مهارات التفكير العليا

الاشتقاق الضمني

تبرير: إذا كان: $x^2 - y^2 = 1$ ، فأجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعاً:

(43) أجد dydx .

$$x2-y2=1\rightarrow 2x-2ydydx=0\rightarrow dydx=xy$$

(44) يمكن التعبير عن منحنى العلاقة: $x^2 - y^2 = 1$ بالمعادلة الوسيطية: $x = \sec t$, $y = \tan t$ ، حيث: $-\pi2\le t\le\pi2$

أستعمل هذه الحقيقة لإيجاد dydx بدلالة t .

$$dydx=dydtdxdt=sec2\ tsect\ tan\ t=sec\ ttan\ t$$

(45) أثبت أن المقدارين الجبريين اللذين يمثلان dydx الناتجين في الفرعين السابقين متكافئان، مبرراً إجابتي.

$$dydx=sec\ ttan\ t=xy$$

المقداران الجبريان اللذان يمثلان متكافئان، لأنه من نص السؤال:

$x = \sec t$ و $y = \tan t$ ومنه فإن $t=xy\ ttansec$

(46) أجد إحداثيات النقاط التي يكون عندها ميل المماس 2 .

$$dydx=2\rightarrow xy=2\rightarrow x=2yx2-y2=1\rightarrow(2y)2-y2=1\rightarrow y2=13\rightarrow y=\pm13\rightarrow y=13\rightarrow\ x=23,y=-13\rightarrow\ x=-23$$

النقاط التي يكون عندها ميل المماس 2 هي: $(-13,-23)$, $(23,13)$

(47) تبرير: إذا مثل l أيّ مماس لمنحنى المعادلة: $x+y=k$ ، حيث k عدد حقيقي

موجب، فأثبت أنّ مجموع المقطع x والمقطع y للمستقيم l يساوي k ، مبرراً إجابتي.

$$x+y=k 2x+\frac{dy}{dx}2y=0 \rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

نفرض نقطة التماس هي: (x_1 , y_1) فيكون ميل المماس:

$$\frac{dy}{dx}|_{(x1,y1)}=-\frac{y1}{x1}$$

معادلة المماس:

$$y-y1=-\frac{y1}{x1}(x-x1)$$

المقطع x والمقطع y للمماس:

$$x=0\rightarrow y-y1=-\frac{y1}{x1}(-x1)\rightarrow y=y1+y1 \quad x1 \quad y=0\rightarrow y1=\frac{y1}{x1}(x-x1)\rightarrow x=x1+y1x1$$

مجموع المقطعين:

$$y1+y1x1+x1+y1x1=y1+2y1x1+x1=(y1+x1)2=(k)2=k$$

(48) تحدّ: إذا كان مماس منحنى الاقتران: $y=x^x$ عند النقطة $(4, 16)$ يقطع المحور x في النقطة B ، والمحور y في النقطة C ، فأجد مساحة $\triangle OBC$ ، حيث O نقطة الأصل.

$$y=x^x \quad \ln y=\ln x^x \quad \ln y=x\ln x \quad \frac{dy}{dx}\frac{y}{x}=(x)(\frac{1}{x})+(\ln x)(1)\rightarrow \frac{dy}{dx}=y(\frac{x}{x}+\ln x 2x)\rightarrow \frac{dy}{dx}=x^x(1x+\ln x 2x)=2+\ln x 2x(x^x)$$

ميل المماس:

$$\frac{dy}{dx}|_{(4,16)}=2+\ln 4 \quad 24(16)=8+4\ln 4$$

معادلة المماس:

$$y-16=(8+4\ln 4)(x-4)$$

المقطع x والمقطع y للمماس:

$$x=0\rightarrow y-16=(8+4\ln 4)(-4)\rightarrow y=-16-16\ln 4 \quad y=0\rightarrow -16=(8+4\ln 4)(x-4)\rightarrow x=4+4\ln 4 \quad 2+\ln 4$$

مساحة المثلث OBC بوحدة المساحة هي:

$$A=12\times4+4\ln 42+\ln 4\times|-16-16\ln 4|=32(1+\ln 4)22+\ln 4$$