

## إجابات تدريبات الدرس

### التكامل بالتعويض

#### تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي:  $\int (2s^3 + 3s^2 + 4s) ds$

#### الحل

$$\text{نفرض أن } s = u \Rightarrow ds = du$$

$$2s^3 + 3s^2 + 4s = 2u^3 + 3u^2 + 4u$$

$$\int (2u^3 + 3u^2 + 4u) du$$

$$= \frac{2u^4}{4} + \frac{3u^3}{3} + \frac{4u^2}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}u^4 + u^3 + 2u^2 + C$$

$$= \frac{1}{2}(2s^4 + 3s^3 + 4s^2) + C$$

**تدريب ٢**

حلّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.  
جد قيمة التكامل الآتي:

$$(٤) \int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx$$

**الحل**

$$0 = \frac{dx}{\sqrt{5x}} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{5x} = u$$

$$\cdot \quad dx = \frac{2\sqrt{5x}}{5} \Leftrightarrow$$

$$\text{عندما } u = 3 \leftarrow x = 1$$

$$\text{عندما } u = 1 \leftarrow x = 0$$

$$\int_1^3 \frac{1}{u} \cdot \frac{2\sqrt{5x}}{5} = \frac{2\sqrt{5x}}{5} \cdot \frac{1}{u} \int_1^3$$

$$\int_1^3 \frac{2\sqrt{5x}}{5u} = \int_1^3 \frac{2\sqrt{5x}}{5(1+\sqrt{5x})}$$

$$\frac{2}{5} = 3 - x \cdot \frac{2}{5} = (4-1) \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{5}\right)$$

**تدريب ٣**

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(1) \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$(2) \int 2s \sqrt{s^2-1} ds$$

$$(3) \int (4s-1) \sqrt{s^2-2s-1} ds$$

$$(4) \int \frac{1}{\sqrt{s+1}} ds$$

**الحل**

$$(1) \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$\begin{aligned} u &= 1+s^2 \\ du &= 2s ds \\ ds &= \frac{du}{2s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int 3s^2 u^{-5} \cdot \frac{du}{2s} \\ &= \int \frac{3}{2} s u^{-5} du \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{u^{-5}}{u} du = \frac{3}{2} \int u^{-6} du$$

$$= \frac{3}{2} \left( \frac{u^{-5}}{-5} \right) + C = -\frac{3}{10} \frac{1}{(1+s^2)^5} + C$$

(٤)  $\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 1 \\ \frac{du}{dx} &= 2x \\ du &= 2x dx \end{aligned}$$

$\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$= \int \frac{u + 1}{u} du$

$= \int \left( \frac{u}{u} + \frac{1}{u} \right) du$

$= \int \left( 1 + \frac{1}{u} \right) du$

(٣)  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$\begin{aligned} u &= 1 - x^2 \\ \frac{du}{dx} &= -2x \\ du &= -2x dx \end{aligned}$$

$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{-1}{2x} dx$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{-2x} = \frac{1}{4} \int \frac{du}{\sqrt{u}}$

$= \frac{1}{4} \left[ \frac{u^{-1/2}}{-1/2} \right] = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right]$

(٤)  $\int \frac{1}{1+x^2} dx$

$= \int \frac{1}{1+u} du = \ln|1+u| + C$

$= \ln|1+x^2| + C$

$= \ln|1+x^2| + C$

$= \ln|1+x^2| + C = \ln|1+x^2| + C$

**تدريب ٤**

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int (As + B) \sqrt{Cs} \, ds, \text{ حيث } A, B \text{ ثابتان، } A \neq 0, C \neq 1$$

$$(2) \int (As + B) \sqrt{Cs} \, ds, \text{ حيث } A, B \text{ ثابتان، } A \neq 0$$

**الحل**

$$(1) \int (As + B) \sqrt{Cs} \, ds = \int \frac{(As + B) \sqrt{Cs}}{C \times (1+C)} \, ds$$

$$(2) \int (As + B) \sqrt{Cs} \, ds = \int \frac{(As + B) \sqrt{Cs}}{C} \, ds$$

**تدريب ٥**

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int_1^2 (s^2 - 1) \sqrt{Cs} \, ds$$

$$(2) \int_1^2 (s^4 - 1) \sqrt{Cs} \, ds$$

**الحل**

$$(1) \int_1^2 \frac{(s^2 - 1) \sqrt{Cs}}{\sqrt{Cs}} \, ds = \int_1^2 (s^2 - 1) \, ds = \left[ \frac{s^3}{3} - s \right]_1^2 = \frac{8}{3} - 2 - \left( \frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{8}{3} - 2 + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$(2) \int_1^2 (s^4 - 1) \sqrt{Cs} \, ds = \int_1^2 \frac{(s^4 - 1) \sqrt{Cs}}{\sqrt{Cs}} \, ds = \int_1^2 (s^4 - 1) \, ds = \left[ \frac{s^5}{5} - s \right]_1^2 = \frac{32}{5} - 2 - \left( \frac{1}{5} - 1 \right) = \frac{32}{5} - 2 + \frac{4}{5} = \frac{24}{5}$$