

أدرب وأحل المسائل

مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

(1) $f(x) = x^3 2x - 1$

$$f(x) = x^3 2x - 1 \quad f'(x) = (2x - 1)(3x^2) - (x^3)(2)(2x - 1)^2 = 4x^3 - 3x^2(2x - 1)^2$$

(2) $f(x) = x^3 \sec x$

$$f(x) = x^3 \sec x \quad f'(x) = (x^3)(\sec x \tan x) + (\sec x)(3x^2) = x^3 \sec x \tan x + 3x^2 \sec x$$

(3) $f(x) = x + 1 \cos x$

$$f(x) = x + 1 \cos x \quad f'(x) = (\cos x)(1) - (x + 1)(-\sin x)(\cos x)^2 = \cos x + x \sin x + \sin x \cos^2 x$$

(4) $f(x) = e^x (\tan x - x)$

$$f(x) = e^x (\tan x - x) \quad f'(x) = (e^x)(\sec^2 x - 1) + (\tan x - x)(e^x) = e^x \tan^2 x + e^x \tan x - x e^x$$

(5) $f(x) = \sin x + \cos x e^x$

$$f(x) = \sin x + \cos x e^x \quad f'(x) = (e^x)(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)(e^x)(e^x)^2 = -2 \sin x e^x$$

(6) $f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$

$$f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x \quad f'(x) = (x^3)(\cos x) + (\sin x)(3x^2) + (x^2)(-\sin x) + (\cos x)(2x) = x^3 \cos x + 2x^2 \sin x + 2x \cos x$$

(7) $f(x) = x^3(x + 3)$

$$f(x) = x^3(x + 3) = x^5 + 3x^3 \quad f'(x) = 5x^4 - 16 + x - 23 = 5x^4 + 1x^2 - 3$$

(8) $f(x) = 1 + \sec x - \sec x$

$$f(x) = 1 + \sec x \quad 1 - \sec x \quad f'(x) = (1 - \sec x)(\sec x \tan x) - (1 + \sec x)(-\sec x \tan x) \\ = (1 - \sec x) \sec x \tan x + (1 + \sec x) \sec x \tan x = 2 \sec x \tan x (1 - \sec x)$$

(9) $f(x) = 2 - 1/x \quad x - 3$

$$f(x) = 2 - 1/x \quad x - 3 = 2x - 1/x^2 - 3x \quad f'(x) = (x^2 - 3x)(2) - (2x - 1)(2x - 3)(x^2 - 3x) \\ = -2x^2 + 2x - 3(x^2 - 3x)^2$$

(10) $f(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(x^2 + x + 1)$

$$f(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(x^2 + x + 1) \quad f'(x) = (x^3 - x)((x^2 + 2)(2x + 1) + (x^2 + x + 1)(2x)) \\ + (x^2 + 2)(x^2 + x + 1)(3x^2 - 1) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(2x + 1) + (x^3 - x)(x^2 + x + 1)(2x) \\ + (x^2 + 2)(x^2 + x + 1)(3x^2 - 1)$$

(11) $f(x) = (\csc x + \cot x) - 1$

$$f(x) = (\csc x + \cot x) - 1 = 1 \csc x + \cot x \quad f'(x) = -1(-\csc x \cot x - \csc^2 x)(\csc x + \cot x)^2 \\ = \csc x \cot x + \csc^2 x (\csc x + \cot x)^2 = \csc x (\cot x + \csc x) (\csc x + \cot x)^2 \\ = \csc x \cot x + \csc x$$

$f(x)$ إذا كان $g(x)$ و $g(x)$ اقترايين قابلين للاشتقاق عندما $x = 0$ ، وكان:

$$f(0) = 5, \quad f'(0) = -3, \quad g(0) = -1, \quad g'(0) = 2$$

(12) $(fg)'(0)$

$$(fg)'(0) = f(0)g'(0) + g(0)f'(0) = 5 \times 2 - 1 \times -3 = 13$$

(13) $(fg)'(0)$

$$(fg)'(0) = g(0)f'(0) - f(0)g'(0)g^2(0) = -1 \times -3 - 5 \times 2(-1)^2 = -7$$

(14) $(7f - 2fg)'(0)$

$$(7f - 2fg)'(0) = 7f'(0) - 2(fg)'(0) = 7(-3) - 2(13) = -47$$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي عند قيمة المعطاة:

$$(15) f(x) = x^2 - 4x^2 + 4, x = -2$$

$$f(x) = x^2 - 4x^2 + 4 \quad f'(x) = (x^2 + 4)(2x) - (x^2 - 4)(2x)(x^2 + 4)^2 = 16x(x^2 + 4)^2 f''(x) = (x^2 + 4)^2(16) - (16x)(2)(x^2 + 4)^1(2x)(x^2 + 4)^4 = (16)(x^2 + 4) - (16x)(2)(2x)(x^2 + 4)^3 f''(-2) = (16)(8) - (-32)(2)(-4)(8)^3 = -14$$

$$(16) f(x) = 1 + x^1 + x^3, x = 8$$

$$f(x) = 1 + x^1 + x^3 = (1 + x^3)(1 - x^3 + x^2)^3 \quad 1 + x^3 = 1 - x^3 + x^2 \quad 3f'(x) = -13x - 23 + 23x - 13 \quad f''(x) = 29x - 53 - 29x - 43 = 29x^5 - 29x^4 \quad 3f''(8) = 29 \cdot 8^5 - 29 \cdot 8^4 = 29(132 - 116) = -1144$$

$$(17) f(x) = 11 + x, x = 4$$

$$f(x) = 11 + x \quad f'(x) = -(12x)(1 + x)^2 = -12x(1 + x)^2 \quad f''(x) = 2x(2)(1 + x)^1(12x) + (1 + x)^2(1x)^4 = 2 + 1 + 2x^2 \quad 3f''(4) = 2 + 1 + 2 \cdot 2^2 = 7 \quad 864$$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

$$(18) f(x) = 1 + x^1 + e^x, (0, 12)$$

$$f(x) = 1 + x^1 + e^x \quad f'(x) = (1 + e^x)(1) - (1 + x)(e^x)(1 + e^x)^2 = 1 - x e^x (1 + e^x)^2$$

ميل المماس عند النقطة (0, 12) هو: $f'(0) = 14$

معادلة المماس هي:

$$y - 12 = 14(x - 0) \rightarrow y = 14x + 12$$

$$(19) f(x) = e^x \cos x + \sin x, (0, 1)$$

$$f(x) = e^x \cos x + \sin x \quad f'(x) = (e^x)(-\sin x) + (\cos x)(e^x) + \cos x$$

ميل المماس عند النقطة (0, 1) هو:

$$f'(0) = (1)(0) + (1)(1) + 1 = 2$$

معادلة المماس هي:

$$y-1=2(x-0) \rightarrow y=2x+1$$

أثبت صحة كلِّ مما يأتي معتمداً أن $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$: $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

$$(20) \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{(\sin x)(-\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$(21) \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{0 \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot 1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

$$(22) \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{0 \cdot \sin x - (\cos x) \cdot 1}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} = -\csc x \cot x$$

ألاحظ المشتقة المعطاة في كلِّ مما يأتي، ثم أجد المشتقة العليا المطلوبة:

$$(23) f'(x) = 2 - 2x, f''(x)$$

$$f''(x) = 2 - 2x, f'''(x) = 2x^2$$

$$(24) f''(x) = 2x, f(4)(x)$$

$$f'''(x) = 2x, f(4)(x) = 1x$$

$$(25) f(4)(x) = 2x + 1, f(6)(x)$$

$$f(4)(x) = 2x + 1, f(5)(x) = 2, f(6)(x) = 0$$



(26) نباتات هجينة: وجد فريق بحث زراعي أنه يمكن التعبير عن ارتفاع نبتة هجينة من نبات تّباع الشمس h بالأمتار، باستعمال الاقتران: $h(t) = 3t^2 + t^4$ ، حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور. أجد معدّل تغير ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن.

$$h(t) = 3t^2 + t^4 \quad h'(t) = (4 + t^2)(6t) - (3t^2)(2t) = 24t(4 + t^2) - 6t^3 = 24t(4 + t^2) - 6t^3$$

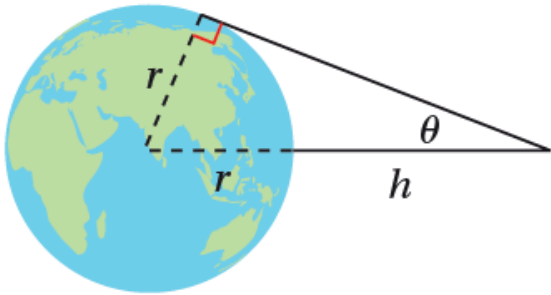
$y = e^x \sin x$ إذا كان الاقتران: ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

(27) أجد $\frac{dy}{dx}$ ، و $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{dy}{dx} = (e^x)(\cos x) + (\sin x)(e^x) = e^x(\cos x + \sin x) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^x(-\sin x + \cos x) + e^x(\cos x + \sin x) = 2e^x \cos x$$

(28) أثبت أنّ $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$

$$2\frac{dy}{dx} - 2y = 2e^x(\cos x + \sin x) - 2e^x \sin x = 2e^x \cos x = \frac{d^2y}{dx^2}$$



أقمار صناعية: عندما ترصد الأقمار الصناعية الأرض، فإنه يُمكنها مسح جزء فقط من سطح الأرض. وبعض الأقمار الصناعية تحوي مُستشعرات لقياس الزاوية θ (بالراديان) المبيّنة في الشكل المجاور. إذا كان h يمثل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومترات، و r يُمثل نصف قطر الأرض بالكيلومترات، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

(29) أثبت أنّ $h = r(\csc \theta - 1)$.

$$\csc \theta = r + h \rightarrow r + h = r \csc \theta \rightarrow h = r(\csc \theta - 1)$$

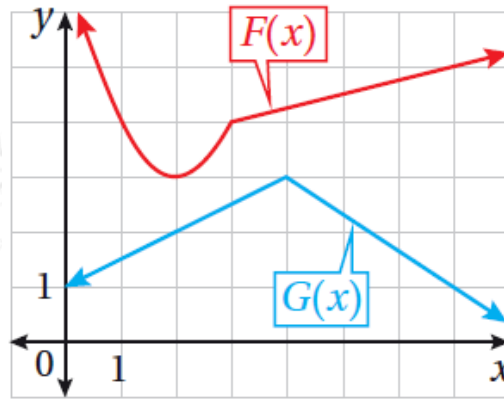
(30) أجد معدّل تغير h بالنسبة إلى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$ (أفترض أن $r = 6371 \text{ km}$).

$$\frac{dh}{d\theta} = r(-\csc \theta \cot \theta) \quad \frac{dh}{d\theta} \Big|_{\theta = \frac{\pi}{6}} = 6371(-\csc \frac{\pi}{6} \cot \frac{\pi}{6}) = 6371(-2 \times 3) \approx -22070 \text{ km/rad}$$

(31) إذا كان: $x+12x^2f(x)=9\ln$ ، فأثبت أن $f(x)=(3x-1)(3x+1)x^3$.

$$f(x)=9\ln x+12x^2f(x)=9(1x)+-1(4x)4x^4=9x-1x^3=9x^2-1x^3=(3x-1)(3x+1)x^3$$

$F(x)$ يبين الشكل المجاور منحنىي الاقتراني: ، و $G(x)$.



$P(x) = F(x)G(x)$ إذا كان: ، وكان: $F(x)G(x)Q(x) =$ ، فأجد كلاً ممّا يأتي:

(32) $P'(2)$

$$P'(2)=F(2)G'(2)+G(2)F'(2)$$

G' ((ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (2, 2) و (4, 3) ويساوي

F' ((ميل المماس الأفقي، ويساوي صفراً.

$$P'(2)=3 \times 12+2 \times 0=32$$

(33) $Q'(7)$

$$Q'(7)=G(7)F'(7)-F(7)G'(7)G^2(7)=1 \times 14-5 \times -231=4312$$