إجابات أسئلة الدرس

التكامل بالتعويض

١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

أ) $\int (1 - 2\text{س})(\text{س} - \text{س}^2)^4 \, \text{ءس}$

ب) $\int 6\text{س}^2 \sqrt[5]{(2\text{س}^3 - 2)^2} \, \text{ءس}$

جـ) $\int (2\text{س} - 3\text{س}^2) \text{قا}^2(\text{س}^2 - \text{س}^3) \, \text{ءس}$

د) $\int \frac{3\text{س} - 9}{(\text{س}^2 - 6\text{س})^2} \, \text{ءس}$

الحل

أ) $\int (1 - 2\text{س})(\text{س} - \text{س}^2)^4 \, \text{ءس}$.

$$\text{ص} = \text{س} - \text{س}^2 \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 1 - 2\text{س} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{1 - 2\text{س}} = \text{ءس}$$

$$\int \cancel{(1 - 2\text{س})} \, \text{ص}^4 \frac{\text{ءص}}{\cancel{1 - 2\text{س}}} = \int \text{ص}^4 \, \text{ءص}$$

$$= \frac{\text{ص}^5}{5} + \text{ج} = \frac{(\text{س} - \text{س}^2)^5}{5} + \text{ج}$$

ب) $\int 6\text{س}^2 \sqrt[5]{(2\text{س}^3 - 2)^2} \, \text{ءس}$

$$\text{ص} = 2\text{س}^3 - 2 \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 6\text{س}^2 \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{6\text{س}^2} = \text{ءس}$$

$$\int \cancel{6\text{س}^2} \sqrt[5]{\text{ص}^2} \frac{\text{ءص}}{\cancel{6\text{س}^2}} = \int \text{ص}^{\frac{2}{5}} \, \text{ءص}$$

$$\frac{\text{ص}^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + \text{جـ} = \frac{\text{ص}^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{5}{7}\sqrt[5]{\text{ص}^7} + \text{جـ}$$

$$= \frac{5}{7}\sqrt[5]{(2\text{س}^3-2)^7} + \text{جـ}$$

جـ) $\int (2\text{س} - 3\text{س}^2)\,\text{قا}^2(\text{س}^2 - \text{س}^3)\,\text{دس}$

$$\text{ص} = \text{س}^2 - \text{س}^3 \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س} - 3\text{س}^2$$

$$\frac{\text{دص}}{2\text{س} - 3\text{س}^2} = \text{دس} \,.$$

$$\int \cancel{(2\text{س} - 3\text{س}^2)}^{(-1)}\,\text{قا}^2\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\cancel{3\text{س}^2 - 2\text{س}}}$$

$$\int -\text{قا}^2\text{ص}\,.\,\text{دص} = -\text{ظا}\,\text{ص} + \text{جـ}$$

$$= -\text{ظا}(\text{س}^2 - \text{س}^3) + \text{جـ}$$

د) $\int \frac{3\text{س} - 9}{(\text{س}^2 - 6\text{س})^2}\,\text{دس}$

$$\text{ص} = \text{س}^2 - 6\text{س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س} - 6 \Leftarrow$$

$$\frac{\text{دص}}{2\text{س} - 6} = \text{دس} \,.$$

$$\int \frac{3\text{س} - 9}{\text{ص}^2} \times \frac{\text{دص}}{2\text{س} - 6} =$$

$$\int 3\cancel{(\text{س} - 3)} \times \text{ص}^{-2} \times \frac{\text{دص}}{2\cancel{(\text{س} - 3)}} = .$$

$$\frac{3}{2}\,\frac{\text{ص}^{-2+1}}{-2+1} + \text{جـ} = \frac{3}{2}\,\frac{\text{ص}^{-1}}{-1} + \text{جـ}$$

$$\frac{-3}{2\text{ص}} + \text{جـ} = \frac{-3}{2(\text{س}^2 - 6\text{س})} + \text{جـ}$$

٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int \sqrt[3]{(٣س - ٢)^٢}\ ٤س$ ب) $\int (س - ١)(٢س^٢ - ٤س + ١)^٥\ ٤س$

جـ) $\int ٢ قا^٢(٢ - س)\ ٤س$ د) $\int ٢س^٣ جا(س^٤ + ١)\ ٤س$

الحل

أ) $\int \sqrt[3]{(٣س - ٢)^٢}\ ٤س = \int (٣س - ٢)^{\frac{٢}{٣}}\ ٤س = \frac{(٣س - ٢)^{\frac{٢}{٣}+١}}{(\frac{٢}{٣}+١)\times ٣} + جـ$

$= \frac{(٣س - ٢)^{\frac{٥}{٣}}}{\cancel{٣} \times \frac{٥}{\cancel{٣}}} + جـ = \frac{١}{٥}\sqrt[3]{(٣س - ٢)^٥} + جـ$

ب) $\int (س - ١)(٢س^٢ - ٤س + ١)^٥\ ٤س$

$ص = ٢س^٢ - ٤س + ١ \Leftarrow \frac{٤ص}{٤س} = ٤س - ٤$

$\frac{٤ص}{٤س - ٤} = ٤س \Leftarrow ٤س = \frac{٤ص}{٤(س - ١)}$

$\int \cancel{(س - ١)}\ ص^٥ \times \frac{٤ص}{٤\cancel{(س - ١)}} = \frac{١}{٤}\int ص^٥\ ٤ص$

$= \frac{ص^٦}{٦ \times ٤} + جـ = \frac{(٢س^٢ - ٤س + ١)^٦}{٢٤} + جـ$

جـ) $\int ٢ قا^٢(٢ - س)\ ٤س =$

$\frac{٢ ظا(٢ - س)}{-١} + جـ$

$-٢ ظا(٢ - س) + جـ$

د) $\int ٢س^٣ جا(س^٤ + ١)\ ٤س$

$ص = س^٤ + ١ \Leftarrow \frac{٤ص}{٤س} = ٤س^٣ \Leftarrow$

$\frac{٤ص}{٤س^٣} = ٤س$

$\int ٢\cancel{س^٣}\ جا ص \frac{٤ص}{٤\cancel{س^٣}} =$

$\int \frac{١}{٢} جا ص\ ٤ص = -\frac{١}{٢} جتا ص + جـ$

$= -\frac{١}{٢} جتا(س^٤ + ١) + جـ$

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{٠}^{٢} \sqrt{٤\text{س} + ١}\ \text{ءس}$

ب) $\int_{١-}^{١-} ٣\text{س}^{٢}(\text{س}^{٣} - ١)^{٣}\ \text{ءس}$

جـ) $\int_{١}^{٠} ٢\text{س}\sqrt[٣]{\text{س}^{٢} - ١}\ \text{ءس}$

د) $\int_{١}^{٢} \frac{٣ - ٢\text{س}}{(\text{س}^{٢} - ٣\text{س})^{٢}}\ \text{ءس}$

الحل

أ) $\int_{٠}^{٢} \sqrt{٤\text{س}+١}\ \text{ءس} = \int_{٠}^{٢} (٤\text{س}+١)^{\frac{١}{٢}} \cdot \text{ءس}$

$$= \left[\frac{(٤\text{س}+١)^{\frac{١}{٢}+١}}{٤ \times (\frac{١}{٢}+١)} \right]_{٠}^{٢} = \left[\frac{(٤\text{س}+١)^{\frac{٣}{٢}}}{٤ \times \frac{٣}{٢}} \right]_{٠}^{٢}$$

$$\left[\frac{\sqrt{(٤\text{س}+١)^{٣}}}{٦} \right]_{٠}^{٢}$$

$$\frac{١}{٦}\left[\sqrt{(٤ \times ٢ + ١)^{٣}} - \sqrt{(٤ \times ٠ + ١)^{٣}} \right]$$

$$\frac{١}{٦}\left(\sqrt{٩^{٣}} - \sqrt{١^{٣}} \right)$$

$$\frac{1}{6}(27-1)$$

$$\frac{1}{6}\times 26 = \frac{13}{3}$$

ب) $\int_{-1}^{1} 3\text{س}^{2}(\text{س}^{3}-1)^{3}\,\text{دس} = \text{صفر}$

جـ) $\int_{1}^{0} 2\text{س}\sqrt[3]{\text{س}^{2}-1}\,.\,\text{دس} =$

$$\int_{1}^{0} 2\text{س}(\text{س}^{2}-1)^{\frac{1}{3}}\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{س}^{2}-1 \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{2\text{س}} = \text{دس}$$

$$\int_{1}^{0} \cancel{2\text{س}}\,\text{ص}^{\frac{1}{3}}\,\frac{\text{دص}}{\cancel{2\text{س}}} = \int_{1}^{0} \text{ص}^{\frac{1}{3}}\,\text{دص}$$

$$\left[\frac{\text{ص}^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right]_{1}^{0} = \left[\frac{\text{ص}^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_{1}^{0}$$

$$\frac{3}{4}\left[\sqrt[3]{(\text{س}^{2}-1)^{4}}\right]_{1}^{0} = \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{(0-1)^{4}} - \sqrt[3]{(1-1)^{4}}\right)$$

$$\frac{٣}{٤}\left(\sqrt[٣]{١} - \sqrt[٣]{٠}\right)$$

$$\frac{٣}{٤}\left(١ - ٠\right)$$

$$\frac{٣}{٤} \times ١ = \frac{٣}{٤}$$

د) $\int_{١}^{٢} \frac{٢س - ٣}{(س^٢ - ٣س)^٢} \, دس = \int_{١}^{٢} (٢س - ٣)(س^٢ - ٣س)^{-٢} \, . \, دس$

$ص = س^٢ - ٣س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٢س - ٣ \Leftarrow دس = \frac{دص}{٢س - ٣}$

$\int_{١}^{٢} \cancel{(٢س - ٣)} \, ص^{-٢} \times \frac{دص}{\cancel{٢س - ٣}} = \int_{١}^{٢} ص^{-٢} \, دص =$

$\left[\frac{-ص^{-٢+١}}{-٢+١}\right]_{١}^{٢} = \left[\frac{-ص^{-١}}{-١}\right]_{١}^{٢} = \left[\frac{١}{ص}\right]_{١}^{٢}$

$\left[\frac{١}{س^٢ - ٣س}\right]_{١}^{٢} = \frac{١}{٢^٢ - ٣\times٢} - \frac{١}{١^٢ - ٣\times١} = \frac{١}{-٢} - \frac{١}{-٢}$

$= \frac{-١}{٢} + \frac{١}{٢} = صفر$

٤) إذا علمت أن ق(−٨) = ٥، ق(٢٧) = −٦، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-٢}^{٣} ٣س^٢ \, قَ(س^٣) \, دس$

الحل

$ص = س^٣ \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٣س^٢ \Leftarrow دس = \frac{دص}{٣س^٢}$

$\int_{-٢}^{٣} \cancel{٣س^٢} \, قَ(ص) \times \frac{دص}{\cancel{٣س^٢}} = \int_{-٢}^{٣} قَ(ص) \, . \, دص =$

$\left[ق(ص)\right]_{-٢}^{٣} = \left[ق(س^٣)\right]_{-٢}^{٣}$

$ق(٣^٣) - ق((-٢)^٣) = ق(٢٧) - ق(-٨) = -٦ - ٥$

$= -١١$

٥) إذا علمت أن $\int_{٥}^{٢}$ ق(س) ءس = ٣، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-١}^{٢}$ ٨س ق(س^٢ + ١) ءس

الحل

ص = س^٢ + ١ ⇐ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س ⇐ $\frac{ءص}{٢س}$ = ءس

$\int_{-١}^{٢}$ ~~٨س~~ ق(ص) $\frac{ءص}{\cancel{٢س}}$ = $\int_{-١}^{٢}$ ٤ ق(ص) ءص

عندما س = -١ ← ص = (-١)^٢ + ١ = ٢

عندما س = ٢ ← ص = ٢^٢ + ١ = ٥

$\int_{٢}^{٥}$ ٤ ق(ص) ءص = ٤ $\int_{٥}^{٢}$ ق(ص) ءص = ٤ × -٣ = -١٢

---

٦) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

جد قيمة التكامل الآتي:

$\int_{٠}^{٤}$ ٢س $\sqrt{س^٢ + ٩}$ ءس

الحل

$\int_{٠}^{٤}$ ٢س (س^٢ + ٩)$^{\frac{١}{٢}}$. ءس

ص = س^٢ + ٩ ⇐ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س ⇐

$\frac{ءص}{٢س}$ = ءس .

$\int_{٠}^{٤}$ ~~٢س~~ . ص$^{\frac{١}{٢}}$ $\frac{ءص}{\cancel{٢س}}$ = $\int_{٠}^{٤}$ ص$^{\frac{١}{٢}}$. ءص = $\left[\frac{ص^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١} \right]_{٠}^{٤}$ = $\left[\frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} \right]^{٤}$

$\frac{٢}{٣}$ $\left[\sqrt{(س^٢ + ٩)^٣} \right]_{٠}^{٤}$

$\frac{٢}{٣}$ $\left(\sqrt{(٤^٢ + ٩)^٣} - \sqrt{(٠ + ٩)^٣} \right)$

$\frac{٢}{٣}$ (٥^٣ - ٣^٣) = $\frac{٢}{٣}$ (١٢٥ - ٢٧)

= $\frac{٢}{٣}$ × ٩٨ = $\frac{١٩٦}{٣}$