

## أدرب وأحل المسائل

### تكامل اقترانات خاصة

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$(1) \int (e^{2x-3} - x) dx$$

$$\int (e^{2x-3} - x) dx = \int (e^{2x-3} - x^{1/2}) dx = \frac{1}{2}e^{2x-3} - \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

$$(2) \int (e^{0.5x} - 3e^{-0.5x}) dx$$

$$\int (e^{0.5x} - 3e^{-0.5x}) dx = \int (e^{0.5x} - 3e^{-0.5x}) dx = 2e^{0.5x} + 6e^{-0.5x} + C$$

$$(3) \int (4\sin 5x - 5\cos 4x) dx$$

$$\int (4\sin 5x - 5\cos 4x) dx = -\frac{4}{5}\cos 5x - \frac{5}{4}\sin 4x + C$$

$$(4) \int (3\sec x \tan x - 25x) dx$$

$$\int (3\sec x \tan x - 25x) dx = 3\sec x - \frac{25}{2}x^2 + C$$

$$(5) \int (e^x - 1)e^{2x} dx$$

$$\int (e^x - 1)e^{2x} dx = \int (e^{3x} - e^{2x}) dx = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$$(6) \int (\sin (5-3x) + 2 + 4x^2) dx$$

$$\int (\sin (5-3x) + 2 + 4x^2) dx = -\frac{1}{3}\cos (5-3x) + 2x + \frac{4}{3}x^3 + C$$

$$(7) \int (e^x + 1)^2 dx$$

$$\int (e^x + 1)^2 dx = \int (e^{2x} + 2e^x + 1) dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + C$$

$$(8) \int (e^{4-x} + \sin (4-x) + \cos (4-x)) dx$$

$$\int (e^{4-x} + \sin (4-x) + \cos (4-x)) dx = -e^{4-x} - \cos (4-x) + \sin (4-x) + C$$

(9)  $\int x^4 - 62x \, dx$

$$\int x^4 - 62x \, dx = \int (12x - 3x) \, dx = 14x^2 - 3\ln |x| + C$$

(10)  $\int (3\csc^2(3x+2) + 5x) \, dx$

$$\int (3\csc^2(3x+2) + 5x) \, dx = -\cot(3x+2) + 5\ln |x| + C$$

(11)  $\int e^x + 1e^x \, dx$

$$\int e^x + 1e^x \, dx = \int (1 + e^{-x}) \, dx = x - e^{-x} + C$$

(12)  $\int e^x e^{x+4} \, dx$

$$\int e^x e^{x+4} \, dx = \ln |e^{x+4}| + C = \ln(e^{x+4}) + C$$

(13)  $\int \cos 2x \sin x \cos x + 4 \, dx$

$$\int \cos 2x \sin x \cos x + 4 \, dx = \int \cos 2x \frac{1}{2} \sin 2x + 4 \, dx = \ln |12 \sin 2x + 4| + C = \ln(12 \sin 2x + 4) + C$$

(14)  $\int dx^{5-x^3}$

$$\int dx^{5-x^3} = -3 \int -135 - x^3 \, dx = -3 \ln |5 - x^3| + C$$

(15)  $\int 11 - \sin x \, dx$

$$\int 11 - \sin x \, dx = \int 11 - \sin x \times 1 + \sin x \frac{1}{1 + \sin x} \, dx = \int 1 + \sin x \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} \, dx = \int (1 + \sin x \cos^2 x) \, dx = \int (\sec^2 x + \tan x \sec x) \, dx = \tan x + \sec x + C$$

(16)  $\int \sec^2 x (1 + e^x \cos^2 x) \, dx$

$$\int \sec^2 x (1 + e^x \cos^2 x) \, dx = \int (\sec^2 x + e^x) \, dx = \tan x + e^x + C$$

(17)  $\int (2x - 2x) \, dx$

$$\int (2x - 2x) \, dx = 2 \ln |x| - 2x \ln 2 + C$$

(18)  $\int \sin 3x \cos 2x \, dx$

$$\int \sin 3x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 5x + \sin x) \, dx = -\frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos x + C$$

$$(2x+3)(3x^2+9x-1) \, dx \quad (19) \int$$

$$\int (3x^2+9x-1) \, dx + C = \frac{1}{3} \int (6x+9)(3x^2+9x-1) \, dx = \frac{1}{3} \int (6x+9)(3x^2+9x-1) \, dx = \frac{1}{3} \ln | \dots |$$

$$(x^2+x+1)(x^2+1) \, dx \quad (20) \int$$

$$\int (x^2+x+1)(x^2+1) \, dx = \int (x^2+1)(x^2+1+xx^2+1) \, dx = \int (1+12x^2)(x^2+1) \, dx = x \int (x^2+1) + C + 12 \ln | \dots |$$

$$(x) \, dx \quad (21) \int (x \csc x + (\sin^2 x \sin 2 \cos + 1)) \int$$

$$\int (x - cx) \, dx = -\cot x + \sin x \csc x + \cot x \, dx = \int (\csc^2 x \csc x + \sin^2 x \sin 2 \cos + 1) \int x + C - \cos \csc$$

$$(x)^2 \, dx \quad (22) \int (2x + \tan \sec) \int$$

$$\int (x \tan x + 2 \sec x) \, dx = \int (\sec^2 x + \tan^2 x \tan x + 2 \sec x)^2 \, dx = \int (\sec^2 x + \tan \sec) \int x - x + C + 2 \sec x - 1) \, dx = 2 \tan x \tan x + 2 \sec x - 1) \, dx = \int (2 \sec^2 x + \sec^2 2n$$

$$(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}) \, dx \quad (23) \int$$

$$(e^x + e^{-x}) + C = \int (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}) \, dx = \ln | \dots |$$

$$(x^2 x^3 - 3) \, dx \quad (24) \int$$

$$\int (x^3 - 3) \, dx + C = \frac{1}{3} \int (3x^2 x^3 - 3) \, dx = \frac{1}{3} \ln | \dots |$$

$$(x) \, dx \quad (25) \int (5x \cos x - 6 \sin x - \sin^2 9 \cos^2) \int$$

$$\int (5x \cos x - 6 \sin x - (1 - \cos^2 x)) \, dx = \int (9 \cos^2 x \cos x - 6 \sin x - \sin^2 9 \cos^2) \int 2x) \, dx = \int (5 + 2x^2) - 1 - 3 \sin x) \, dx = \int (10(1 + \cos x \cos x - 1 - 6 \sin = \int (10 \cos^2 2x + 32 \cos^2 x) \, dx = 4x + 52 \sin^2 x - 3 \sin^2 x) \, dx = \int (4 + 5 \cos^2 x - 1 - 3 \sin^2 5 \cos 2x + C$$

$$(x) \, dx \quad (26) \int (x - \sin^4 \cos^4) \int$$

$$\int (x - \sin^2 x) \, dx = \int (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx = \int (\cos^2 x - \sin^4 \cos^4) \int$$

$$2x + C \int 2x dx = \int 12 \sin x dx = \int \cos x dx$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx \quad \int_0^{\pi/2} \sin x dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1 - 0 = 1$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = -\cos(\pi/2) + \cos(0) = 0 + 1 = 1$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = -(-1) + 1 = 2$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan^2 x dx$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan^2 x dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = (\tan(\pi/3) - \pi/3) - (\tan(\pi/6) - \pi/6) = (\sqrt{3} - \pi/3) - (1/3 - \pi/6) = \sqrt{3} - \pi/3 - 1/3 + \pi/6 = \sqrt{3} - 1/3 - \pi/6$$

$$\int_1^e \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$\int_1^e \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x \Big|_1^e = \arctan(e) - \arctan(1) = \arctan(e) - \pi/4$$

$$\int_0^{\pi/6} \sin^3 x \cos x dx$$

$$\int_0^{\pi/6} \sin^3 x \cos x dx = \int_0^{\pi/6} \sin^2 x \sin x \cos x dx = \int_0^{\pi/6} (1 - \sin^2 x) \sin x \cos x dx = \int_0^{\pi/6} (\sin x \cos x - \sin^3 x \cos x) dx = \frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{4} \sin^4 x \Big|_0^{\pi/6} = (\frac{1}{2} \sin^2(\pi/6) - \frac{1}{4} \sin^4(\pi/6)) - (0 - 0) = (\frac{1}{2} (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} (\frac{1}{2})^4) = (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16}) = (\frac{1}{8} - \frac{1}{64}) = \frac{7}{64}$$

$$\int_0^{\pi/4} \cot^2 x dx$$

$$\int_0^{\pi/4} \cot^2 x dx = \int_0^{\pi/4} (\csc^2 x - 1) dx = -\cot x - x \Big|_0^{\pi/4} = (-\cot(\pi/4) - \pi/4) - (-\cot(0) - 0) = (-1 - \pi/4) - (-\infty - 0) = -1 - \pi/4 + \infty$$

$$\int_0^3 (x-5) dx$$

$$\int_0^3 (x-5) dx = \frac{1}{2} x^2 - 5x \Big|_0^3 = (\frac{1}{2} (3)^2 - 5(3)) - (0 - 0) = (\frac{9}{2} - 15) = -\frac{21}{2}$$

$$\int_0^4 (x^2 - 4x + 3) dx$$

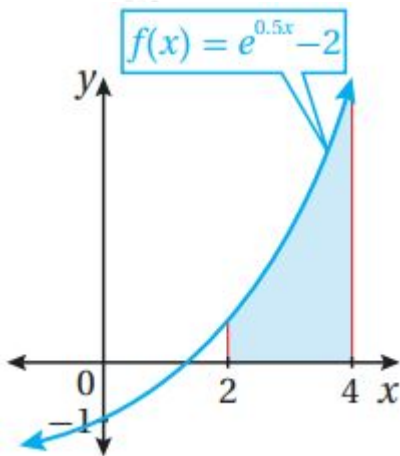
$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & x < 1 \\ -x^2 + 4x - 3, & 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 4x + 3, & x > 3 \end{cases} \\ \int_0^4 (x^2 - 4x + 3) dx &= \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx + \int_3^4 (x^2 - 4x + 3) dx \\ &= (13x^3 - 2x^2 + 3x) \Big|_0^1 + (-13x^3 + 2x^2 - 3x) \Big|_1^3 + (13x^3 - 2x^2 + 3x) \Big|_3^4 \\ &= 13 - 2 + 3 - 0 + (-9 + 18 - 9) - (-13 + 2 - 3) + 643 - 32 + 12 \end{aligned}$$

$$\int_0^4 (x - 3) dx$$

$$\begin{aligned} x - 3 &= \begin{cases} 3 - x, & x \leq 3 \\ x - 3, & x > 3 \end{cases} \\ \int_0^4 (x - 3) dx &= \int_0^3 (3 - x) dx + \int_3^4 (x - 3) dx \\ &= \int_0^3 3 dx - \int_0^3 x dx + \int_3^4 x dx - \int_3^4 3 dx \\ &= 12x \Big|_0^3 - \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^3 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_3^4 - 3x \Big|_3^4 \\ &= 36 - \frac{9}{2} + \frac{16}{2} - \frac{9}{2} - 12 + 9 = 132 \end{aligned}$$

(36) إذا كان  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & x < 0 \\ 4 - x, & x \geq 0 \end{cases}$ ، فأجد قيمة:  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ .

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 (x^2 + 4) dx + \int_0^1 (4 - x) dx \\ &= (\frac{1}{3}x^3 + 4x) \Big|_{-1}^0 + (4x - \frac{1}{2}x^2) \Big|_0^1 \\ &= 0 - (-\frac{1}{3} - 4) + 4 - \frac{1}{2} - 0 = 4\frac{7}{6} \end{aligned}$$



(37) أجد مساحة المنطقة المظللة بين المحور  $x$  ومنحنى الاقتران:  $f(x) = e^{0.5x} - 2$  في الشكل المجاور.

$$A = \int_2^4 (e^{0.5x} - 2) dx = (2e^{0.5x} - 2x) \Big|_2^4 = 2e^2 - 8 - (2e - 4) = 2e^2 - 2e - 4$$

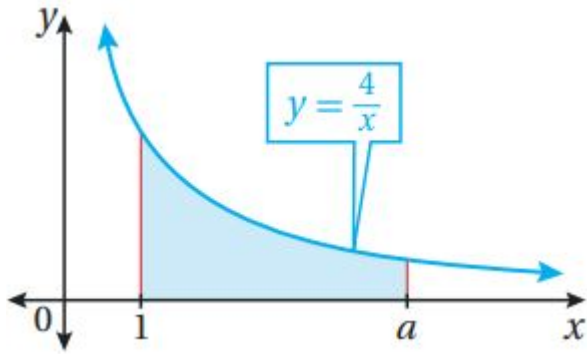
(38) إذا كان:  $\int \frac{1}{2ax^2 + 1} dx = \ln |x| + a$ ، فأجد قيمة الثابت  $a$ ، حيث:  $a > 0$ .

$$\begin{aligned} a &= 4a^3a - 2a - \ln|x| \Big|_a^3a = 6a + \ln a \\ \int \frac{1}{2ax^2 + 1} dx &= \int \frac{1}{a(2x^2 + \frac{1}{a})} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{2x^2 + \frac{1}{a}} dx \\ &= \frac{1}{a} \left( \frac{1}{\sqrt{2/a}} \ln \left| \frac{\sqrt{2/a} x + \frac{1}{2a}}{\sqrt{2/a} x - \frac{1}{2a}} \right| \right) \Big|_a^3a \\ &\Rightarrow a = 14 \ln 34a = \ln 12 - \ln 12 \Rightarrow 4a = \ln 3 = \ln 3 \Rightarrow 4a + \ln + \ln \end{aligned}$$

(39) أثبت أن:  $\int \frac{20axx^2 + a^2}{x^2 + a^2} dx = \ln |x| + a$ ، حيث:  $a \neq 0$ .

$$\int \frac{a(2axx^2 + a^2)}{x^2 + a^2} dx = 12 \int \frac{0axx^2 + a^2}{x^2 + a^2} dx = 12 \ln |x| + a$$

$$22 = \ln 2)) = 12 \ln$$



(40) يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران:  $f(x) = 4/x$ . إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران  $f(x)$ ، والمحور  $x$ ، والمستقيمين:  $x = a, x = 1$  هي 10 وحدات مربعة، فأجد قيمة الثابت  $a$ .

$$a = 53 \Rightarrow a = e^{52} \quad a = 10 \Rightarrow \ln a \Rightarrow 4 \ln 1 = 4 \ln a - 4 \ln |x| \quad |1a = 4 \ln A = \int_1^a 4/x dx = 4 \ln$$

(41) إذا كان:  $\int \cos(12x + \pi) dx = f(x)$ ، وكان:  $f(\pi) = 3$ ، فأجد  $f(0)$ .

$$3\pi^2(12\pi + \pi) + C = 2 \sin(12x + \pi) + C \quad f(\pi) = 2 \sin(12\pi + \pi) + C = 2 \sin \pi + C = 0 + C = C = 3$$

$$\pi + 5 = 5(12\pi + \pi) + 5 \Rightarrow f(0) = 2 \sin + C = -2 + C \Rightarrow C = 5 \Rightarrow f(x) = 2 \sin$$

(42) إذا كان:  $\int \sin(\pi^2 - 2x) dx = y$ ، وكان:  $y = 1$  عندما  $x = \pi/4$ ، فأثبت أنه يمكن كتابة  $y$  في صورة:  $2x^2 y = 1 + \sin$ .

$$(\pi^2 - 2x) + C \quad y|x = \pi/4 = 12(\pi^2 - 2x) - 2 + C = 12 \cos(\pi^2 - 2x) dx = -\cos y = \int \sin$$

$$2x + 1(\pi^2 - 2x) + 12 \Rightarrow y = 12 \sin(\pi^2 - \pi^2) + C = 12 + C \Rightarrow C = 12 \Rightarrow y = 12 \cos$$

$$2x^2 \Rightarrow y = 1 + \sin$$

(43) يمثل الاقتران:  $dy/dx = e^{2x} - 2e^{-x}$  ميل المماس لمنحنى الاقتران  $y$ . أجد قاعدة الاقتران  $y$  إذا علمت أن منحناه يمر بالنقطة  $(0, 1)$ .

$$y = \int (e^{2x} - 2e^{-x}) dx = 1/2 e^{2x} + 2e^{-x} + C \quad y|x = 0 = 1/2 + 2 + C = 5/2 + C \Rightarrow C = -3/2$$

$$\Rightarrow y = 1/2 e^{2x} + 2e^{-x} - 3/2$$

(44) إذا كان:  $\int (9 + \sin f(3x)) dx = a\pi + b\pi/9$ ، فأجد قيمة الثابتين النسبيين:  $a$  و  $b$ .

$$\pi^3 = 8\pi^3 - \pi + 13 \cos 3x \quad | \pi^9 \pi = 9\pi - 13 \cos 3x dx = (9x - 13 \cos \pi^9 \pi (9 + \sin f$$

$$+ 13 + 16 = 8\pi + 12 \Rightarrow 8\pi + 12 = a\pi + b$$

ونظراً لأن  $a$  و  $b$  نسبيان، فلا يوجد حل لهذه المعادلة سوى أن يكون:  $a = 8, b = 12$

(45) يمثل الاقتران:  $x f'(x) = \cos^2$  ميل المماس لمنحنى الاقتران  $f(x)$ . أجد قاعدة

الاقتران  $f$  إذا علمت أن يمر بنقطة الأصل.

$$2x) + Cf(0) = 12(0 + 12\sin^2 x) dx = 12(x + 12\sin x) dx = 12 \int (1 + \cos f(x)) = \int \cos^2 2x) + C0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$$

$$f(x) = 12x + 14\sin x$$

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:  $v(t) = e^{-2t}$ ، حيث  $t$  الزمن بالثواني، و  $v$  سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم هو  $3m$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

(46) موقع الجسيم بعد  $t$  ثانية.

$$s(t) = \int v(t) dt = \int e^{-2t} dt = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C$$

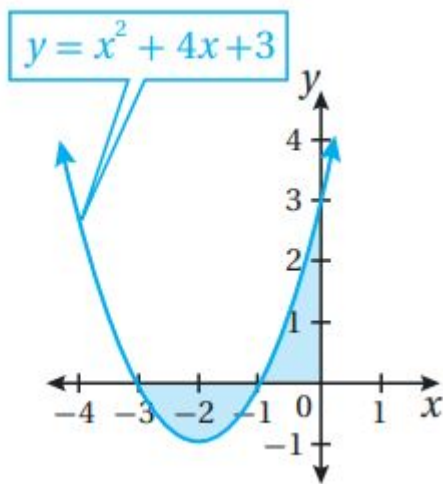
$$s(0) = -\frac{1}{2}e^{-2 \cdot 0} + C = -\frac{1}{2} + C = 3 \Rightarrow C = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$s(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{7}{2}$$

(47) موقع الجسيم بعد 100 ثانية.

$$s(100) = -\frac{1}{2}e^{-200} + \frac{7}{2} \approx 3.5m$$

48



بيئة: في دراسة تناولت أحد أنواع الحيوانات المهددة بالانقراض في غابة، تبين أن عدد حيوانات هذا النوع ( $P(t)$ ) يتغير بمعدل:  $P'(t) = -0.51e^{-0.03t}$ ، حيث  $t$  الزمن بالسنوات بعد بدء الدراسة:

(48) أجد قاعدة الاقتران ( $P(t)$ ) عند أي زمن  $t$ ، علماً بأن عدد حيوانات هذا النوع عند بدء الدراسة هو 500 حيوان.

$$P(t) = \int -0.51e^{-0.03t} dt = -\frac{0.51}{-0.03}e^{-0.03t} + C = 17e^{-0.03t} + C$$

$$P(0) = 17e^{-0.03 \cdot 0} + C = 17 + C = 500 \Rightarrow C = 483$$

$$P(t) = 17e^{-0.03t} + 483$$

(49) أجد عدد الحيوانات بعد 10 سنوات من بدء الدراسة، مقرباً إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

$$P(10)=17e^{-0.3}+483\approx 496$$



طب: في تجربة لدواء جديد أعطي لمريض لديه ورم حميد، حجمه  $30\text{cm}^3$ ، تبين أن حجم الورم بعد  $t$  يوماً من بدء التجربة يتغير بمعدل:  $P'(t)=0.15-0.9e^{0.006t}$  مقيساً بوحدة  $(\text{cm}^3/\text{day})$ :

(50) أجد قاعدة حجم الورم بعد  $t$  يوماً من بدء التجربة.

$$P(t)=\int(0.15-0.9e^{0.006t})dt=0.15t-0.90.006e^{0.006t}+C=0.15t-150e^{0.006t}+C$$

$$P(0)=-150+C=30\Rightarrow C=180$$

$$P(t)=0.15t-150e^{0.006t}+180$$

(51) أجد حجم الورم بعد 10 أيام من بدء التجربة.

$$P(10)=1.5-150e^{0.06}+180\approx 22.2\text{cm}^3$$