

## أدرب وأحل المسائل

### الضرب القياسي

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي:

$$(u \rightarrow = 5i^{\wedge} - 4j^{\wedge} + 3k^{\wedge}, v \rightarrow = 7i^{\wedge} + 6j^{\wedge} - 2k^{\wedge}) \quad (1)$$

$$u \rightarrow \cdot v \rightarrow = 5(7) - 4(6) + 3(-2) = 5$$

$$(u \rightarrow = 4i^{\wedge} - 8j^{\wedge} - 3k^{\wedge}, v \rightarrow = 12i^{\wedge} + 9j^{\wedge} - 8k^{\wedge}) \quad (2)$$

$$u \rightarrow \cdot v \rightarrow = 4(12) - 8(9) - 3(-8) = 0$$

$$(u \rightarrow = \langle -5, 9, 17 \rangle, v \rightarrow = \langle 4, 6, -2 \rangle) \quad (3)$$

$$u \rightarrow \cdot v \rightarrow = -5(4) + 9(6) + 17(-2) = 0$$

$$(u \rightarrow = \langle 1, -4, 12 \rangle, v \rightarrow = \langle 3, 10, -5 \rangle) \quad (4)$$

$$u \rightarrow \cdot v \rightarrow = 1(3) - 4(10) + 12(-5) = -97$$

أجد قياس الزاوية  $\theta$  بين المتجهين إلى أقرب عشر درجة في كل مما يأتي:

$$(m \rightarrow = 4i^{\wedge} - 2j^{\wedge} + 5k^{\wedge}, n \rightarrow = 3i^{\wedge} + 4j^{\wedge} - 2k^{\wedge}) \quad (5)$$

$$m \rightarrow \cdot n \rightarrow = 4(3) - 2(4) + 5(-2) = -6$$

$$|m \rightarrow| = \sqrt{16 + 4 + 25} = 4.5 \quad |n \rightarrow| = \sqrt{9 + 16 + 4} = 2.9$$

$$\cos \theta = \frac{m \rightarrow \cdot n \rightarrow}{|m \rightarrow| |n \rightarrow|} = \frac{-6}{4.5 \times 2.9} = \cos^{-1}(-0.996) \approx 99.6^\circ$$

$$(v \rightarrow = \langle 3, -2, 9 \rangle, w \rightarrow = \langle 5, 3, -4 \rangle) \quad (6)$$

$$v \rightarrow \cdot w \rightarrow = 3(5) - 2(3) + 9(-4) = -27$$

$$|v \rightarrow| = \sqrt{9 + 4 + 81} = 9.4 \quad |w \rightarrow| = \sqrt{25 + 9 + 16} = 5$$

$$\cos \theta = \frac{v \rightarrow \cdot w \rightarrow}{|v \rightarrow| |w \rightarrow|} = \frac{-27}{9.4 \times 5} = \cos^{-1}(-0.579) \approx 113.2^\circ$$

(7) إذا كانت  $A(3, 5, -4)$  و  $B(7, 4, -3)$  و  $O$  نقطة الأصل، فأجد  $\angle OAB$  إلى أقرب

درجة.

$$AO \rightarrow = \langle -3, -5, 4 \rangle \quad |AO \rightarrow| = \sqrt{9 + 25 + 16} = 5$$

$$AB \rightarrow = \langle 4, -1, 1 \rangle \quad |AB \rightarrow| = \sqrt{16 + 1 + 1} = \sqrt{18} = 4.24$$

$$(\vec{AO} \cdot \vec{AB} \rightarrow |\vec{AO} \rightarrow| |\vec{AB}| = 18 \vec{AO} \cdot \vec{AB} \rightarrow = -3(4) - 5(-1) + 4(1) = -30 = \cos^{-1} \circ (-0.1) \approx 96(-350 \times 18) = \cos^{-1} \rightarrow |) = \cos^{-1}$$

(8) يمر المستقيم  $l_1$  بالنقطتين:  $(1, 4, 2), (3, 5, 7)$ ، ويمر المستقيم  $l_2$  بالنقطتين:  $(1, 2, 6), (5, 3, 2)$  أجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم  $l_2$  والمستقيم  $l_1$  إلى أقرب عشر درجة.

$$\langle \vec{v} \rightarrow = \langle -3, -2, 5+1, 7-4 \rangle = \langle -5, 6, 3 \rangle \text{ هو: اتجاه المستقيم } l_1$$

$$\langle \vec{w} \rightarrow = \langle 1-6, 2+5, -1-3 \rangle = \langle -5, 7, -4 \rangle \text{ هو: اتجاه المستقيم } l_2$$

$$|\vec{v} \rightarrow| = 25 + 36 + 9 = 70 \quad |\vec{w} \rightarrow| = 25 + 49 + 16 = 90 \quad \vec{v} \rightarrow \cdot \vec{w} \rightarrow = -5(-5) + 6(7) + 3(-4) = 55$$

$$\cos^{-1} \left( \frac{55}{70 \times 90} \right) \approx 46.1 \quad (\vec{u} \rightarrow \cdot \vec{w} \rightarrow \rightarrow |\vec{u} \rightarrow| |\vec{w} \rightarrow|) = \cos^{-1} (14) = 55 \theta = \cos^{-1}$$

إذن، قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين  $l_1$  و  $l_2$  هو  $46.1^\circ$  تقريباً.

(9) إذا كان المستقيم الذي له المعادلة المتجهة:  $\vec{r} \rightarrow = \langle 1, 4, -5 \rangle + \lambda \langle -6, q+5, 3 \rangle$  والمستقيم الذي له المعادلة المتجهة:  $\vec{r} \rightarrow = \langle 1, 4, -5 \rangle + \mu \langle 5, q-6, -4 \rangle$  متعامدين، فما القيم الممكنة للثابت  $q$ ؟

$$\langle \vec{v} \rightarrow = \langle -6, q+5, 3 \rangle \text{ هو: اتجاه المستقيم الأول}$$

$$\langle \vec{u} \rightarrow = \langle 5, q-6, -4 \rangle \text{ هو: اتجاه المستقيم الثاني}$$

المستقيمان متعامدان، فاتجاههما متعامدان، أي أن:  $\vec{v} \rightarrow \cdot \vec{u} \rightarrow = 0$

$$q+5)(q-6)+3(-4)=0 \Rightarrow q^2-q-72=0 \Rightarrow (q-9)(q+8)=0 \Rightarrow q=9, \text{ )}+(5)6- \rightarrow$$

$$\text{or } q=-8$$

إذا كانت:  $\vec{r} \rightarrow = 2\hat{j} - 3\hat{k} + t(-\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k})$  معادلة متجهة للمستقيم  $l$ ، والنقطة  $P(-2, 22, 5)$  غير واقعة على المستقيم  $l$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

(10) أحدد مسقط العمود من النقطة  $P$  على المستقيم  $l$ .

لتكن  $A$  هي المسقط العمودي للنقطة  $P$  على المستقيم  $l$ ، فإن متجه موقعها هو:

$$\langle \vec{OA} \rightarrow = \langle -t, 2+2t, -3+5t \rangle$$

إذا كان  $\vec{AP} \rightarrow$  هو العمود من  $P$  على المستقيم  $l$ ، فإن:  $\vec{AP} \rightarrow = \vec{OP} \rightarrow - \vec{OA} \rightarrow$

$$\langle AP \rightarrow = \langle -2+t, 22-(2+2t), 5-(-3+5t) \rangle = \langle -2+t, 20-2t, 8-5t \rangle$$

بما أن  $AP \rightarrow$  يعامد  $a$ ، إذن:  $AP \rightarrow \cdot \langle -1, 2, 5 \rangle = 0$

$$t) + 2(20-2t) + 5(8-5t) = 0 \Rightarrow t = 4115 \Rightarrow OA \rightarrow = \langle -4115, 11215, 3+2-1 \rangle \Rightarrow (23$$

إذن، مسقط العمود  $P$  على المستقيم  $a$  هو  $A(-4115, 11215, 323)$

(11) أجد البعد بين النقطة  $P$  والمستقيم  $a$ .

$$AP = \sqrt{(-2+4115)^2 + (22-11215)^2 + (5-323)^2} = 5487015 \approx 15.6$$

(12) أجد مساحة المثلث  $ABC$ ، حيث:  $AB \rightarrow = \langle 4, 9, 1 \rangle$ ,  $AC \rightarrow = \langle 9, 1, 4 \rangle$ .

$$|AB \rightarrow| = \sqrt{16+81+1} = 98 \quad |AC \rightarrow| = \sqrt{81+1+16} = 98 \quad AB \rightarrow \cdot AC \rightarrow = 9(4) + 1(9) + 4(1) = 49$$

ليكن  $\theta$  قياس الزاوية  $BAC$

$$(12) = 60^\circ = \cos^{-1} \left( \frac{AB \rightarrow \cdot AC \rightarrow}{|AB \rightarrow| |AC \rightarrow|} \right) = \cos^{-1} \theta = \cos^{-1} \frac{49}{98 \times 98}$$

$$60^\circ = 4932 \theta = 1298 \times 98 \sin \theta \Rightarrow \text{Area} = 12 |AB \rightarrow| \times |AC \rightarrow| \sin \theta$$

(13) أجد مساحة المثلث  $ABC$  الذي إحداثيات رؤوسه هي:  $A(1, 3, 1)$ ,  $B(2, 7, -3)$ ,  $C(4, -5, 2)$ .

$$AB \rightarrow = \langle 1, 4, -4 \rangle \Rightarrow |AB \rightarrow| = \sqrt{1+16+16} = 33 \quad AC \rightarrow = \langle 3, -8, 1 \rangle \Rightarrow |AC \rightarrow| = \sqrt{9+64+1} = 74$$

$$AB \rightarrow \cdot AC \rightarrow = 1(3) + 4(-8) - 4(1) = -33$$

ليكن  $\theta$  قياس الزاوية  $BAC$

$$(-3374) = \cos^{-1} \left( \frac{AB \rightarrow \cdot AC \rightarrow}{|AB \rightarrow| |AC \rightarrow|} \right) = \cos^{-1} \theta = \cos^{-1} \frac{-33}{33 \times 74}$$

$$\theta = 1233 \theta = 1 - 3374 = 4174 \Rightarrow \text{Area} = 12 |AB \rightarrow| \times |AC \rightarrow| \sin \theta = -3374 \Rightarrow \sin \theta = \frac{-3374}{33 \times 74}$$

$$\times 744174 = 13532 \approx 18.4$$



(14) حزام ناقل: يمثل المتجه:  
 $\vec{F} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$  القوة التي يولدها حزام ناقل لتحريك حقيبة في مسار مستقيم، من النقطة  $(1,1,1)$  إلى النقطة  $(9,4,7)$ . أجد مقدار الشغل الذي تبذله القوة  $F$ ، علماً بأن القوة بالنيوتن  $N$ ، والمسافة بالمتراً  $m$ ، ومقدار الشغل  $(W)$  المبذول بوحدة الجول  $(J)$  يساوي ناتج الضرب القياسي لمتجه القوة في متجه الإزاحة؛ أي:  $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ .

$$\vec{d} = \langle 8, 3, 6 \rangle, \vec{F} = \langle 5, -3, 1 \rangle \quad W = \vec{F} \cdot \vec{d} = 5(8) - 3(3) + 1(6) = 37J$$

(15) إذا كانت النقطة  $R(27, -17, -1)$ ، والنقطة  $S(11, -9, 11)$  تقعان على المستقيم  $a$ ، وكانت النقطة  $Q$  تقع على المستقيم  $a$ ، حيث  $\vec{OQ} \perp$  عمودي على  $a$ ، فأجد متجه الموقع للنقطة  $Q$ .

$$\{\vec{d} = \langle 8, 3, 6 \rangle, \vec{F} = \langle 5, -3, 1 \rangle \quad W = \vec{F} \cdot \vec{d} = 5(8) - 3(3) + 1(6) = 37$$

إذن، يمكن تبسيط اتجاه المستقيم  $a$  بقسمة  $\vec{RS}$  على 4:

$$\vec{v} = \langle -4, 2, 3 \rangle$$

$$\text{معادلة المستقيم } a \text{ هي: } \vec{r} = \langle 11, -9, 11 \rangle + t \langle -4, 2, 3 \rangle$$

النقطة  $Q$  هي المسقط العمودي للنقطة  $O$  على هذا المستقيم، فيكون متجه موقعها  $\vec{OQ}$  هو:

$$\vec{OQ} = \langle 11 - 4t, -9 + 2t, 11 + 3t \rangle$$

بما أن  $\vec{OQ} \perp \vec{v}$  متعامدان، فإن:  $\vec{OQ} \cdot \vec{v} = 0$

$$(11 - 4t) + 2(-9 + 2t) + 3(11 + 3t) = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \vec{OQ} = \langle 7, -7, 14 \rangle$$

إذا كانت متجهات مواقع النقاط:  $A$ ،  $B$ ، و  $C$  هي:  
 $(2, 97, 2)$ ،  $(14, 174, 41)$ ،  $(-22, 13, 4)$  على الترتيب، فأجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعاً:

(16) أثبت أن:  $\vec{AB} \perp \vec{AD}$ .

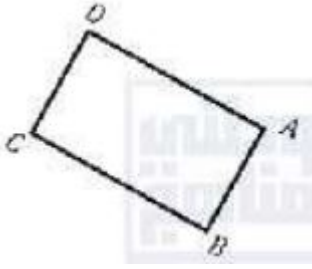
$$OA \rightarrow = \langle -4, 13, 22 \rangle, OB \rightarrow = \langle 4, 17, 14 \rangle, OD \rightarrow = \langle 2, -29, 7 \rangle$$

$$AD \rightarrow = \langle 2+4, -29-13, 7-22 \rangle = \langle 6, -42, -15 \rangle$$

$$AB \rightarrow = \langle 4+4, 17-13, 14-22 \rangle = \langle 8, 4, -8 \rangle$$

$$AB \rightarrow \cdot AD \rightarrow = 6(8) - 42(4) - 15(-8) = 0 \Rightarrow AB \rightarrow \perp AD$$

(17) أجد متجه موقع النقطة C إذا كان ABCD مستطيلاً.



ارسم شكل مستوي تقريبي يوضح المسألة (المهم ترتيب رؤوس المستطيل ABCD بالتوالي مع عقارب الساعة أو عكس عقارب الساعة)، أينما كان موقع O، فإن:

$$OC \rightarrow = OB \rightarrow + BC \rightarrow = OB \rightarrow + AD \rightarrow = \langle 4, 17, 14 \rangle + \langle 6, -42, -15 \rangle = \langle 10, -25, -1 \rangle$$

(ويمكن إيجاد  $OC \rightarrow$  عبر الرأس D من

العلاقة:  $\rightarrow OC \rightarrow = OD \rightarrow + DC \rightarrow = OD \rightarrow + AB \rightarrow$ )

(18) أجد مساحة المستطيل ABCD.

$$|AD \rightarrow| = \sqrt{36 + 1764 + 225} = 2025 = 45 \quad |AB \rightarrow| = \sqrt{64 + 16 + 64} = 144 = 12$$

$$\text{Area} = (45)(12) = 540$$

إذن، مساحة ABCD تساوي 540 وحدة مربعة.

(19) أجد متجه موقع مركز المستطيل ABCD.

مركز المستطيل هي نقطة تقاطع قطريه وهي نقطة منتصف كل من القطرين. نأخذ القطر  $BD^-$  ولتكن نقطة منتصفه E، فإن:

$$\langle E(4+22, 17-29, 2, 14+72) \rangle = \langle 3, -6, 2, 12 \rangle \Rightarrow OE \rightarrow = \langle 3, -6, 2, 12 \rangle$$

تمثل:  $r \rightarrow = \langle -5, 7, 1 \rangle + t \langle 3, 1, 4 \rangle$  معادلة متجهة للمستقيم  $l_1$ ، وتمثل:

$r \rightarrow = \langle 2, 8, -1 \rangle + u \langle 2, 0, -3 \rangle$  معادلة متجهة للمستقيم  $l_2$ ، وتمثل:

$r \rightarrow = \langle 3, 19, 10 \rangle + v \langle -1, 3, 1 \rangle$  معادلة متجهة للمستقيم  $l_3$ .

إذا تقاطع المستقيم  $l_2$  والمستقيم  $l_1$  في النقطة T، وكانت النقطة F تقع على

المستقيم  $l_3$ ، حيث:  $TF^- \perp l_3$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

(20) أجد إحداثيات النقطة F.

لإيجاد نقطة تقاطع  $l_1$  نسائي  $l_2$  في معادلتها ونسائي الإحداثيات المتناظرة:

$$5+3t, 7+t, 1+4t = \langle 2+2u, 8, -1-3u \rangle - 5+3t = 2+2u \Rightarrow 3t-2u=7 \dots\dots\dots (-)$$

$$(1) 7+t=8 \Rightarrow t=1 \Rightarrow 4t=4 \Rightarrow -1-3u=4 \Rightarrow 4t+3u=-2 \dots\dots\dots (2)$$

بتعويض  $t=1$  في المعادلتين (1) و (2) نجد أن  $u=-2$

لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نعوض  $t=1$  في معادلة  $l_1$

$$\langle r \rightarrow = \langle -5+3(1), 7+1, 1+4(1) \rangle = \langle -2, 8, 5 \rangle$$

إذن، نقطة تقاطع  $l_1, l_2$  هي  $T(-2, 8, 5)$

F هو المسقط العمودي للنقطة T على  $l_3$ ، إذن:

$$OF \rightarrow = \langle 3-v, 19+3v, 10+v \rangle \quad TF \rightarrow = \langle 3-v-(-2), 19+3v-8, 10+v-5 \rangle = \langle 5-v, 11+3v, v+5 \rangle$$

اتجاه  $l_3$  هو  $\langle w \rightarrow = \langle -1, 3, 1 \rangle$

لكن  $TF \rightarrow \cdot w \rightarrow = 0$ ، إذن، يعامد  $l_3$  إذن،

$$v) + 3(11+3v) + 1(v+5) = 0 \Rightarrow v = -3 \Rightarrow OF \rightarrow = \langle 3-(-3), 19+3(-3), -5 \rangle = \langle 6, 10, 7 \rangle$$

(21) أجد البعد بين النقطة T والمستقيم  $l_3$ .

$$TF \rightarrow = \langle -8, 2, -2 \rangle \Rightarrow |TF \rightarrow| = \sqrt{64+4+4} = 62$$

إذا كانت:  $\langle r \rightarrow = \langle 5, 3, 0 \rangle + \lambda \langle -1, 3, 1 \rangle$  معادلة متجهة للمستقيم  $l_3$ ، وكانت  $A(3, -2, 1), B(5, 3, 0)$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

(22) أجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم  $AB$  والمستقيم  $l_3$ .

$$\langle AB \rightarrow = \langle 2, 5, -1 \rangle$$

وهذا هو اتجاه المستقيم  $AB \rightarrow$

اتجاه المستقيم  $l$  هو:  $\langle v \rightarrow = \langle -1, 3, 1 \rangle$

$$|AB \rightarrow| = 4 + 25 + 1 = 30 \quad |v \rightarrow| = 1 + 9 + 1 = 11 \quad AB \rightarrow \cdot v \rightarrow = 2(-1) + 5(3) - 1(1) = 12$$

$$\cos \theta = \frac{AB \rightarrow \cdot v \rightarrow}{|AB \rightarrow| |v \rightarrow|} = \frac{12}{30 \times 11} \approx 0.364 \Rightarrow \theta \approx \cos^{-1}(0.364) \approx 68.7^\circ$$

(23) تقع النقطة  $C$  على المستقيم  $AB$ ، حيث:  $AB=AC$ . أجد إحداثيات النقطة  $C$ .

بما أن  $A, B, C$  على استقامة واحدة، و  $AB=AC$  إذن،  $A(3, -2, 1)$  هي نقطة منتصف  $BC$  حيث:

$$C(x, y, z), B(5, 3, 0) \Rightarrow (x+5, y+3, z+0) = (2 \times 3, 2 \times (-2), 2 \times 1) = (6, -4, 2)$$

$$\Rightarrow x+5=6 \Rightarrow x=1 \quad y+3=-4 \Rightarrow y=-7 \quad z=2$$

إذن، إحداثيات النقطة  $C$  هي:  $(1, -7, 2)$

تقع النقطة  $A(-7, -4, 9)$  والنقطة  $B(8, 5, 3)$  على المستقيم  $l$ ، وتقع النقطة  $C(6, 11, 7)$  على المستقيم  $l_2$  الذي معادلته:  $\langle r \rightarrow = \langle 6, 11, 7 \rangle + t \langle -1, 3, 2 \rangle$ :

(24) أبين أن النقطة  $B$  تقع على المستقيم  $l_2$ .

متجه موقع أي نقطة على  $l_2$  يكون  $\langle r \rightarrow = \langle 6-t, 11+3t, 7+2t \rangle$

حتى تقع  $B$  على  $l_2$  ينبغي وجود قيمة  $t$  تحقق المعادلة:  $\langle t, 11+3t, 7+2t \rangle = \langle 8, 5, 3-6 \rangle$

$$t=8 \Rightarrow t=-2 \quad 11+3t=5 \Rightarrow t=-2 \quad 7+2t=3 \Rightarrow t=-2$$

لهذه المعادلات الثلاث الحل نفسه  $t=-2$

إذن، تقع  $B$  على المستقيم  $l_2$  لأنها تنتج من تعويض  $t=-2$  في معادلته.

(25) أبين أن المستقيم  $l_1$  والمستقيم  $l_2$  متعامدان.

اتجاه  $l_1$  هو:  $\langle AB \rightarrow = \langle 15, 9, -6 \rangle$

ويمكن تبسيطه إلى  $\langle u \rightarrow = \langle 5, 3, -2 \rangle$

اتجاه  $l_2$  هو:  $\langle v \rightarrow = \langle -1, 3, 2 \rangle$



$$u \rightarrow \cdot v \rightarrow = 5(-1) + 3(3) - 2(2) = 0$$

إذن، المستقيمان 1, 2 متعامدان.

(26) أجد  $m\angle ABC$ .

بما أن 1, 2 متعامدان، ونقطة التقائهما هي B (كونها واقعة على كل منهما كما سبق)

إذن،  $m\angle ABC = 90^\circ$

(27) أجد مساحة المثلث ABC.

المثلث ABC قائم في B

$$AB = \sqrt{15^2 + 9^2 + (-6)^2} = 34 \quad BC = \sqrt{22^2 + (-6)^2 + (-4)^2} = 56 = 214 \quad \text{Area} = \frac{1}{2}(AB)(BC) = \frac{1}{2} \times 34 \times 214 = 4788 \approx 69.2$$

إذن، مساحة المثلث ABC تسوي 69.2 وحدة مربعة تقريباً.

ABCD هرم ثلاثي. إذا كانت إحداثيات رؤوسه هي:

$A(4, 3, -1), B(-4, 5, 2), C(6, -1, 0), D(10, 11, 19)$  فاجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

(28) أجد مساحة المثلث ABC في صورة:  $a6$ .

$$AB \rightarrow = \langle -8, 2, 3 \rangle \Rightarrow |AB \rightarrow| = \sqrt{64 + 4 + 9} = 77 \quad AC \rightarrow = \langle 2, -4, 1 \rangle \Rightarrow |AC \rightarrow| = \sqrt{4 + 16 + 1} = 21$$

$$AB \rightarrow \cdot AC \rightarrow = -8(2) + 2(-4) + 3(1) = -21$$

ليكن  $\theta$  قياس الزاوية BAC

$$(-311) = \cos^{-1} \left( \frac{AB \rightarrow \cdot AC \rightarrow}{|AB \rightarrow| |AC \rightarrow|} \right) = \cos^{-1} \theta = \cos^{-1} \theta$$

$$\theta = 120^\circ = 1 - 311 = 811 = 2211 \quad \text{Area} = \frac{1}{2} |AB \rightarrow| \times |AC \rightarrow| \sin \theta = -311 \Rightarrow \sin \theta = \frac{-311}{77 \times 21 \times 2211} = 76$$

(29) أثبت أن:  $m\angle AED = 90^\circ$ ، حيث  $E(1, 2, 1)$ .

$$EA \rightarrow = \langle 3, 1, -2 \rangle, ED \rightarrow = \langle 9, 9, 18 \rangle \quad EA \rightarrow \cdot ED \rightarrow = 3(9) + 1(9) - 2(18) = 0$$

إذن،  $EA \rightarrow \perp ED \rightarrow$  وقياس الزاوية AED هو  $90^\circ$ .



(30) إذا علمت أن النقطة E تقع في المستوى نفسه الذي يقع فيه المثلث ABC، فأجد حجم الهرم ABCD.

$$|DE \rightarrow| = 81 + 81 + 324 = 96$$

ويمثل ارتفاع h، أما مساحة قاعدته  $A = 76$ ، وذلك من السؤال 28، إذن حجم الهرم هو:

$$V = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3} \times 76 \times 96 = 126$$

إذن حجم الهرم يساوي 126 وحدة مكعبة.

إذا كانت  $A(3, 1, -6)$ ،  $B(5, -2, 0)$ ،  $C(8, -4, -6)$ ، فأجيب عن الأسئلة الخمسة الآتية تبعاً:

(31) أبين أن  $\cos \theta = \frac{1}{5}$ ، حيث  $\theta$  عدد صحيح.

$$\cos \theta = \frac{AC \cdot CB}{|AC| |CB|} = \frac{5(-5) + 5(2) + 0(6)}{\sqrt{25+25+0} \sqrt{9+4+36}} = \frac{-25+10}{5 \cdot 7} = \frac{-15}{35} = -\frac{3}{7}$$

تكون قيمة  $n$  هي 5

(32) أبين أن قياس الزاوية ACB هو  $\cos^{-1} \frac{1}{5}$ .

$$CA \rightarrow = \langle -5, 5, 0 \rangle \Rightarrow |CA \rightarrow| = \sqrt{25+25+0} = 5 \quad CB \rightarrow = \langle -3, 2, 6 \rangle \Rightarrow |CB \rightarrow| = \sqrt{9+4+36} = 7$$

$$CA \rightarrow \cdot CB \rightarrow = -5(-3) + 5(2) + 0(6) = 25$$

ليكن  $\theta$  قياس الزاوية ACB

$$\cos \theta = \frac{CA \cdot CB}{|CA| |CB|} = \frac{25}{5 \cdot 7} = \frac{5}{7} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left( \frac{5}{7} \right)$$

(33) أكتب معادلة متجهة للمستقيم AC.

$$AC \rightarrow = \langle 5, -5, 0 \rangle$$

ويمكن التعبير عن اتجاه المستقيم AC بالمتجه  $v \rightarrow = \langle 1, -1, 0 \rangle$

وتكون معادلته:  $r \rightarrow = \langle 8, -4, -6 \rangle + t \langle 1, -1, 0 \rangle$

(34) إذا كانت  $D(6, -1, p)$ ، وعلّم أن  $AC \leftrightarrow BD$ ، متقاطعان، فما قيمة  $p$ ؟

$$\langle BD \rightarrow = \langle 1, 1, p \rangle$$

ويمكن التعبير عن اتجاه المستقيم  $BD \rightarrow$  بالمتجه  $\langle 1, 1, p \rangle$

$$\langle BD \rightarrow: r \rightarrow = \langle 5, -2, 0 \rangle + u \langle 1, 1, p \rangle$$

يتقاطع المستقيمان، إذن، يوجد  $u, t$  بحيث تتساوى لهما  $r \rightarrow$  في المعادلتين:

$$t, -4-t, -6) = \langle 5+u, -2+u, up \rangle \Rightarrow t-5 = -4-t \Rightarrow t-u = -3 \dots \dots \dots (1)$$

$$(-2+u \Rightarrow t+u = -2 \dots \dots \dots 2up = -6 \dots \dots \dots (3)$$

بجمع المعادلتين (1) و(2)، نجد أن:  $t = -5, u = 12$  ثم بالتعويض في (3) نجد أن:  
 $p = -12$

$$D(6, -1, -12)$$

(35) أبين أن الشكل ABCD معين، ثم أجد طول كل ضلع من أضلاعه.

$$AB \rightarrow = \langle 2, -3, 6 \rangle \quad DC \rightarrow = \langle 2, -3, 6 \rangle \Rightarrow AB \rightarrow = DC \rightarrow \quad BC \rightarrow = \langle 3, -2, -6 \rangle \quad AD \rightarrow = \langle 3, -2, -6 \rangle \Rightarrow BC \rightarrow = AD \rightarrow$$

من (1) و(2) ينتج أن الشكل ABCD متوازي أضلاع، والآن نجد طول  $AB, AD$

$$AB = |AB \rightarrow| = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7 \quad AD = |AD \rightarrow| = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$$

وبما أن ABCD متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان فهو معين جميع أضلاعه متطابقة طول كل واحد منها 7 وحدات.

(36) أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

تم حل هذا السؤال في موضعه تحت عنوان "مسألة اليوم".