

## أدرب وأحل المسائل

### تكامل اقترانات خاصة

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$(1) \int (e^{2x-3-x}) dx$$

$$\int (e^{2x-3-x}) dx = \int (e^{2x-3-x} \cdot 1/2) dx = 1/2 e^{2x-3-x} + C$$

$$(2) \int (e^{0.5x-3e^{0.5x}}) dx$$

$$\int (e^{0.5x-3e^{0.5x}}) dx = \int (e^{0.5x-3e^{-0.5x}}) dx = 2e^{0.5x} + 6e^{-0.5x} + C$$

$$(3) \int (4\sin 5x - 5\cos 4x) dx$$

$$\int (4\sin 5x - 5\cos 4x) dx = -4/5 \cos 5x - 5/4 \sin 4x + C$$

$$(4) \int (3\sec x \tan x - 25x) dx$$

$$\int (3\sec x \tan x - 25x) dx = 3\sec x - 25 \ln |x| + C$$

$$(5) \int (e^x - 1e^x)^2 dx$$

$$\int (e^x - 1e^x)^2 dx = \int (e^x - 2 + 1e^x) dx = \int (e^x - 2 + e^{-x}) dx = e^x - 2x - e^{-x} + C$$

$$(6) \int (\sin (5-3x) + 2 + 4x^2) dx$$

$$\int (\sin (5-3x) + 2 + 4x^2) dx = -1/3 \cos (5-3x) + 2x + 4/3 x^3 + C$$

$$(7) \int (e^{x+1})^2 dx$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx = \int (e^{2x+2e^{x+1}}) dx = 1/2 e^{2x+2e^{x+1}} + C$$

$$(8) \int (e^{4-x} + \sin (4-x) + \cos (4-x)) dx$$

$$\int (e^{4-x} + \sin (4-x) + \cos (4-x)) dx = -e^{4-x} + \cos (4-x) - \sin (4-x) + C$$

$$(9) \int x^4 - 62x \, dx$$

$$\int x^4 - 62x \, dx = \int (12x - 3x) \, dx = 14x^2 - 3\ln |x| + C$$

$$(10) \int (3\csc^2(3x+2) + 5x) \, dx$$

$$\int (3\csc^2(3x+2) + 5x) \, dx = -\cot(3x+2) + 5\ln |x| + C$$

$$(11) \int e^x + 1e^x \, dx$$

$$\int e^x + 1e^x \, dx = \int (1 + e^{-x}) \, dx = x - e^{-x} + C$$

$$(12) \int e^x e^{x+4} \, dx$$

$$\int e^x e^{x+4} \, dx = \ln |e^{x+4}| + C = \ln(e^{x+4}) + C$$

$$(13) \int \cos 2x \sin x \cos x + 4 \, dx$$

$$\int \cos 2x \sin x \cos x + 4 \, dx = \int \cos 2x \cdot 12 \sin 2x + 4 \, dx = \ln |12 \sin 2x + 4| + C = \ln(12 \sin 2x + 4) + C$$

$$(14) \int dx^{5-x^3}$$

$$\int dx^{5-x^3} = -3 \int -135 - x^3 \, dx = -3 \ln |5 - x^3| + C$$

$$(15) \int 11 - \sin x \, dx$$

$$\int 11 - \sin x \, dx = \int 11 - \sin x \times 1 + \sin x \cdot 1 + \sin x \, dx = \int 1 + \sin x \cdot 1 - \sin^2 x \, dx = \int 1 + \sin x \cos^2 x \, dx = \int (\sec^2 x + \tan x \sec x) \, dx = \tan x + \sec x + C$$

$$(16) \int \sec^2 x (1 + e^x \cos^2 x) \, dx$$

$$\int \sec^2 x (1 + e^x \cos^2 x) \, dx = \int (\sec^2 x + e^x) \, dx = \tan x + e^x + C$$

$$(17) \int (2x - 2x) \, dx$$

$$\int (2x - 2x) \, dx = 2 \ln |x| - 2x \ln 2 + C$$

$$(18) \int \sin 3x \cos 2x \, dx$$

$$\int \sin 3x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 5x + \sin x) \, dx = -\frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos x + C$$

$$\int (2x^3 + 3x^2 + 9x - 1) \, dx \quad (19)$$

$$\frac{1}{2} \int (3x^2 + 9x - 1) \, dx + C = \frac{1}{2} \int (6x^2 + 9x - 1) \, dx = \frac{1}{2} \left( 2x^3 + \frac{9}{2}x^2 - x \right) + C$$

$$\int (x^2 + x + 1) \sqrt{x^2 + 1} \, dx \quad (20)$$

$$\int (x^2 + x + 1) \sqrt{x^2 + 1} \, dx = \int (x^2 + 1) \sqrt{x^2 + 1} \, dx + \int x \sqrt{x^2 + 1} \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + 2x^2) \sqrt{x^2 + 1} \, dx + \frac{1}{2} \int (2x) \sqrt{x^2 + 1} \, dx = \frac{1}{2} \left( x \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}| \right) + \frac{1}{2} (x^2 + 1) \sqrt{x^2 + 1} + C$$

$$\int (\csc x - \cot x) \, dx \quad (21)$$

$$\int (\csc x - \cot x) \, dx = \int (\csc x + \sin x) \, dx = \int \csc x \, dx + \int \sin x \, dx = -\ln |\csc x + \cot x| - \cos x + C$$

$$\int (x^2 + \tan x) \sec x \, dx \quad (22)$$

$$\int (x^2 + \tan x) \sec x \, dx = \int (x^2 \sec x + \tan x \sec x) \, dx = \int x^2 \sec x \, dx + \int \tan x \sec x \, dx = \int x^2 \sec x \, dx + \int \sec^2 x \, dx = \int x^2 \sec x \, dx + \tan x + C$$

$$\int (e^x - e^{-x}) \, dx \quad (23)$$

$$\int (e^x - e^{-x}) \, dx = e^x + e^{-x} + C$$

$$\int (x^2 - 3) \, dx \quad (24)$$

$$\int (x^2 - 3) \, dx = \frac{1}{3} \int (3x^2 - 9) \, dx = \frac{1}{3} \left( x^3 - 9x \right) + C$$

$$\int (x \cos x - 6 \sin x - \sin^2 9 \cos^2 x) \, dx \quad (25)$$

$$\int (x \cos x - 6 \sin x - \sin^2 9 \cos^2 x) \, dx = \int x \cos x \, dx - 6 \int \sin x \, dx - \int \sin^2 9 \cos^2 x \, dx = \left( x \sin x + \cos x \right) + 6 \cos x - \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = x \sin x + \cos x + 6 \cos x - \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx = x \sin x + 7 \cos x - \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C = x \sin x + 7 \cos x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$\int (x^2 - \sin^2 x) \cos^4 x \, dx \quad (26)$$

$$\int (x^2 - \sin^2 x) \cos^4 x \, dx = \int x^2 \cos^4 x \, dx - \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int x^2 \cos^4 x \, dx - \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$$

$$2x + C \int 2x dx = \int 12 \sin(x) dx = \int \cos(x) dx$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx$$

$$= \sin(x) \Big|_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1 - 0 = 1$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx$$

$$= -\cos(x) \Big|_0^{\pi/2} = -\cos(\pi/2) + \cos(0) = 0 + 1 = 1$$

$$\int_0^{\pi/3} \tan^2(x) dx$$

$$= \int_0^{\pi/3} (\sec^2(x) - 1) dx = \int_0^{\pi/3} \sec^2(x) dx - \int_0^{\pi/3} 1 dx = \tan(x) \Big|_0^{\pi/3} - x \Big|_0^{\pi/3} = \tan(\pi/3) - \pi/3 - (0 - 0) = \sqrt{3} - \pi/3$$

$$\int_0^2 \frac{1}{e^{2x} + 1} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{e^{2x} + 1} dx = \int_0^2 \frac{1}{e^{2x} + 1} dx = \int_0^2 \frac{1}{e^{2x} + 1} dx = 4 \ln(e^{2x} + 1) \Big|_0^2 = 4 \ln(e^4 + 1) - 4 \ln(1 + 1) = 4 \ln(e^4 + 1) - 4 \ln(2)$$

$$\int_0^{\pi/6} \sin^3(x) \cos(x) dx$$

$$= \int_0^{\pi/6} \sin^2(x) \sin(x) \cos(x) dx = \int_0^{\pi/6} (1 - \cos^2(x)) \sin(x) \cos(x) dx = \int_0^{\pi/6} \sin(x) \cos(x) dx - \int_0^{\pi/6} \sin(x) \cos^3(x) dx = \frac{1}{2} \sin^2(x) \Big|_0^{\pi/6} - \frac{1}{4} \cos^4(x) \Big|_0^{\pi/6} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot 1\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{16} + \frac{1}{4} = \frac{2}{8} - \frac{3}{16} + \frac{4}{16} = \frac{4 - 3 + 4}{16} = \frac{5}{16}$$

$$\int_0^{\pi/4} (2x + \cot^2(x)) dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} 2x dx + \int_0^{\pi/4} \cot^2(x) dx = x^2 \Big|_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} (\csc^2(x) - 1) dx = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \cot(x) \Big|_0^{\pi/4} - x \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{16} - \cot(\pi/4) + \cot(0) - \pi/4 = \frac{\pi^2}{16} - 1 + \infty - \pi/4$$

$$\int_0^3 (x - 5x) dx$$

$$= \int_0^3 -4x dx = -2x^2 \Big|_0^3 = -2(9) - (-2(0)) = -18$$

$$\int_0^4 (x^2 - 4x + 3) dx$$

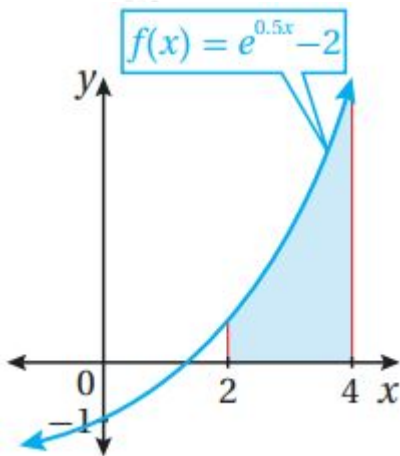
$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & x < 1 \\ -x^2 + 4x - 3, & 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 4x + 3, & x > 3 \end{cases} \\ \int_0^4 (x^2 - 4x + 3) dx &= \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx + \int_3^4 (x^2 - 4x + 3) dx \\ &= (13x^3 - 2x^2 + 3x) \Big|_0^1 + (-13x^3 + 2x^2 - 3x) \Big|_1^3 + (13x^3 - 2x^2 + 3x) \Big|_3^4 \\ &= 13 - 2 + 3 - 0 + (-9 + 18 - 9) - (-13 + 2 - 3) + 643 - 32 + 12 \end{aligned}$$

$$\int_0^4 (x - 3) dx$$

$$\begin{aligned} x - 3 &= \begin{cases} 3 - x, & x \leq 3 \\ x - 3, & x > 3 \end{cases} \\ \int_0^4 (x - 3) dx &= \int_0^3 (3 - x) dx + \int_3^4 (x - 3) dx \\ &= \int_0^3 3 dx - \int_0^3 x dx + \int_3^4 x dx - \int_3^4 3 dx \\ &= 12x \Big|_0^3 - \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^3 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_3^4 - 3x \Big|_3^4 \\ &= 36 - \frac{9}{2} + \frac{16}{2} - \frac{9}{2} - 12 + 9 = 13.2 \end{aligned}$$

(36) إذا كان  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & x < 0 \\ 4 - x, & x \geq 0 \end{cases}$ ، فأجد قيمة:  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ .

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 (x^2 + 4) dx + \int_0^1 (4 - x) dx \\ &= (\frac{1}{3}x^3 + 4x) \Big|_{-1}^0 + (4x - \frac{1}{2}x^2) \Big|_0^1 \\ &= 0 - (-\frac{1}{3} - 4) + 4 - \frac{1}{2} - 0 = 4\frac{7}{6} \end{aligned}$$



(37) أجد مساحة المنطقة المظللة بين المحور  $x$  ومنحنى الاقتران:  $f(x) = e^{0.5x} - 2$  في الشكل المجاور.

$$A = \int_2^4 (e^{0.5x} - 2) dx = (2e^{0.5x} - 2x) \Big|_2^4 = 2e^2 - 8 - (2e - 4) = 2e^2 - 2e - 4$$

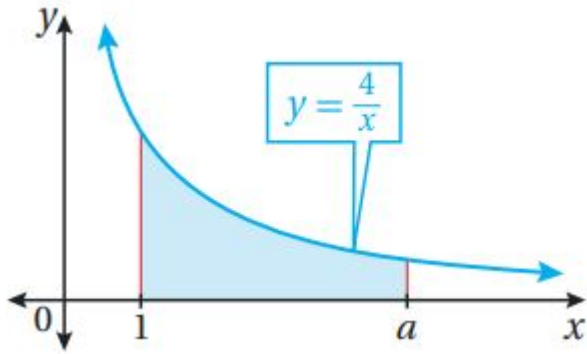
(38) إذا كان:  $\int \frac{1}{2ax^2 + 1} dx = \ln |x| + a$ ، فأجد قيمة الثابت  $a$ ، حيث:  $a > 0$ .

$$\begin{aligned} a &= 4a^3a - 2a - \ln|x| \Big|_a^3a = 6a + \ln a \\ \int \frac{1}{2ax^2 + 1} dx &= \int \frac{1}{a(2x^2 + \frac{1}{a})} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{2x^2 + \frac{1}{a}} dx \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{2(x^2 + \frac{1}{2a})} dx = \frac{1}{2a} \int \frac{1}{x^2 + \frac{1}{2a}} dx \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{2a}} \right| + C \end{aligned}$$

(39) أثبت أن:  $\int \frac{20axx^2 + a^2}{x^2 + a^2} dx = \ln|x| + a$ ، حيث:  $a \neq 0$ .

$$\int \frac{20axx^2 + a^2}{x^2 + a^2} dx = 12 \int \frac{0axx^2 + a^2}{x^2 + a^2} dx = 12 \ln|x| + a$$

$$22 = \ln 2)) = 12 \ln$$



(40) يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران:  $f(x) = 4/x$ . إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران  $f(x)$ ، والمحور  $x$ ، والمستقيمين:  $x = a, x = 1$  هي 10 وحدات مربعة، فأجد قيمة الثابت  $a$ .

$$a = 53 \Rightarrow a = e^{52} \quad a = 10 \Rightarrow \ln a \Rightarrow 4 \ln 1 = 4 \ln a - 4 \ln |x| \quad |1a = 4 \ln A = \int 1a 4x dx = 4 \ln$$

(41) إذا كان:  $\int \cos(12x + \pi) dx = f(x)$ ، وكان:  $f(\pi) = 3$ ، فأجد  $f(0)$ .

$$3\pi^2(12\pi + \pi) + C = 2 \sin(12x + \pi) + C \quad f(\pi) = 2 \sin(12\pi + \pi) + C = 2 \sin \pi + C = 0 + C = C = 3$$

$$\pi + 5 = 5(12\pi + \pi) + 5 \Rightarrow f(0) = 2 \sin + C = -2 + C \Rightarrow C = 5 \Rightarrow f(x) = 2 \sin$$

(42) إذا كان:  $\int \sin(\pi^2 - 2x) dx = y$ ، وكان:  $y = 1$  عندما  $x = \pi/4$ ، فأثبت أنه يمكن كتابة  $y$  في صورة:  $2x^2 y = 1 + \sin$ .

$$(\pi^2 - 2x) + C \quad y|x = \pi/4 = 12(\pi^2 - 2x) - 2 + C = 12 \cos(\pi^2 - 2x) dx = -\cos y = \int \sin$$

$$2x + 1(\pi^2 - 2x) + 12 \Rightarrow y = 12 \sin(\pi^2 - \pi^2) + C = 12 + C \Rightarrow C = 12 \Rightarrow y = 12 \cos$$

$$2x^2 \Rightarrow y = 1 + \sin$$

(43) يمثل الاقتران:  $dy/dx = e^{2x} - 2e^{-x}$  ميل المماس لمنحنى الاقتران  $y$ . أجد قاعدة الاقتران  $y$  إذا علمت أن منحناه يمر بالنقطة  $(0, 1)$ .

$$y = \int (e^{2x} - 2e^{-x}) dx = 1/2 e^{2x} + 2e^{-x} + C \quad y|x = 0 = 1/2 + 2 + C = 5/2 + C \Rightarrow C = -3/2$$

$$\Rightarrow y = 1/2 e^{2x} + 2e^{-x} - 3/2$$

(44) إذا كان:  $\int (9 + \sin^3 x) dx = a\pi + b\pi/9$ ، فأجد قيمة الثابتين النسبيين:  $a$  و  $b$ .

$$\pi^3 = 8\pi^3 - \pi + 13 \cos 3x \quad | \pi^9 \pi = 9\pi - 13 \cos 3x dx = (9x - 13 \cos \pi^9 \pi (9 + \sin^3$$

$$+ 13 + 16 = 8\pi + 12 \Rightarrow 8\pi + 12 = a\pi + b$$

ونظراً لأن  $a$  و  $b$  نسبيان، فلا يوجد حل لهذه المعادلة سوى أن يكون:  $a = 8, b = 12$

(45) يمثل الاقتران:  $x f'(x) = \cos^2$  ميل المماس لمنحنى الاقتران  $f(x)$ . أجد قاعدة

الاقتران  $f$  إذا علمت أن يمر بنقطة الأصل.

$$2x) + Cf(0) = 12(0 + 12\sin^2 x) dx = 12(x + 12\sin x) dx = 12 \int (1 + \cos f(x)) = \int \cos 2x$$

$$2x(0) + C(0) = 0 + C \Rightarrow C = 0 \quad f(x) = 12x + 14\sin x$$

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:  $v(t) = e^{-2t}$ ، حيث  $t$  الزمن بالثواني، و  $v$  سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم هو  $3m$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

(46) موقع الجسيم بعد  $t$  ثانية.

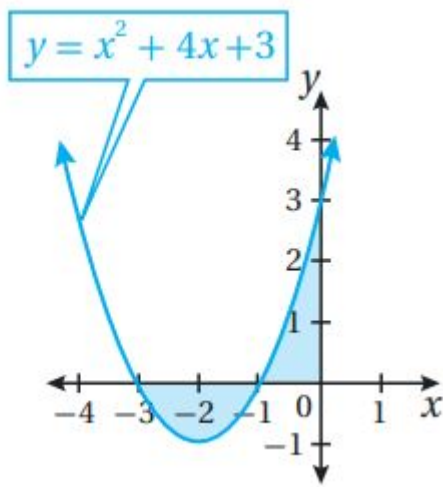
$$s(t) = \int v(t) dt = \int e^{-2t} dt = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C \quad s(0) = -\frac{1}{2} + C = 3 \Rightarrow C = 7.5$$

$$s(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + 7.5$$

(47) موقع الجسيم بعد 100 ثانية.

$$s(100) = -\frac{1}{2}e^{-200} + 7.5 \approx 7.5m$$

48



بيئة: في دراسة تناولت أحد أنواع الحيوانات المهددة بالانقراض في غابة، تبين أن عدد حيوانات هذا النوع ( $P(t)$ ) يتغير بمعدل:  $P'(t) = -0.51e^{-0.03t}$ ، حيث  $t$  الزمن بالسنوات بعد بدء الدراسة:

(48) أجد قاعدة الاقتران ( $P(t)$ ) عند أي زمن  $t$ ، علماً بأن عدد حيوانات هذا النوع عند بدء الدراسة هو 500 حيوان.

$$P(t) = \int -0.51e^{-0.03t} dt = -\frac{0.51}{-0.03}e^{-0.03t} + C = 17e^{-0.03t} + C$$

$$P(0) = 17 + C = 500 \Rightarrow C = 483 \quad P(t) = 17e^{-0.03t} + 483$$

(49) أجد عدد الحيوانات بعد 10 سنوات من بدء الدراسة، مقرباً إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

$$P(10)=17e^{-0.3}+483\approx 496$$



طب: في تجربة لدواء جديد أعطي لمريض لديه ورم حميد، حجمه  $30\text{cm}^3$ ، تبين أن حجم الورم بعد  $t$  يوماً من بدء التجربة يتغير بمعدل:  $P'(t)=0.15-0.9e^{0.006t}$  مقيساً بوحدة  $(\text{cm}^3/\text{day})$ :

(50) أجد قاعدة حجم الورم بعد  $t$  يوماً من بدء التجربة.

$$P(t)=\int(0.15-0.9e^{0.006t})dt=0.15t-0.90.006e^{0.006t}+C=0.15t-150e^{0.006t}+C$$

$$P(0)=-150+C=30\Rightarrow C=180$$

$$P(t)=0.15t-150e^{0.006t}+180$$

(51) أجد حجم الورم بعد 10 أيام من بدء التجربة.

$$P(10)=1.5-150e^{0.06}+180\approx 22.2\text{cm}^3$$