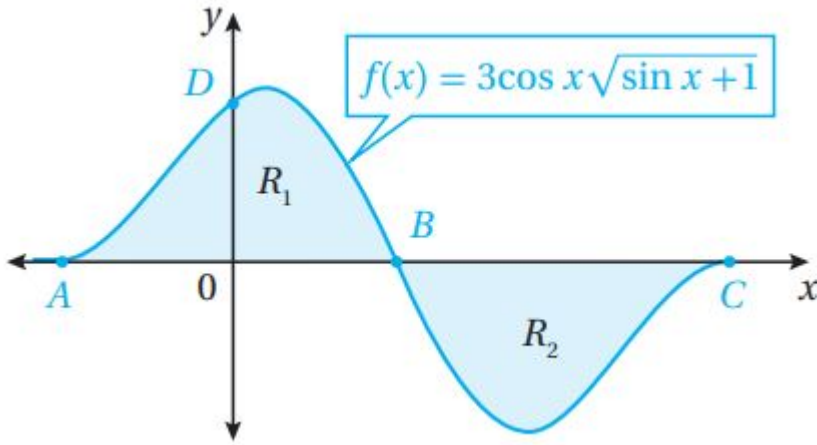


مهارات التفكير العليا

التكامل بالتعويض



تبرير: إذا كان الشكل المجاور
بمثل منحنى الاقتران:
 $f(x) = 3\cos x \sqrt{\sin x + 1}$ ، فأجيب
عن الأسئلة الآتية تبعاً:

(40) أجد إحداثي كل من النقاط: A, B, C, D.

$$x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow 3\cos x = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

يوجد عدد لا نهائي من الحلول لهاتين المعادلتين، نريد أصغر حلين موجبين (الإحداثي
x للنقطتين B, C) وأكبر حل سالب (الإحداثي x للنقطة A).

أصغر حلين موجبين هما: $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$ ، بوضع $n = 0$

$$(B(\frac{\pi}{2}, 0), C(\frac{3\pi}{2}, 0) \Rightarrow$$

أكبر حل سالب هو: $x = -\pi$ ، بوضع $n = -1$

$$(A(-\pi, 0) \Rightarrow$$

أما النقطة D فإحداثياها هما: $(D(0, f(0))) = (0, 3)$

(41) أجد مساحة المنطقة المظللة.

$$A = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -f(x) dx = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x \sqrt{\sin x + 1} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 3\cos x \sqrt{\sin x + 1} dx$$

$$u = 1 + \sin x \Rightarrow du = \cos x dx \Rightarrow \int \cos x \sqrt{\sin x + 1} dx = \int \sqrt{u} du = \frac{2}{3} u^{3/2} = \frac{2}{3} (1 + \sin x)^{3/2}$$

$$A = \frac{2}{3} (1 + \sin x)^{3/2} \Big|_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3} (1 + \sin x)^{3/2} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{2}{3} (2^{3/2} - 0) - \frac{2}{3} (0 - 0) = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

(42) أبين أن للمنطقة R_1 والمنطقة R_2 المساحة نفسها.

من حل السؤال السابق نجد أن:

$$\int_0^{\pi/2} 3u du = 42A(R_2) = -\int_{\pi/2}^{\pi} 2(3\cos x + \sin x) dx = \int_{\pi/2}^{\pi} 2(3\cos x + \sin x) dx = -\int_0^{\pi/2} 2(3\cos x + \sin x) dx = 42 \Rightarrow A(R_1) = A(R_2)$$

(43) تحدد: أجد قيمة: $\int_0^1 (16x + x^3) dx$.

$$u = 1 + x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{1}{3x^2} du, x^3 = u - 1 \Rightarrow u = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} \Rightarrow u = 9 \Rightarrow \int_0^1 (16x + x^3) dx = \int_0^9 \frac{1}{3} (29x^2 - 1) du = \frac{1}{3} \int_0^9 (29u - 1) du = \frac{1}{3} (29 \cdot \frac{9^2}{2} - 9) = \frac{1}{3} (29 \cdot \frac{81}{2} - 9) = \frac{1}{3} (2361 - 9) = \frac{2352}{3} = 784$$

(44) تبرير: إذا كان f اقتراناً متصلاً، فأثبت أن: $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$.

$$u = \pi - x \Rightarrow dx = -du, \sin(\pi - x) = \sin x \Rightarrow \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin(\pi - x)) (-du) = \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin u) du = \int_0^{\pi/2} f(\sin u) du = \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$$

(45) تبرير: إذا كان a, b عددين حقيقيين موجبين، فأثبت أن: $\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx$.

bbb

تحدد: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(46) $\int_0^1 (\ln x) dx$

bbb

(47) $\int_0^{\pi/2} (\cos x \sin x - \cos^2 x) dx$

bbb

(48) $\int_0^1 (2x + 1) \sin x dx$

bbb