - 1

(12) sin x cos y = x^2 – 5y

(sin x) (-sin y dydx) + (cos y) (cos x) = 2x – 5 dydx

dydx (sin x sin y – 5) = cos x cos y – 2x

dydx = cos x cos y - 2xsin x sin y - 5

أجدdydx لكل ممّا يأتي عند القيمة المعطاة:

(13) $2y^2 + 2xy - 1 = 0$, $x = 12$

أجدy قيمة عندما x = 12 :

$2y^2 + 2(12)\, y - 1 = 0 \rightarrow 2y^2 + y - 1 = 0$

$\rightarrow (2y - 1)(y + 1) = 0 \rightarrow y = 12 , y = -1$

باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x ينتج أنّ:

4y dydx + 2x dydx + 2y = 0

dydx = -y2y + x

dydx (12, 12) = -122 x 12 + 12 = - 13

dydx (12, -1) = 1-2 + 12 = - 23

(14) $y^3 + 2x^2 = 11y$, $y = 1$

أجد x قيمة عندما $y = 1$:

$1 + 2x^2 = 11 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm 5$

باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x ينتج أنّ:

$3y^2$ dydx $+ 4x = 11$dydx

dydx = 4x11 - 3y2

dydx (-5, 1) = -52

dydx (5, 1) = 52

أجد ميل المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

(15) $x^2 + y^2 = 25$, (3, -4)

$2x + 2y$ dydx $= 0$

2(3) + 2(-4) dydx = 0 → dydx (3, -4)= 34

(16) $x^2\ y = 4(2 - y)$, (2, 1)

x^2 dydx $+ 2xy = -4$ dydx

4 dydx + 2(2) (1) = -4 dydx → dydx (2, 1)= -12

(17) $e^{\sin x} + e^{\cos y} = e + 1$, (π2, π2)

$e^{\sin x} \cos x - e^{\cos y} \sin y$ dydx $= 0$

esin π2cos $π2$ – ecos π2 sin $π2$dydx = 0 → dydx (π2, π2)= 0

(18) x23+ y23 = 5, (8, 1)

$x23 + y23 = 5$

$23\ x\text{-}13 + 23\ y\text{-}13$ dydx = 0

23(*12*) + *23*(1) dydx = 0 → dydx (8, 1)= -*12*

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

(19) $x^2 + xy + y^2 = 13$, (-4, 3)

2*x* + *x* dydx + *y* + 2*y* dydx = 0

-8 – 4 dydx + 3 + 6 dydx = 0

ميل المماس هو:

dydx (-4, 3) = 52

معادلة المماس هي:

y – 3 = 52 (*x* + 4) → *y* = 52 *x* + 13

(20) $x + y - 1 = \ln (x^2 + y^2)$, (1, 0)

1 + dydx = 2x + 2y dydx x2 + y2

1 + dydx = 2 → dydx (1, 0) = 1

معادلة المماس هي:

y – 0 = 1(*x* - 1) → *y* = *x* - 1

أجد d2ydx2 لكلٍّ ممّا يأتي:

(21) *x* + *y* = sin *y*

1 + dydx = cos *y* dydx

dydx = 1-1 + cos y

d2ydx2 = sin y dydx(-1 + cos y)2 = sin y (1-1 + cos y)(-1 + cos y)2 = sin y (-1 + cos y)3

(22) $4y^3 = 6x^2 + 1$

$12y^2$ dydx = $12x$

dydx = xy2

d2ydx2 = y2 - 2xy dydxy4 = y - 2x (xy2)y3 = y3 - 2x2 y5

(23) $xy + e^y = e$

x dydx + y + e^y dydx = 0

dydx = -yx + ey

d2ydx2 = (x + ey) (-dydx) + y (1 + ey dydx)(x + ey)2

= (x + ey) (yx + ey) + y (1 + ey -yx + ey)(x + ey)2

= (x + ey) (y) + y (x + ey - yey)(x + ey)3

= 2xy + 2yey - y2ey (x + ey)3

(24) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $(x - 6)(y + 4)$ عند النقطة (7, -2).

(x−6)(y+4)=2(x−6)dydx+(y+4)=0(7−6)dydx+(−2+4)=0→dydx|(7,−2)=−2

إذن ميل العمودي على المماس هو: 12

معادلة العمودي على المماس هي:

y+2=12(x−7)→y=12x−112

(25) أثبت أنّ لمنحنى العلاقة: $3x^2 + 2xy + y^2 = 6$ مماسين أفقيين، ثم أجد إحداثيي نقطتي التماس.

3x2+2xy+y2=66x+2xdydx+2y+2ydydx=0dydx=−3x−yx+ydydx=0→−3x−yx+y=0→−3x−y=0→y=−3x3x2+2x(−3x)+(−3x)2=6→6x2=6→x=±1

(1, -3 ، (إذن للمنحنى مماسان أفقيان عند النقطتين (-1, 3).

(26) أجد إحداثيي نقطة على المنحنى: $x + y^2 = 1$ بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازياً للمستقيم: $x + 2y = 0$.

x+y2=11+2ydydx=0→dydx=−12y

ميل المستقيم:

−12y=−12→y=1→x+(1)2=1→x=0

النقطة المطلوبة هي (0, 1)

(27) أجد إحداثيي نقطة (نقاط) على المنحنى: $y^3 = x^2$ بحيث يكون عندها مماس المنحنى عمودياً على المستقيم: $y + 3x = 0$.

y3=x23y2dydx=2x→dydx=2x3y2,y≠0

$y + 3x - 5 = 0$ميل المستقيم: هو -3 إذن ميل العمودي عليه يساوي: 13

2x3y2=13→2x=y2→x=12y2y3=x2→y3=14y4→1=14y→y=4→x=12(4)2→x=8

النقطة المطلوبة هي (8, 4)

(28) إذا كان: xy+yx=10 ، حيث: x≠y≠0 ، فأثبت أنّ dydx=yx .

xy+yx=10,x≠0,y≠0y−xdydxy22xy+xdydx−yx22yx=0→y−xdydx2y2xy=y−xdydx2x2yx→(y−xdydx)(x2yx)=(y−xdydx)(y2xy)x2yyx−x3yxdydx=y3xy−xy2xydydx(xy2xy−x3yx)dydx=y3xy−x2yyx→dydx=y3xy−x2yyxxy2xy−x3yx=y(y2xy−x2yx)x(y2xy−x2yx)=yx

يمكن اختصار العامل المشترك من البسط والمقام؛ لأنه لا يساوي صفراً إلا إذا كان $x = y$ وهذا لا يستق مع العلاقة الأصلية.