أتدرب وأحل المسائل

التكامل بالأجزاء

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(xdx (1x+1)cos)∫

xdx=(x−∫sinxdx=(x+1)sinx∫(x+1)cosxdxdu=dxv=sinu=x+1dv=cos x+Cx+cosx+1)sin

(xex/2dx (2∫

u=xdv=e12xdxdu=dxv=2e12x∫xe12xdx=2xe12x−∫2e12xdx=2xe1 2x−4e12x+C

(2x2−1)e−xdx (3)∫

u=2x2−1dv=e−xdxdu=4xdxv=−e−x∫(2x2−1)e−xdx=−(2x2−1)e− x+∫4xe−xdxu=4xdv=e−xdxdu=4dxv=−e−x∫(2x2−1)e−xdx=−(2x 2−1)e−x−4xe−x+∫4e−xdx=−(2x2−1)e−x−4xe−x−4e−x+C=−e− x(2x2+4x+3)+C

(xdx (4ln∫

x−∫xdx=12xlnxdv=12dxdu=1xdxv=12x∫12lnxdxu=lnxdx=∫12lnln∫ x−12x+C12dx=12xln

(xdx (5xcosxsin∫

2x2xdxdu=12dxv=−12cos2xdxu=12xdv=sinxdx=∫12xsinxcosxsin∫ 2x+C2x+18sin2xdx=−14xcos2x+∫14cosxdx=−14xcosxcos∫xsin

(xdx (6xtanxsec∫

xdx=xsx−∫secxdx=xsecxtanx∫xsecxdxdu=dxv=secxtanu=xdv=sec xxsecxtanx+secx−∫sec2xdx=xsecx+tanxsecx+tanx×secx−∫secec x|+Cx+tan|secx−lnxdx=xsec+tan (xdx (7xsin2∫

xdx=−x∫xcsc2xdxdu=dxv=−cotxdxu=xdv=csc2xdx=∫xcsc2xsin2∫ x|+C|sinx+lnxdx=−xcotxsinx+∫cosxdx=−xcotx+∫cotxcot

(xx3dx (8ln∫

x−∫−12xdx=−12x−2lnxdv=x−3dxdu=1xdxv=−12x−2∫x−3lnu=ln x2x2x−14x−2+C=−lnx+∫12x−3dx=−12x−2lnx−21xdx=−12x−2ln −14x2+C

(xdx (9xtan2x2sec2∫

xxdxdu=4xdxv=12tan2xtanu=2x2dv=sec2

ملاحظة: لإيجاد v استخدمنا طريقة التعويض، حيث: xx,dx=dysec2y=tan ومنه:

xx∫2x2sec2x=∫ydy=12y2=12tan2xydysec2xdx=∫sec2xtanv=∫sec2 x−1)dxxdx=(sec2xdxu=2xdv=tan2x)−∫2xtan2xdx=2x2(12tan2tan xx−x)−∫2(tanx−(2x(tanxdx=x2tan2xtanx−x∫2x2sec2du=2dxv=tan xx−2xtanx−x)dx=x2tan2xcosx+2x2+2∫(sinx−2xtan−x)dx)=x2tan2 x|+C|cosx+x2−2lnx−2xtanx|−x2+C=x2tan2|cos+2x2−2ln

(x−2)8−xdx (10)∫

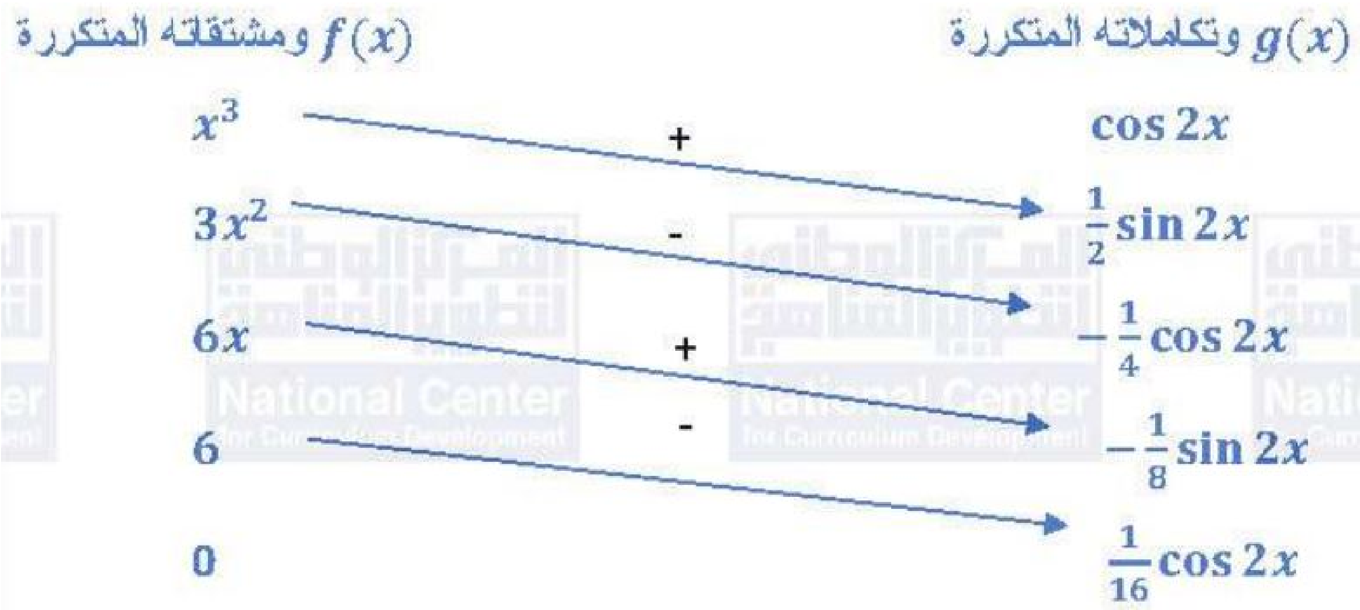
هذه المسألة يمكن حلها بالتعويض، حيث: (u=8−x أو u=8−x)

وحلها بالأجزاء كالآتي:

u=x−2dv=(8−x)12dxdu=dxv=−23(8−x)32∫(x−2)8−xdx=(x−2)×−23(8−x)32−∫−23(8−x)32dx=−23(x−2)(8−x)32−415(8−x) 52+C

(2xdx (11x3cos∫

بالأجزاء 3 مرات، لنستخدم طريقة الجدول:



2x+C2x−38cos2x−34xsin2x+34x2cos2xdx=12x3sinx3cos∫

(x6xdx (12∫

6∫x6−xdx=−x6−xx6xdx=∫x6−xdxu=xdv=6−xdxdu=dxv=−6−xln∫
6)2+C6−6−x(ln6dx=−x6−xln6+∫6−xlnln

(2xdx (13e−xsin∫

2xdx=−12e−xc2x∫e−xsin2xdxdu=−e−xdxv=−12cosu=e−xdv=sin
2xdxdu=−12e−xdxv=12sin2xdxu=12e−xdv=cos2x−∫12e−xcosos
2xdx∫e−xsi2x−14∫e−xsin2x−14e−xsin2xdx=−12e−xcos2x∫e−xsin
2xdx2x)+C54∫e−xsin2x+2cos2xdx=−14e−x(sin2xdx+14∫e−xsinn
2x)2x+2cos2xdx=−15e−x(sin2x)+C∫e−xsin2x+2cos=−14e−x(sin
+C

(xdx (14sinxlncos∫

xsinxlnxdx=sinsinxlnx∫cosxdxv=sinxsinxdxdu=cosxdv=cossinu=ln
x+Cx−sinsinxlnxdx=sin−∫cos

((1+ex)dx (15exln∫

(1+ex)(1+ex)dx=exln(1+ex)dv=exdxdu=ex1+exdxv=ex∫exlnu=ln
(1+ex)−∫(ex+−(1+ex)−∫(ex+−11+ex)dx=exln−∫e2x1+exdx=exln

(1+e−x)+C(1+ex)−ex−lne−xe−x+1)dx=exln

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(xdx (160π/2excos∫

x)|0x+cosxdx=12ex(sinx)+C⇒∫0π2excosx+cosxdx=12ex(sinexcos∫
π2=12eπ2−12e0=12eπ2−12

(x2dx (171eln∫

x|1xdx=2xlnxdv=dxdu=2xdxv=x∫1e2lnxdxu=2lnx2dx=∫1e2ln1eln∫
1−2e+2=2e−0−2e+2=2e−2lnx|1e−2x|1e=2elne−∫1e2dx=2xln

((xex)dx (1812ln∫

xdx+∫12xdxx+x)dx=∫12lnex)dx=∫12(lnx+ln(xex)dx=∫12(ln12ln∫

نجد بطريقة ∫xdx12ln الأجزاء:

x|12−x|12=x|12−∫12dx=xlnxdx=xlnxdv=dxdu=1xdxv=x∫12lnu=ln
(xex)dx2−1∫12xdx=12x2|12=42−12=32⇒∫12ln1−2+1=2ln2−ln2ln
2+122−1+32=2ln=2ln

(3xdx (19π/12π/9xsec2∫

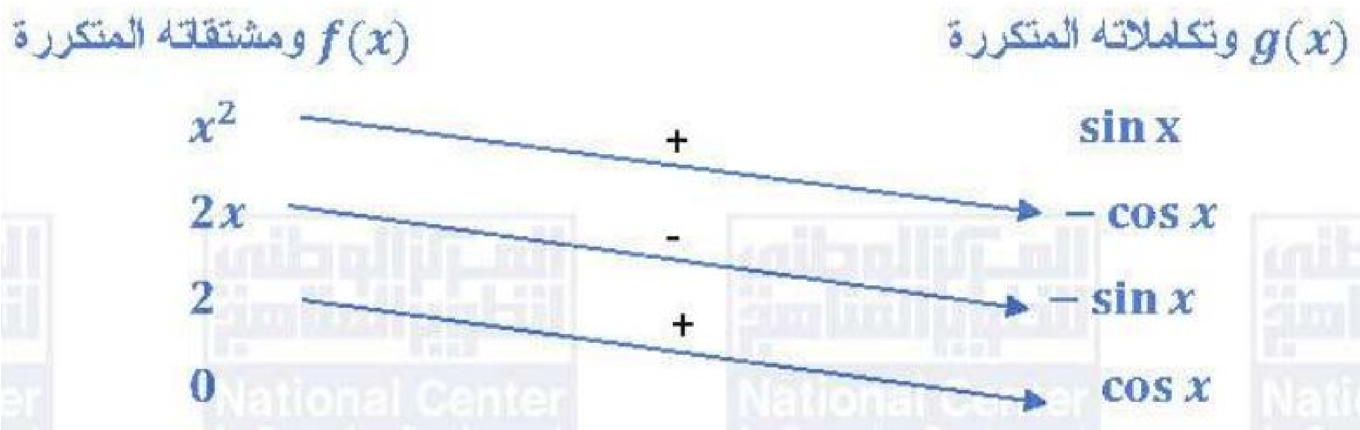
3x|π13xdx=13xtan3x∫π12π9xsec23xdxdu=dxv=13tanu=xdv=sec2
3xdx=3xcos3x|π12π9−∫π12π913sin3xdx=13xtan2π9−∫π12π913tan
πcosπ4+19lnπ3−π36tan3x|π12π9=π27tancos3x|π12π9+19ln13xtan
1212−19lnπ4=π327−π36+19lncos3−19ln

(xdx (201ex4ln∫

x|1e−∫1e15x4dxxdx=15x5lnxdv=x4dxdu=dxxv=15x5∫1ex4lnu=ln
x|1e−125x5|1e=15e5−0−125e5+125=4e5+125=15x5ln

(xdx (210π/2x2sin∫

نجد ∫xdxx2sin باستخدام طريقة الجدول:



x+2xdx=−x2cosx+C⇒∫0π2x2sinx+2cosx+2xsinxdx=−x2cosx2sin∫x|0π2=π−2x+2cosxsin

(01x(e−2x+e−x)dx (22∫

u=xdv=(e−2x+e−x)dxdu=dxv=−12e−2x−e−x∫01x(e−2x+e−x)dx=−12xe−2x−xe−x|01−∫01(−12e−2x−e−x)dx=−12xe−2x−xe−x|01−(14e−2x+e−x)|01=−12e−2−e−1−14e−2−e−1+14+1=−34e−2−2e−1+54

(01xex(1+x)2dx (23∫

u=xexdv=(1+x)−2dxdu=(xex+ex)dx=ex(x+1)dxv=−(1+x)−1∫01xex(1+x)2dx=−xex(1+x)−1|01+∫01ex(x+1)(1+x)dx=−xex1+x|01+ex|01=−e2+e−1=12e−1

(01x3xdx (24∫

3dx=x3xl3|01−∫013xln3∫01x3xdx=x3xlnu=xdv=3xdxdu=dxv=3xln3)23−2(ln3)2=3ln3)2+1(ln3−3(ln3)2|01=3ln3|01−3x(lnn

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(x3ex2dx (25∫

y=x2⇒dx=dy2x∫x3ex2dx=∫x3eydy2x=∫12x2eydy=∫12yeydyu=12ydv=eydydu=12dyv=ey∫12yeydy=12yey−∫12eydy=12yey−12ey+C∫x3ex2dx=12x2ex2−12ex2+C

(~~x~~)dx (26~~(lncos∫~~

ydy∫eydy=∫eycosx)dx=∫xcos(lnx⇒dydx=1x⇒dx=xdy,x=ey∫cosy=ln x)+lnx+coslnx(sinx)dx=12eln(lny)+C⇒∫cosy+cosydy=12ey(sinycos x)+Clnx+coslnC=12x(sin

(x2dx (27x3sin∫

ydyydy=∫12ysinydy2x=∫12x2sinx2dx=∫x3siny=x2⇒dx=dy2x∫x3sin yy+∫12cosydy=−12ycosy∫12ysinydydu=12dyv=−cosu=12ydv=sin x2+Cx2+12sinx2dx=−12x2cosy+C∫x3siny+12sindy=−12ycos

(2xdx (28xsinecos∫

x=∫−2yx)dy−sinxcos2xdx=∫ey(2sinxsinx∫ecosx⇒dx=ay−siny=cos eydyu=−2ydv=eydydu=−2dyv=ey∫−2yeydy=−2yey+∫2eydy=−2y x+Cx+2ecosxecos2xdx=−2cosxsiney+2ey+C⇒∫ecos

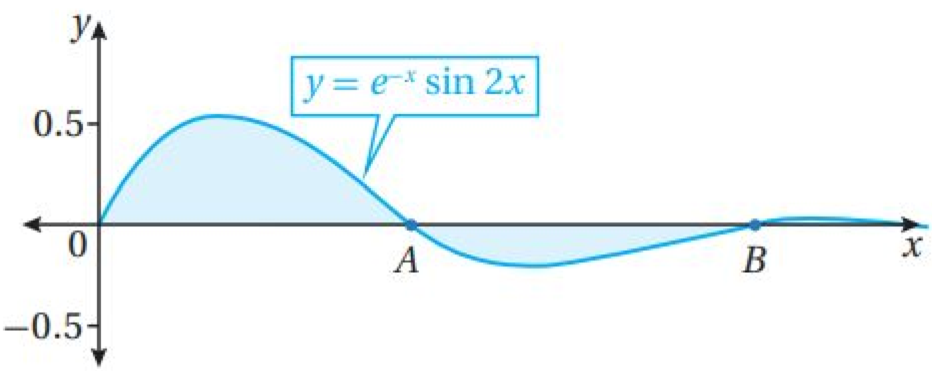
(xdx (29sin∫

x=∫−2yx)dy−sinxcos2xdx=∫ey(2sinxsinx∫ecosx⇒dx=ay−siny=cos eydyu=−2ydv=eydydu=−2dyv=ey∫−2yeydy=−2yey+∫2eydy=−2y x+Cx+2ecosxecos2xdx=−2cosxsiney+2ey+C⇒∫ecos

(x3ex2(x2+1)2dx (30∫

y=x2⇒dydx=2x⇒dx=dy2x∫x3ex2(x2+1)2dx=∫x3ey(y+1)2dy2x=∫1 2x2ey(y+1)2dy=∫12yey(y+1)2dyu=12yeydv=1(y+1)2dydu=12(ye y+ey)dy=12ey(y+1)dyv=−1y+1∫12yey(y+1)2dy=−yey2(y+1)+∫1 y+1×12ey(y+1)dy=−yey2(y+1)+12∫eydy=−yey2(y+1)+12ey+C∫ x3ex2(x2+1)2dx=−x2ex22(x2+1)+12ex2+C=ex22(x2+1)+C

إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران: ،2xf(x)=e−xsin حيث: x≥0 فأجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:



(31) أجد إحداثيي كل من النقطة A، والنقطة B.

الإحداثيان x للنقطتين A وB هما أصغر حلين موجبين للمعادلة:

(2x=0⇒2x=π,2π,…⇒x=π2,π,…⇒A(π2,0),B(π,02x=0⇒sinf(x)=e−xsin

(32) أجد مساحة المنطقة المظللة.

(2xdx2xdx+(−∫π2πe−xsinA=∫0π2e−xsin

للبسيط سنجد أولاً: ∫2xdxe−xsin (التكامل غير المحدود)

2xdx=−12e−xc2x∫e−xsin2xdxdu=−e−xdxv=−12cosu=e−xdv=sin
2xdxdu=−12e−xdxv=12sin2xdxu=12e−xdv=cos2x−∫12e−xcosos
2xdx∫e−xsi2x−14∫e−xsin2x−14e−xsin2xdx=−12e−xcos2x∫e−xsin
2xdx2x54∫e−xsin2x−14e−xsin2xdx=−12e−xcos2xdx+14∫e−xsinn
2x+sin2xdx=−15e−x(2cos2x+C∫e−xsin2x−14e−xsin=−12e−xcos
2x)|π2π2x+sin2x)|0π2+15e−x(2cos2x+sin2x)+C⇒A=−15e−x(2cos
(=25e−π2+25+25e−π+25e−π2=25(1+e−π+2e−π2

(33) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:
v(t)=te−t/2، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجسيم الحركة من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية.

s(t)=∫te−t2dtu=tdv=e−t2dtdu=dtv=−2e−t2s(t)=−2te−t2−∫−2e−
t2dt=−2te−t2−4e−t2+Cs(0)=0−4+C0=0−4+C⇒C=4⇒s(t)=−2te−t
2−4e−t2+4

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران f(x)، ونقطة يمر بها منحنى y=f(x).
أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران f(x):

(x;(0,2) (34f′(x)=(x+2)sin

xf(x)=−(x+2)cosxdxdu=dxv=−cosxdxu=x+2dv=sinf(x)=∫(x+2)sin
x+Cf(0)=−2+0+C2=−2+0+C⇒C=4f(xx+sinxdx=−(x+2)cosx+∫cos
x+4x+sin)=−(x+2)cos

(f′(x)=2xe−x;(0,3) (35

f(x)=∫2xe−xdxu=2xdv=e−xdxdu=2dxv=−e−xf(x)=−2xe−x+∫2e−
xdx=−2xe−x−2e−x+Cf(0)=0−2+C3=−2+C⇒C=5f(x)=−2xe−x−2e
−x+5

(36) دورة تدريبية: تقدمت دعاء لدورة تدريبية متقدمة في الطباعة. إذا كان عدد الكلمات التي تطبعها دعاء في الدقيقة يزداد بمعدل: N′(t)=(t+6)e−0.25t، حيث N(t) عدد الكلمات التي تطبعها دعاء في الدقيقة بعد t أسبوعاً من التحاقها بالدورة، فأجد N(t)، علماً بأن دعاء كانت تطبع 40 كلمة في الدقيقة عند بدء الدورة.

N(t)=∫(t+6)e−0.25tdtu=t+6dv=e−0.25tdtdu=dtv=−4e−0.25tN(t)
=−4(t+6)e−0.25t+∫4e−0.25tdt=−4(t+6)e−0.25t−16e−0.25t+CN(
0)=−24−16+C40=−24−16+C⇒C=80⇒N(t)=−4(t+6)e−0.25t−16e
−0.25t+80