اختبار نهاية الوحدة

المتجهات

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

(1) إذا كانت $A(-3,4,9), B(5,-2,3)$، فإن الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ هي:

a) $\langle 2,2,12- \rangle$

b) $\langle 6-,6-,8 \rangle$

c) $\langle 1,1,6- \rangle$

d) $\langle 6-,8,6- \rangle$

(2) إذا كان: $\vec{v}=\langle 2,c,-5 \rangle$، وكان: $|\vec{v}|=35$، فإن c تساوي:

a) 4

b) -3,5

c) 15

d) -4,4

(3) إذا كان PQR مستقيماً، حيث: $\overrightarrow{PQ}=\vec{a}$, $PQ:QR=3:1$، فإن التعبير عن المتجه $\overrightarrow{RQ}$ بدلالة $\vec{a}$ هو:

13a→ (a

14a→ (b

13a→ (c−

14a→ (d−

(4) النقطة الواقعة على المستقيم الذي له المعادلة المتجهة:
$\vec{r}=\langle 4,-2,5 \rangle+t\langle -2,1,3 \rangle$، والإحداثي y لها 10 هي:

a) (18,10,28)

b) (28,10,35)

c) (8,10,20−)

d) (20,10,41−)

(5) إذا كان: ⟨2,−2,5⟩=v→، وكان: ⟨−3,4,6⟩=w→، فإن 3v→−2w→ يساوي:

a) ⟨0,2,3⟩

b) ⟨14,3−,12⟩

c) ⟨8−,16−,13⟩

d) ⟨13,16,8−⟩

(6) إذا كان قياس الزاوية بين a→,b→ هو 60∘، وكان: a→·b→=30،
وكان: |a→|=10، فإن مقدار b→ هو:

a) 3

b) 5

c) 6

d) 24

(7) إذا كان: ⟨−4,2,a⟩=u→، وكان: ⟨2,b,5⟩=v→، وكان: u→∥v→ فإن قيمة a هي:

a) -10

b) -5

c) -1

d) 5

(8) إذا كان المتجه (5−63)=u→، والمتجه: (614q)=v→ متعامدين، فإن قيمة q

هي:

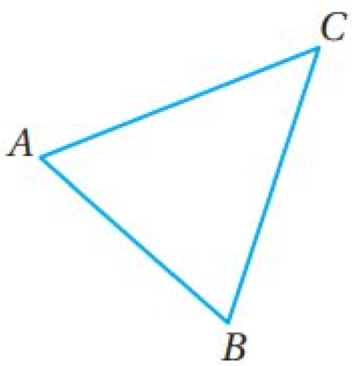
a) 0

b) 8

c) 10

d) 18

(9) في المثلث المجاور، إذا كان: $\overrightarrow{AB}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$، وكان: $\overrightarrow{BC}=-2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$، فأجد قياس الزاوية ABC إلى أقرب عشر درجة.



BA→=⟨−3,1,−2⟩⇒|BA→|=9+1+4=14BC→=⟨−2,4,3⟩⇒|BC→|=4+16+9
(BA→⋅BC→|BA→||BC→|=29BA→⋅BC→=−3(−2)+1(4)−2(3)=4θ=cos−1
∘(414×29)≈78.5)=cos−1

(10) إذا وقعت النقاط: E(2,0,4),F(h,5,1),G(3,10,k) على مستقيم واحد، فما قيمة كل من h وk؟

E,F,G تقع على استقامة واحدة، إذن $\overrightarrow{EF}\parallel\overrightarrow{FG}$، ومنه:

$\langle h-2,5,-3\rangle\parallel\langle 3-h,5,k-1\rangle$

إذن، يوجد عدد حقيقي مثل c بحيث:

⟨h−2,5,−3⟩=c⟨3−h,5,k−1⟩⇒5c=5⇒c=1h−2=(3−h)c⇒h−2=3−h⇒h=
52(k−1)c=−3⇒k−1=−3⇒k=−2

(11) إذا كانت A(3,−2,4),B(1,−5,6),C(−4,5,−1)، وكانت النقطة D تقع على المستقيم المار بالنقطة A والنقطة B، وكانت الزاوية CDA قائمة، فأجد إحداثيات النقطة D.

AB→=⟨−2,−3,2⟩r→=⟨3,−2,4⟩+t⟨−2,−3,2⟩⇒OD→=⟨3−2t,−2−3t,4+2t⟩CD→=⟨3−2t,−2−3t,4+2t⟩−⟨−4,5,−1⟩=⟨7−2t,−7−3t,5+2t⟩CD→⊥AB→⇒CD→·AB→=0⇒−2(7−2t)−3(−7−3t)+2(5+2t)=0⇒t=−1⇒OD→=⟨3+2,−2+3,4−2⟩=⟨5,1,2⟩⇒D(5,1,2

إذا كانت: r→=(−2−59)+λ(−507) معادلة متجهة للمستقيم l1، وكانت: r→=(−3−175)+μ(24−1) معادلة متجهة للمستقيم l2، فأجيب عن السؤالين الأتيين تباعاً:

(12) أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين: l1,l2.

لإيجاد نقطة التقاطع نساوي r→ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيمة الوسيطين λ,μ:

⟨−2−5λ,−5,9+7λ⟩=⟨−3+2μ,−17+4μ,5−μ⟩−17+4μ=−5⇒μ=3−2−5λ=−3+2μ⇒λ=−1

وهاتان القيمتان تحققان المعادلة الثالثة الآتية:

9+7λ=5−μ9+7(−1)=5−32=2

نجد نقطة تقاطعهما بتعويض λ=−1 في معادلة l1، وهي النقطة (3,−2,5)

(13) أجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين:l1,l2.

اتجاه المستقيم l1: v→=⟨−5,0,7⟩

اتجاه المستقيم l2: u→=⟨2,4,−1⟩

v→·u→=−5(2)+0+7(−1)=−17|v→|=25+0+49=74|u→|=4+16+1=21

لتكن θ قياس الزاوية بين u→,v→ إذن:

θ=cos−1(v→·u→|v→||u→|)=cos−1(−1774×21)≈115.5∘

فيكون قياس الزاوية الحادة بين l1,l2 هو α حيث: α=180∘−115.5∘=64.5∘

إذا كانت A(1,4,−5),B(3,0,2),C(−4,1,3)، فأجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعاً:

(14) أكتب معادلة متجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AB}$.

$\langle AB\rightarrow=\langle 2,-4,7\rangle r\rightarrow=\langle 1,4,-5\rangle+t\langle 2,-4,7$

(15) أكتب معادلة متجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AC}$.

$\langle AC\rightarrow=\langle -5,-3,8\rangle r\rightarrow=\langle 1,4,-5\rangle+u\langle -5,-3,8$

(16) إذا كان قياس $\angle BAC=\theta$، فأثبت أن: $\theta=587138\cos$.

$AB\rightarrow|=4+16+49=69|AC\rightarrow|=25+9+64=98AB\rightarrow\cdot AC\rightarrow=2(-5)-4(-3)|$
$\theta=AB\rightarrow\cdot AC\rightarrow|AB\rightarrow||AC\rightarrow|=5869\times 98=5869\times 49\times 2=587+7(8)=58\cos$
138

(17) أجد مساحة المثلث ABC.

$(ABC)=12|AB\rightarrow|\times|AC\rightarrow\theta=1-33646762=33987138Area\theta=1-\cos 2\sin$
$\theta=12\times 7138\times 33987138=33982|\sin$

(18) إذا كانت: $\langle r\rightarrow=\langle 3,-25,13\rangle+t\langle 4,5,-1$ معادلة متجهة للمستقيم ا، وكانت النقطة V تقع على المستقيم ا، حيث: $\bar{l}\perp OV$ فما إحداثيات النقطة V؟

V نقطة على l إذن يكون متجه موقعها: $\langle OV\rightarrow=\langle 3+4t,-25+5t,13-t$

اتجاه l هو: $\langle w\rightarrow=\langle 4,5,-1$

وبما أن $\bar{l}\perp OV$ إذن يكون: $w\rightarrow\cdot OV\rightarrow=0$: ومنه:

$3+4t)+5(-25+5t)-1(13-t)=0\Rightarrow t=3\Rightarrow OV\rightarrow=\langle 3+12,-25+15,13-3\rangle)4$
$(\Rightarrow V(15,-10,10$

يمر المستقيم l1 بالنقطتين: E وF، ويمر المستقيم l2 بالنقطتين: G وH. أحدد إذا كان هذان المستقيمان متوازيين أو متخالفين أو متقاطعين، ثم أجد إحداثيات نقطة التقاطع إذا كانا متقاطعين في كل مما يأتي:

$(E(7,6,34),F(5,9,16),G(1,21,-2),H(-13,-14,19)$ (19

$\langle EF\rightarrow=\langle -2,3,-18\rangle GH\rightarrow=\langle -14,-35,21$

نلاحظ أنه لا يوجد عدد حقيقي k يحقق $\vec{EF}=k\vec{GH}$ كون النسب بين الإحداثيات المتناظرة غير متساوية، فالمستقيمان غير متوازيين:

معادلة $l1$ هي: $\vec{r}=\langle 7,6,34\rangle+t\langle -2,3,-18\rangle$

معادلة $l2$ هي: $\vec{r}=\langle 1,21,-2\rangle+u\langle -14,-35,21\rangle$

نساوي $\vec{r}$ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيم t,u لمعرفة نقطة التقاطع:

$$\langle 7-2t,6+3t,34-18t\rangle=\langle 1-14u,21-35u,-2+21u\rangle$$
$$7-2t=1-14u\Rightarrow -2t+14u=-6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$6+3t=21-35u\Rightarrow 3t+35u=15 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$34-18t=-2+21u\Rightarrow 18t+21u=36 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
$$(1)\times 9+(3): u=-\frac{6}{49}, t=\frac{15}{7}$$
$$3\left(\frac{15}{7}\right)+35\left(-\frac{6}{49}\right)=2.14\neq 15$$

هذه القيم لا تحقق المعادلة (2)، إذن المستقيمان ليسا متقاطعين ولا متوازيين، فهما متخالفان.

20) $E(-3,-5,16), F(12,0,1), G(7,2,11), H(1,-22,23)$

$$\vec{EF}=\langle 15,5,-15\rangle \quad \vec{GH}=\langle -6,-24,12\rangle$$

بما أن النسب بين الإحداثيات المتناظرة غير ثابتة، فإنه لا يوجد عدد حقيقي k حيث $\vec{EF}=k\vec{GH}$ وهذا يعني أن المستقيمين غير متوازيين.

بتبسيط اتجاه $\vec{EF}$ بقسمته على 5 تكون معادلته: $\vec{r}=\langle -3,-5,16\rangle+t\langle 3,1,-3\rangle$

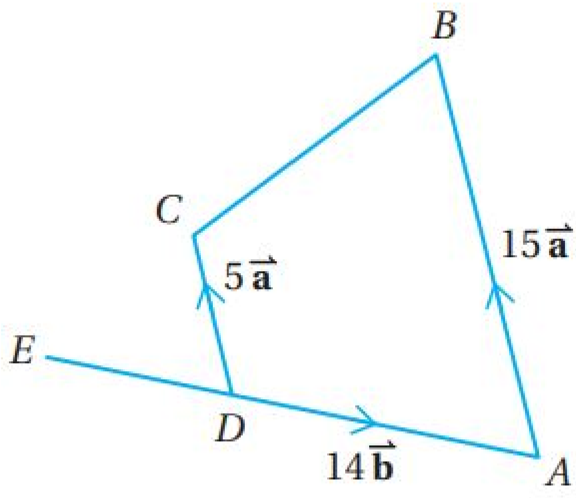
بتبسيط اتجاه $\vec{GH}$ بقسمته على 6 تكون معادلته: $\vec{r}=\langle 7,2,11\rangle+u\langle -1,-4,2\rangle$

نساوي $\vec{r}$ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيم t,u لمعرفة نقطة التقاطع:

$$\langle -3+3t,-5+t,16-3t\rangle=\langle 7-u,2-4u,11+2u\rangle$$
$$-3+3t=7-u\Rightarrow 3t+u=10 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$-5+t=2-4u\Rightarrow t+4u=7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$16-3t=11+2u\Rightarrow 3t+2u=5 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
$$(3)-(1): u=-5\Rightarrow t=5$$

لكن هذه القيم لا تحقق المعادلة (2)، إذن المستقيمان ليسا متقاطعين ولا متوازيين، فهما متخالفان.

(21) في الشكل الرباعي ABCD الآتي، مد AD على استقامته ليصل إلى النقطة E، حيث: AD=2 DE، إذا كان: →DA→=14b، وكان: →DC→=5a، وكان: →AB→=15a، فأثبت أن B,C,E تقع على استقامة واحدة.



AD=2DE⇒AD→=2DE→⇒DE→=12AD→=12(−14b→)=−7b→EC→=ED→+DC→=−DE→+DC→=7b→+5a→EB→=EA→+AB→=21b→+15a→=3(7→b→+5a→)⇒EB→=3EC

وهذا يعني أن →EB→∥EC→

لكن المتجهين ينطلقان من النقطة E نفسها، إذن النقاط الثلاثة B,C,E تقع على استقامة واحدة.