

## أدرب وأحل المسائل

### الأسئلة (1 - 20)

#### الاشتقاق

x أبحث قابلية اشتقاق كل اقتران مما يأتي عند قيمة المعطاة:

(1)  $f(x) = |x-5|$ ,  $x=5$

$$f'(5) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(5+h)-5| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(5) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5-h) - f(5)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(5-h)-5| - 0}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|-h|}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{-h} = 1$$

$f'(5)$  بما أن النهايتين من اليمين واليسار غير متساويتين، فإن  $f$  غير موجودة، أي أن  $f$  غير قابل للاشتقاق عند  $x = 5$

(2)  $f(x) = x^2/5$ ,  $x=0$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h)^2/5 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{5h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{5} = 0$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-h)^2/5 - 0}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{-5h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{-5} = 0$$

$f'(0)$  غير موجودة، إذن  $f$  غير قابل للاشتقاق عند  $x = 0$

(3)  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x^2 - 2x, & x > 1 \end{cases}$ ,  $x=1$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 2(1+h) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 2 - 2h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h - 2) = -2$$

$f'(1)$  غير موجودة، إذن  $f$  غير قابل للاشتقاق عند  $x = 1$

(4)  $f(x) = 3x$ ,  $x=4$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(4+h) - 12}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12 + 3h - 12}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3$$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4-h) - f(4)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(4-h) - 12}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12 - 3h - 12}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h}{-h} = 3$$

$x = 4$  قابل للاشتقاق عند  $f$  غير موجودة، إذن  $f'(4)$

(5)  $f(x) = (x-6)^2/3$ ,  $x=6$

$$f'(6) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(6+h) - f(6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(6+h-6)^2/3 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2/3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{3} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(6+h) - f(6)}{h} = \infty \quad f'(6) = -\infty$$

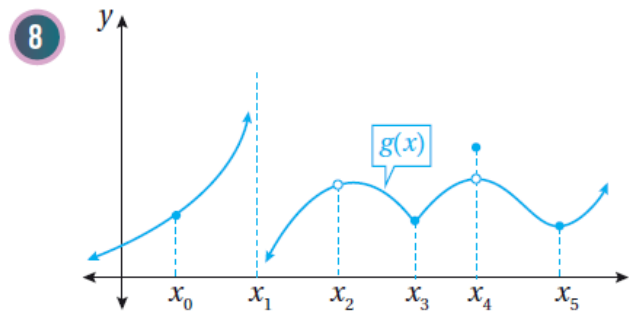
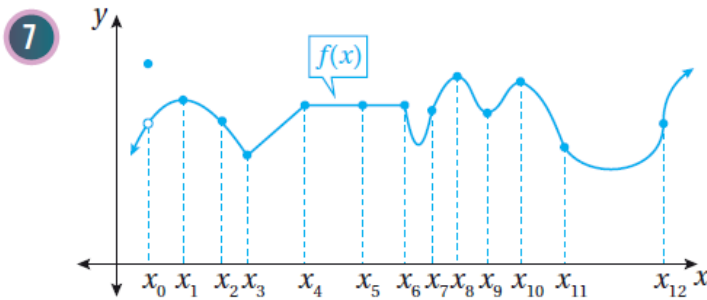
$x = 6$  غير قابل للاشتقاق عند  $f$  غير موجودة، إذن  $f'(6)$

$$(6) f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 4 \\ 3, & x = 4 \end{cases}$$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4+h+1 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+2}{h} = \infty \quad f'(4) = -\infty$$

$f'(4)$  غير موجودة، إذن  $f$  غير قابل للاشتقاق عند  $x = 4$

$x$  أحد قيم للنقاط التي لا يكون عندها كلٌّ اقتران ممّا يأتي قابلاً للاشتقاق، مبرراً إجابتي:



(7) الاقتران  $f$  غير قابل للاشتقاق عندما  $x = x_3, x = x_4, x = x_6$ ؛ لأن لمنحناه رأس حاد أو زاوية عند هذه النقاط.

$x = x_0$  وهو غير قابل للاشتقاق عندما؛ لأنه غير متصل عندها،

$x = x_{12}$  وهو غير قابل للاشتقاق عندما؛ نظراً لوجود مماس رأسي عند هذه النقطة.

(8) الاقتران  $g$  غير قابل للاشتقاق عندما  $x = x_3$ ؛ لأن لمنحناه زاوية عند هذه النقطة.

$x = x_0$  وهو غير قابل للاشتقاق عندما؛ لأنه غير متصل عندها،

$x = x_1, x = x_2, x = x_4$  وهو غير قابل للاشتقاق عندما؛ لأنه غير متصل عندها.

$x$  أحد قيمة (قيم) التي لا يكون عندها كلٌّ اقتران ممّا يأتي قابلاً للاشتقاق:

$$(9) f(x) = x^2 - 8x - 5$$

$f$  اقتران نسبي منحناه متصل وأملس عند جميع نقاطه باستثناء أصفار مقامه،

$$x^2 - 8x - 5 = 0 \rightarrow (x - 5)(x + 1) = 0 \rightarrow x = 5 \text{ or } x = -1$$

$f$  غير متصل عند  $x = -1$ ،  $x = 5$  إذن غير قابل للاشتقاق عندها.

$$(10) f(x) = 3x - 63 + 5$$

$$f(x) = 3x - 63 \quad f'(x) = 13(3x - 6) - 23(3) = 1(3x - 6)23$$

غير قابل للاشتقاق  $f$  الحقيقية عدا أصفار مقامها، إذن  $x$  موجودة عند جميع قيم  $f'(x)$  عند  $x = 2$

$$(11) f(x) = |x^2 - 9|$$

$$f(x) = |x^2 - 9| = \begin{cases} 9 - x^2, & -3 < x < 3 \\ x^2 - 9, & x \leq -3 \text{ or } x \geq 3 \end{cases}$$

$x = 3$  نبحث قابلية الاشتقاق عند  $x = -3$  و  $x = 3$

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(3+h)^2 - 9| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2}{h} \\ hf + '(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6 \\ f'(-3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(-3+h)^2 - 9| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h - h^2}{h} \\ hf + '(-3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6 - h) = 6 \end{aligned}$$

بما أن النهايتين من اليمين واليسار غير متساويتين فإن  $f'(3)$  غير موجودة أي أن غير قابل للاشتقاق عند  $x = 3$

$$\begin{aligned} f'(-3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(-3+h)^2 - 9| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h - h^2}{h} \\ hf + '(-3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6 - h) = 6 \end{aligned}$$

بما أن النهايتين من اليمين واليسار غير متساويتين فإن  $f'(-3)$  غير موجودة أي أن غير قابل للاشتقاق عند  $x = -3$

إذن  $f$  غير قابل للاشتقاق عند  $x = -3$ ،  $x = 3$

(12) إذا كان:  $f(x)=x|x|$  ، فأثبت أن  $f'(0)$  موجودة.

$$f(x)=x|x| \quad f'(0)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{0h|h|-0}{h}=\lim_{h \rightarrow 0} |h|=\lim_{h \rightarrow 0} |h|=\lim_{h \rightarrow 0} |h|=\begin{cases} -h, & h < 0 \\ h, & h \geq 0 \end{cases}$$

$$f'(0)=\lim_{h \rightarrow 0} |h|=0$$

$f'(0)$  بما أن النهايتين من اليمين واليسار متساويتان، إذن ( موجودة).

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

(13)  $f(x)=2\sin x - ex$

$f'(x)=2\cos x - ex$

(14)  $f(x)=\ln x^4 - \pi \cos x$

$f'(x)=14x + \pi \sin x$

(15)  $f(x)=\ln(1+x^3) + x^4$

$f(x)=\ln(1+x^3) + x^4 = \ln 1 - \ln x^3 + x^4 = -3\ln x + x^4$   
 $f'(x) = -\frac{3}{x} + 4x^3$

(16)  $f(x)=e^{x+1} + 1$

$f(x)=e^{x+1} + 1 = e \times e^x + 1$   
 $f'(x) = e \times e^x = ex + 1$

(17)  $f(x)=e^x + xe$

$f'(x) = e^x + e - 1$

(18)  $f(x)=\ln(10x^n)$

$f(x)=\ln(10x^n) = \ln 10 - \ln x^n = \ln 10 - n \ln x$   
 $f'(x) = -\frac{n}{x} = -nx$

إذا كان:  $f(x)=\sin(x+12e)$  ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

(19) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران  $f$  عند النقطة  $(\pi, 12e\pi)$ .

$f(x)=\cos x + 12ex$

ميل المماس عند النقطة  $(\pi, 12e\pi)$  :

$$f(\pi) = \cos \pi + 12e\pi = -1 + 12e\pi$$

معادلة المماس عند النقطة  $(\pi, 12e\pi)$  :

$$y - 12e\pi = (-1 + 12e\pi)(x - \pi) \Rightarrow y = (-1 + 12e\pi)x + \pi - \pi^2 e\pi + 12e\pi$$

(20) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران  $f$  عند النقطة  $(\pi, 12e\pi)$ .

بما أن ميل المماس عند النقطة  $(\pi, 12e\pi)$  هو  $-1 + 12e\pi$  ، فإن ميل العمودي على المماس هو:

$$-1 - 1 + 12e\pi = -2 - 2 + e\pi = 22 - e\pi$$

معادلة العمودي على المماس هي:

$$y - 12e\pi = 22 - e\pi(x - \pi) \Rightarrow y = 22 - e\pi x - 2\pi^2 - e\pi + 12e\pi$$