اختبار نهاية الوحدة

المتجهات

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

(1) إذا كانت $A(-3,4,9), B(5,-2,3)$، فإن الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ هي:

a) $\langle 2,2,-12\rangle$

b) $\langle -6,-6,8\rangle$

c) $\langle 1,1,-6\rangle$

d) $\langle -6,8,-6\rangle$

(2) إذا كان: $\vec{v}=\langle 2,c,-5\rangle$، وكان: $|\vec{v}|=35$، فإن c تساوي:

a) 4

b) -3,5

c) 15

d) -4,4

(3) إذا كان PQR مستقيماً، حيث: $\overrightarrow{PQ}=a, PQ:QR=3:1$، فإن التعبير عن المتجه $\overrightarrow{RQ}$ بدلالة $\overrightarrow{a}$ هو:

a) $13\overrightarrow{a}$

b) $14\overrightarrow{a}$

c) $-13\overrightarrow{a}$

d) $-14\overrightarrow{a}$

(4) النقطة الواقعة على المستقيم الذي له المعادلة المتجهة:
$\vec{r}=\langle 4,-2,5\rangle+t\langle -2,1,3\rangle$، والإحداثي y لها 10 هي:

a) (18,10,28)

b) (28,10,35)

c) (8,10,20−)

d) (20,10,41−)

(5) إذا كان: ⟨v→=⟨2,−2,5⟩، وكان: ⟨w→=⟨−3,4,6⟩، فإن 3v→−2w→ يساوي:

a) ⟨0,2,3⟩

b) ⟨14,3−,12⟩

c) ⟨8−,16−,13⟩

d) ⟨13,16,8−⟩

(6) إذا كان قياس الزاوية بين a→,b→ هو 60°، وكان: a→·b→=30، وكان: |a→|=10، فإن مقدار b→ هو:

a) 3

b) 5

c) 6

d) 24

(7) إذا كان: ⟨u→=⟨−4,2,a⟩، وكان: ⟨v→=⟨2,b,5⟩، وكان: v→∥u→ فإن قيمة a هي:

a) -10

b) -5

c) -1

d) 5

(8) إذا كان المتجه ⟨u→=⟨3−6,5−⟩، والمتجه: ⟨v→=⟨q41−6⟩ متعامدين، فإن قيمة q

هي:

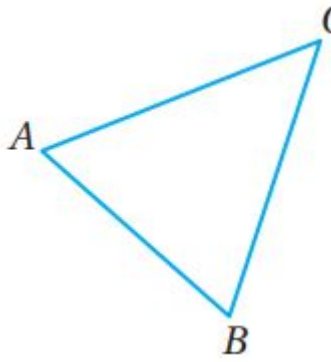
a) 0

b) 8

c) 10

d) 18

(9) في المثلث المجاور، إذا كان: $\hat{AB}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$، وكان: $\hat{BC}=-2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$، فأجد قياس الزاوية ABC إلى أقرب عشر درجة.



$\overrightarrow{BA}=\langle -3,1,-2\rangle \Rightarrow |\overrightarrow{BA}|=9+1+4=14 \quad \overrightarrow{BC}=\langle -2,4,3\rangle \Rightarrow |\overrightarrow{BC}|=4+16+9$
$(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|=29 \quad \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-3(-2)+1(4)-2(3)=4 \quad \theta=\cos^{-1}$
$\circ(414\times29)\approx78.5)=\cos^{-1}$

(10) إذا وقعت النقاط: $E(2,0,4),F(h,5,1),G(3,10,k)$ على مستقيم واحد، فما قيمة كل من h وk؟

E,F,G تقع على استقامة واحدة، إذن $\overrightarrow{FG}\parallel\overrightarrow{EF}$، ومنه:

$\langle h-2,5,-3\rangle\parallel\langle 3-h,5,k-1\rangle$

إذن، يوجد عدد حقيقي مثل c بحيث:

$\langle h-2,5,-3\rangle=c\langle 3-h,5,k-1\rangle \Rightarrow 5c=5\Rightarrow c=1 \quad h-2=(3-h)c\Rightarrow h-2=3-h\Rightarrow h=$
$52 \quad (k-1)c=-3\Rightarrow k-1=-3\Rightarrow k=-2$

(11) إذا كانت $A(3,-2,4),B(1,-5,6),C(-4,5,-1)$، وكانت النقطة D تقع على المستقيم المار بالنقطة A والنقطة B، وكانت الزاوية CDA قائمة، فأجد إحداثيات النقطة D.

$$AB\rightarrow=\langle -2,-3,2\rangle r\rightarrow=\langle 3,-2,4\rangle+t\langle -2,-3,2\rangle\Rightarrow OD\rightarrow=\langle 3-2t,-2-3t,4+2t\rangle$$
$$CD\rightarrow=\langle 3-2t,-2-3t,4+2t\rangle-\langle -4,5,-1\rangle=\langle 7-2t,-7-3t,5+2t\rangle CD\rightarrow\perp AB$$
$$\rightarrow\Rightarrow CD\rightarrow\cdot AB\rightarrow=0\Rightarrow -2(7-2t)-3(-7-3t)+2(5+2t)=0\Rightarrow t=-1\Rightarrow OD\rightarrow=\langle 3$$
$$(+2,-2+3,4-2\rangle=\langle 5,1,2\rangle\Rightarrow D(5,1,2$$

إذا كانت: $(r\rightarrow=(-2-59)+\lambda(-507$ معادلة متجهة للمستقيم $l1$، وكانت:
$(r\rightarrow=(-3-175)+\mu(24-1$ معادلة متجهة للمستقيم $l2$، فأجيب عن السؤالين الأتيين تباعاً:

(12) أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين: $l1,l2$.

لإيجاد نقطة التقاطع نساوي $r\rightarrow$ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيمة الوسيطين λ,μ:

$$2-5\lambda,-5,9+7\lambda\rangle=\langle -3+2\mu,-17+4\mu,5-\mu\rangle-17+4\mu=-5\Rightarrow\mu=3-2-5\lambda-\rangle$$
$$=-3+2\mu\Rightarrow\lambda=-1$$

وهاتان القيمتان تحققان المعادلة الثالثة الآتية:

$$9+7\lambda=5-\mu 9+7(-1)=5-32=2$$

نجد نقطة تقاطعهما بتعويض $\lambda=-1$ في معادلة $l1$، وهي النقطة $(5,2-,3)$

(13) أجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين:$l1,l2$.

اتجاه المستقيم $l1: v\rightarrow=\langle -5,0,7$

اتجاه المستقيم $l2: u\rightarrow=\langle 2,4,-1$

$$v\rightarrow\cdot u\rightarrow=-5(2)+0+7(-1)=-17|v\rightarrow|=25+0+49=74|u\rightarrow|=4+16+1=21$$

لتكن θ قياس الزاوية بين $v\rightarrow,u\rightarrow$ إذن:

$$\theta=\cos-1(v\rightarrow\cdot u\rightarrow|v\rightarrow||u\rightarrow|)=\cos-1(-1774\times 21)\approx 115.5^\circ$$

فيكون قياس الزاوية الحادة بين $l1,l2$ هو α حيث: $\alpha=180^\circ-115.5^\circ=64.5^\circ$

إذا كانت $A(1,4,-5),B(3,0,2),C(-4,1,3$، فأجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعاً:

(14) أكتب معادلة متجهة للمستقيم AB↔.

⟨AB→=⟨2,−4,7⟩r→=⟨1,4,−5⟩+t⟨2,−4,7

(15) أكتب معادلة متجهة للمستقيم AC↔.

⟨AC→=⟨−5,−3,8⟩r→=⟨1,4,−5⟩+u⟨−5,−3,8

(16) إذا كان قياس ∠BAC=θ، فأثبت أن: θ=587138cos.

AB→|=4+16+49=69|AC→|=25+9+64=98AB→·AC→=2(−5)−4(−3)|
θ=AB→·AC→|AB→||AC→|=5869×98=5869×49×2=587+7(8)=58cos
138

(17) أجد مساحة المثلث ABC.

(ABC)=12|AB→|×|AC→θ=1−33646762=33987138Areaθ=1−cos2sin
θ=12×7138×33987138=33982|sin

(18) إذا كانت: ⟨r→=⟨3,−25,13⟩+t⟨4,5,−1 معادلة متجهة للمستقيم ا، وكانت النقطة V تقع على المستقيم ا، حيث: OV⊥ا¯ فما إحداثيات النقطة V؟

V نقطة على ا إذن يكون متجه موقعها: ⟨OV→=⟨3+4t,−25+5t,13−t

اتجاه ا هو: ⟨w→=⟨4,5,−1

وبما أن OV⊥ا¯ إذن يكون:0=w→·OV→ ومنه:

3+4t)+5(−25+5t)−1(13−t)=0⇒t=3⇒OV→=⟨3+12,−25+15,13−3⟩)4
(⇒V(15,−10,10

يمر المستقيم ا1 بالنقطتين: E وF، ويمر المستقيم ا2 بالنقطتين: G وH. أحدد إذا كان هذان المستقيمان متوازيين أو متخالفين أو متقاطعين، ثم أجد إحداثيات نقطة التقاطع إذا كانا متقاطعين في كل مما يأتي:

(E(7,6,34),F(5,9,16),G(1,21,−2),H(−13,−14,19) (19

⟨EF→=⟨−2,3,−18⟩GH→=⟨−14,−35,21

نلاحظ أنه لا يوجد عدد حقيقي k يحقق $\overrightarrow{EF}=k\overrightarrow{GH}$ كون النسب بين الإحداثيات المتناظرة غير متساوية، فالمستقيمان غير متوازيين:

معادلة l1 هي: $\overrightarrow{r}=\langle 7,6,34\rangle+t\langle -2,3,-18$

معادلة l2 هي: $\overrightarrow{r}=\langle 1,21,-2\rangle+u\langle -14,-35,21$

نساوي $\overrightarrow{r}$ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيم t,u لمعرفة نقطة التقاطع:

$7-2t,6+3t,34-18t\rangle=\langle 1-14u,21-35u,-2+21u\rangle 7-2t=1-14u\Rightarrow -2t+\rangle$
$14u=-6.....(1)6+3t=21-35u\Rightarrow 3t+35u=15.....(2)34-$
$18t=-2+21u\Rightarrow 18t+21u=36.....(3)(1)\times 9+(3):u=-649,t=1573(1$
$57)+35(-649)=2.14\neq 15$

هذه القيم لا تحقق المعادلة (2)، إذن المستقيمان ليسا متقاطعين ولا متوازيين، فهما متخالفان.

$(E(-3,-5,16),F(12,0,1),G(7,2,11),H(1,-22,23)$ (20

$\langle \overrightarrow{EF}=\langle 15,5,-15\rangle \overrightarrow{GH}=\langle -6,-24,12$

بما أن النسب بين الإحداثيات المتناظرة غير ثابتة، فإنه لا يوجد عدد حقيقي k حيث $\overrightarrow{EF}=k\overrightarrow{GH}$ وهذا يعني أن المستقيمين غير متوازيين.

بتبسيط اتجاه $\overrightarrow{EF}$ بقسمته على 5 تكون معادلته: $\overrightarrow{r}=\langle -3,-5,16\rangle+t\langle 3,1,-3$

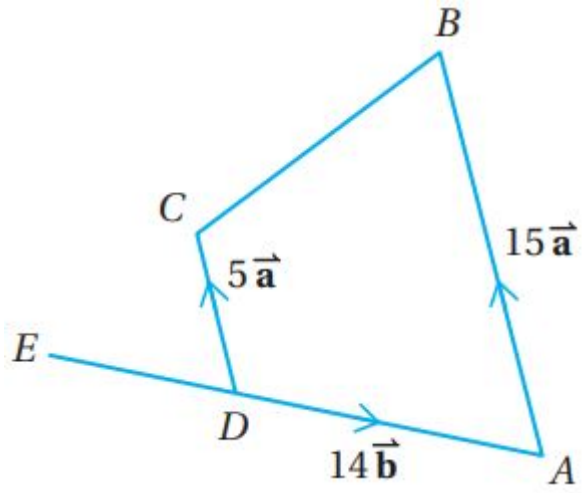
بتبسيط اتجاه $\overrightarrow{GH}$ بقسمته على 6 تكون معادلته: $\overrightarrow{r}=\langle 7,2,11\rangle+u\langle -1,-4,2$

نساوي $\overrightarrow{r}$ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيم t,u لمعرفة نقطة التقاطع:

$3+3t,-5+t,16-3t\rangle=\langle 7-u,2-4u,11+2u\rangle -3+3t=7-u\Rightarrow 3t+u=10...-\rangle$
$.....(1)-5+t=2-4u\Rightarrow t+4u=7.....(2)16-3t=11+2u\Rightarrow 3t+2$
$u=5.....(3)(3)-(1):u=-5\Rightarrow t=5$

لكن هذه القيم لا تحقق المعادلة (2)، إذن المستقيمان ليسا متقاطعين ولا متوازيين، فهما متخالفان.

(21) في الشكل الرباعي ABCD الآتي، مد AD على استقامته ليصل إلى النقطة E، حيث: AD=2 DE، إذا كان: DA→=14b→، وكان: DC→=5a→، وكان: AB→=15a→، فأثبت أن B,C,E تقع على استقامة واحدة.



AD=2DE⇒AD→=2DE→⇒DE→=12AD→=12(−14b→)=−7b→EC→=ED→+DC→=−DE→+DC→=7b→+5a→EB→=EA→+AB→=21b→+15a→=3(7→b→+5a→)⇒EB→=3EC

وهذا يعني أن EB→∥EC→

لكن المتجهين ينطلقان من النقطة E نفسها، إذن النقاط الثلاثة B,C,E تقع على استقامة واحدة.