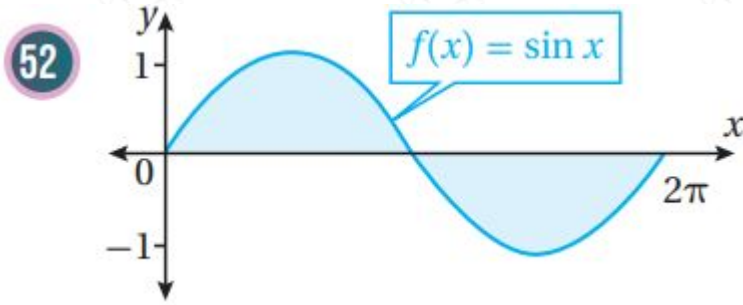


## مهارات التفكير العليا

### تكامل اقترانات خاصة

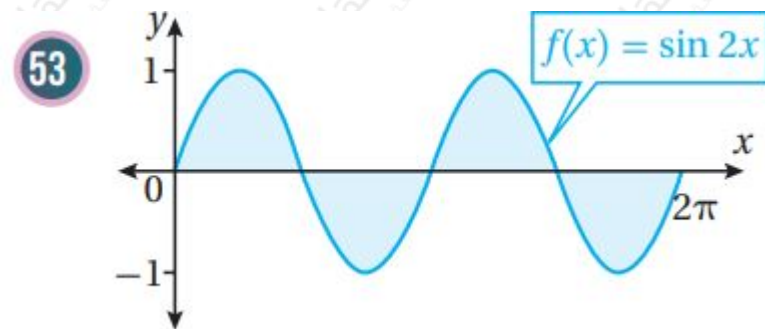
تبرير: أجد مساحة المنطقة المظلمة في كل من التمثيلين البيانيين الآتين، مبرراً إجابتي;



$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = (-\cos x) \Big|_0^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos 0) = -1 - (-1) = 0$$

ملحوظة: يمكن الاستفادة من التماثل وإيجاد المساحة المطلوبة كما يأتي:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 2 \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2(-\cos x) \Big|_0^{\pi} = 2(-\cos \pi + \cos 0) = 2(1 + 1) = 4$$



$$\int_0^{2\pi} \sin 2x \, dx = \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) \Big|_0^{2\pi} = \left(-\frac{1}{2} \cos 4\pi\right) - \left(-\frac{1}{2} \cos 0\right) = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

والأسهل هو الاستفادة من التماثل وإيجاد المساحة المطلوبة كما يأتي:

$$\int_0^{2\pi} \sin 2x \, dx = 2 \int_0^{\pi} \sin 2x \, dx = 2 \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) \Big|_0^{\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = -1 - (-1) = 0$$

تحد: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$\int_0^{\pi} \sec x \, dx \quad \int_0^{\pi} \sin x \, dx \quad \int_0^{\pi} \cos x \, dx$$

$$\int \frac{1}{x-1} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx = \int \sec^2 x \cos x (\sin x \cos x dx = \int \sec x - \cos x \sin \sec x$$

$$\int \frac{1}{x-1} dx + C = \ln|x-1| + C$$

$$\int \frac{1}{x+1} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x+1} dx = -12 \int -2 \cot x^2 \csc x \csc x dx = \int \cot x^2 + \csc \cot x$$

$$\int \frac{1}{x+1} dx + C = \ln|2 \csc x + 1| + C = -12 \ln|2 \csc x - 12 \ln$$

$$\int \frac{1}{x^3} dx = \int \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{-2} x^{-2} = -\frac{1}{2x^2} + C$$

(57) تبرير: إذا كان:  $\int_1^a (1-x-2x+3) dx = 0.5 \ln a$ , فأجد قيمة الثابت  $a$ , حيث:  $a > 0$ .

$$\int_1^a (1-x-2x+3) dx = \left( \ln|x| - 12 \ln|1a(1-x-2x+3)| \right) \Big|_1^a = (\ln a - 12 \ln|1a(1-a-2a+3)|) - (\ln 1 - 12 \ln|1(1-1-2+3)|)$$

$$= 0.5 \ln a^2 + 3 + 12 \ln 5 \Rightarrow \ln a^2 + 3 + 12 \ln 5 = \ln(2a+3) + 12 \ln a - 12 \ln 5 = \ln n$$

$$a^2 + 3 = 0 \Rightarrow a^2 + 3 = 1 \Rightarrow a = 2a + 3 \Rightarrow a^2 = 2a + 3 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow (a-5)(a+1) = 0 \Rightarrow a = 3, a = -1 \quad a > 0$$

(58) تبرير: أثبت بطريقتين مختلفتين أن:  $\int_0^{\pi/4} \sin 3x dx - \int_0^{\pi/4} \sin x \cos x dx = 0$ .

طريقة أولى:

$$\int_0^{\pi/4} \sin 3x dx = \left( -\frac{1}{3} \cos 3x \right) \Big|_0^{\pi/4} = -\frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{3} \cos 0 = -\frac{1}{3} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{3}$$

$$\int_0^{\pi/4} \sin x \cos x dx = \left( \frac{1}{2} \sin^2 x \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin^2 0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - 0 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4\sqrt{2} + 4 - 3}{12} = \frac{4\sqrt{2} + 1}{12} \neq 0$$

طريقة ثانية:

$$\int_0^{\pi/4} \sin 3x dx - \int_0^{\pi/4} \sin x \cos x dx = \int_0^{\pi/4} (\cos x \sin 3x dx - \int_0^{\pi/4} \sin x \cos x dx)$$

$$= \left( \frac{1}{4} \sin 4x \right) \Big|_0^{\pi/4} - \left( \frac{1}{4} \sin 4x \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{4} \sin \pi - \frac{1}{4} \sin 0 - \left( \frac{1}{4} \sin \pi - \frac{1}{4} \sin 0 \right) = 0 - 0 - (0 - 0) = 0$$

(59) تبرير: إذا كان:  $\int_0^{\pi/3} (kx) dx = \pi(7 - 62\pi/4k\pi/3k(1 - \pi \sin$ , فأجد قيمة الثابت  $k$ , مبرراً إجابتي.

$$\int_0^{\pi/4} (3 - 4k - \pi k \cos x) dx = \pi^3 k + \pi k \cos x \Big|_0^{\pi/4} = \pi^3 k + \pi k \cos(\pi/4) - \pi^3 k - \pi k \cos(0) = \pi k (\cos(\pi/4) - 1) = \pi k (\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)$$

$$\pi^4 = \pi k (13 + 12 - 14 - 22) = \pi 12k (7 - 62) \Rightarrow \pi 12k (7 - 62) = \pi (7 - 62) \Rightarrow k = \cos 112$$

تحد: يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:

$$v(t) = \begin{cases} 2t+4, & 0 \leq t \leq 6 \\ 20 - (t-8)^2, & 6 < t \leq 10 \end{cases}$$

حيث  $t$  الزمن بالثواني، و  $v$  سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية. إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل، فأجد كلاً مما يأتي:

(60) موقع الجسيم بعد 5 ثوان من بدء الحركة.

$$v(t) = \begin{cases} 2t+4, & 0 \leq t \leq 6 \\ 16t - t^2 - 44, & 6 < t \leq 10 \end{cases} \quad s(t) = \int v(t) dt = \int (2t+4) dt = t^2 + 4t + C_1$$

$$s(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow s(t) = t^2 + 4t, 0 \leq t \leq 6 \quad s(5) = 25 + 20 = 45 \text{m}$$

(61) موقع الجسيم بعد 9 ثوان من بدء الحركة.

$$s(t) = \int (16t - t^2 - 44) dt = 8t^2 - \frac{1}{3}t^3 - 44t + C_2, 6 < t \leq 10$$

لإيجاد قيمة  $C_2$  نستعمل موقع الجسم عند  $t=6$  موقعاً ابتدائياً بالنسبة للفترة  $6, 10$ :

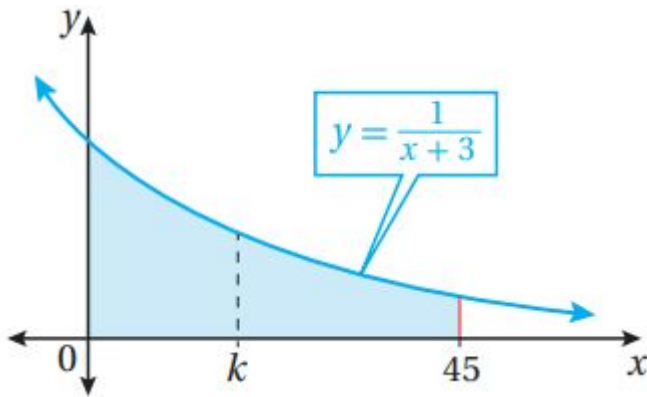
$$s(6) = 8(6)^2 - \frac{1}{3}(6)^3 - 44(6) + C_2$$

ونحسب  $s(6)$  من اقتران الموقع الذي وجدناه في السؤال السابق بالنسبة للفترة  $[0, 6]$ :

$$s(t) = t^2 + 4t, 0 \leq t \leq 6 \quad s(6) = 6^2 + 4(6) = 60$$

$$60 = 8(6)^2 - \frac{1}{3}(6)^3 - 44(6) + C_2$$

$$60 = -48 + C_2 \Rightarrow C_2 = 108 \Rightarrow s(t) = 8t^2 - \frac{1}{3}t^3 - 44t + 108, 6 < t \leq 10 \quad s(9) = 117 \text{m}$$



(62) تحد: يبين الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:  $y=1x+3$  والمحاور  $x$ ، والمسـتـقيم:  $x=0$ ،  $x=45$  أجد قيمة  $k$  التي تقسم المنطقة المطلقة إلى منطقتين متساويتين في الساحة.

$$1612A = \int_0^k \frac{1}{x+3} dx = \ln|x+3| \Big|_0^k = \ln(k+3) - \ln 3$$

$$1612A = \int_0^{45} \frac{1}{x+3} dx = \ln|x+3| \Big|_0^{45} = \ln 48 - \ln 3$$

$$k+3 \Rightarrow 4 = 161/2 = \ln k+3 - \ln 3 \Rightarrow \ln k+3 = \ln 16 \Rightarrow 12 \ln 3 = \ln(k+3) - \ln 3 \Big|_0^k = \ln k+3 \Rightarrow k=9$$