

أتحقق من فهمي

الضرب القياسي

الضرب القياسي للمتجهات في الفضاء

أتحقق من فهمي صفحة (144):

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي:

$$(a) \quad \vec{v} = \langle 4, 8, -3 \rangle, \vec{w} = \langle -3, 7, 2 \rangle$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 4(-3) + 8(7) - 3(2) = -12 + 56 - 6 = 38$$

$$(b) \quad \vec{m} = -3\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}, \vec{n} = -12\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$$

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = -3(-12) + 5(6) - 1(-8) = 36 + 30 + 8 = 74$$

الزاوية بين متجهين في الفضاء

أتحقق من فهمي صفحة (146):

أجد قياس الزاوية θ بين المتجه \vec{u} والمتجه \vec{w} في كل مما يأتي، مقرباً الناتج إلى أقرب عشر درجة:

$$(a) \quad \vec{u} = -3\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}, \vec{w} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = -3(4) + 5(2) - 4(-3) = -12 + 10 + 12 = 10$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{9 + 25 + 16} = \sqrt{50} \quad |\vec{w}| = \sqrt{16 + 4 + 9} = \sqrt{29}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| |\vec{w}|} = \frac{10}{\sqrt{50} \sqrt{29}} \approx \frac{10}{39.0} \approx 0.256$$

$$\theta = \cos^{-1}(0.256) \approx 75.2^\circ$$

$$(b) \quad \vec{u} = \langle 2, -10, 6 \rangle, \vec{w} = \langle -3, 15, -9 \rangle$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 2(-3) - 10(15) + 6(-9) = -6 - 150 - 54 = -210$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{4 + 100 + 36} = \sqrt{140} \quad |\vec{w}| = \sqrt{9 + 225 + 81} = \sqrt{315}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| |\vec{w}|} = \frac{-210}{\sqrt{140} \sqrt{315}} \approx \frac{-210}{210} = -1$$

$$\theta = \cos^{-1}(-1) = 180^\circ$$

الزاوية بين مستقيمين في الفضاء

أتحقق من فهمي صفحة (147):

إذا كانت: $r \rightarrow = (3-21) + t(2-5-1)$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 ، وكانت: $r \rightarrow = (530) + u(10-3)$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، فأجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم l_1 والمستقيم l_2 إلى أقرب درجة.

اتجاه المستقيم l_1 هو $v \rightarrow = (2, -5, -1)$ واتجاه المستقيم l_2 هو $u \rightarrow = (1, 0, -3)$

$$v \rightarrow \cdot u \rightarrow = 1(2) + 0(-5) - 3(-1) = 2 + 3 = 5$$

$$|v \rightarrow| = \sqrt{4 + 25 + 1} = \sqrt{30}$$

$$|u \rightarrow| = \sqrt{1 + 0 + 9} = \sqrt{10}$$

$$\cos \theta = \frac{v \rightarrow \cdot u \rightarrow}{|v \rightarrow| |u \rightarrow|} = \frac{5}{\sqrt{30} \sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{300}} = \frac{5}{10\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \approx 73^\circ$$

إذن، قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين l_1, l_2 هو 73° تقريباً.

إيجاد مساحة المثلث باستعمال المتجهات

أتحقق من فهمي صفحة (149):

أجد مساحة المثلث EFG الذي إحداثيات رؤوسه هي:

$$E(2, 1, -1), F(5, 1, 7), G(6, -3, 1)$$

$$GF \rightarrow = (-1, 4, 6) \quad |GF \rightarrow| = \sqrt{1 + 16 + 36} = \sqrt{53}$$

$$GE \rightarrow = (-4, 4, -2) \quad |GE \rightarrow| = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6$$

$$GF \rightarrow \cdot GE \rightarrow = -1(-4) + 4(4) + 6(-2) = 4 + 16 - 12 = 8$$

ليكن قياس الزاوية EGF هو θ ، إذن:

$$\cos \theta = \frac{GF \rightarrow \cdot GE \rightarrow}{|GF \rightarrow| |GE \rightarrow|} = \frac{8}{\sqrt{53} \times 6} = \frac{4}{3\sqrt{53}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{4}{3\sqrt{53}} \right) \approx 79.4^\circ$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{3\sqrt{53}} \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{468}} = \sqrt{\frac{452}{468}} = \sqrt{\frac{113}{117}} \approx 0.97$$

$$A = \frac{1}{2} |GF \rightarrow| |GE \rightarrow| \sin \theta = \frac{1}{2} \times \sqrt{53} \times 6 \times 0.97 \approx 15.5$$

ويمكن إيجاد $\theta \sin$ من معرفتنا بقيمة $\theta \cos$ من دون إيجاد زاوية θ كما يأتي:

$$\theta = 1 - (4353)^2 = 477 - 16477 = 461353 \Rightarrow A = 12 \times 653 \times 4\theta = 4353 \Rightarrow \sin \cos 61353 = 461 \approx 21.5$$

مسقط العمود على مستقيم من نقطة خارجه

أتحقق من فهمي صفحة (151):

ارتفاع الهرم هو طول العمود المرسوم من الرأس E إلى قاعدته وهو EM،
حيث M هي نقطة منتصف أحد قطري القاعدة
المربعة: $(M=(1+92,1-72,-1+32))=(5,-3,1)$

$$EM=(-3)^2+(-6)^2+(-6)^2=9$$

حجم الهرم يساوي ثلث مساحة قاعدته في ارتفاعه.

$$V=\frac{1}{3}(72)^2(9)=72(3)=216$$

إذن، حجم الهرم يساوي 216 وحدة مربعة.