

مهارات التفكير العليا

المساحات والحجوم

تبرير: أجب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

(22) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $y=x^{1/2}$, $y=x^2$.

$$x^2=x^{1/2} \Rightarrow x^4=x \Rightarrow x^4-x=0 \Rightarrow x(x^3-1)=0 \Rightarrow x=0, x=1$$

$$A = \int_0^1 (x^{1/2}-x^2) dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

(23) أجد المساحة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $y=x^{1/3}$, $y=x^3$.

$$x^3=x^{1/3} \Rightarrow x^9=x \Rightarrow x^9-x=0 \Rightarrow x(x^8-1)=0 \Rightarrow x(x^4-1)(x^4+1)=0 \Rightarrow x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)=0$$

$$\Rightarrow x=0, x=-1, x=1$$

$$A = \int_{-1}^0 (x^3-x^{1/3}) dx + \int_0^1 (x^{1/3}-x^3) dx = \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^{4/3} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^1$$

$$= \left(0 - \frac{3}{4}(-1)^{4/3} \right) + \left(\frac{3}{4}(1)^{4/3} - 0 \right) = \left(0 - \frac{3}{4} \right) + \left(\frac{3}{4} - 0 \right) = 0$$

(24) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين $y=x^{1/n}$, $y=x^n$: حيث n عدد صحيح أكبر من أو يساوي 2، مبرراً إجابتي.

أولاً إذا كان n زوجياً

يتقاطع المنحنيان عند $x=0, x=1$

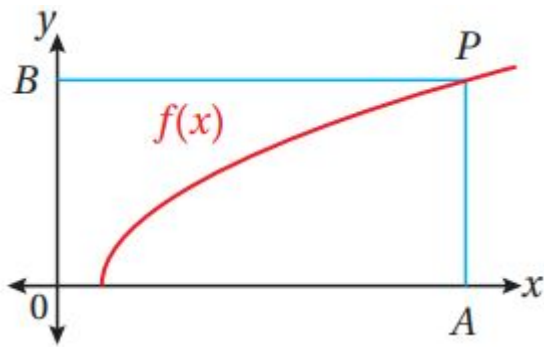
$$A = \int_0^1 (x^{1/n}-x^n) dx = \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n+1}x^{n+1} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - 0 = 0$$

ثانياً إذا كان n فردياً

يتقاطع المنحنيان عند $x=0, x=1, x=-1$

$$A = \int_{-1}^0 (x^n-x^{1/n}) dx + \int_0^1 (x^{1/n}-x^n) dx = \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n+1}x^{n+1} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n+1}x^{n+1} \right) \Big|_0^1$$

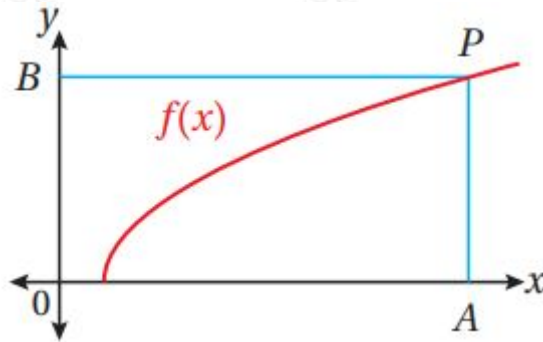
$$= \left(0 - \frac{1}{n+1}(-1)^{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1}(1)^{n+1} - 0 \right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} = \frac{2}{n+1}$$



تبرير: يبين الشكل المجاور منحنى
الاقتران: $f(x)=2x-2$, حيث: $x \geq 1$. إذا كانت
النقطة $P(9,4)$ تقع على منحنى الاقتران $f(x)$,
حيث PA يوازي المحور y , و PB يوازي المحور
 x , فأجد كلاً مما يأتي:

(25) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ ، والمستقيم
 $y=4$ والمحورين الإحداثيين.

$$2x-2=0 \Rightarrow x=1$$

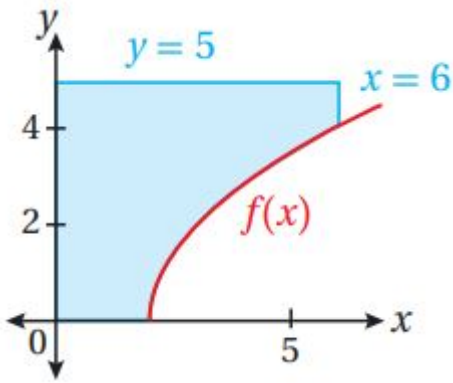


نقسم المنطقة المطلوب حساب مساحتها إلى قسمين برسم المستقيم $x=1$ ، ونجد
المساحة كما يأتي:

$$A = \int_0^1 4 dx + \int_1^9 (4 - 2x + 2) dx = (4x) \Big|_0^1 + (4x - x^2 + 2x) \Big|_1^9 = 4 - 0 + 36 - 13(16) - (4 - 0) = 443$$

(26) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ ، والمستقيم $x=9$ ،
والمحور x .

$$A = \int_9^{19} 2x - 2 dx = 13(2x - 2) \Big|_9^{19} = 13((16)32 - 0) = 643$$

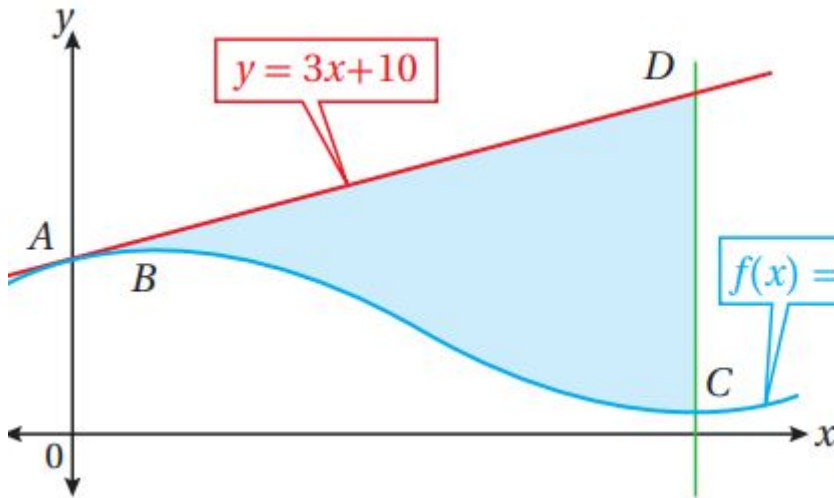


(27) تبرير: بين الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين المحورين الإحداثيين في الربع الأول، ومنحنى الاقتران: $f(x)=2x-2$ ، والمستقيمين: $x=6, y=5$. أجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة حول المحور bb ، مبرراً إجابتي.

$$2x-2=0 \Rightarrow x=2$$

نقسم المنطقة إلى قسمين برسم المستقيم $x=2$ ، ونجد الحجم كما يأتي:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 5^2 dx + \pi \int_2^6 (5^2 - (2x-2)^2) dx = \pi \int_0^2 25 dx + \pi \int_2^6 (25 - (4x-8)) dx \\ &= 50\pi + \pi \int_2^6 (33 - 4x) dx = 50\pi + \pi (33x - 2x^2) \Big|_2^6 = 50\pi + \pi (33(6) - 72 - 66 + 8) = 118\pi \end{aligned}$$



تبرير: يبين الشكل المجاور منحنى كل من الاقتران: $f(x)=x^3-5x^2+3x+10$ والمستقيم: $y=3x+10$ ، وقطع $y=3x+10$ عند النقطة C ، وقطع $f(x)$ عند النقطة B ، وقيمة صغرى محلية عند النقطة C ، وقطع $f(x)$ عند النقطة A الواقعة على المحور y ، وكان للاقتران الخط الموازي للمحور y والمار بالنقطة C المستقيم: $y=3x+10$ في النقطة D .

فأجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

(28) أجد إحداثيات كل من النقطة B ، والنقطة C .

$$y=x^3-5x^2+3x+10 \quad f'(x)=3x^2-10x+3=0 \Rightarrow (3x-1)(x-3)=0 \Rightarrow x=1/3, x=3$$

نقطة القيمة العظمى هي:

$$(B(13, f(13)) = (13, 28327)$$

نقطة القيمة الصغرى هي:

$$(C(3, f(3)) = (3, 1)$$

(29) أثبت أن AD مماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة A ، مبرراً إيجابتي.

النقطة A تقع على محور y إذن أحداثياها هما:

$$(A(0, f(0)) = (0, 10)$$

ميل المنحنى عند A هو:

$$dy/dx|_{x=0} = 0 - 0 + 3 = 3$$

معادلة مماس المنحنى $f(x)$ عند النقطة A هي (حيث $f'(0) = 3$):

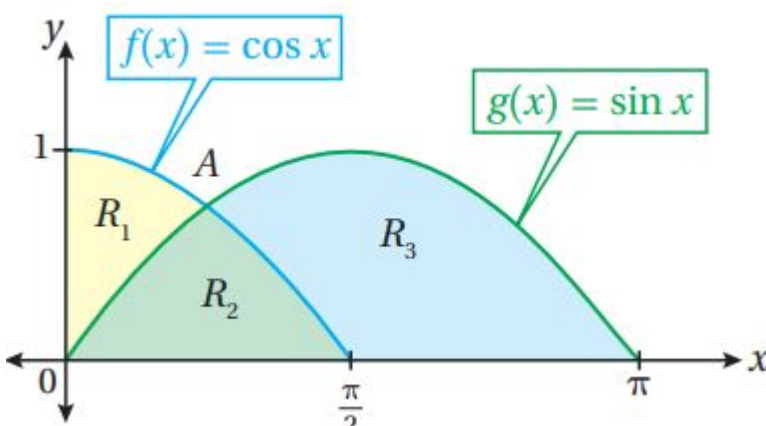
$$y - 10 = 3(x - 0) \Rightarrow y = 3x + 10$$

وهذه المعادلة هي معادلة المستقيم $AD \Leftrightarrow$ نفسها.

إذن، $AD \Leftrightarrow$ مماس لمنحنى $f(x)$ عند النقطة A

(30) أجد مساحة المنطقة المظللة، مبرراً إيجابتي.

$$A = \int_0^{\pi/2} (3x + 10 - (x^3 - 5x^2 + 3x + 10)) dx = \int_0^{\pi/2} (5x^2 - x^3) dx = (5 \cdot \frac{3}{4} - 14 \cdot \frac{4}{3}) \Big|_0^{\pi/2} = 45 - 814 - 0 = 994$$



تبرير: يبين الشكل المجاور منحنىي الاقترانين: $h(x) = \sin f(x) = \cos x$, معتمداً هذا الشكل، أجب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

(31) أجد إحداثيي النقطة A.

$$x=1 \Rightarrow x=\pi/4 \text{ or } x=5\pi/4 \Rightarrow \tan x = \sin f(x) = g(x) \Rightarrow \cos$$

نلاحظ من الرسم المعطى x تقع في الفترة $(\pi/2, 0)$

إذن، إحداثيا النقطة A هما: $(\pi/4, f(\pi/4)) = (\pi/4, 1/2)$

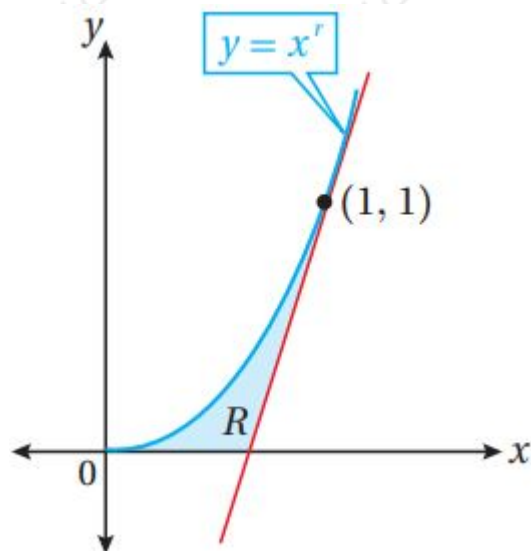
(32) أجد مساحة كل من المناطق: R_1, R_2, R_3 .

$$\begin{aligned} A(R_1) &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx = (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi/4} = (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) - (0 + 1) = \sqrt{2} - 1 \\ A(R_2) &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ A(R_3) &= \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx = (-\cos x - \sin x) \Big|_{\pi/4}^{\pi} = (-(-1) - 0) - (-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

(33) أثبت أن مساحة المنطقة R_1 إلى مساحة المنطقة R_2 تساوي 2:2.

$$A(R_1) : A(R_2) = (\sqrt{2} - 1) : (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2 : 2$$

إذن: $A(R_1) : A(R_2) = 2 : 2$



تحد: يبين الشكل المجاور المنطقة R المحصورة بين منحنى الاقتران: $y = x^r$ حيث: $r > 1$ ، والمحور x ، ومماس منحنى الاقتران عند النقطة $(1, 1)$:

(34) أثبت أن مماس منحنى الاقتران يقطع المحور x عند النقطة $(r-1, 0)$.

$$y = x^r, y' = r x^{r-1}$$

ميل المماس عند $(1, 1)$ هو:

$$y' \big|_{x=1} = r(1) - 1 = r$$

معادلة المماس هي:

$$y - 1 = r(x - 1) \Rightarrow y = rx + 1 - r$$

لإيجاد المقطع x لهذا المماس نضع $y = 0$ في معادله:

$$rx + 1 - r = 0 \Rightarrow x = \frac{r - 1}{r} = 0$$

إذن، يقطع هذا المماس المحور x في النقطة $(r - 1, 0)$

(35) أستعمل النتيجة من الفرع السابق لإثبات أن مساحة المنطقة R هي $r - 12r(r + 1)$ وحدة مربعة.

مساحة المنطقة R تساوي المساحة بين المنحنى والمحور x والمستقيمين $x = 0, x = 1$ مطروحاً منها مساحة المثلث الذي رؤوسه $(1, 0), (1, 1), (r - 1, 0)$ أي أن $A(R)$ هي:

$$A(R) = \int_0^1 x r dx - \frac{1}{2}(1 - r - 1)(1) = \frac{r}{2} x^2 \big|_0^1 - \frac{1}{2}(1 - r) = \frac{r}{2} - \frac{1 - r}{2} = \frac{r - 1 + r}{2} = \frac{2r - 1}{2}$$

(36) أجد قيمة الثابت r التي تجعل مساحة المنطقة R أكبر ما يمكن.

$$A(r) = \frac{r}{2} - \frac{1 - r}{2}, r \geq 1 \quad A'(r) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

ولأن $r \geq 1$ تكون قيمة الحرجة $2 + 1$

إذن، قيمة r التي تجعل المساحة أكبر ما يمكن هي: $r = 1 + 2 = 3$

تحذ: إذا كان العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 4x + 6$ عند النقطة $(1, 3)$ يقطع منحنى الاقتران مرة أخرى عند النقطة P , فأجد كلاً مما يأتي:

(37) إحداثيات النقطة P .

$$f'(x) = 2x - 4$$

ميل المماس عند النقطة $(1, 3)$ هو:

$$f'(1) = -2$$

ميل العمودي على المماس عند النقطة (1,3) هو: 12

معادلة العمودي:

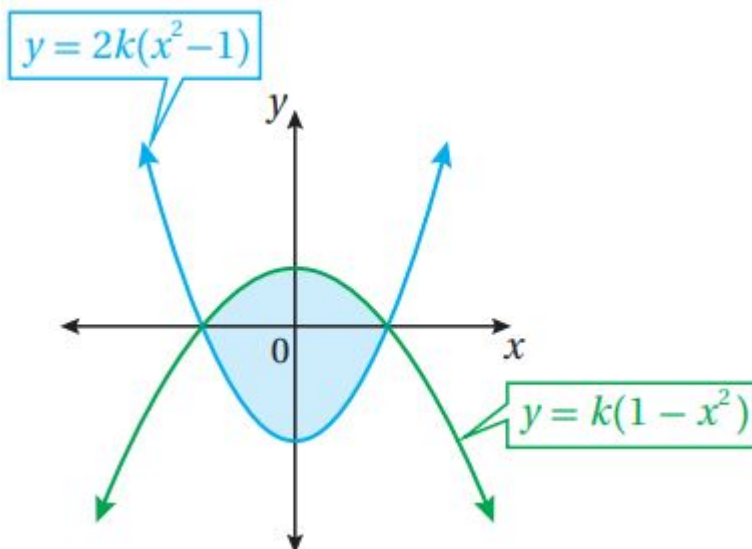
$$y - 3 = 12(x - 1) \Rightarrow y = 12x + 52$$

نجد نقاط تقاطع المنحنى والعمودي على المماس:

$$x^2 - 4x + 6 = 12x + 52 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 7 = 0 \Rightarrow (2x - 7)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 7/2, x = 1 \Rightarrow P(7/2, f(7/2)) = (7/2, 174)$$

(38) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والعمودي على المماس، مقرباً إيجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية.

$$A = \int_{1/2}^{7/2} (12x + 52 - (x^2 - 4x + 6)) dx = \int_{1/2}^{7/2} (92x - 72 - x^2) dx = (94x^2 - 72x - 1/3 x^3) \Big|_{1/2}^{7/2} = (94(7/2)^2 - 72(7/2) - 1/3(7/2)^3) - (94(1/2)^2 - 72(1/2) - 1/3(1/2)^3) = 12548 \approx 2.604$$



(39) تبرير: المنطقة المظللة في الشكل المجاور محصورة بين قطعين مكافئين، يقطع كل منهما المحور x ، عندما $x = -1, x = 1$. إذا كانت معادلتا القطعين هما: $y = 2k(x^2 - 1), y = k(1 - x^2)$ وكانت مساحة المنطقة المظللة هي 8 وحدات مربعة، فأجد قيمة الثابت k .

$$\int_{-1}^1 (k(1 - x^2) - 2k(x^2 - 1)) dx = 8 \Rightarrow \int_{-1}^1 (k(1 - x^2) + 2k(1 - x^2)) dx = 8 \Rightarrow 3k \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = 8 \Rightarrow 3k \left((1 - x^2) \Big|_{-1}^1 \right) = 8 \Rightarrow 3k(2 - 2) = 8 \Rightarrow 3k(4) = 8 \Rightarrow k = 2$$