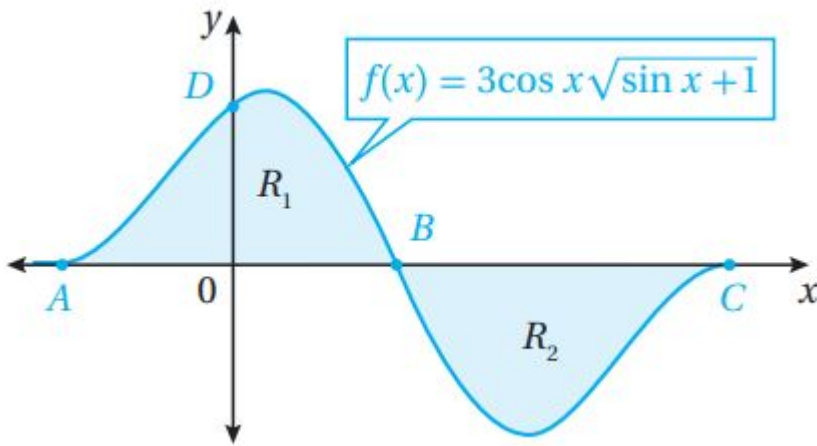


مهارات التفكير العليا

التكامل بالتعويض



تبرير: إذا كان الشكل المجاور
بمثل منحنى الاقتران:
 $f(x) = 3\cos x \sqrt{\sin x + 1}$ ، فأجيب
عن الأسئلة الآتية تبعاً:

(40) أجد إحداثي كل من النقاط: A, B, C, D.

$$x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow 3\cos x = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

يوجد عدد لا نهائي من الحلول لهاتين المعادلتين، نريد أصغر حلين موجبين (الإحداثي
x للنقطتين B, C) وأكبر حل سالب (الإحداثي x للنقطة A).

أصغر حلين موجبين هما: $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$ ، بوضع $n = 0$

$$(B(\frac{\pi}{2}, 0), C(\frac{3\pi}{2}, 0) \Rightarrow$$

أكبر حل سالب هو: $x = -\pi$ ، بوضع $n = -1$

$$(A(-\pi, 0) \Rightarrow$$

أما النقطة D فإحداثياها هما: $(D(0, f(0))) = (0, 3)$

(41) أجد مساحة المنطقة المظللة.

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$$

$$u = 1 + \sin x \Rightarrow du = \cos x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$A = \int_{0}^2 3\cos x \sqrt{u} \frac{du}{\cos x} + \int_{0}^{-2} 3\cos x \sqrt{u} \frac{du}{\cos x}$$

$$A = 3 \int_{0}^2 \sqrt{u} du + 3 \int_{0}^{-2} \sqrt{u} du = 3 \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_0^2 + 3 \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_0^{-2}$$

$$A = 2 \left[\frac{2}{3} (2)^{3/2} - 0 \right] + 2 \left[\frac{2}{3} (-2)^{3/2} - 0 \right] = \frac{4}{3} (2\sqrt{2}) - \frac{4}{3} (2\sqrt{2}) = 0$$

(42) أبين أن للمنطقة R_1 والمنطقة R_2 المساحة نفسها.

من حل السؤال السابق نجد أن:

$$\int_0^{\pi/2} 3u du = 42A(R_2) = -\int_{\pi/2}^{\pi} 2(3\cos x + \sin x) dx = \int_{\pi/2}^{\pi} 2(3\cos x - \sin x) dx = -\int_0^{\pi/2} 2(3\cos u - \sin u) du = 42 \Rightarrow A(R_1) = A(R_2)$$

(43) تحدد: أجد قيمة: $\int_1^{16} (1+x^3)^{-4} dx$.

$$u = 1 + x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2} = \frac{du}{3(u-1)^{2/3}} \\ \int_1^{16} (1+x^3)^{-4} dx = \int_1^{16} \frac{du}{3(u-1)^{2/3}} = \frac{1}{3} \int_1^{16} (u-1)^{-2/3} du = \frac{1}{3} \int_0^{15} u^{-2/3} du = \frac{1}{3} \left[3u^{1/3} \right]_0^{15} = \frac{1}{3} (3 \cdot 15^{1/3}) = 15^{1/3}$$

(44) تبرير: إذا كان f اقتراناً متصلاً، فأثبت أن: $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$.

$$u = \pi - x \Rightarrow du = -dx \Rightarrow dx = -du \\ \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_{\pi}^{\pi/2} f(\sin(\pi - u)) (-du) = \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin u) du \\ \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin(\pi/2 - x)) dx = \int_{\pi/2}^0 f(\sin u) (-du) = \int_0^{\pi/2} f(\sin u) du$$

(45) تبرير: إذا كان a, b عددين حقيقيين موجبين، فأثبت أن: $\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx$.

bbb

تحدد: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(46) $\int_1^e (\ln x)^2 dx$

bbb

(47) $\int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x) dx$

bbb

(48) $\int_0^1 (1+x^2)^{-3/2} dx$

bbb